

Лабораторная работа №4

«Визуализация векторного поля»

ЗАДАНИЕ. Пользуясь графической библиотекой, построить линии тока и векторное поле скоростей плоского стационарного безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости, заданного комплексным потенциалом $w(z)$.

Варианты задания представлены в таблице:

№ вар.	Комплексный потенциал $w(z)$	Описание течения
1	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №5 (при $q < 0$) + первое слагаемое из варианта №5	Вихрь, сток и источник в разных точках
2	первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №11	Диполь, вихреисточник и диполь в разных точках
3	$\frac{\gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{\bar{\gamma}}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0), \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \in \mathbb{C}$	Вихреисточник вблизи стенки $y = 0$
4	$\frac{V_\infty}{a-b} \left(az - b\sqrt{z^2 - c^2} \right), c^2 = a^2 - b^2$	Продольное обтекание эллиптического цилиндра с полуосями a и b
5	$\frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{q}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0), q > 0$	Источник вблизи стенки $y = 0$
6	$i \frac{V_\infty}{a-b} \left(bz - a\sqrt{z^2 - c^2} \right), c^2 = a^2 - b^2$	Поперечное обтекание эллиптического цилиндра с полуосями a и b
7	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №5	Вихрь и источник в разных точках
8	$\frac{m}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0), m < 0$	Вихрь вблизи стенки $y = 0$
10	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №11	Вихрь и диполь в разных точках
11	$-c/(z - z_0) - c/(z - \bar{z}_0)$	Диполь вблизи стенки $y = 0$
12	первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №5	Вихреисточник, диполь и источник в разных точках
13	$V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$	Циркуляционное обтекание кругового цилиндра радиусом R с центром в начале координат
14	первое слагаемое из варианта №5 + первое слагаемое из варианта №11	Источник и диполь в разных точках
15	$V_\infty (z - i\sqrt{2pz}), p > 0$	Обтекание параболы равномерным потоком
16	первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №11	Вихреисточник и диполь в разных точках
17	$V_\infty z + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}, a > 0$	Продольное обтекание овального цилиндра
18	первое слагаемое из варианта №5 + первое слагаемое из варианта №5 (при $q < 0$)	Источник и сток разной интенсивности в разных точках

19	$V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z - z_0} + \frac{R^2}{z - \bar{z}_0} \right)$	Обтекание вблизи стенки $y = 0$ кругового цилиндра радиусом R с центром в точке $z = z_0$
20	первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №5 (при $q < 0$) + первое слагаемое из варианта №5	Диполь, сток и источник в разных точках
21	первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №3	Диполь, вихрь и вихреисточник в разных точках
22	первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №11	Диполь, вихрь и диполь в разных точках
23	первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №5 (при $q < 0$) + первое слагаемое из варианта №3	Вихреисточник, сток и вихреисточник в разных точках
24	первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №3	Вихреисточник, диполь и вихреисточник в разных точках
25	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №5	Вихрь, диполь и источник в разных точках
26	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №11 + первое слагаемое из варианта №8	Вихрь, диполь и вихрь в разных точках
27	первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №5 + первое слагаемое из варианта №8	Вихрь, источник и вихрь в разных точках
28	первое слагаемое из варианта №5 + первое слагаемое из варианта №8 + первое слагаемое из варианта №5	Источник, вихрь и источник в разных точках
29	первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №3 + первое слагаемое из варианта №3	Три вихреисточника разной интенсивности в разных точках

УКАЗАНИЯ. Линии тока (ЛТ) – это семейство интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y). \quad (1)$$

Здесь u и v – соответственно продольная и поперечная скорости движения жидкости, связанные с комплексным потенциалом течения соотношением

$$u - iv = \frac{dw}{dz} \equiv w'(z).$$

Таким образом, чтобы найти u необходимо взять вещественную часть производной $w'(z)$, для нахождения v – мнимую часть $w'(z)$ с обратным знаком. При аналитических преобразованиях полезны различные формы представления комплексного числа z :

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi} = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi,$$

где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль, $\varphi = \arctg(y/x)$ – полярный угол. Например, для $w(z) = z$ получаем:

$$w'(z) = 1 = u(x, y) - iv(x, y),$$

т.е. $u = 1$, $v = 0$ – поле скоростей равномерного потока, параллельного оси Ох. Для определения компонент скорости можно также использовать комплексные переменные (пример соответствующих процедур см. ниже).

Для построения ЛТ численно интегрируем (1) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0.$$

Меняя координаты начальной точки (x_0, y_0) , получаем семейство ЛТ.

При написании графического приложения за основу взять нижеприведенную программу, с помощью которой строятся ЛТ и векторы скорости при обтекании кругового цилиндра.

Программа для построения ЛТ и векторов скорости

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def dw(z): # =dw(z)/dz

dw=1-R*R/z**2

return dw

def Ufun(x,y): # x-компонента скорости

U=dw(complex(x,y)).real

U=1-R*R*(x*x-y*y)/(x*x+y*y)**2

if x**2+y**2<R**2: U=0

return U

def Vfun(x,y): # y-компонента скорости

V=-dw(complex(x,y)).imag

V=-2*R*R*(x*y)/(x*x+y*y)**2

if x**2+y**2<R**2: V=0

return V

R=1

w = 3

Y, X = np.mgrid[-w:w:100j, -w:w:100j]

Ufun1=np.vectorize(Ufun)

Vfun1=np.vectorize(Vfun)

U=Ufun1(X,Y)

V=Vfun1(X,Y)

t = np.linspace(0,2*np.pi,100)

x,y = np.cos(t),np.sin(t) # обтекаемый контур

mask = np.zeros(U.shape, dtype=bool) # маска для внутренности тела

mask[X**2+Y**2<=R**2] = True

U = np.ma.array(U, mask=mask)

plt.figure(figsize=(10, 10))

plt.streamplot(X, Y, U, V, density=2)

plt.plot(x,y)

plt.show()

```
plt.figure(figsize=(10, 10))
step=6 # шаг построения векторов
plt.quiver(X[:,::step,::step],Y[:,::step,::step],U[:,::step,::step],V[:,::step,::step]
, scale=20.)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Результаты запуска:



