## Лабораторная работа №1

«Численное решение СЛАУ»

### *ЦЕЛЬ РАБОТЫ*

Изучить методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Разработать соответствующие алгоритмы и процедуры.

### *ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ*

*Метод Гаусса.* СЛАУ (1.1) приводим последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с верхнетреугольной матрицей:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \quad (1.2)$$

Формулы прямого хода:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i, \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n \quad (1.3)$$

$$a_{ml}^{(k+1)} = a_{ml}^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kl}^{(k)}, \quad b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, \quad m = k+1,\ldots,n,\ l = k,\ldots,n,\ k = 0,\ldots,n-1$$

Если какой-либо диагональный элемент матрицы системы мал по величине, то используем схему метода Гаусса с выбором главного элемента (см. ниже текст процедуры «Gauss»).

Обратный ход – из (1.2) рекуррентно находим решение:

$$x_n = b_n^{(n-1)}/a_{nn}^{(n-1)}, \quad x_i = \left(b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right)/a_{ii}^{(i-1)}, \quad i = n-1,\ldots,1 \quad (1.4)$$

Например, решим методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 10x_2 = 12 \end{cases}$$

Прямой ход:

выбираем 1-ю строку расширенной матрицы ведущей (т.к. $a_{11} = 5 \neq 0$), умножаем ее на $-a_{21}/a_{11} = -2/5$ и результат складываем со 2-й строкой:

$2x_1 + 10x_2 + (-2/5)\cdot(5x_1 - 2x_2) = 12 + (-2/5)\cdot 3$,

$(10 + 4/5)x_2 = 12 - 6/5$,

$54/5x_2 = 54/5$, т.е. $a_{22}^{(1)} = 54/5$, $b_2^{(1)} = 54/5$.

Обратный ход:

$x_2 = \frac{(54/5)}{(54/5)} = 1$,

$x_1 = \frac{3+2x_2}{5} = \frac{3+2\cdot 1}{5} = 1.$

```
SUBROUTINE GAUSS (N,A1,b1,X)
! Метод Гаусса для СЛАУ A1*X=b1
DIMENSION
A1(N,N),A(N,N+1),b1(N),X(N),NI(N)
! формируем расширенную матрицу
do j=1,N;A(:,j)=A1(:,j);end do;A(:,N+1)=b1
DO J=1,N
 NI(J)=0
END DO
NJ=N+1
DO IJ=1,N
 B=0.
 DO I=1,N
  IF (NI(I)==0) THEN
   DO J=1,N
    C=ABS(A(I,J))
    D=ABS(B)
    IF (C>D) THEN
     B=A(I,J)
     K=I
     L=J
    END IF
   ENDDO
  END IF
 END DO
 NI(K)=L
 A(K,L)=0.
 D=ABS(B)
 IF (D==0.0) THEN
  PRINT *,'MATRIX IS SINGULAR!'
  STOP
 END IF
 DO I=1,NJ
  C=ABS(A(K,I))
  IF (C/=0.0) THEN
   S=A(K,I)/B
   A(K,I)=S
   DO J=1,N
     A(J,I)=A(J,I)-A(J,L)*S
   END DO
  END IF
 END DO
 DO J=1,N
  A(J,L)=0.
 ENDDO
END DO
DO J=1,N
 K=NI(J)
X(K)=A(J,N+1
END DO
RETURN
END
```

*Метод прогонки*. Метод прогонки предназначен для решения СЛАУ специального вида (с трехдиагональной матрицей)

$$c_j x_{j-1} + d_j x_j + e_j x_{j+1} = f_j. \quad j = 1,...,n \tag{1.5}$$

$$(c_1 = e_n = 0)$$

Прямой ход: рассчитываем прогоночные коэффициенты

$$\alpha_1 = -\frac{e_1}{d_1}, \quad \beta_1 = \frac{f_1}{d_1},$$

$$\alpha_j = -\frac{e_j}{d_j + c_j \alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{f_j - c_j \beta_{j-1}}{d_j + c_j \alpha_{j-1}}, \quad j = 2,...,n \tag{1.6}$$

Обратный ход: находим вектор решения

$$x_n = \beta_n,$$

$$x_{j-1} = \alpha_{j-1} x_j + \beta_{j-1}, \quad j = n, n-1,...,2. \tag{1.7}$$

Прогонка (1.6)-(1.7) корректна и устойчива, если матрица системы (1.5) имеет диагональное преобладание, т.е. $|d_j| \geq |c_j| + |e_j|, \; j = 1,...,n$.

Для рассматриваемого примера
$c_1 = 0,\, d_1 = 0,\, e_1 = -2,\, f_1 = 3,$
$c_2 = 2,\, d_2 = 10,\, e_2 = 0,\, f_2 = 12.$
Прямой ход:
$\alpha_1 = -\frac{e_1}{d_1} = -\frac{(-2)}{5} = \frac{2}{5}, \;\; \beta_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{3}{5},$

$\beta_2 = \frac{f_2 - c_2\beta_1}{d_1 + c_2\alpha_1} = \frac{12 - 2\cdot 3/5}{10 + \ \cdot 2/5} = 1.$

Обратный ход:

$x_2 = \beta_2 \ = 1$ ,

$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = \frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5} = 1.$

```
SUBROUTINE PROGON(N,c,d,e,f,x)
! метод прогонки для СЛАУ
!           d(1)*x(1)+e(1)*x(2)=f(1), i=1
! c(i)x(i-1)+d(i)*x(i)+e(i)*x(i+1)=f(i), 2<=i<=N-1
!          c(N)*x(N-1)+d(N)*x(N)=f(N), i=N
! где c(1)=e(N)=0!
dimension c(N),d(N),e(N),f(N),x(N),alf(N),bet(N)
!!!!!!!! самостоятельно !
END
```

## *ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ*

*Метод простых итераций (МПИ*). Тем или иным способом приведем (1.1) к эквивалентному виду

$$\begin{cases} x_1 = h_1 + g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + ... + g_{1n}x_n \\ x_2 = h_2 + g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + ... + g_{2n}x_n \\ ... \\ x_n = h_n + g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + ... + g_{nn}x_n \end{cases} \tag{1.8}$$

или, в матричной форме, $\vec{x} = G\vec{x} + \vec{h}$ . Для нахождения решения строим итерационную последовательность

$$\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{h}, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{1.9}$$

где $k$ – номер итерации, $\vec{x}^{(0)}$ – произвольный вектор. Сходимость МПИ (1.9) обеспечена, если одна из канонических норм матрицы $G$ меньше единицы, $\|G\| < 1$. В варианте *метода Якоби*, когда $a_{ii} \neq 0$ и $g_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$, $g_{ii} = 0$, $h_i = b_i / a_{ii}$, сходимость обеспечена, если у матрицы исходной системы (1.1) имеется диагональное преобладание:

$$|a_{ii}| \succ \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{l=i+1}^{n} |a_{il}|, \ i=1,2,...,n. \tag{1.10}$$

Критерием окончания итерационного процесса может быть условие $\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\| \le \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1$ – допустимая погрешность приближенного решения $\vec{x} \approx \vec{x}^{(k+1)}$, либо $\left\|A\vec{x}^{(k+1)} - \vec{b}\right\| \le \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2$ – допустимая невязка.

В рассматриваемом примере матрица системы имеет диагональное преобладание. Применение метода Якоби начинаем с преобразования СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = (3 + 2x_2)/5 \\ x_2 = (12 - 2x_1)/10 \end{cases}$$

Тогда формула (1.9) приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(3 + 2x_2^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(12 - 2x_1^{(k)}\right)/10 \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon = 0.1$, $x_1^{(0)} = 0$, $x_1^{(0)} = 0$. Тогда на 1-й итерации:
$x_1^{(1)} = \frac{(3+2\cdot 0)}{5} = \frac{3}{5}$, $x_2^{(1)} = \frac{(12-2\cdot 0)}{10} = \frac{6}{5}$,
$\Delta^{(1)} = \left\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right\| = \max\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|\right\} = 6/5 > \varepsilon$, т.е. сходимость не достигнута, переходим к следующей итерации.
На 2-й итерации: $x_1^{(2)} = \frac{27}{25}$, $x_2^{(2)} = \frac{54}{50}$, $\Delta^{(2)} = 12/25 > \varepsilon$.
На 3-й итерации: $x_1^{(3)} = \frac{288}{300}$, $x_2^{(3)} = \frac{246}{250}$, $\Delta^{(3)} = 36/300 > \varepsilon\ldots$

```
subroutine MPI(N,G,h,Nit,eps,x)
! МПИ для СЛАУ x=G*x+h
dimension G(N,N),h(N),x(N),xold(N)
do k=1,Nit ! Nit - число итераций
 xold=x      ! xold – старое приближение x_(k) в (1.9)
!!!!!!!! самостоятельно !
dx=maxval(abs(x-xold))
 write(*,*)'  it=',k,' dx=',dx,' x=',x
 if(dx<eps) exit
end do
end
```

*Метод Зейделя.* Метод Зейделя представляет собой модификацию МПИ: при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной $x_i$ учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$:

$$x_i^{(k+1)} = h_i + g_{i1}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + g_{i,i}x_i^{(k)} + \ldots + g_{in}x_n^{(k)}, \quad i = 1,\ldots,n,\ k = 0,1,2\ldots \quad (1.11)$$

Для рассматриваемого примера формула (1.11) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(3 + 2x_2^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(12 - 2x_1^{(k+1)}\right)/10 \end{cases}$$

На 1–й итерации: $x_1^{(1)} = \frac{(3+2\cdot 0)}{5} = \frac{3}{5}$, $x_2^{(1)} = \frac{(12-2\cdot 3/5)}{10} = \frac{54}{50}$, $\Delta^{(1)} = \frac{3}{5} > \varepsilon$.

На 2-й итерации: $x_1^{(2)} = \frac{258}{250}$, $x_2^{(2)} = \frac{2484}{2500}$, $\Delta^{(2)} = 108/250 > \varepsilon$. Как видно, скорость сходимости метода Зейделя выше таковой для МПИ.

```
subroutine ZEID(N,G,h,Nit,eps,x)
! метод Зейделя для СЛАУ x=G*x+h
dimension G(N,N),h(N),x(N),xold(N)
!!!!!!! самостоятельно !
end
```

Итерационный процесс (1.11) сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии, если выполняется условие (1.10).

## *ЗАДАНИЕ*

С помощью системы Mathcad найти число обусловленности исходной матрицы системы $cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ и сделать вывод об обусловленности СЛАУ. Проверить для $A$ выполнение условия диагонального преобладания (1.10).

Написать программу и процедуры на языке Фортран, реализующие алгоритмы рассмотренных выше прямых и итерационных методов. В главной программе организовать ввод произвольной системы уравнений, для всех методов выводить на экран результат и невязку решения, для итерационных методов – также информацию о сходимости вычислительного процесса.

Решить исходную СЛАУ (см. таблицу) точными методами Гаусса и прогонки, итерационными методами МПИ и Зейделя при $\varepsilon_1=10^{-6}$. Сравнить результаты с данными, полученными в Mathcad для (1.1). Сравнить скорости сходимости итерационных методов.

## *СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА*

1. Задание
2. Расчет $cond(A)$. Вывод об обусловленности СЛАУ. Проверка условия (1.10) для матрицы $A$.
3. Алгоритмы используемых численных методов.
4. Тексты процедур и программ с результатами их запуска.
5. Решение (1.1) в Mathcad.
6. Сравнения точности методов (считать решение Mathcad точным), скорости сходимости итерационных методов. Выводы.

| Вар. | СЛАУ | Вар. | СЛАУ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} 3{,}21x_1-2{,}25x_2=5{,}06, \\ 7{,}09x_1+11{,}17x_2-2{,}23x_3=4{,}75, \\ 1{,}4x_2-2{,}62x_3=-1{,}05; \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} 0{,}20x_1+0.12x_2=0{,}10, \\ 0{,}12x_1+0{,}71x_2+0{,}15x_3=0{,}26, \\ 0{,}15x_2+0{,}63x_3=0{,}38; \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 1{,}42x_1-1{,}13x_2=6{,}15, \\ 1{,}14x_1-7{,}15x_2+5{,}11x_3=-4{,}16, \\ 0{,}8x_2-1{,}02x_3=-0{,}17; \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 0{,}71x_1+0{,}10x_2=0{,}29, \\ 0{,}10x_1+0{,}34x_2-0{,}04x_3=0{,}32, \\ 0{,}04x_2+0{,}1x_3=-0{,}10; \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 2{,}5x_1-1{,}12x_2=-7{,}5, \\ 0{,}61x_1+0{,}71x_2-0{,}05x_3=0{,}44, \\ 0{,}75x_2+0{,}877x_3=-1{,}16; \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 0{,}34x_1-0{,}04x_2=0{,}33, \\ -0{,}04x_1+0{,}2x_2+0{,}12x_3=-0{,}05, \\ 0{,}12x_2+0{,}71x_3=0{,}28; \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 7{,}09x_1+1{,}17x_2=-4{,}75, \\ 0{,}43x_1-1{,}4x_2-0{,}62x_3=-1{,}05, \\ 1{,}25x_2+2{,}13x_3=5{,}06; \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} 0{,}52x_1-0{,}43x_2=-0{,}17, \\ -0{,}07x_1+1{,}43x_2+0{,}72x_3=0{,}62, \\ 0{,}08x_2-0{,}25x_3=1{,}12; \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 11{,}4x_1-2{,}15x_2=-4{,}16 \\ -0.71x_1+0{,}81x_2-0{,}02x_3=-\,0{,}17 \\ 1{,}13x_2+7{,}05x_3=6{,}15 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} 1{,}17x_1+0{,}53x_2=1{,}15, \\ 0{,}64x_1-1{,}22x_2-0{,}43x_3=0{,}15, \\ 0{,}43x_2-0{,}93x_3=-0{,}48; \end{cases}$ |
| 11 | $\begin{cases} 0{,}61x_1+0{,}41x_2=0{,}44, \\ -1{,}03x_1-2{,}05x_2+0{,}87x_3=-1{,}16, \\ 3{,}12x_2-5{,}03x_3=-7{,}5; \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 1{,}66x_1-1{,}44x_2=1{,}83, \\ 0{,}48x_1-0{,}86x_2+0{,}37x_3=-0{,}84, \\ 0{,}43x_2+0{,}64x_3=0{,}64; \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | $\begin{cases} 3{,}11x_1 - 1{,}66x_2 = -0{,}92, \\ -1{,}65x_1 + 3{,}51x_2 - 0{,}78x_3 = 2{,}57, \\ 0{,}78x_2 - 1{,}87x_3 = 1{,}65; \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 0{,}82x_1 + 0{,}43x_2 = 0{,}48, \\ -0{,}35x_1 + 1{,}12x_2 - 0{,}48x_3 = 0{,}52, \\ 0{,}23x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}44; \end{cases}$ |
| 15 | $\begin{cases} 5x_1 - 3{,}2x_2 = -1{,}4, \\ -1{,}2x_1 + 3{,}4x_2 - 0{,}9x_3 = 2{,}1, \\ 2{,}5x_2 + 4{,}3x_3 = 3{,}5; \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} -0{,}5x_1 - 0{,}3x_2 = 1{,}3, \\ 0{,}9x_1 + 1{,}7x_2 - 0{,}2x_3 = 1{,}6, \\ -2{,}7x_2 + 3{,}7x_3 = -0{,}7; \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} 4{,}2x_1 + 1{,}8x_2 = -1{,}6, \\ -1{,}9x_1 + 5{,}3x_2 + 2{,}1x_3 = -2{,}1, \\ -0{,}3x_2 - 0{,}9x_3 = 0{,}5; \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} -1{,}7x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}8, \\ 2{,}4x_1 - 8{,}4x_2 - 3{,}2x_3 = -0{,}7, \\ 4{,}7x_2 + 11{,}3x_3 = -1{,}2; \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} -5{,}22x_1 + 1{,}7x_2 = 3{,}55, \\ 0{,}95x_1 - 1{,}6x_2 + 0{,}32x_3 = -1{,}05, \\ -2{,}5x_2 + 4{,}76x_3 = 10{,}06; \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 0{,}91x_1 - 0{,}34x_2 = -1{,}23, \\ 1{,}48x_1 + 3{,}31x_2 - 0{,}81x_3 = 0{,}42, \\ -0{,}38x_2 + 0{,}66x_3 = 2{,}45; \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 4{,}77x_1 + 2{,}62x_2 = 3{,}53, \\ 0{,}65x_1 - 7{,}73x_2 + 4{,}16x_3 = -5{,}68, \\ 0{,}88x_2 - 3{,}19x_3 = -1{,}82; \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} 1{,}23x_1 + x_2 = 0{,}58 \\ 2{,}3x_1 - 4{,}5x_2 + 1{,}1x_3 = -3{,}43 \\ x_2 - 3{,}89x_3 = 2{,}19 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$ | | |

## УКАЗАНИЯ

1) Решение СЛАУ в Mathcad. Пусть $A := \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Тогда число обусловленности: $condA := norm1(A) \cdot norm1(A^{-1})$ $condA = 2.667$ <10, т.е. система обусловлена.

Решение через обратную матрицу: $x := A^{-1} \cdot b$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение через встроенную функцию: $x := lsolve(A, b)$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Пример Фортран-программы для решения СЛАУ:

```
program LAB1
parameter (N=2) ! число уравнений
dimension a(N,N),b(N),x(N),G(N,N),h(N)
dimension c(N),d(N),e(N)
a(1,:)=(/5.0,-2.0/) ! матрица СЛАУ
a(2,:)=(/2.0,10.0/)
b    =(/3.0,12.0/) ! вектор правых частей
do i=1,N  ! для итерац. методов
 G(i,:)=-a(i,:)/a(i,i)
 G(i,i)=0
 h(i)=b(i)/a(i,i)
end do
c=(/0.0,2.0/)  ! для прогонки
d=(/5.0,10.0/)
e=(/-2.0,0.0/)
! решение прямыми методами
! 1) метод Гаусса
call GAUSS(N,A,b,x)
print*,' Gauss solution=',x
print*,'  Max. of residuals=',RESID(N,A,x,b)
print 100
! 2) метод прогонки
!call PROGON(N,c,d,e,b,x)
!print*,' Progon solution=',x
!print*,'  Max. of residuals=',RESID(N,A,x,b)
print 100
! решение итерационными методами
Nit=20   ! число итераций
eps=1e-6 ! заданная точность
! 3) МПИ
x=b; call MPI(N,G,h,Nit,eps,x)
print*,' MPI solution=',x
```

```
print*,'  Max. of residuals=',RESID(N,A,x,b)
print 100
! 4) метод Зейделя
!x=b; call ZEID(N,G,h,Nit,eps,x)
!print*,' ZEIDEL solution=',x
!print*,'  Max. of residuals=',RESID(N,A,x,b)
100 format(65('-'))
END

function RESID(N,A,x,b)
! невязка решения СЛАУ A*x=b
dimension A(N,N),x(N),b(N)
RESID=maxval(abs(matmul(A,x)-b)); end
```

Результаты:

```
 Gauss solution=   1.000000       1.000000
  Max. of residuals=  0.0000000E+00
-----------------------------------------------------------------
 Progon solution=   1.000000       1.000000
  Max. of residuals=  0.0000000E+00
-----------------------------------------------------------------
  it=           1 dx=   11.40000     x=   5.400000      0.6000000
  it=           2 dx=   4.560000     x=  0.8400000      0.1200000
  it=           3 dx=  0.9120001     x=  0.6480000       1.032000
  it=           4 dx=  0.3648001     x=   1.012800       1.070400
  it=           5 dx=  7.2959960E-02 x=   1.028160      0.9974400
  it=           6 dx=  2.9183924E-02 x=  0.9989761      0.9943681
  it=           7 dx=  5.8367252E-03 x=  0.9977472       1.000205
  it=           8 dx=  2.3346543E-03 x=   1.000082       1.000451
  it=           9 dx=  4.6694279E-04 x=   1.000180      0.9999837
  it=          10 dx=  1.8674135E-04 x=  0.9999935      0.9999640
  it=          11 dx=  3.7312508E-05 x=  0.9999856       1.000001
  it=          12 dx=  1.4960766E-05 x=   1.000001       1.000003
  it=          13 dx=  2.9206276E-06 x=   1.000001      0.9999999
  it=          14 dx=  1.1920929E-06 x=   1.000000      0.9999998
  it=          15 dx=  1.7881393E-07 x=  0.9999999       1.000000
 MPI solution=  0.9999999       1.000000
  Max. of residuals=  4.7683716E-07
-----------------------------------------------------------------
  it=           1 dx=   11.88000     x=   5.400000      0.1200000
  it=           2 dx=   4.752000     x=  0.6480000       1.070400
  it=           3 dx=  0.3801600     x=   1.028160      0.9943681
  it=           4 dx=  3.0412734E-02 x=  0.9977472       1.000451
  it=           5 dx=  2.4330020E-03 x=   1.000180      0.9999640
  it=           6 dx=  1.9460917E-04 x=  0.9999856       1.000003
  it=           7 dx=  1.5556812E-05 x=   1.000001      0.9999998
  it=           8 dx=  1.2516975E-06 x=  0.9999999       1.000000
  it=           9 dx=  5.9604645E-08 x=   1.000000       1.000000
 ZEIDEL solution=   1.000000       1.000000
  Max. of residuals=  0.0000000E+00
```