ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ

Для численного решения задачи Коши для ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = y_0 \quad (1)$$

широко применяются одношаговые методы.

Приближенное решение задачи (1) ищется в дискретных точках $x_1 = a$, $x_2 = x_1 + h$, $\dots x_N = b$ (h – шаг интегрирования) в виде набора значений y_1, y_2, …, y_N, причем в общем случае

$$y_{i+1} = F(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}),$$

т.е. при построении решения задействуется информация с одного предыдущего шага.

Простейшими примерами являются методы

Эйлера явный

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{2}$$

Эйлера неявный

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \tag{3}$$

метод трапеций

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \tag{4}$$

метод Эйлера с пересчетом

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], \tag{5}$$

Методы (2) и (3) имеют 1-й, а методы (4) и (5) – 2-й порядок точности.

Для построения более точных приближенных решений используется семейство методов Рунге-Кутта. Обозначим

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

и приведем формулы явных методов:

2-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + k_2, \tag{6}$$

3-го порядка

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i - k_1 + 2k_2), \quad y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \tag{7}$$

4-го порядка

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3),$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \qquad (8).$$

Задание. С помощью одношаговых методов решить задачу Коши (1). Исследовать зависимость абсолютной погрешности численного решения в конечной точке $\delta = |y_N - y_e(b)|$ от шага сетки $h = (b-a)/N$ при числе шагов $N = 10, 20, 40, 60, 80$.

Варианты заданий

№ Вар.	Правая часть $f(x,y)$	Отрезок $[a,b]$	Начальные данные y_0	Точное решение $y_e(x)$	Численный метод
1	$-(x^2+1)\sqrt{1-y^2}$	$[0, \pi]$	0.95	*самост.*	(4), (8)
2	$Sin^2(x) - y^2 + Cos(x)$	$[0, \pi/2]$	0	$Sin(x)$	(5), (7)
3	$-xy/(1-x^2)^{1/2}$	[0,0.5]	e	*самост.*	(5), (8)
4	$y/x - 4/x^2$	[1,3]	0	$2/x$	(3), (6)
5	$1/cosx - ysinx/cosx$	$[0, \pi]$	0	*самост.*	(3), (7)
6	$(x+1)(cos(x) - y) - sin(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	0	$Cos(x)$	(5), (7)
7	$y/x - 8/x^2$	[1,3]	4	$4/x$	(3), (7)
8	$x+y/x$	[1,2]	1	*самост.*	(5), (6)
9	$cos^2(x) - y^2 - sin(x)$	$[0, \pi/2]$	1	$Cos(x)$	(5), (6)
10	$3x^2 - y^2 + x^6$	[0,2]	0	x^3	(3), (8)
11	$-xy/(1+x^2)$	[0,1]	2	*самост.*	(4), (6)
12	$-ycosx + cosxsinx$	[0,2]	-1	*самост.*	(3), (5)
13	$(x+1)(sin(x) - y) + cos(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	1	$sin(x)$	(5), (8)
14	$y/x + x\sqrt{x^2-y^2}$	$[\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}]$	$\sqrt{\pi}$	*самост.*	(4), (8)
15	$-10y\sqrt{1-y^2}$	[0,1]	1	*самост.*	(3), (7)
16	$0.5(sin^2(x) - y^2) + cos(x)$	$[0,\pi/2]$	0	$sin(x)$	(4), (8)
17	$cos^2(x) - y^2/4 - 2sin(x)$	$[0, \pi/2]$	2	$2cos(x)$	(4), (6)
18	$(x^2+0.6)(3cos(x) - 3y) - sin(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	0	$cos(x)$	(5), (7)
19	$2x - y + x^2$	[0,2]	0	x^2	(3), (6)
20	$0.5(cos^2(x)-y^2)-sin(x)$	$[0, \pi/2]$	1	$Cos(x)$	(5), (8)
21	$3x - 0.5xy + x^3$	[0,2]	-2	$2(x^2-1)$	(3), (8)
22	$x[2 + x^2 sin(x^2) - y sin(y)]$	[-2,0]	4	x^2	(4), (6)
23	$3(x-2)^2 + x(x-2)^2 - xy$	[2,4]	0	$(x-2)^3$	(4), (7)

Отчет должен содержать:

1. Постановку задачи.
2. Вывод и/или проверку правильности точного решения $y_e(x)$.
3. Наименование и формулы численных методов.
4. Текст программы на языке Фортран.
5. Для обоих методов распечатки результатов при $N=10$, графики точного и приближенных решений при $N=10$ и 20, графики зависимостей $\delta=\delta(h)$ при $N=10, 20, \ldots$.
6. Выводы.

Указания. 1) В качестве примера рассмотрим интегрирование явным методом Эйлера (2) задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sin(2x) - y\cos(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y_0,$$

имеющей точное решение

$$y_e(x) = \sin x - 1 + (y_0 + 1)e^{-\sin x}.$$

Текст Фортран-программы и результаты ее запуска:

```
program Koshi
parameter(N=10)
external F
a=0; b=1     ! отрезок
h=(b-a)/N    ! шаг
x0=a; y0=1.  ! начальные данные
Y=y0; x=x0
print '(5x,"x",8x,"Y",10x,"Ye",7x,"|Ye-Y|")'
do i=0,N
 Ye=sin(x)-1.+(y0+1.)*exp(-sin(x)) ! точ.реш.
 print '(1x,f6.3,3e12.5)',x,Y,Ye,abs(Ye-Y)
 call Euler1(x,Y,h,F,Y)
 x=x+h
end do
end

function F(x,y) ! правая часть
F=sin(2.*x)/2.-y*cos(x)
end

subroutine Euler1(x,y,h,F,y1) !явн.метод Эйлера
r1=h*F(x,y)
y1=y+r1
end
```

x	Y	Ye	|Ye-Y|
0.000	0.10000E+01	0.10000E+01	0.00000E+00
0.100	0.90000E+00	0.90981E+00	0.98098E-02
0.200	0.82038E+00	0.83831E+00	0.17928E-01
0.300	0.75945E+00	0.78381E+00	0.24358E-01
0.400	0.71513E+00	0.74432E+00	0.29190E-01
0.500	0.68513E+00	0.71770E+00	0.32574E-01
0.600	0.66708E+00	0.70177E+00	0.34692E-01
0.700	0.65862E+00	0.69436E+00	0.35741E-01
0.800	0.65752E+00	0.69344E+00	0.35916E-01
0.900	0.66169E+00	0.69709E+00	0.35404E-01
1.000	0.66925E+00	0.70362E+00	0.34372E-01