Лабораторная работа №7

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Введение. Начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}x^\nu\frac{\partial u}{\partial x} + f, \quad x_{\min} < x < x_{\max}, \quad 0 < t \le t_{\max} \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u(x_{\min}, t) = u_L(t), \quad u(x_{\max}, t) = u_R(t). \quad (3)$$

описывает нестационарное поле температуры плоской ($\nu = 0$), цилиндрической ($\nu = 1$) или сферической ($\nu = 2$) стенки при наличии в ней источников тепла и идеальном тепловом контакте с окружающей средой. Если на границе стенки задан тепловой поток, то ГУ на ней принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{\min}, t) = q_L(t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ma}}\ , t) = q_R(t) \quad (4)$$

Для решения (1)-(4) используем метод конечных разностей:
- вводим равномерные расчетные сетки по времени и пространству с шагами $\tau = t_{\max} / N_t$ и $h = (x_{\max} - x_{\min})/(N_x - 1)$ соответственно (N_t – количество шагов по времени, N_x – количество узлов по пространству),
- в узлах сетки аппроксимируем частные производные, входящие в (1)-(4), с помощью конечно-разностной схемы,
- решаем полученную дискретную задачу.

Двухслойная явная схема для (1)-(4) при $\nu = 0$ имеет вид:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = a\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n \quad (5)$$

Уравнения (5) записаны для внутренних узлов, т.е. для $2 \le i \le N_x - 1$. Для граничных узлов из (3) получаем

$$v_1^{n+1} = u_L(t^n), \quad v_{Nx}^{n+1} = u_R(t^n). \quad (6)$$

В случае ГУ (4)

$$\frac{-v_3^{n+1} + 4v_2^{n+1} - 3v_1^{n+1}}{2h} = q_L(t^n) \quad \text{или} \quad \frac{3v_{N_x}^{n+1} - 4v_{N_x-1}^{n+1} + v_{N_x-2}^{n+1}}{2h} = q_L(t^n). \quad (7)$$

Начальные данные (2) определяют решение на временном слое $n = 0$:

$$v_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x. \quad (8)$$

Из (5)-(7) решение на новом слое v_i^{n+1} выражается явным образом.

Задание. Экспериментально определить условия устойчивости и практический порядок точности явной разностной схемы. Исследовать сеточную сходимость численного решения. Варианты исходных данных приведены в таблице.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν	0	1	2	0	1	2	0	1	2
стенка с ГУ (4)	левая	правая	левая	правая	левая	правая	левая	правая	Левая
Вар.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ν	0	1	2	0	1	2	0	1	2
стенка с ГУ (4)	правая	левая	правая	левая	правая	левая	правая	левая	правая
Вар.	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ν	0	1	2	0	1	2	0	1	2
стенка с ГУ (4)	левая	правая	левая	правая	левая	правая	левая	правая	Левая

Указания. 1)Задайте $a = const > 0$, $0 < x_{\min} < x_{\max}$. Заранее задайте точное решение $u_{ex}(x,t)$. Рекомендуемая формула:

$$u_{\text{ex}}(x,t) = g_1(t)g_2(x),$$

где $g_1(t)$ – немонотонная функция, $g_2(x)$ – многочлен. Конечное время $t_{\max}$ задайте, исходя из поведения $u_{ex}(x,t)$. Источниковый член $f(x,t)$ определите из уравнения (1) при подстановке в него $u = u_{ex}$. Функцию $\varphi(x)$ найдите из точного решения при $t = 0$. Функции $u_L(t)$ или $u_R(t)$ и $q_L(t)$ или $q_R(t)$ определите из граничных условий (3)-(4) при подстановке в них $u = u_{\text{ex}}$.

2) Запрограммируйте расчет v_i^{n+1} по явной схеме, используя диффузионное число Куранта $\gamma = a\tau/h^2$ и дополнив в соответствующем месте текст программы «Teplo1». Проведите отладку: вначале – на тестовой задаче с $\nu = 0$, $a = 2$ м^2/с, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 8$ м, $t_{\max} = 0.03$ с и точным решением $u_{\text{ex}}(x,t) = e^{-18\pi^2 t}\sin 3\pi x$, затем – на вашей задаче.

```
program Teplo1
! Решение начально-краевой задачи для у-ния теплопроводности
!  ut=a*uxx+F(x,t), 0<x<xmax, 0<t<tmax
!  u(x,0)=PHI(x)
!  u(0,t)=UL(t)
!  u(xmax,t)=UP(t)
! методом конечных разностей
use GrafLib
parameter(Nx=201) ! число узлов по пр-ву
dimension x(Nx),v(Nx),v1(Nx),u(Nx)
```

```
common /b1/ pi
pi=4*atan(1.)
a=2
xmin=0
xmax=8.
h=(xmax-xmin)/(Nx-1)   ! шаг по пространству
tmax=0.03   ! максимальное время
gam=0.5    ! диффузионное число Куранта
tau=gam*h**2/a   ! шаг по времени
print*,' h=',h,' tau=',tau
Nt=tmax/tau+0.5 ! число шагов по времени
nprint=Nt/10; if(nprint==0)nprint=1   ! частота вывода
t=0  ! начальные данные
do i=1,Nx
 x(i)=(i-1)*h
 u(i)=Uex(x(i),t)
 v(i)=PHI(x(i))
end do
xgmin=0; xgmax=dble(xmax)
ygmin=minval(u); ygmax=maxval(u)
call GrafInit(1,'Temperature evolution')
ii=clickmenuqq(QWIN$TILE)
call Axis('x','u,v',0,1d-2)
call Grid(5,4,0)
write(*,'(a4,a8,a11)')'n','t','del'
delmax=0.
do n=0,Nt  ! цикл по времени
 del=sqrt(h*sum((u-v)*(u-v))) ! погрешность на предыдущем слое
 if(del>delmax)delmax=del
 if(mod(n,nprint)==0) then ! вывод данных
  write(*,'(i6,2(1pe11.4))')n,t,del
  call Plot(dble(x),dble(u),1,0,1)
  call Plot(dble(x),dble(v),2,0,1)
 end if
! решение по явной схеме
v1=v
do i=2,Nx-1 ! внутренние узлы
  v(i)=….!!!
 end do
v(1)=   !!!   ! левая граница
v(Nx)=…!!! правая граница
 t=t+tau   ! приращение времени
 do i=1,Nx
  u(i)=Uex(x(i),t)
 end do
end do
write(*,*)' delmax=',delmax ! максимальная погрешность
pause
end

function PHI(x) ! начальные данные
common /b1/ pi
phi=sin(3*pi*x)
end

function UL(t) ! температура левой границы
UL=0
End

function UP(t) ! температура правой границы
UP=0.
End

function FF(x,t) ! источник тепла
FF=0
End

function Uex(x,t) ! точное решение
common /b1/ pi
Uex=exp(-18*pi**2*t)*sin(3*pi*x)
```

end

3) Убедитесь в достаточности выполнения условия устойчивости явной схемы (4) $\gamma = \tau a / h^2 \le 1/2$: выбирая $\gamma = 1/2$ и $1/2+\varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-3}...10^{-1}$), контролируйте изменение максимальной погрешности $\delta_{\max} = \max\limits_{0 \le n \le N} \delta_n$, где

$$\delta_n = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N_x} \left[v_i^n - u_{\text{ex}}(x_i, t_n) \right]^2} .$$

В случае неустойчивости наблюдается резкий (на несколько порядков) рост δ_{max}. На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчетов тестовой задачи по схеме (4) соответственно при $\gamma = 0.5$ ($\delta_{\max} = 1.789 \cdot 10^{-2}$) и $\gamma = 0.55$ ($\delta_{\max} = 2.3936$).

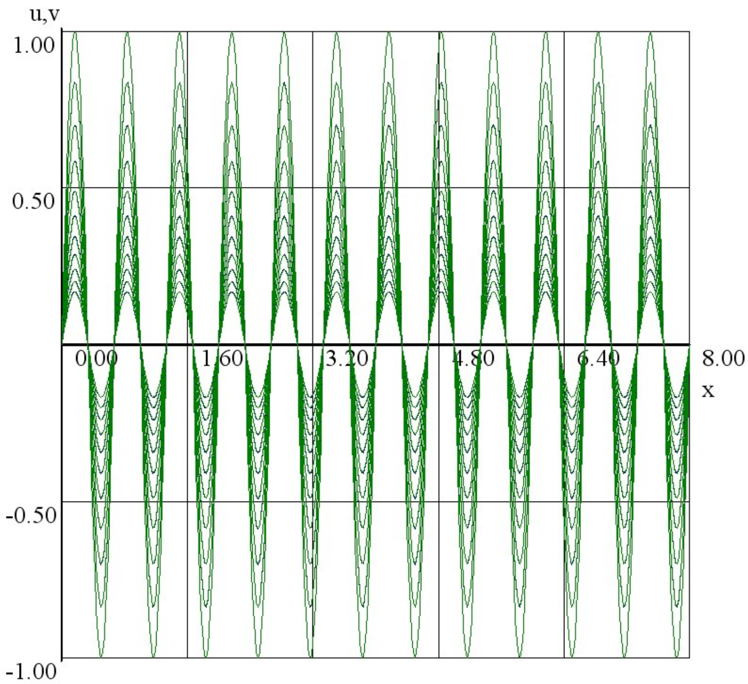

Рисунок 1 – Пример устойчивого расчета.

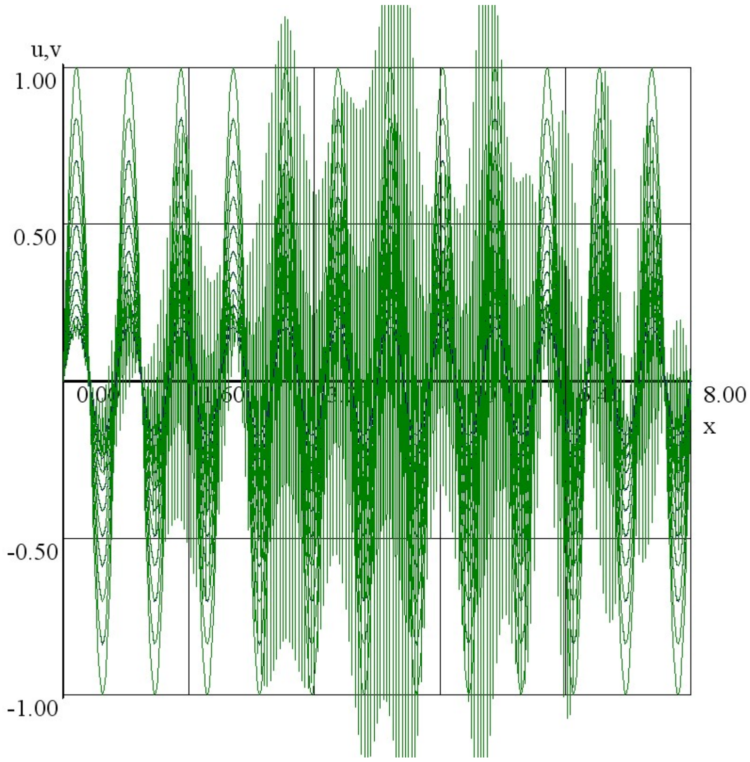

Рисунок 2 – Пример неустойчивого расчета.

4) Для значения числа Куранта $\gamma = 0.5$ постройте зависимость $\delta_{\max}(h)$ при числе узлов $N_x = 51$, 101, 201, 401 и определите практический порядок точности схемы (4).

5) Убедитесь в сеточной сходимости численного решения. Для этого постройте на одной диаграмме графики решения в один и тот же момент времени при числе узлов $N_x = 51$, 101, 201, 401. Если с уменьшением шага по пространству отличия между соответствующими графикам уменьшаются, то сходимость по сетке имеет место быть.