

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ

Для численного решения задачи Коши для ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = y_0 \quad (1)$$

широко применяются одношаговые методы.

Приближенное решение задачи (1) ищется в дискретных точках $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h$, ... (h – шаг интегрирования) в виде набора значений $y_1, y_2, \dots$, причем в общем случае

$$y_{i+1} = F(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}),$$

т.е. при построении решения задействуется информация с одного предыдущего шага.

Простейшими примерами являются методы Эйлера явный

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (2)$$

Эйлера неявный

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad (3)$$

метод трапеций

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad (4)$$

метод Эйлера с пересчетом

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], \quad (5)$$

Методы (2) и (3) имеют 1-й, а методы (4) и (5) – 2-й порядок точности.

Для построения более точных приближенных решений используется семейство методов Рунге-Кутты. Обозначим

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

и приведем формулы явных методов:

2-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + k_2, \quad (6)$$

3-го порядка

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i - k_1 + 2k_2), \quad y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \quad (7)$$

4-го порядка

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \quad (8)$$

Задание

С помощью одношаговых методов решить задачу Коши (1). Исследовать зависимость абсолютной погрешности численного решения в конечной точке $\delta = |y_N - y_e(b)|$ от шага сетки $h = (b - a) / N$ при числе шагов $N = 10, 20, \dots$

Провести сравнение численного решения с результатами, полученными с помощью функции *solve_ivp* модуля *scipy.integrate*.

Варианты заданий

№ Вар.	Правая часть $f(x, y)$	Отрезок $[a, b]$	Начальные данные y_0	Точное решение $y_e(x)$	Численный метод
1	$-(x^2 + 1)\sqrt{1 - y^2}$	$[0, \pi]$	0.95	<i>самост.</i>	(4), (8)
2	$\sin^2(x) - y^2 + \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	0	$\sin(x)$	(5), (7)
3	$-xy/(1-x^2)^{1/2}$	$[0, 0.5]$	e	<i>самост.</i>	(5), (8)
4	$y/x - 4/x^2$	$[1, 3]$	0	$2/x$	(3), (6)
5	$1/\cos x - y \sin x / \cos x$	$[0, \pi]$	0	<i>самост.</i>	(3), (7)
6	$(x + 1)(\cos(x) - y) - \sin(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	0	$\cos(x)$	(5), (7)
7	$x [2 + x^2 \sin(x^2) - y \sin(y)]$	$[-2, 0]$	4	x^2	(3), (7)
8	$x + y/x$	$[1, 2]$	1	<i>самост.</i>	(5), (6)
9	$\cos^2(x) - y^2 - \sin(x)$	$[0, \pi/2]$	1	$\cos(x)$	(5), (6)
10	$3x^2 - y^2 + x^6$	$[0, 2]$	0	x^3	(3), (8)
11	$-xy/(1 + x^2)$	$[0, 1]$	2	<i>самост.</i>	(4), (6)
12	$-y \cos x + \cos x \sin x$	$[0, 2]$	-1	<i>самост.</i>	(3), (5)
13	$(x+1)(\sin(x) - y) + \cos(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	1	$\sin(x)$	(5), (8)
14	$y/x + x\sqrt{x^2 - y^2}$	$[\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}]$	$\sqrt{\pi}$	<i>самост.</i>	(4), (8)
15	$-10y\sqrt{1 - y^2}$	$[0, 1]$	1	<i>самост.</i>	(3), (7)
16	$0.5(\sin^2(x) - y^2) + \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	0	$\sin(x)$	(4), (8)
17	$\cos^2(x) - y^2/4 - 2 \sin(x)$	$[0, \pi/2]$	2	$2\cos(x)$	(4), (6)
18	$3(x-2)^2 + x(x-2)^2 - xy$	$[2, 4]$		$(x-2)^3$	(5), (7)
19	$2x - y + x^2$	$[0, 2]$	0	x^2	(3), (6)
20	$0.5(\cos^2(x) - y^2) - \sin(x)$	$[0, \pi/2]$	1	$\cos(x)$	(5), (8)
21	$3x - 0.5xy + x^3$	$[0, 2]$	-2	$2(x^2 - 1)$	(3), (8)
22	$(x^2 + 0.6)(3\cos(x) - 3y) - \sin(x)$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	0	$\cos(x)$	(4), (6)

Отчет должен содержать:

1. Постановку задачи.
2. Вывод и/или проверку правильности точного решения $y_e(x)$.
3. Наименование и формулы численных методов.
4. Текст программы.
5. Для обоих методов распечатки результатов при $N = 10$, графики точного и приближенных (в том числе по *solve_ivp*) решений при $N = 10$, графики погрешностей приближенных решений при $N = 10$, графики зависимостей

$\delta = \delta(h)$ при $N = 10, 20, \dots$ с определением практических порядков точности методов.

6. Выводы (в том числе сравнение численным методов по точности, сравнение практических порядков точности методов с теоретическими).

Указания

1) При реализации неявных методов (3) и (4) нахождение нового значения решения y_{i+1} осуществляется (аналитическим) решением нелинейного уравнения.

2) В качестве примера рассмотрим интегрирование явным методом Эйлера (2) задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sin(2x) - y \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y_0,$$

имеющей точное решение

$$y_e(x) = \sin x - 1 + (y_0 + 1)e^{-\sin x}.$$

Текст программы и результаты ее запуска:

```
from math import sin,cos,exp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

z0=[y0]
x_eval = np.linspace(a,b,N+1)
sol = solve_ivp(f,[a,b],z0,t_eval=x_eval)
Ys = sol.y[0]

def f(x, y): return sin(2*x)/2-y*cos(x)
def Yex(x): return sin(x)-1+(y0+1)*exp(-sin(x))
def Euler1(x,y,h,f):
    r1=h*f(x,y)
    y1=y+r1
    return y1

plt.plot(x,Y,'o',label='Эйлер')
plt.plot(x,Ys,label='scipy')
plt.plot(x,Ye,label='точное')
plt.legend(loc=4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.show()

a,b = 0,1
N = 10
h = (b-a)/N
x0,y0 = a,0

plt.plot(x,np.abs(np.array(Y)-
np.array(Ye)),label='погр.(Эйлер)')
plt.plot(x,np.abs(Ys-
np.array(Ye)),label='погр.(scipy)')
plt.legend(loc=1)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.show()

x,Y,Ye = ([0]*(N+1) for k in range(3))
x[0] = x0
Y[0],Ye[0] = y0,y0
print(' x      Y      Ye      |Ye-Y|')
print(f'{x[0]:.3f}      {Y[0]:.5e}      {Ye[0]:.5e}
{abs(Ye[0]-Y[0]):.5e}')
for i in range(1,N+1):
    Y[i] = Euler1(x[i-1],Y[i-1],h,f)
    x[i] = x[i-1]+h
    Ye[i] = Yex(x[i])
    print(f'{x[i]:.3f}      {Y[i]:.5e}      {Ye[i]:.5e}
{abs(Ye[i]-Y[i]):.5e}')
```

