

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ

Задание. Методом конечных разностей решить краевую задачу для поля температуры плоского слоя

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + S(x) &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u &= u_{\text{л}} \quad \text{при} \quad x = 0, \\ u &= u_{\text{п}} \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x – координата, S – источник тепла, $u_{\text{л}}$ и $u_{\text{п}}$ – граничные температуры. Определить потоки тепла на границах $q = -\frac{du}{dn}\bigg|_{x=0,1}$, где n – внешняя нормаль.

Варианты заданий приведены в таблице.

№ варианта	Точное решение	№ варианта	Точное решение
1	$\frac{1}{x+1} + x$	2	$\frac{1}{x^2+1} - x$
3	$\frac{1}{x+1} + x^2$	4	$\frac{1}{x^2+1} - x^2$
5	$\frac{x}{x+1} + x$	6	$\frac{x^2}{x+1} - x$
7	$\frac{x}{x+1} + x^2$	8	$\frac{x}{x^2+1} - x$
9	$\frac{x^2}{x+1} + x^2$	10	$\frac{x^2}{x^2+1} - x$
11	$\frac{x}{x+1} + x^3$	12	$\frac{x^3}{x+1} - x$
13	$\frac{x}{x^3+1} + x$	14	$\frac{x}{x+1} - x^3$
15	$\frac{x^3}{x+1} + x^2$	16	$\frac{x^2}{x^3+1} - x$
17	$\frac{x^2}{x+1} + x^3$	18	$\frac{x^2}{x^2+1} - x^2$
19	$\frac{x^3}{x^3+1} + x$	20	$\frac{x^3}{x^2+1} - x$

Указания. 1) Выражения для источника тепла, граничных температур и потоков тепла находим с использованием точного решения $u_e(x)$.

2) Задача (1) является частным случаем линейной краевой задачи для ОДУ 2-го порядка

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_{\text{л}}, \quad u(b) = u_{\text{п}}. \quad (2)$$

Введем на отрезке $[a, b]$ разностную сетку $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, где $x_i = a + (i-1)h$, $i=1, \dots, N$, $h=(b-a)/(N-1)$. С помощью формул конечных разностей заменим дифференциальную задачу (2) разностной:

$$u_1 = u_{\text{л}},$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q(x)u_i = r(x_i), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$u_N = u_{\text{п}}.$$

Собирая коэффициенты при u_{i-1} , u_i , u_{i+1} , получаем для вектора неизвестных $(u_1, \dots, u_N)$ СЛАУ с трехдиагональной матрицей, которую решаем методом прогонки. Для определения граничных потоков тепла q_1 и q_N используем аппроксимацию производной по несимметричным формулам 2-го порядка:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_1 \approx \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h}, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_N \approx \frac{u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N}{2h}.$$

3) Напишите программу, реализующую метод конечных разностей.

4) Используя программу, проведите расчеты для $N = 11, 21, 41$ и 81 . Полученные данные занесите в табл. 1.

Таблица 1

N	$\delta_{\max} = \max u_e(x_i) - u_i $	$ q_{\text{л}} - q_1 $	$ q_{\text{п}} - q_N $

Анализируя зависимость $\delta_{\max}(h) \approx Ch^p$, сделайте заключение о практическом порядке точности метода p . Постройте графики точного и приближенного решения для $N=11$.