

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. Соболева

На правах рукописи
УДК 519.21

АРКАШОВ Николай Сергеевич

**ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И
ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ
ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ
СРЕДНИХ**

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей и
математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2005

Работа выполнена в Институте математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Игорь Семенович Борисов

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н., профессор Александр Иванович Саханенко,

к.ф.-м.н., доцент Артем Павлович Ковалевский

Ведущая организация:

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова

Защита состоится 15 июня 2005 г. в 16 часов на заседании
диссертационного совета Д 003.015.01 в Институте математи-
ки им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новоси-
бирск, пр. акад. Коптюга, 4, к.417.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «14» мая 2005 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 003.015.01 при Институте

математики СО РАН

д. ф.-м. н.



Ю. В. Шамардин

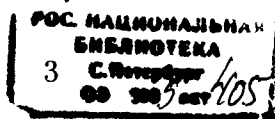
Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию точности гауссовской аппроксимации, а также изучению логарифмической асимптотики вероятностей больших уклонений нормированного процесса частных сумм стационарно связанных наблюдений, имеющих структуру так называемых скользящих средних последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, в случае притяжения этого процесса к фрактальному броуновскому движению с произвольным параметром Хёрста. Отметим, что форма зависимости упомянутых скользящих средних, вообще говоря, не укладывается в общепринятые схемы. В частности, классическое сильное (или равномерно сильное) перемешивание здесь уже может не иметь места. Стало быть, в данном случае далеко не всегда могут быть использованы классические результаты по асимптотическому анализу сумм стационарно связанных случайных величин.

Интерес к подобным предельным теоремам наблюдается уже давно (см., например, [1], [2]) и объясняется ярко выраженной прикладной направленностью рассматриваемой в диссертации модели. Например, подобные случайные процессы частных сумм возникают в финансовой математике и теории страхования.

Касательно больших уклонений отметим, что наибольший прогресс в этой области достигнут для процессов с независимыми приращениями (см. [3], [7], [8]), гауссовских процессов (см. [4]–[6]) и марковских процессов (см. [7], [9]). Однако процесс частных сумм скользящих средних в общем случае не принадлежит ни одному из указанных классов.

Цель работы. Основной целью работы является доказательство принципа больших уклонений и получение оценок скорости сходимости в принципах инвариантности в форме



Штрассена и Донскера для нормированных процессов частных сумм скользящих средних.

Научная новизна. В диссертации впервые доказан принцип больших уклонений для процессов частных сумм скользящих средних. Кроме того, ослаблены известные моментные ограничения (см. [2]) для слабой сходимости введенного процесса частных сумм к фрактальному броуновскому движению (принцип инвариантности в форме Донскера), а также получены оценки скорости сходимости в принципах инвариантности в форме Штрассена и Донскера для более широкого, чем в [10] и [11], класса скользящих средних.

Апробация работы. Все результаты докладывались на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на двух международных конференциях: “XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models” (г. Юрмала, 2004 г.) и “Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике” (г. Санкт-Петербург, 2005 г.).

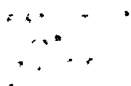
Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [16] – [18].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объем диссертации – 73 страницы.

Содержание работы

Первая глава диссертации посвящена вопросам гауссовской аппроксимации упомянутых выше процессов частных сумм.

Пусть $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ – независимые одинаково распределен-



ные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Пусть $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$0 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^2 < \infty. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение последовательность случайных величин $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$, определенных по формуле

$$X_j := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} \xi_k. \quad (2)$$

Они называются *скользящими средними* исходной последовательности $\{\xi_k\}$. Легко видеть, что $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$ – стационарная в узком смысле последовательность случайных величин. Отметим, что условие (1) гарантирует сходимость с вероятностью 1 ряда в правой части (2).

Определим процесс частных сумм скользящих средних:

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Обозначим

$$A_m := a_0 + \dots + a_m, \quad m \geq 0, \quad A_{-1} := 0,$$

$$A_m := -(a_{m+1} + \dots + a_{-1}), \quad m < -1,$$

и заметим, что

$$S_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} A(n, i) \xi_i,$$

где $A(n, i) := A_{n-i} - A_{-i}$.

Напомним, что фрактальным (или дробным) броуновским движением с параметром Хёрста $H \in (0, 1)$ называется центрированный гауссовский случайный процесс $B_H^0 \equiv B_H^0(t) \in C[0, 1]$ с ковариационной функцией

$$R(t, s) := \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Например, $B_{1/2}^0(t)$ представляет собой стандартный винеровский процесс, поскольку при $H = 1/2$ имеет место равенство $R(t, s) = \min(t, s)$.

Одним из основных результатов первой главы диссертации являются достаточные условия сходимости нормированного процесса частных сумм скользящих средних к фрактальному броуновскому движению с более слабыми, чем в [2], моментными ограничениями на исходную последовательность случайных величин (см. [16]). Обозначим

$$S_n(t) := S_{[nt]} / \sqrt{\mathbf{D}S_n}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть функция

$$h(n) := \frac{1}{n^{2H}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} A^2(n, i) \equiv \frac{1}{n^{2H}} \mathbf{D}S_n \quad (3)$$

медленно меняется при $n \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, выполнено одно из двух условий:

(i) $E|\xi_0|^\alpha < \infty$, где $\alpha \geq 2$ и $\alpha H > 1$.

(ii) $H \leq 1/2$, $E|\xi_0|^{1/H} < \infty$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} h(n) > 0$ и выполняются следующие два условия:

$$a) \quad \sum_{|i| \leq n} |a_i| = O(\sqrt{h(n)}) \quad (4)$$

при $n \rightarrow \infty$;

$$b) \quad |a_{-i}| + |a_i| = O(\sqrt{h(i)} i^{H-3/2}) \quad (5)$$

при $i \rightarrow \infty$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место C -сходимость в $D[0, 1]$ распределений случайных процессов S_n к распределению гауссовского процесса B_H^0 .

Замечание 1. В случае $H = 1/2$ условие $a_i = o(|i|^{-1})$ при $|i| \rightarrow \infty$ в п. (ii) теоремы 1 с необходимостью выполняется, если коэффициенты $\{a_i\}$ абсолютно суммируемы и представляют собой правильно меняющуюся функцию целочисленного аргумента i на бесконечностях обоих знаков.

Замечание 2. Нетрудно показать, что при условии абсолютной суммируемости последовательности $\{a_k\}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{D}S_n = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \right)^2 =: \sigma_0^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что условие (3) и указанное условие абсолютной суммируемости влекут за собой неравенство $H \leq 1/2$. При этом если $\sigma_0^2 > 0$, то условие (3) выполнено при $H = 1/2$. Следовательно, в условиях пункта (i) теоремы 1 для абсолютно суммируемых коэффициентов $\{a_i\}$ имеет место указанная C -сходимость к винеровскому процессу, если только $\alpha > 2$ и $\sigma_0^2 > 0$. Но в силу пункта (ii) теоремы 1, абсолютная суммируемость и оценка $a_i = O(|i|^{-1})$ при $|i| \rightarrow \infty$, а также условие $\sigma_0^2 > 0$ приводят к указанной C -сходимости при существовании лишь второго момента случайной величины ξ_0 . Например, последнее применимо к простейшему частному случаю, когда $a_i = 0$ при всех $i < 0$ и $i > t$, где t — фиксированное натуральное число (в этом случае $\{X_j\}$ являются t -зависимыми случайными величинами), и $\sum_{i=0}^m a_i \neq 0$.

Замечание 3. При существовании второго момента ξ_0 в [12] (стр. 255 и 264) и [13] (стр. 146) приведены некоторые достаточные условия, обеспечивающие C -сходимость S_n к винеровскому процессу. В частности, в [12] содержится следующее дополнительное ограничение на последовательность коэффициентов $\{a_k\}$:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{|i|>l} a_i^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (6)$$

Очевидно, отсюда следует абсолютная суммируемость $\{a_i\}$, упомянутая в замечании 2. Далее, в [13] приведено следующее ослабление (6):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i>l} a_i \right)^2 + \left(\sum_{i>l} a_{-i} \right)^2 \right) < \infty.$$

В частности, здесь уже допускается *условная* сходимость ряда $\sum a_i$. Отметим, что и в этом случае выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{D} S_n = \sigma_0^2,$$

которое как раз и требуется в теореме 1. Но если хвост ряда $\sum_{|i|>k} a_i$ стремится к нулю достаточно медленно, то вышеприведенные два условия из [12] и [13] могут не выполняться, в то время как условие (ii) теоремы 1 может иметь место.

Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера получены в предположении, что $A(n, i)$ удовлетворяют более сильному, чем (3), условию

(I_H). *Существует конечный ненулевой предел*

$$\sigma_0^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2H}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} A^2(n, i). \quad (7)$$

В дальнейшем мы также будем предполагать (если специально не оговорено противное), что для исходной последовательности случайных величин выполнено условие Крамера: существует такая положительная постоянная h , что

$$\mathbb{E} \exp(h|\xi_1|) < \infty. \quad (8)$$

Обозначим через $Z_n(t)$ непрерывную случайную ломаную построенную по точкам $(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sigma_0 n^H})$, $k = 0, 1, \dots, n$, где $H \in (0, 1)$. Введем в рассмотрение еще одно условие, связывающие между собой последовательность $\{a_i\}$ и вышеприведенный параметр $H \in (0, 1)$ – показатель степени нормирующей последовательности в (7):

(II_H). Пусть для некоторых постоянных $c \neq 0$ и $0 < \delta < H$ при $n \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$|A_n - cn^{H-1/2}| + |A_{-n}| = O(n^{H-1/2-\delta}), \quad (9)$$

$$|a_n - c(H - 1/2)n^{H-3/2}| + |a_{-n}| = O(n^{H-3/2-\delta}). \quad (10)$$

Кроме того, нам понадобится следующее ограничение на коэффициенты $\{a_i\}$ и H .

(III_H). Существует такая положительная постоянная $d > 0$, что для всех $n \geq 1$ и $l \geq 2$ имеют место соотношения

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |A(n, i)|^l \leq d^{l+1} n^{(l-2)H^*} n^{2H}, \quad (11)$$

где $H^* = \max\{H - 1/2, 0\}$. Заметим, что условие (II_H) является более жестким, чем (I_H) и (III_H),

В следующей теореме приводятся оценки сильной аппроксимации рассматриваемых процессов (т. е. оценки скорости сходимости в принципе инвариантности в форме Донскера). Этот результат также используется для доказательства принципа больших уклонений в соответствующей зоне.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (Π_H) , причем коэффициенты a_i монотонны в каждой из двух зон $i \geq N$ и $i \leq -N$. Тогда

(i) при выполнении условия Крамера (см. (8)) существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших n и любых $x > 0, y > 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 1]} |Z_n(t) - B_H^0(t)| > x + Ln^{-1/2} + y) \leq Kn(e^{-\lambda x n^{H'}} + e^{-\lambda y^2 n^{2\delta}});$$

(ii) если $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 2$, то существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших n , любых $x > 0$ и $y > 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 1]} |Z_n(t) - B_H^0(t)| > x + y) \leq K(n^{-(\alpha H' - 1)} x^{-\alpha} + n e^{-\lambda y^2 n^{2\delta}}),$$

где λ, K, L – некоторые положительные постоянные, $H' = \min\{H, 1/2\}$.

Положив в первом пункте этой теоремы $x = \frac{1+H'}{\lambda} \frac{\log n}{n^{H'}}$, а во втором пункте $\alpha > \frac{1}{H'}$ и $x = n^{-\frac{\alpha H' - 1}{\alpha + 1}}$, и в обоих пунктах $y = \sqrt{\frac{1+\delta}{\lambda}} \frac{\sqrt{\log n}}{n^\delta}$, мы получим оценки сильной аппроксимации ломаной Z_n гауссовским процессом B_H^0 , т. е. оценки скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера для Z_n в пространстве $C[0, 1]$.

В следующем предложении устанавливается связь между условиями (I_H) , (Π_H) и условием (III_H) .

Предложение 1. Пусть $|a_n| = O(|n|^{H-3/2})$ и, кроме того, $|A_n| = O(|n|^{H-1/2})$ при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда выполнено условие (III_H) . При этом из условия (Π_H) следуют условия (I_H) и (III_H) ; причем константа σ_0^2 из условия (I_H) имеет вид $c^2 L_H$, где $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$, а константа c определена в условии (Π_H) .

Далее, для $f \in C[0, 1]$ определим функцию

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &:= \sup_{g \in L_2[0,1]} \{ \langle g, f \rangle - \log \mathbf{E} e^{\langle g, B_H^0 \rangle} \} \\ &= \sup_{g \in L_2[0,1]} \{ \langle g, f \rangle - \frac{1}{2} \mathbf{E} \langle g, B_H^0 \rangle^2 \},\end{aligned}$$

где $\langle g, f \rangle = \int_0^1 g(t)f(t)dt$. При этом имеет место представление (в случае $H = 1/2$ см. [3])

$$\Lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \langle e_k, f \rangle^2, & \text{если } f \in \text{Im}(T), \\ \infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

где e_k – собственные функции, отвечающие положительным собственным числам λ_k^2 ковариационного оператора T^2 процесса B_H^0 , $\text{Im}(T)$ – образ квадратного корня из T^2 . Во второй главе диссертации доказано, что функция $2\Lambda(f)$ совпадает с квадратом нормы элемента f в пространстве Камерона-Мартина (см., например, [4]) для распределения процесса B_H^0 на борелевской σ -алгебре $C[0, 1]$, что, в свою очередь, совпадает с известным представлением этой функции в терминах ковариационного оператора процесса B_H^0 .

Основной результат второй главы диссертации состоит в описании достаточных условий для принципа больших отклонений (см. [8], [9], [15]) процессов Z_n , т. е. для утверждения вида

$$\begin{aligned}\log \mathbf{P}\left(\frac{1}{r(n)} Z_n \in A\right) &\sim \log \mathbf{P}\left(\frac{1}{r(n)} B_H^0 \in A\right) \\ &\sim -r^2(n) \inf_{f \in A} \Lambda(f)\end{aligned}\tag{12}$$

при $n \rightarrow \infty$ для любых борелевских подмножеств A некоторого функционального банахова пространства, удовлетворяющих условию

$$0 < \inf_{f \in A^c} \Lambda(f) = \inf_{f \in A^o} \Lambda(f) < \infty,$$

где A^o и A^c – соответственно внутренность и замыкание множества A .

Теорема 3. Пусть $r(n) \rightarrow \infty$ и $r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при выполнении (II_H) и монотонности коэффициентов a_i в каждой из двух зон $i \geq N$ и $i \leq -N$ имеет место (12) в пространствах $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$ и $C[0, 1]$.

В зоне уклонений $r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$ и $r^2(n)/\log n \rightarrow \infty$ утверждение теоремы сохранится, если вместо условия (II_H) одновременно выполнены условия (I_H) и (III_H) .

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю И. С. Борисову за постановку задачи и внимание к работе. Автор благодарит также А. А. Могульского за совместное творчество при получении результатов второй главы диссертации.

Список литературы

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.
2. Давыдов Ю. А. Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1970. — Т.24. — №3 — С. 487-498.
3. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятн. и ее примен. — 1967. — Т.12. — №4 — С. 635-654.
4. Богачев В. И. Гауссовские меры. — М.: Наука, 1997.
5. Ben Arous G., Ledoux M. Schilder's large deviation principle without topology // Pitman Research Notes in Math. — 1993. — V. 284. — P. 107-121.

6. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. — Киев: ТВиМС, 1995.
7. *Varadhan S. R. S.* Asymptotic probabilities and differential equations// Comm. pure appl. math. — 1966. — V. 19. — №3. — P. 261-286.
8. *Могульский А. А.* Большие отклонения для траекторий многомерных случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. — 1976. — Т.21. — №2 — С. 309-323.
9. *Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 82. — ВИНТИ, 1995.
10. *Konstantopoulos T., Sakhanenko A.* Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. // Сиб. электронные матем. известия. — 2004. — Т.1 — С. 47-63.
11. *Wang Q., Lin Y., Gulati C. M.* Strong Approximation for Long memory Process with Applications. // J. Theoret. Probab. — 2003. — V. 16. — №2 — P. 377-389.
12. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
13. *Hall P., Heyde C.C.* Martingale limit theory and its application. — New York: Academic Press, 1980.
14. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. — Boston – London: Jones and Bartlett Publishers, 1993.

15. *Пухальский А. А.* К теории больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен. — 1993. — Т.38. — №3 — С. 553-562.

Публикации по теме диссертации

16. *Аркашов И. С., Борисов И. С.* Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. мат. журнал. — 2004. — Т.45. — №6. — С. 1221–1255.
17. *Arkashov N. S., Borisov I. S.* Gaussian Approximation of Partial Sum Processes of Moving Averages // Международная конференция “XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models”. Тезисы докладов.— Riga–Jurmala: Transport and Telecommunication Institute, 2004, P. 40-41.
18. *Arkashov N. S., Borisov I. S., Mogulsky A. A.* Large Deviation Principle for Partial Sum Process of Moving Averages //Международная конференция “Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике”. Тезисы докладов. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2005, с. 41-42.

Аркашов Николай Сергеевич

**ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ПРИНЦИП
БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ
ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Подписано в печать 12.05.2005

Офсетная печать. Формат 60х84/16.

Уч.-изд. л. 1 Тираж 100 экз. Заказ № 259

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

№ 1 0 1 0 9

РНБ Русский фонд

2006-4

6997