# Законы равновесного теплового излучения
# (занятие 1)

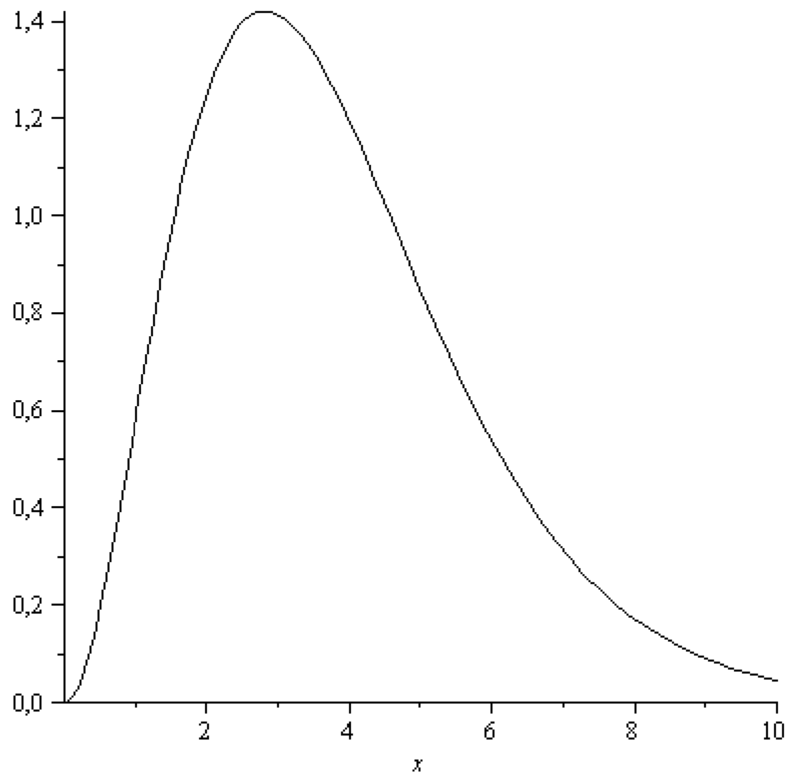
# Законы равновесного теплового излучения

## Основные законы и формулы

1) Спектральная плотность $\rho(\omega,T)$ равновесного теплового излучения равна (формула Планка)

$$\rho(\omega,T)=\frac{dE}{Vd\omega}=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}. \tag{1}$$

$$x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}\Rightarrow\rho(x)=\frac{x^3}{\exp(x)-1}$$




Зависимость функции $\rho(x)=\dfrac{x^3}{\exp(x)-1}$ в интервале $0\le x\le 10$

2) Полная плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ связана со спектральной плотностью $\rho(\omega,T)$ следующим образом

$$u(T)=\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty}\rho(\omega,T)d\omega. \tag{2}$$

$$u(T)=\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4. \tag{3}$$

Формула (3) представляет закон Стефана-Больцмана

$$u(T)=\sigma'T^4, \tag{4}$$

Где $\sigma'$

$$\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3}. \qquad (5)$$

3) **Закон Вина** устанавливает связь между частотой $\omega_0$, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho\left(\omega, T\right)$ и температурой $T$. Частота $\omega_0$ может быть найдена из условия

$$\frac{\partial \rho\left(\omega, T\right)}{\partial \omega} = 0. \qquad (6)$$

**Частота $\omega_0$, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho\left(\omega, T\right)$, пропорциональна температуре**

$$\omega_0 = 2.85 \frac{k_B T}{\hbar}. \qquad (7)$$

4) **Закон Стефана-Больцмана**: Энергетическая светимость $R_e$ абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры

$$R_e = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4,$$

$$R_e = \sigma T^4 .$$

$\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8}\, Вт./(м^2 \cdot К^4)$ -постоянная Стефана-Больцмана.

Энергетическая светимость это мощность, излучаемая с единицы поверхности.

$$\sigma = \sigma' \frac{c}{4}.$$

## Задача 1.

Температура поверхности Солнца $T_0 = 5500K$. Считать, что по своему спектральному составу излучение Солнца близко к излучению абсолютно чёрного тела. Найти массу $\frac{\Delta m}{\Delta t}$, теряемую Солнцем, за 1 секунду за счёт этого излучения. Оценить время $\tau$, за которое Солнце теряет 1 процент своей массы.

### Этапы решения задачи

1) Мощность $P$, излучаемая Солнцем

$$P = 4\pi R_C^2 \sigma T^4,$$

$R_C = 6.95 \cdot 10^8\, м$ – радиус Солнца.

2) Расчёт $\frac{\Delta m}{\Delta t}$

$$P = \frac{\Delta m}{\Delta t} c^2$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{4\pi R_C^2 \sigma T^4}{c^2} = 3.55 \cdot 10^9\, кг/с$$

3) Расчёт $\tau$

$$\tau \frac{\Delta m}{\Delta t} = M \cdot 0.01$$

$$\tau = \frac{M \cdot 0.01}{\frac{\Delta m}{\Delta t}} = 1.8 \cdot 10^{11}\, лет$$

$M = 2 \cdot 10^{30}\, кг$ – масса Солнца

## Задача 2.

Температура поверхности Солнца $T_0 = 5500K$. Считая, что поглощательная способность Солнца и Земли равна единице и что Земля находится в состоянии теплового равновесия, оценить её температуру $T_з$.

**Этапы решения задачи**

1)Мощность $P$, излучаемая Солнцем

$$P = 4\pi R_C^2 \sigma T^4,$$

$R_C = 6.95 \cdot 10^8\, м$ – радиус Солнца.

2)Мощность падающая на Землю $P'$

$$P' = \frac{P}{4\pi R_{з.о.}^2} \pi R_{з.ш.}^2 = \frac{4\pi R_C^2 \sigma T^4}{4\pi R_{з.о.}^2} \pi R_{з.ш.}^2$$

$R_{з.ш.} = 6.37 \cdot 10^6\, м$ – радиус Земли (земного шара),

$R_{з.о.} = 150 \cdot 10^6\, км$ – радиус земной орбиты.

$P' = 4\pi R_{з.ш.}^2 \sigma T_{з.}^4$ – мощность, излучаемая Землёй.

Закон сохранения энергии

$$\frac{4\pi R_C^2 \sigma T^4}{4\pi R_{з.о.}^2} \pi R_{з.ш.}^2 = 4\pi R_{з.ш.}^2 \sigma T_{з.}^4$$

$$\frac{R_C^2 T^4}{R_{з.о.}^2} = 4T_{з.}^4$$

$$T_{з.} = T\sqrt{\frac{R_C}{2R_{з.о.}}} \approx 266K.(-7C)$$

## Задача 3.

Полость объёмом $V = 1л$ заполнена тепловым излучением при температуре $T = 1000K$. Найти теплоёмкость $C_V$, энтропию $S$ этого излучения.

### Этапы решения задачи

**Расчёт теплоёмкости $C_V$**

Энергия излучения $U$

$$u(T) = \sigma' T^4 \text{, где } \sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3}$$

$$U = Vu(T) = V\sigma' T^4,$$

И так $U = U(V,T)$

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} \Big|_{V-const}$$

$$\delta Q = dU + pdV$$

Теперь $C_V = \dfrac{\partial U(V,T)}{\partial T} = 4V\sigma' T^3 = 16V\sigma T^3 / c$,

$$C_V = C_V(V = 1л, T = 1000K) = 3нДж/K$$

**Расчёт энтропии**

И так $U = U(V,T)$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT = u(T)dV + 4V\sigma' T^3 dT = \sigma' T^4 dV + 4V\sigma' T^3 dT,$$

Поскольку $p = \dfrac{1}{3} u(T)$, то

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} = \sigma' T^3 dV + 4V\sigma' T^2 dT + \frac{1}{3}\sigma' T^3 dV$$

$$dS = \frac{4}{3}\sigma' T^3 dV + 4V\sigma' T^2 dT \text{ откуда } S = S(V,T)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3}\sigma' T^3, \quad \frac{\partial S}{\partial T} = 4V\sigma' T^2$$

$$S(V,T) = V\frac{4}{3}\sigma' T^3 = V\frac{16}{3c}\sigma T^3$$

$$S(V = 1л, T = 1000K) = 1нДж/K$$

## Задача 4.

Найти уравнение адиабаты для равновесного теплового излучения в переменных $(V, T)$.

## Решение

Адиабатический процесс это обратимый процесс без теплообмена $(\delta Q = 0)$. Изменение энтропии при обратимом процессе равно

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Поскольку теплообмена нет, то $dS = 0 \Rightarrow S - const$.

Но для равновесного теплового излучения

$$S(V, T) = V\frac{16}{3c}\sigma T^3.$$

**(см. задачу 3)**

Уравнение адиабаты имеет вид

$$VT^3 - const\ .$$

## Задача 5.

Воспользовавшись формулой Планка

$$\rho(\omega,T)=\frac{dE}{Vd\omega}=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1},$$

найти число фотонов в интервале частот $d\omega$. Найти число фотонов в объёме $V=1м^3$ при $T=300K$.

**Решение**

Энергия фотона $\hbar\omega$. Число фотонов $dN$ в объёме $V$ равно

$$dN=V\frac{\rho(\omega,T)}{\hbar\omega}d\omega=V\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega.$$

Полное число фотонов $N$ в объёме $V$ равно

$$N=\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty}V\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega.$$

Для взятия последнего интеграла введём безразмерную переменную

$$x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}.$$

Теперь величину $N$ можно записать как

$$N=V\frac{k_B^3T^3}{\pi^2\hbar^3c^3}\int\limits_{x=0}^{x=\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx.$$

Интеграл

$$\int\limits_{x=0}^{x=\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx=2.405$$

есть табличный интеграл. Число фотонов $N$ равно

$$N=2.405\cdot V\frac{k_B^3T^3}{\pi^2\hbar^3c^3}.$$

$$N\ \Big|_{V=1м^3}=5.5\cdot10^{14}.$$

## Задача 6.

Воспользовавшись формулой Планка

$$\rho(\omega,T)=\frac{dE}{Vd\omega}=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1},$$

найти число фотонов в интервале $(\lambda,\lambda+d\lambda)$ и $\rho(\lambda,T)$.

**Этапы решения задачи**

1) Воспользуемся формулой предыдущей задачи

$$dN=V\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega.$$

Здесь $dN$ – число фотонов в объёме $V$ в интервале частот $d\omega$.

2) Выразим частоту $\omega$ через длину волны $\lambda$

$$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Теперь безразмерная величина $\frac{\hbar\omega}{k_BT}$ равна

$$\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_BT}.$$

2) Найдем связь между величинами $d\omega$ и $d\lambda$.

Для этого найдем $\frac{d\omega}{d\lambda}$

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}.$$

С точностью до знака

$$d\omega=\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda.$$

Теперь найдём число фотонов $dN$ в объёме $V$ в интервале частот $d\lambda$

$$dN=V\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_BT}\right)-1}\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda.$$

Откуда

$$dN=V\frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_BT}\right)-1}d\lambda.$$

$$dE=\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}dN=V\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_BT}\right)-1}d\lambda$$

$$\rho(\lambda,T)=\frac{dE}{Vd\lambda}=\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_BT}\right)-1}.$$

## Задача 7.

Найти среднее значение частоты $\left\langle \omega_{ph} \right\rangle$ фотона в спектре равновесного теплового излучения при $T$.

Число фотонов $dN$ в объёме $V$ равно

$$dN = V\frac{\rho(\omega,T)}{\hbar\omega}d\omega = V\frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}d\omega$$

$$\left\langle \omega_{ph} \right\rangle = \frac{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty}\omega dN}{N}$$

$$\left\langle \omega_{ph} \right\rangle = \frac{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty}\omega V\frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}d\omega}{N}$$

$$\left\langle \omega_{ph} \right\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{V\frac{1}{\pi^2 c^3}\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}d\omega}{N}$$

$$\left\langle \omega_{ph} \right\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{V\frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4}{2.405\cdot V\frac{k_B^3 T^3}{\pi^2\hbar^3 c^3}} = \frac{1}{\hbar}\frac{\frac{\pi^2 k_B}{15}T}{2.405\cdot\frac{1}{\pi^2}} = \frac{\pi^4}{15\cdot 2.405}\frac{k_B T}{\hbar} = \frac{\pi^4}{36.07}\frac{k_B T}{\hbar} = 2.69\frac{k_B T}{\hbar}$$

**Задача 8.**

Найти среднее значение частоты $\langle\omega\rangle$ в спектре равновесного теплового излучения при $T$.

$$\langle\omega\rangle = \frac{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \omega\rho(\omega,T)d\omega}{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \rho(\omega,T)d\omega}$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \omega\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega}{\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4}$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^4}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega}{\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4}$$

$$\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^4}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\omega =$$

$$= \frac{(k_BT)^5}{\hbar^4}\frac{1}{\pi^2c^3}\int\limits_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^4}{\exp(x)-1}dx = \frac{(k_BT)^5}{\hbar^4}\frac{1}{\pi^2c^3}24.9$$

$$\int\limits_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^4}{\exp(x)-1}dx = 24.9$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\frac{(k_BT)^5}{\hbar^4}\frac{24.9}{\pi^2c^3}}{\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4} = \frac{24.9\cdot 15}{\pi^4}\frac{k_BT}{\hbar} = 3.83\frac{k_BT}{\hbar}$$

## Задача 8.

Найти среднее значение частоты $\langle\lambda\rangle$ в спектре равновесного теплового излучения при $T$.

$$\langle\lambda\rangle=\frac{\int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\lambda\rho(\lambda,T)d\lambda}{\int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\rho(\lambda,T)d\lambda}$$

$$\rho(\lambda,T)=\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_B T}\right)-1}$$

$$\int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\rho(\lambda,T)d\lambda=\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4$$

$$\int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\lambda\rho(\lambda,T)d\lambda=\int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\lambda\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_B T}\right)-1}d\lambda=$$

$$x=\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_B T}\Rightarrow\frac{dx}{d\lambda}=-\frac{2\pi c\hbar}{\lambda^2 k_B T}\Rightarrow d\lambda=-\frac{\lambda^2 k_B T}{2\pi c\hbar}dx$$

$$x=\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_B T}\Rightarrow x\frac{k_B T}{2\pi c\hbar}=\frac{1}{\lambda}$$

$$=16\pi\frac{(k_BT)^3}{2(2\pi c\hbar)^2}\int\limits_{x=0}^{x=\infty}x^2\frac{1}{\exp(x)-1}dx=$$

$$=2\frac{(k_BT)^3}{\pi(c\hbar)^2}2.405\,.$$

$$\langle\lambda\rangle=\frac{2\frac{(k_BT)^3}{\pi(c\hbar)^2}2.405}{\frac{\pi^2k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4}=2.33\frac{c\hbar}{k_BT}.$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Спектральная плотность равновесного теплового излучения

Основные понятия и определения

$\rho(\omega, T) = \dfrac{dE}{Vd\omega}$ – спектральная плотность равновесного теплового излучения,

$dE$ – энергия равновесного теплового излучения в объёме $V$ и интервале частот $(\omega;\ \omega + d\omega)$,

Энергию $dE$ можно представить как

$$dE = \bar{\varepsilon}(\omega, T) dN\ . \tag{1}$$

где

$$\bar{\varepsilon}(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \tag{2}$$

энергия одной электромагнитной волны (квантового осциллятора) в состоянии теплового равновесия,

$$dN = V\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

число электромагнитных волн (осцилляторов поля) в объёме $V$ в интервале частот $d\omega$.

**Расчёт $dN$**

$dN$ – число электромагнитных плоских волн в объёме $V$ и в интервале частот $d\omega$ легко рассчитать для кубической полости, когда ребро куба равно $L$, из условия ортогональности плоских волн в кубической полости

$$\int\limits_{0 \le x, y, z \le L} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{-i(\mathbf{k}' \mathbf{r})} d^3\mathbf{r} = 0, \text{ когда } \mathbf{k} \ne \mathbf{k}'\ . \tag{3}$$

Для выполнения условия (3) вектор $\mathbf{k}$ достаточно задавать в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}^0 \frac{2\pi n_x}{L} + \mathbf{y}^0 \frac{2\pi n_y}{L} + \mathbf{z}^0 \frac{2\pi n_z}{L}, \tag{4}$$

где $n_x$, $n_y$, $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Для расчёта $dN$ следует отметить, что концы векторов $\mathbf{k}$ образуют в пространстве волновых векторов простую кубическую решётку. Расстояние между ближайшими точками этой решётки равно $\delta k = \dfrac{2\pi}{L}$. Объём куба $\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3$, ребро которого равно $\dfrac{2\pi}{L}$, есть объём пространства волновых векторов, приходящегося на один волновой вектор (4). Для вычисления $dN$ построим сферический слой радиуса $k$ и толщиной $dk$. Объём этого слоя равен $4\pi k^2 dk$. Число волновых векторов, оканчивающихся в этом слое, равно

$$\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3} = V\frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \tag{5}$$

Здесь $V = L^3$ – объём кубической полости. Условие (5) позволяет рассчитать число электромагнитных волн, волновые вектора которых окачиваются в сферическом слое толщиной $dk$

$$2V\frac{k^2dk}{2\pi^2}. \qquad (6)$$

Коэффициент 2 означает, что каждому волновому вектору соответствуют две поляризации электромагнитных волн. Для электромагнитных волн в вакууме существует простая связь между волновым вектором $k$ и частотой $\omega$ $(\omega = kc)$. Тогда $dN$ равно

$$dN = V\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \qquad (7)$$

Формула (7) для $dN$ позволяет найти $dE$ (1) энергию равновесного теплового излучения в объёме $V$ и интервале частот $d\omega$

$$dE = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}V\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \qquad (8)$$

Теперь спектральная плотность $\rho(\omega,T)$ равновесного теплового излучения равна

$$\rho(\omega,T) = \frac{dE}{Vd\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}. \qquad (9)$$

**Закон Стефана-Больцмана**

Закон Стефана-Больцмана связывает плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ с температурой $T$. Полная плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ связана со спектральной плотностью $\rho(\omega,T)$ следующим образом

$$u(T) = \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \rho(\omega,T)d\omega. \qquad (10)$$

Для взятия интеграла (10) нужно перейти к безразмерной переменной $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. Тогда интеграл (10) имеет вид

$$u(T) = \frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_{x=0}^{x=\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx. \qquad (11)$$

Определённый интеграл

$$\int_{x=0}^{x=\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

равен $\frac{\pi^4}{15}$. Это позволяет представить плотность равновесного теплового излучения как

$$u(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4. \qquad (12)$$

Формула (12) представляет закон Стефана-Больцмана

$$u(T) = \sigma' T^4, \qquad (13)$$

Где $\sigma'$ – постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}. \qquad (14)$$

**Закон Вина**

Закон Вина устанавливает связь между частотой $\omega_0$, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega,T)$ и температурой $T$. Частота $\omega_0$ может быть найдена из условия

$$\frac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega}=0. \qquad (15)$$

Производная $\dfrac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega}$ равна

$$\frac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega}=\frac{1}{\pi^2c^3}\left(\frac{3\hbar\omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}-\frac{\hbar\omega^3\left(\frac{\hbar}{k_BT}\right)\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1\right)^2}\right). \qquad (16)$$

Подстановка производной (16) в уравнение (15) приводит к трансцендентному уравнению

$$x_0e^{x_0}=3\left(e^{x_0}-1\right), \qquad (17)$$

где $x_0=\dfrac{\hbar\omega_0}{k_BT}$. Уравнение (17) может быть решено числено $x_0=2.85$. Подстановка этого значения в условие $\dfrac{\hbar\omega_0}{k_BT}=2.85$ показывает, что частота $\omega_0$, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega,T)$, пропорциональна температуре

$$\omega_0=2.85\frac{k_BT}{\hbar}. \qquad (18)$$

## Расчёт энергетической светимости абсолютно чёрного тела

Под энергетической светимостью $R_e$ абсолютно чёрного тела понимается мощность, излучаемая с единицы поверхности.

Параметры равновесного теплового излучения

$u(T)-$ плотность равновесного теплового излучения,

$\dfrac{dj}{d\Omega}-$ поток равновесного теплового излучения в единице телесного угла $\left(\dfrac{dj}{d\Omega}=\dfrac{cu(T)}{4\pi}\right)$.

Откуда следует, что

$$dj=\frac{cu(T)}{4\pi}d\Omega, \qquad (19)$$

где $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$. Поток энергии $dE$, излучаемый с поверхности $dS$ абсолютно чёрного тела под углом $\theta$ к нормали равен

$$dE=djdScos(\theta). \qquad (20)$$

Полная мощность, излучаемая с поверхности $dS$ равна

$$dE=\frac{cu(T)}{4\pi}dS\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{cu(T)}{4}dS. \qquad (21)$$

Последняя формула позволяет найти энергетическую светимость абсолютно чёрного тела

$$R_e=\frac{dE}{dS}=\frac{cu(T)}{4}. \qquad (22)$$

Подстановка в (22) плотности $u(T)$ (12) позволяет найти явное выражение для энергетической светимости

$$R_e = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 . \qquad (23)$$

Коэффициент в формуле (23), стоящий перед $T^4$, называется постоянной Стефана-Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8}\, Вт./(м^2 \cdot K^4) . \qquad (24)$$