Законы равновесного теплового излучения (занятие 2)

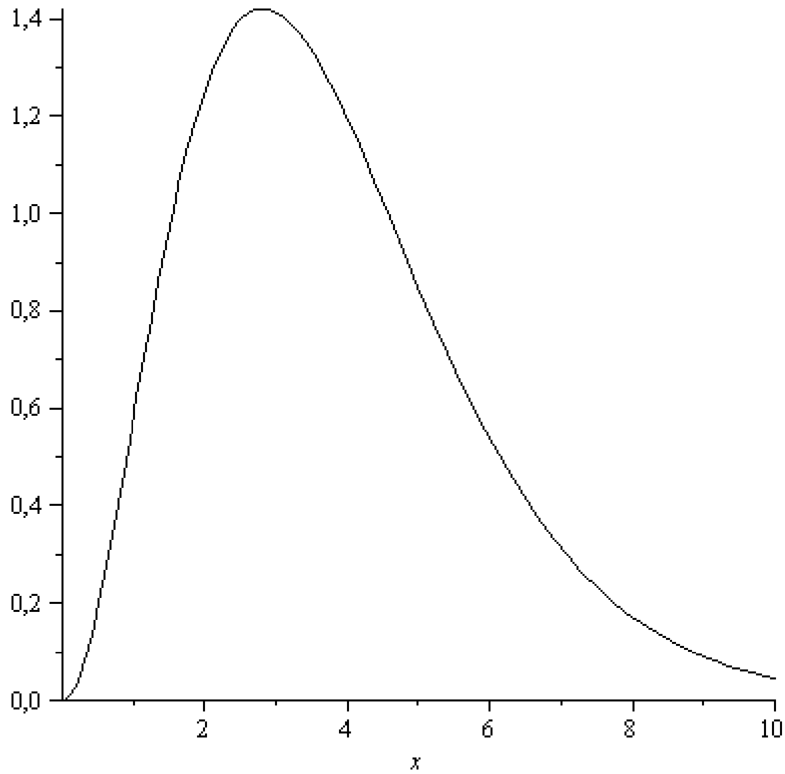
Законы равновесного теплового излучения

Основные законы и формулы

1) **Спектральная плотность** $\rho(\omega, T)$ **равновесного теплового излучения равна (формула Планка)**

$$\rho(\omega, T) = \frac{dE}{Vd\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \qquad (1)$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \Rightarrow \rho(x) = \frac{x^3}{\exp(x) - 1}$$



Зависимость функции $\rho(x) = \dfrac{x^3}{\exp(x) - 1}$ в интервале $0 \le x \le 10$

Другая форма спектральной плотности равновесного теплового излучения

$$\rho(\lambda, T) = \frac{dE}{Vd\lambda} = \frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

2) Полная плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ связана со спектральной плотностью $\rho(\omega, T)$ следующим образом

$$u(T) = \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \rho(\omega, T)\, d\omega. \qquad (2)$$

$$u(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4. \qquad (3)$$

Формула (3) представляет закон Стефана-Больцмана

$$u(T) = \sigma' T^4, \tag{4}$$

Где σ'

$$\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3}. \tag{5}$$

3) **Закон смещения Вина** устанавливает связь между частотой ω_0, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega, T)$ и температурой T. Частота ω_0 может быть найдена из условия

$$\frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} = 0. \tag{6}$$

Частота ω_0, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega, T)$, пропорциональна температуре

$$\omega_0 = 2.85 \frac{k_B T}{\hbar}. \tag{7}$$

Другая форма закона смещения Вина

$$\rho(\lambda, T) = \frac{dE}{V d\lambda} = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c \hbar}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda, T)$, удовлетворяет соотношению

$$T \lambda_0 = b,$$

где $b = 0.29 см \cdot К$ – постоянная закона смещения Вина.

4) **Закон Стефана-Больцмана**: Энергетическая светимость R_e абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры

$$R_e = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4,$$

$$R_e = \sigma T^4.$$

$\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8}\, Вт./(м^2 \cdot К^4)$ -постоянная Стефана-Больцмана.

Энергетическая светимость это мощность, излучаемая с единицы поверхности.

$$\sigma = \sigma' \frac{c}{4}.$$

Задача 1.

Имеется два абсолютно чёрных источника равновесного теплового излучения. Температура одного из них $T_1 = 2500K$. Найти температуру другого источника, если длина волны, отвечающая его максимуму функции $\rho(\lambda, T)$, на $\Delta\lambda = 0.5 мкм = 0.5 \cdot 10^{-6} м$ больше длины волны, соответствующей максимуму функции $\rho(\lambda, T)$ первого источника.

Решение

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$$

Воспользуемся формулой

$$T\lambda_0 = b,$$

где $b = 0.29 см \cdot K$.

Для первого и второго тел последняя формула принимает вид

$$\begin{cases} T_1\lambda_1 = b \\ T_2\lambda_2 = b \end{cases},$$

Или

$$\begin{cases} T_1\lambda_1 = b \\ T_2(\lambda_1 + \Delta\lambda) = b \end{cases}$$

$$T_1\lambda_1 = b \Rightarrow \lambda_1 = \frac{b}{T_1}$$

$$T_2\left(\frac{b}{T_1} + \Delta\lambda\right) = b \Rightarrow T_2 = \frac{b}{\frac{b}{T_1} + \Delta\lambda}, \text{ где } \Delta\lambda = 0.5 \cdot 10^{-4} см$$

$$T_2 = 1750K$$

Задача 2.

Энергетическая светимость абсолютно чёрного тела $R_e = 3.0 Вт/см^2$. Определить длину волны, отвечающую максимуму функции $\rho(\lambda, T)$.

Решение

Воспользуемся законом Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

$\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8}\, Вт./(м^2 \cdot K^4)$ -постоянная Стефана-Больцмана.

Температура абсолютно чёрного тела равна

$$T = \left(\frac{R_e}{\sigma}\right)^{1/4}.$$

Для определения длины волны λ_0, отвечающей максимуму функции $\rho(\lambda, T)$, воспользуемся законом смещения Вина

$$T\lambda_0 = b,$$

где $b = 0.29 см \cdot K$. Теперь длина волны λ_0 равна

$$\lambda_0 = \frac{b}{T} = \frac{b}{\left(\frac{R_e}{\sigma}\right)^{1/4}} = 3.4 мкм.$$

Здесь $R_e = 3.0 \cdot 10^4\, Вт/м^2$.

Задача 3.

Показать с помощью формулы Вина

$$\rho(\omega,T) = \omega^3 F(\omega/T),$$

что плотность $u(T)$ равновесного теплового излучения пропорциональна T^4.

<u>Пожелание:</u> Сравните функцию

$$(\omega,T) = \omega^3 F(\omega/T)$$

с функцией Планка

$$\rho(\omega,T) = \frac{dE}{Vd\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}.$$

Решение

$$u(T) = \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \rho(\omega,T)d\omega = \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \omega^3 F(\omega/T)d\omega.$$

Введём переменную $x = \omega/T$. Тогда

$$u(T) = T^4 \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \left(\frac{\omega}{T}\right)^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\frac{\omega}{T} = T^4 \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} (x)^3 F(x)dx.$$

Но интеграл

$$\int_{\omega=0}^{\omega=\infty} (x)^3 F(x)dx$$

не зависит от температуры T, и это позволяет утверждать, что $u(T)$ пропорциональна T^4.

Задача 4.

Показать с помощью формулы Вина

$$\rho(\omega,T) = \omega^3 F(\omega/T),$$

что частота ω_0, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega,T)$, пропорциональна температуре.

Решение

Частота ω_0 может быть найдена из условия

$$\frac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega} = 0.$$

Или

$$\frac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega} = 3\omega^2 F(\omega/T) + \omega^3 \frac{\partial}{\partial x} F(x)\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}x,$$

где $x = \omega/T$. Последнее выражение можно переписать как

$$\frac{\partial\rho(\omega,T)}{\partial\omega} = 3\omega^2 F(x) + \omega^3 \frac{1}{T} F'(x).$$

Как было отмечено, частота ω_0 может быть найдена из условия

$$3\omega^2 F(x) + \omega^3 \frac{1}{T} F'(x) = 0.$$

А это уравнение можно переписать в виде

$$3x^2 F(x) + x^3 F'(x) = 0.$$

Обозначая корень этого уравнения как x_0, из условия $x_0 = \omega_0/T$, имеем

$$\omega_0 = x_0 T.$$

Таким образом, частота ω_0, на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega,T)$, пропорциональна температуре T. Следует отметить, что x_0-корень уравнения

$$3x^2 F(x) + x^3 F'(x) = 0,$$

не зависит от температуры T.

Задача 5.

О существовании в природе наименьшей порции электрического заряда
(из неопубликованного сообщения П. А. М. Дирака)

Полную плотность энергии $u\left(T\right)$ равновесного теплового излучения можно найти по формуле

$$u\left(T\right)=\frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4$$

или

$$u\left(T\right)=\sigma' T^4,$$

где $\sigma'=\dfrac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана. П. А. М. Дирак записал эту формулу в виде

$$\sigma'=\frac{q_e^6}{c^3\hbar^3}\frac{\pi^2 k_B^4}{15q_e^6}.$$

Здесь q_e – заряд электрона. В системе СГС $\alpha=\dfrac{q_e^2}{c\hbar}=\dfrac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры, и σ' можно представить в виде

$$\sigma'=\frac{\pi^2 k_B^4}{15q_e^6}\left(\frac{1}{137}\right)^3.$$

Если считать, что постоянная тонкой структуры α и заряд электрона q_e независимые величины, а σ' – экспериментальная константа, то в последней формуле q_e нельзя устремлять к нулю, поскольку в этом случае σ' начинает неограниченно возрастать.

Задача 6.

Показать с помощью формулы Вина

$$\rho(\omega,T)=\omega^3 F(\omega/T),$$

что длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, обратно пропорциональна температуре T.

Решение

Вспомним определение функции $\rho(\omega,T)$

$$\rho(\omega,T)=\frac{dE}{Vd\omega}.$$

Здесь dE – энергия равновесного теплового излучения в интервале частот $d\omega$, V – объём полости, где находится излучение. Определение функции $\rho(\lambda,T)$ заключается в следующем

$$\rho(\lambda,T)=\frac{dE}{Vd\lambda}.$$

Здесь dE – энергия равновесного теплового излучения в интервале длин волн $d\lambda$. Для того, чтобы найти длину волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, найдём связь между функциями $\rho(\lambda,T)$ и $\rho(\omega,T)$. Для этого выразим частоту ω через длину волны λ

$$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Теперь величина $\frac{\omega}{T}$ равна

$$\frac{2\pi c}{\lambda T}.$$

Найдем связь между величинами $d\omega$ и $d\lambda$.

Для этого найдем $\frac{d\omega}{d\lambda}$

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}.$$

С точностью до знака

$$d\omega=\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda.$$

Теперь нетрудно найти связь между величинами $\frac{dE}{Vd\omega}$ и $\frac{dE}{Vd\lambda}$. Для этого используем только что найденную связь между $d\omega$ и $d\lambda$. Эта связь позволяет найти соотношение между $\frac{dE}{Vd\omega}$ и $\frac{dE}{Vd\lambda}$

$$\frac{dE}{Vd\omega}=\frac{dE}{Vd\lambda}\frac{\lambda^2}{2\pi c}.$$

Учитывая, что $\frac{dE}{Vd\omega}=\rho(\omega,T)$, а $\frac{dE}{Vd\lambda}=\rho(\lambda,T)$ получаем соотношение между функциями $\rho(\lambda,T)$ и $\rho(\omega,T)$

$$\rho(\omega,T)=\rho(\lambda,T)\frac{\lambda^2}{2\pi c}.$$

Теперь спектральное распределение $\rho(\lambda,T)$ равно

$$\rho(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^2}\rho(\omega,T).$$

Учитывая, что $\rho(\omega,T)=\omega^3 F(\omega/T)$, представим $\rho(\lambda,T)$ в виде

$$\rho(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^2}\omega^3 F(\omega/T).$$

Используя выражение для частоты $\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}$, выразим спектральную плотность $\rho(\lambda,T)$ только через длину волны λ

$$\rho(\lambda,T)=\frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5}F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right).$$

Последняя формула для $\rho(\lambda,T)$ позволяет показать, что длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, обратно пропорциональна температуре T. Для того, чтобы это показать найдем $\frac{\partial\rho(\lambda,T)}{\partial\lambda}$

$$\frac{\partial\rho(\lambda,T)}{\partial\lambda}=(2\pi c)^4\left(-5\lambda^{-6}F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)+\lambda^{-5}F'\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)\left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2 T}\right)\right).$$

Длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, теперь может быть найдена из условия

$$-5\lambda^{-6}F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)+\lambda^{-5}F'\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)\left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2 T}\right)=0$$

Последнее соотношение приводит к решению уравнения

$$5F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)+\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)F'\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)=0.$$

Для анализа решения этого уравнения введём переменную $x=\frac{2\pi c}{\lambda T}$. Теперь уравнение об отыскании длины волны λ_0 принимает вид

$$5F(x)+xF'(x)=0.$$

Корень этого уравнения обозначим x_0. Теперь длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, может быть найдена из соотношения

$$x_0=\frac{2\pi c}{\lambda_0 T},$$

а это позволяет утверждать, что длина волны λ_0, на которую приходится максимум функции $\rho(\lambda,T)$, обратно пропорциональна температуре $\lambda_0=\frac{2\pi c}{Tx_0}$.

Задача о чёрной дыре

<u>Вспомогательный материал</u>

Задача о первой космической скорости

Космическая станция массы m вращается по круговой орбите радиуса R вокруг планеты сферической формы массы M. Найти скорость вращения (1 космическую скорость) космической станции V.

Решение

Запишем 2 закон Ньютона для вращательного движения

$$m\frac{V^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}. \tag{1}$$

Откуда $V = \sqrt{G\frac{M}{R}}$ – 1 космическая скорость.

Задача о второй космической скорости

Какую минимальную скорость V' нужно сообщить телу массы m, находящемуся на поверхности сферической планеты массы M и радиуса R, чтобы тело ушло на бесконечность, если у планеты отсутствует атмосфера?

Вспомогательный материал

Вспомним формулу для потенциальной энергии U двух материальных точек с массами m_1 и m_2 на расстоянии r друг от друга и взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{2}$$

Решение

Применим закон сохранения механической энергии для тела массы m, которому согласно условию задачи на поверхности планеты сообщили минимальную скорость V', такую, что тело ушло на бесконечность.

1. Запишем механическую энергию тела E на поверхности планеты

$$E = \frac{mV'^2}{2} - G\frac{mM}{R}. \tag{3}$$

2. Запишем механическую энергию тела E на бесконечности

$$E = 0.$$

Такой ответ $E = 0$ обусловлен тем, что минимальная скорость тела на бесконечности равна 0 и потенциальная энергия тела на бесконечности равна нулю.

3. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mV'^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0. \tag{4}$$

Откуда $V' = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$ – 2 космическая скорость.

При скорости тела на поверхности планеты $V' = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$ тело уходит на бесконечность, но имеет на бесконечности нулевую скорость.

Задача П. С. Лапласа о невидимой звезде

До какого размера R_G нужно сжать звезду сферической формы массы M, чтобы звезда стала невидимой?

Решение

П. С. Лаплас пользовался корпускулярной моделью света. Свет это поток корпускул, двигающихся со скоростью $c = 3 \cdot 10^8\, м./с$. При сжатии звезды (радиус звезды R уменьшается) при неизменности массы звезды $(M - const)$ на поверхности звезды растёт ускорение свободного падения $g = G\dfrac{M}{R^2}$ и сила тяжести, что затрудняет отрыв корпускул света от звезды. При радиусе звезды равном R_G корпускулы света уходят на бесконечность, но имеют на бесконечности нулевую скорость (согласно Лапласу звезда становится невидимой). Такое условие можно записать, приравнивая скорость света c второй космической скорости

$$c = \sqrt{2G\frac{M}{R_G}}\,. \tag{5}$$

Последнее условие позволяет найти R_G

$$R_G = 2\frac{GM}{c^2}\,. \tag{6}$$

Величина R_G называется гравитационным радиусом Солнца.

Пример. При $M = 2 \cdot 10^{30}\, кг$ (масса Солнца) $R_G \approx 3 км$,

Плотность вещества в чёрной дыре при данной M равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_G^3} = 1.8 \cdot 10^{19}\, кг/м^3\,.$$

Заключение

Согласно П. С. Лапласу, если Солнце сжать при неизменной массе так, что радиус звезды станет равным 3км, то Солнце станет невидимым.

Примечание: При решении этой задачи в рамках общей теории относительности ответ для R_G получается в два раза меньше.

Испарение чёрной дыры

Оценка температуры чёрной дыры по теории размерности

В формуле (6) есть две фундаментальные постоянные: скорость света $c = 3 \cdot 10^8\, м./с$ и гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, м^3/\left(кг \cdot с^2\right)$. Если использовать ещё две константы $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}\, Дж \cdot с$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, Дж/К$ (постоянная Планка и постоянная Больцмана), то из величин M (масса чёрной дыры), c, G и k_B можно построить величину

$$\frac{\hbar c^3}{GMk_B}\,, \tag{7}$$

которая имеет размерность температуры. С. Хокингу удалось рассчитать температуру черной дыры

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}\,. \tag{8}$$

Температура чёрной дыры T (8) позволяет оценить мощность излучения P чёрной дыры по закону Стефана-Больцмана

$$P = 4\pi R_G^2 \sigma T^4 , \tag{9}$$

где σ есть постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8}\, Вт./(м^2 \cdot K^4) . \tag{10}$$

Пример. Если масса чёрной дыры равна массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}\, кг$, то температура чёрной дыры $T = 5.8 \cdot 10^{-8}\, K$.

Излучаемая мощность приводит к потери массы M чёрной дыры

$$4\pi R_G^2 \sigma T^4 = -\frac{d}{dt} M c^2 . \tag{11}$$

Закон сохранения энергии (11) позволяет записать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для массы $M(t)$ чёрной дыры

$$4\pi \left(2\frac{GM(t)}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M(t)} \right)^4 = -c^2 \frac{dM(t)}{dt} . \tag{12}$$

$$4\pi \left(2\frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{M^2(t)} = -c^2 \frac{dM(t)}{dt}$$

$$-4\pi \left(2\frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} dt = M^2 dM$$

$$-4\pi \left(2\frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} \int_{t=0}^{t=\tau} dt = \int_{M=M_0}^{M=0} M^2 dM$$

$$-4\pi \left(2\frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} \tau = -\frac{1}{3} M_0^3$$

Интегрирование дифференциального уравнения (12) позволяет найти полное время испарения τ чёрной дыры

$$\tau = \frac{5 \cdot 64^2 \pi}{4} \frac{G M_0^2}{\hbar c} \frac{G M_0}{c^3} , \tag{13}$$

где M_0 – начальная масса чёрной дыры.

$$\tau = 5 \cdot 32^2 \cdot \pi \frac{G M_0^2}{\hbar c} \frac{G M_0}{c^3}$$