Соотношение неопределённостей Гейзенберга

Описание движения частицы в классической физике

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ p_x = p_x(t),\ \ p_y = p_y(t),\ \ p_z = p_z(t)$$

Одномерное движение

$$x = x(t),\ \ p_x = p_x(t)$$

Частица имеет только одну координату и один импульс

Описание движения частицы в квантовой физике

Одномерное движение

$\psi = \psi(x,t)$ – движение частицы описывается волновой функцией

Вопрос. К чему это приводит?

Ответ:

Частица имеет много координат и много импульсов.

Δx – область, где $\psi(x)$ отлична от нуля,

Δx – неопределённость координаты.

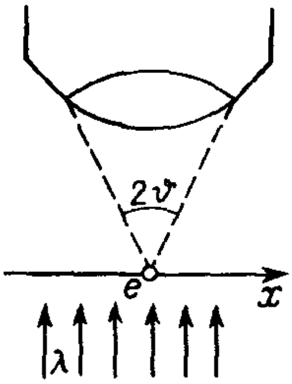
Как это понимать?

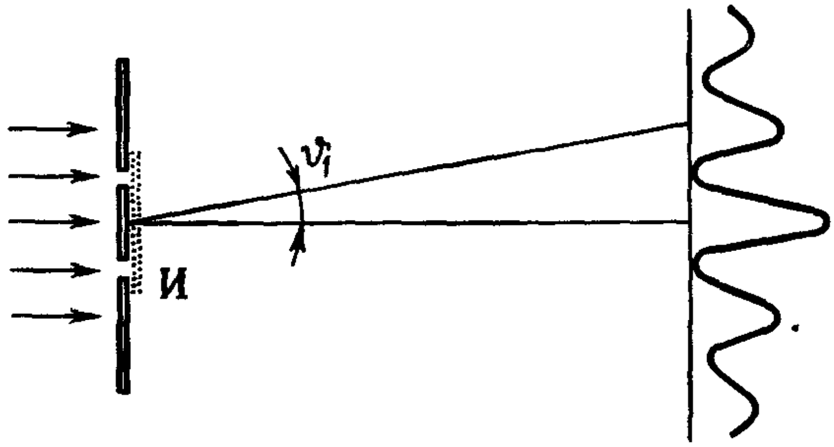
1. Если перед каждым измерением координаты волновая функция частицы есть $\psi(x)$, то значение измеренной координаты попадает в интервал Δx.
2. Если перед каждым измерением импульса волновая функция частицы есть $\psi(x)$, то значение измеренного импульса попадает в интервал Δp_x.

Причём $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ – соотношение неопределённостей.

Задача 1

Поток электронов с дебройлевской длиной волны $\lambda = 11 мкм$ падает на прямоугольную щель шириной $b = 0.1 мм$. Определить с помощью соотношения неопределённостей угловую ширину пучка за щелью в градусах





Решение

Вспомним формулу де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p_y} \Rightarrow p_y = \frac{h}{\lambda}.$$

Здесь λ – длина волны де Бройля.

Пояснение: импульс электрона до прохождения через щель направлен по оси y.

Вспомним соотношение неопределённостей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \ge \hbar$$

Здесь $\Delta x = b/2$

Пояснение: импульс электрона после прохождения через щель имеет компоненты p_y и p_x.

Компонента импульса p_y после прохождения через щель не изменяется. После прохождения через щель электрон имеет много импульсов p_x. Все значения импульсов p_x находится в интервале Δp_x. Причём

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{2\hbar}{b}.$$

Максимальное значение p_x равно

$$p_{x,\max} = \frac{2\hbar}{b}.$$

Это позволяет вычислить максимальный угол $\theta_{\max}$ отклонения электрона от оси y

$$tg\left(\theta_{\max}\right) = \frac{p_{x,\max}}{p_y} = \frac{2\hbar}{bp_y} = \frac{2\hbar\lambda}{bh} = \frac{\lambda}{\pi b} \approx 2^o.$$

Задача 2

В некоторый момент область локализации свободного электрона $\Delta x_0 = 0.1 нм$. Оценить ширину области локализации этого электрона спустя промежуток времени $\Delta t = 1 с$.

Решение

Вспомним соотношение неопределённостей

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_x \geq \hbar .$$

Откуда

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x_0} .$$

Область локализации Δx_0 электрона определяет интервал импульсов электрона

$$-p_{x,\max} \leq p_x \leq p_{x,\max} ,$$

где $p_{x\max} = \dfrac{\hbar}{\Delta x_0}$. Откуда

$$m_e V_{x,\max} = \frac{\hbar}{\Delta x_0} ,$$

где $V_{x,\max}$ – максимальная скорость электрона вдоль оси x

$$V_{x,\max} = \frac{\hbar}{\Delta x_0 m_e} .$$

Теперь максимальный путь l_x , который пройдёт электрон, равен

$$l_x = V_{x,\max} \cdot \Delta t = \frac{\hbar \Delta t}{\Delta x_0 m_e} \approx 1 \cdot 10^3 \, км .$$

Задача 3

Оценить неопределённость скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома водорода порядка $\Delta x_0 = 0.1$нм. Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой боровской орбите $R = 0.529$Å .

Решение

Вспомним соотношение неопределённостей

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_x \geq \hbar .$$

Откуда

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x_0},$$

но неопределённость импульса Δp_x определяет неопределённость скорости ΔV_x

$$\Delta p_x = m_e \Delta V_x .$$

Теперь неопределённость скорости ΔV_x равна

$$\Delta V_x = \frac{\hbar}{m_e \Delta x_0} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} 1.0 \cdot 10^{-10}} = 1 \cdot 10^6 \, м/с .$$

СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНА НА ПЕРВОЙ БОРОВСКОЙ ОРБИТЕ

$$m_e \frac{V^2}{R} = k_0 \frac{q_e^2}{R^2} \Rightarrow V^2 = k_0 \frac{q_e^2}{m_e R} \Rightarrow V = 2.2 \cdot 10^6 \, м./с$$

Задача 4

Оценить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области $l = 1мкм$.

Решение

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Здесь λ – длина волны де Бройля $\left(\lambda = h / p\right)$,

$p = \dfrac{h}{\lambda} = h\dfrac{n}{2l}$ – возможные значения импульсов электрона,

$\dfrac{p^2}{2m_e}$ – кинетическая энергия электрона,

$\dfrac{p^2}{2m_e} = \dfrac{1}{2m_e}\left(h\dfrac{n}{2l}\right)^2$ – возможные значения кинетической энергии электрона,

$\dfrac{1}{2m_e}\left(h\dfrac{1}{2l}\right)^2$ – минимальное значение кинетической энергии электрона.

Задача 5

Частица находится в одномерной потенциальной яме длиной l с бесконечно высокими стенками. Оценить силу, с которой частица действует на стенку, если частица имеет наименьшую энергию.

Решение

Энергия частицы в одномерной яме равна

$$E = \frac{1}{2m_e}\left(h\frac{n}{2l}\right)^2 .$$

Сила F, действующая на стенку

$$F = -\frac{\partial}{\partial l}\frac{1}{2m_e}\left(h\frac{1}{2l}\right)^2 = 2\frac{1}{2m_e}\left(h\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{l^3} = \frac{h^2}{4m_e l^3} .$$

Задача 6

Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле $U = \frac{\chi}{2}x^2$ (гармонический осциллятор).

Оценить с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию частицы в такой яме.

Решение

Полная энергия осциллятора равна

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\chi}{2}x^2.$$

В точках поворота

$$E = \frac{\chi}{2}A^2,$$

где A – амплитуда колебания.

Неопределённость координаты в Δx этом случае равна A

$\Delta x = A$, поскольку координата осциллятора x при совершении им гармонических колебаний находится в интервале $-A \le x \le A$.

Максимально возможное значение импульса $p_{\max}$ можно найти из условия

$E = \frac{p_{\max}^2}{2m} \Rightarrow p_{\max} = 2mE$. Но максимально возможное значение импульса определяет неопределённость импульса $\Delta p = p_{\max}$, поскольку импульс осциллятора p находится в интервале $-p_{\max} \le p \le p_{\max}$.

Соотношение неопределённостей $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$ устанавливает связь между Δx и Δp

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

Как было отмечено, полная энергия равна

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\chi}{2}x^2.$$

При периодическом движении

$E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{\chi}{2}\Delta x^2$ или $E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\Delta x}\right)^2 + \frac{\chi}{2}\Delta x^2$, то есть энергия осциллятора зависит от Δx $\left(E = E(\Delta x)\right)$.

Минимальное значение E можно определить из условия $\frac{dE(\Delta x)}{d\Delta x} = 0$

$$\frac{dE(\Delta x)}{d\Delta x} = -2\frac{1}{2m}(\hbar)^2\frac{1}{(\Delta x)^3} + \chi\Delta x = 0.$$

Корень последнего уравнения обозначим Δx_0. Этот корень можно найти

$$-\frac{1}{m}(\hbar)^2\frac{1}{(\Delta x_0)^3} + \chi\Delta x_0 = 0 \Rightarrow (\Delta x_0)^4 = \frac{\hbar^2}{m\chi} \text{ или}$$

$(\Delta x_0)^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{m\chi}}$. Минимальная полная энергия осциллятора равна

$$E_{\min} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\Delta x_0}\right)^2 + \frac{\chi}{2}\Delta x_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{m\chi}}{\hbar} + \frac{\chi}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{m\chi}} = \hbar\sqrt{\frac{\chi}{m}}.$$

Задача 7

Электрон в потенциальной дельта яме (продолжение)

В этом случае $U(x) = -|U_0|\delta(x), \quad E = -|E| < 0$,

Дельта-яма находится в точке $x = 0$

$E = -|E|$-энергия связанного электрона.

Уравнение Шредингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

в этом случае имеет вид

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2} - |U_0|\delta(x)\right)\psi(x) = -|E|\psi(x)$$

$$E = -\frac{m_e|U_0|^2}{2\hbar^2},$$

а волновая функция $\psi(x)$ равна

$$\psi(x) = \sqrt{k}e^{-k|x|}, \ \text{где} \ k = \frac{m_e|U_0|}{\hbar^2}.$$

Среднее значение потенциальной энергии электрона при одномерном движении

$$\langle U \rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \psi^*(x)U(x)\psi(x)dx.$$

$$\langle U \rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \sqrt{k}e^{-k|x|}\left(-|U_0|\delta(x)\right)\sqrt{k}e^{-k|x|}dx = -|U_0|k = -\frac{m_e|U_0|^2}{\hbar^2}.$$

$$\langle U \rangle = -\frac{m_e|U_0|^2}{\hbar^2}.$$

Среднее значение кинетической энергии электрона при одномерном движении

$$\langle T \rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \psi^*(x)\hat{T}\psi(x)dx, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e}, \ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx},$$

$$\langle T \rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \psi^*(x)\hat{T}\psi(x)dx = \frac{1}{2m_e}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \left|\hat{p}\psi(x)\right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2m_e}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}\left|\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\sqrt{k}e^{-k|x|}\right|^2 dx = 2\frac{1}{2m_e}\int\limits_{x=0}^{x=\infty}\left|\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\sqrt{k}e^{-k|x|}\right|^2 dx = \frac{m_e|U_0|^2}{2\hbar^2}.$$

$$\langle T \rangle = \frac{m_e|U_0|^2}{2\hbar^2}.$$

Задача 8

СООТНОШЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ ДЕЛЬТА ЯМЫ

Среднее значение квадрата импульса электрона при одномерном движении

$$\left\langle p^2 \right\rangle = 2m_e \langle T \rangle = \frac{2m_e m_e |U_0|^2}{2\hbar^2} = \frac{m_e^2 |U_0|^2}{\hbar^2}$$

Среднее расстояние электрона от центра ямы

$$\langle |x| \rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \psi^*(x)|x|\psi(x)dx = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \sqrt{k}e^{-k|x|}|x|\sqrt{k}e^{-k|x|}dx =$$

$$= k\int\limits_{x=0}^{x=\infty} |x|e^{-2k|x|}dx = k\int\limits_{x=0}^{x=\infty} xe^{-2kx}dx = \left(-\frac{1}{2k}\right)k\int\limits_{x=0}^{x=\infty} xde^{-2kx} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(xe^{-2kx}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{-2kx}dx \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}\right)e^{-2kx}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{4k}$$

$$\langle |x| \rangle = \frac{1}{4k} = \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m_e |U_0|}$$

Среднее значения квадрата расстояния электрона от центра ямы

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \psi^*(x)x^2\psi(x)dx = \int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} \sqrt{k}e^{-k|x|}x^2\sqrt{k}e^{-k|x|}dx =$$

$$= k\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-k|x|}x^2 e^{-k|x|}dx = k\int\limits_{x=0}^{x=\infty} x^2 e^{-2kx}dx = k\left(-\frac{1}{2k}\right)\int\limits_{x=0}^{x=\infty} x^2 de^{-2kx} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{x=0}^{x=\infty} x^2 de^{-2kx} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 e^{-2kx}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{-2kx}dx^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{-2kx}dx^2 \right) = \int\limits_{x=0}^{x=\infty} xe^{-2kx}dx = -\frac{1}{2k}\int\limits_{x=0}^{x=\infty} xde^{-2kx} =$$

$$= -\frac{1}{2k}\int\limits_{x=0}^{x=\infty} xde^{-2kx} = -\frac{1}{2k}\left(xe^{-2kx}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{-2kx}dx \right) = \frac{1}{2k}\int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{-2kx}dx = \left(\frac{1}{2k}\right)^2$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\hbar^4}{m_e^2 |U_0|^2}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\frac{\hbar^4}{m_e^2 |U_0|^2}\frac{m_e^2 |U_0|^2}{\hbar^2} = \frac{1}{4}\hbar^2$$

ПРОВЕРКА СООТНОШЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА

$$\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2$$