Гармонический осциллятор в квантовой механике

Осциллятор в классической механике

$x = x(t)$, $p = p(t)$ – динамические переменные

Уравнения Гамильтона

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}$$

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ – гамильтониан осциллятора в классической физике,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Начальные условия

$x_0 = x(t=t_0)$, $p_0 = p(t=t_0)$, t_0 – начальный момент времени,

$x = x(t)$, $p = p(t)$, $t > t_0$

Осциллятор в квантовой механике

$x \Rightarrow \hat{x}$, $p \Rightarrow \hat{p}$

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2}$ – гамильтониан осциллятора в квантовой физике,

$\hat{x}$, $\hat{p}$ – эрмитовые (самосопряжённые $\hat{x}^+ = \hat{x}$, $\hat{p}^+ = \hat{p}$) операторы,

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \Rightarrow \hat{x} = x, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Введём безразмерные операторы $\hat{Q}$, $\hat{P}$

$$\hat{Q} = \hat{x} \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}, \quad \hat{P} = \hat{p} \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega_0}}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \hat{Q}, \quad \hat{p} = \sqrt{\hbar m \omega_0} \hat{P}$$

$\hat{Q}$, $\hat{P}$ – эрмитовые операторы.

Выразим гамильтониан через новые переменные $\hat{Q}$, $\hat{P}$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2} = \frac{1}{2m} \hbar m \omega_0 \hat{P}^2 + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2} \frac{\hbar}{m\omega_0} \hat{Q}^2 = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

Найдём коммутатор $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q}$

$$\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = \hat{x} \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \hat{p} \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega_0}} - \hat{p} \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega_0}} \hat{x} \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \frac{1}{\hbar} = i\hbar \frac{1}{\hbar} = i$$

$$\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i$$

Введём операторы рождения $\hat{a}$ и уничтожения

$$\hat{a} = (\hat{Q} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^+ = (\hat{Q} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Выразим операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ через операторы $\hat{x}$, $\hat{p}$

$$\hat{a} = (\hat{Q} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^+ = (\hat{Q} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{Q} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}, \quad \hat{P} = \hat{p}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = \left(\hat{x}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} + i\hat{p}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hat{a}^+ = \left(\hat{x}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} - i\hat{p}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Найдём коммутатор $\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}$

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} &= \left((\hat{Q} + i\hat{P})(\hat{Q} - i\hat{P}) - (\hat{Q} - i\hat{P})(\hat{Q} + i\hat{P}) \right) \frac{1}{2} = \\ &= \left(-i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} - i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (-2i\hat{Q}\hat{P} + 2i\hat{P}\hat{Q}) = -i(\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q}) = 1 \\ &\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{a} = (\hat{Q} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^+ = (\hat{Q} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Выразим операторы $\hat{Q}$, $\hat{P}$ через операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$

$$+ \begin{cases} \hat{a} = (\hat{Q} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hat{a}^+ = (\hat{Q} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\hat{a} + \hat{a}^+ = \hat{Q}\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$$

$$- \begin{cases} \hat{a} = (\hat{Q} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hat{a}^+ = (\hat{Q} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\hat{a} - \hat{a}^+ = i\hat{P}\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$\begin{cases} \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+) \end{cases}$$

Выразим операторы $\hat{x}$, $\hat{p}$ через операторы рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}$

Учтём, что

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \hat{Q}, \quad \hat{p} = \sqrt{\hbar m\omega_0} \hat{P},$$

$$\begin{cases} \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{p} = \sqrt{\hbar m\omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \end{cases}$$

Выразим оператор $\hat{H}$ через операторы рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

$$\begin{cases} \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{2} (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 + \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 \right) = \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4} \left((\hat{a} + \hat{a}^+)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 = \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+ \\ (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 = \hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+ \end{cases}$$

$$(\hat{a} + \hat{a}^+)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 = 2\hat{a}\hat{a}^+ + 2\hat{a}^+\hat{a}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{4} \left((\hat{a} + \hat{a}^+)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 \right) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) \text{ — гамильтониан осциллятора в симметричной форме,}$$

выраженный через операторы рождения и уничтожения $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$.

Вспомним коммутатор операторов $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$$

$$\text{Откуда } \hat{a}\hat{a}^+ = \hat{a}^+\hat{a} + 1.$$

Теперь

$$\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ = \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + 1 = 2\hat{a}^+\hat{a} + 1$$

и гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (2\hat{a}^+\hat{a} + 1).$$

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Оператор $\hat{a}^+\hat{a} = \hat{N}$ называется оператором числа частиц $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$.

Основные свойства оператора числа частиц $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$

Оператор $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ – самосопряжённый
Доказательство

$$\hat{N}^+ = (\hat{a}^+ \hat{a})^+ = \hat{a}^+ (\hat{a}^+)^+ = \hat{a}^+ \hat{a} \text{ – определение самосопряжённого оператора}$$

Основные свойства самосопряжённого оператора

1. собственные значения самосопряжённого оператора - действительные числа.
2. собственные векторы самосопряжённого оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Задача на собственные векторы и собственные значения оператора числа частиц

$$\hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = |n\rangle n$$

$|n\rangle$ – собственный вектор оператора числа частиц,
 n – собственное значение оператора числа частиц.

Действие оператора $\hat{a}^+$ на вектор $|n\rangle$

$$\text{Обозначим } \hat{a}^+ |n\rangle = |\psi\rangle$$

$$\text{Найдём } \hat{a}^+ \hat{a} |\psi\rangle = \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ |n\rangle.$$

Учтём, что $\hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a} \hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+ \hat{a}$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \hat{a} |\psi\rangle &= \hat{a}^+ (\hat{a} \hat{a}^+) |n\rangle = \hat{a}^+ (1 + \hat{a}^+ \hat{a}) |n\rangle = \hat{a}^+ |n\rangle + \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = \\ &= |\psi\rangle + \hat{a}^+ |n\rangle n = |\psi\rangle + |n\rangle n = |\psi\rangle (n+1) \end{aligned}$$

$$\text{Итого } \hat{a}^+ \hat{a} |\psi\rangle = |\psi\rangle (n+1),$$

То есть, $|\psi\rangle = \hat{a}^+ |n\rangle$ есть собственный вектор оператора числа частиц $\hat{a}^+ \hat{a}$,
с собственным значением $n+1$.

$$\text{Или } |\psi\rangle = |n+1\rangle C,$$

$$\text{Найдём } C, \text{ если } \langle n|n\rangle = 1$$

Учтём, что

$$\langle \psi| = C^* \langle n+1|$$

$$|\psi\rangle = |n+1\rangle C$$

$$\text{тогда } \langle \psi|\psi\rangle = \langle n+1|n+1\rangle C^* C = C^* C$$

С другой стороны

$$|\psi\rangle = \hat{a}^+ |n\rangle$$

$$\langle \psi| = \langle n|\hat{a}$$

$$\langle \psi|\psi\rangle = \langle n|\hat{a} \hat{a}^+ |n\rangle$$

Учтём, что $\hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a} \hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+ \hat{a}$

$$\langle \psi|\psi\rangle = \langle n|\hat{a} \hat{a}^+ |n\rangle = \langle n|(1 + \hat{a}^+ \hat{a}) |n\rangle = \langle n|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = 1 + n$$

$$\text{Поскольку } \langle \psi|\psi\rangle = C^* C,$$

$$C^* C = 1 + n \Rightarrow C = \sqrt{1+n}$$

$$\hat{a}^+ |n\rangle = |n+1\rangle \sqrt{1+n}, \text{ если } \langle n|n\rangle = 1, \langle n+1|n+1\rangle = 1$$

Действие оператора $\hat{a}$ на вектор $|n\rangle$

Обозначим $\hat{a}|n\rangle = |\psi'\rangle$

Найдём $\hat{a}^+\hat{a}|\psi'\rangle = \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}|n\rangle$.

Учтём, что $\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a}^+\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^+ - 1$, тогда

$$\begin{aligned}\hat{a}^+\hat{a}|\psi'\rangle &= \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = \\ &= \hat{a}|n\rangle n - \hat{a}|n\rangle = \hat{a}|n\rangle(n-1) = |\psi'\rangle(n-1).\end{aligned}$$

Итого $\hat{a}^+\hat{a}|\psi'\rangle = |\psi'\rangle(n-1)$.

То есть, $|\psi'\rangle$ есть собственный вектор оператора числа частиц $\hat{a}^+\hat{a}$,
с собственным значением $n-1$.

Аналогично $\hat{a}|n\rangle = |n-1\rangle\sqrt{n}$

Нужно положить $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Таким образом

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = |n\rangle n$$

Следует отметить, что

$$\hat{a}|n\rangle = |n-1\rangle\sqrt{n} \Rightarrow \hat{a}|n=0\rangle = 0$$

$|n=0\rangle$ – основное состояние гармонического осциллятора

Волновая функция основного состояния $\psi_0(x)$

$$\hat{a}|n=0\rangle=0$$

$$\hat{a}\psi_0(x)=0$$

$$\hat{a}=\left(\hat{x}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}+i\hat{p}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}=\left(x\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}+i\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(x\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}+\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\right)\psi_0(x)=0$$

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x}=-x\frac{m\omega_0}{\hbar}\psi_0(x)$$

$$\psi_0(x)=A\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2\right)$$

Условие нормировки

$$\int_{x=-\infty}^{x=\infty}\left|A\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2\right)\right|^2 dx=1$$

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2\right)$$

ИТОГ

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=|n\rangle n, \quad n=0,1,2,3,\dots,$$

$$\hat{a}^+|n\rangle=|n+1\rangle\sqrt{1+n},$$

$$\hat{a}|n\rangle=|n-1\rangle\sqrt{n},$$

$$\hat{H}=\hbar\omega_0\left(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{H}|n\rangle=|n\rangle\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Расчёт дисперсии координаты для основного состояния

$$\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle &= \langle n=0 | \hat{x}^2 - 2\hat{x}\bar{x} + \bar{x}^2 | n=0 \rangle = \\ &= \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle - 2\bar{x} \langle n=0 | \hat{x} | n=0 \rangle + \langle n=0 | \bar{x}^2 | n=0 \rangle = \\ &= \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \langle n=0 | \bar{x}^2 | n=0 \rangle = \end{aligned}$$

$$\langle n=0 | \bar{x}^2 | n=0 \rangle = \bar{x}^2 \langle n=0 | n=0 \rangle = \bar{x}^2$$

$$\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle - \bar{x}^2$$

Расчёт $\langle n=0 | \hat{x} | n=0 \rangle$

$$\langle n=0 | \hat{x} | n=0 \rangle = ?$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

$$\begin{aligned} \langle n=0 | \hat{x} | n=0 \rangle &= \langle n=0 | \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) | n=0 \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle n=0 | \hat{a} | n=0 \rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle n=0 | \hat{a}^+ | n=0 \rangle = \end{aligned}$$

Вспомним

$$\hat{a} | n=0 \rangle = 0$$

$$(\hat{a}^+) | n=0 \rangle = | n=1 \rangle$$

$$= \langle n=0 | \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle n=0 | n=1 \rangle = 0$$

$$\bar{x} = \langle n=0 | x | n=0 \rangle = 0$$

$$\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle - \bar{x}^2 = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle$$

$$\underline{\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle}$$

Расчёт $\langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

$$\hat{x}^2 = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+)$$

Вспомним

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+\hat{a}$$

$$\hat{x}^2 = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} (\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 + \hat{a}^+\hat{a}^+)$$

$$\langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle =$$

$$= \langle n=0 | \frac{\hbar}{2m\omega_0} (\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 + \hat{a}^+\hat{a}^+) | n=0 \rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega_0} (\langle n=0 | \hat{a}\hat{a} | n=0 \rangle + \langle n=0 | 2\hat{a}^+\hat{a} | n=0 \rangle) +$$

$$+ \frac{\hbar}{2m\omega_0} (\langle n=0 | n=0 \rangle + \langle n=0 | \hat{a}^+\hat{a}^+ | n=0 \rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \langle n=0 | n=0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

Поскольку $\bar{x} = \langle n=0 | \hat{x} | n=0 \rangle = 0$

$$\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle - \bar{x}^2 = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle$$

$$\langle n=0 | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{x}^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

Расчёт дисперсии импульса для основного состояния

$$\langle n=0 | (p - \bar{p})^2 | n=0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle n=0 | (\hat{p} - \bar{p})^2 | n=0 \rangle &= \langle n=0 | \hat{p}^2 - 2\bar{p}\hat{p} + \bar{p}^2 | n=0 \rangle = \\ &= \langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle - 2\bar{p}\langle n=0 | \hat{p} | n=0 \rangle + \langle n=0 | \bar{p}^2 | n=0 \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle n=0 | \bar{p}^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | n=0 \rangle \bar{p}^2 = \bar{p}^2$$

$$\underline{\langle n=0 | (\hat{p} - \bar{p})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle - \bar{p}^2}$$

$$\langle n=0 | \hat{p} | n=0 \rangle = ?$$

$$\hat{p} = \sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$\langle n=0 | \hat{p} | n=0 \rangle = \langle n=0 | \sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+) | n=0 \rangle =$$

$$= \sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\langle n=0 | \hat{a} | n=0 \rangle - \langle n=0 | \hat{a}^+ | n=0 \rangle) =$$

$$= \sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\langle n=0 | \cdot 0 - \langle n=0 | n=1 \rangle) = 0$$

$$\langle n=0 | \hat{p} | n=0 \rangle = \bar{p} = 0$$

$$\underline{\langle n=0 | (\hat{p} - \bar{p})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle}$$

Расчёт $\langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle$

$$\hat{p} = \sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$\langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle = \left(\sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} \right)^2 \langle n=0 | (\hat{a} - \hat{a}^+)^2 | n=0 \rangle =$$

$$= \left(\sqrt{\hbar m \omega_0} \frac{1}{i\sqrt{2}} \right)^2 \langle n=0 | (\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+) | n=0 \rangle =$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+\hat{a}$$

$$= -\frac{\hbar m \omega_0}{2} \langle n=0 | (\hat{a}\hat{a} - 1 - 2\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+) | n=0 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0}{2} \langle n=0 | 1 | n=0 \rangle.$$

$$\langle n=0 | \hat{a}\hat{a} | n=0 \rangle = 0, \quad \langle n=0 | \hat{a}^+\hat{a} | n=0 \rangle = 0, \quad \langle n=0 | \hat{a}^+\hat{a}^+ | n=0 \rangle = 0$$

$$\langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0}{2}$$

$$\langle n=0 | (p - \bar{p})^2 | n=0 \rangle = \langle n=0 | \hat{p}^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0}{2}$$

ИТОГ

$$\langle n=0 | (x - \bar{x})^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\langle n=0 | (p - \bar{p})^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0}{2}$$

$$\langle n=0 | (x - \bar{x})^2 | n=0 \rangle \langle n=0 | (p - \bar{p})^2 | n=0 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$