

Квантовая теория равновесного излучения

Квантовая система в термостате

Вспомним квантовую механику

Задача на собственные функции и собственные значения

$$\hat{H}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$\hat{H}$ – гамильтониан системы,

$\{\psi_n(\mathbf{r})\}$ – собственные функции гамильтониана,

$\{E_n\}$ – собственные значения гамильтониана,

$\{g_n\}$ – кратность вырождения.

Примечание: кратность вырождения – число различных волновых функций $\psi_n(\mathbf{r})$ гамильтониана, которым соответствует одно и тоже собственное значение.

Основной постулат равновесной квантовой статистической механики

P_n – вероятность того, что квантовая система, находясь в термостате, имеет энергию E_n .

$$P_n = \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}. \quad (2)$$

Z – аналог статистической суммы.

Расчёт Z

$$\sum_n P_n = 1 \quad (3)$$

$$\sum_n \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = 1. \quad (4)$$

$$Z = \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}, \quad (5)$$

$$U = \frac{k_B T^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} - \text{энергия квантовой системы в термостате,}$$

Энергия квантовой системы в термостате

$$U = \frac{k_B T^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T}, \quad (6)$$

$$\text{где } Z = \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) получим выражение для энергии квантовой системы в термостате.

$$U = \frac{k_B T^2}{Z} \frac{\partial}{\partial T} \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = \frac{k_B T^2}{Z} \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} \left(\frac{E_n}{k_B T^2} \right).$$

Или

$$U = \sum_n \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} E_n. \quad (8)$$

Выражение для энергии квантовой системы в термостате U (8) можно записать в окончательном виде

$$U = \sum_n E_n P_n. \quad (9)$$

Планковский осциллятор в термостате

Основные термины и обозначения

E_n – энергетические уровни осциллятора,

$E_n = 0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, \dots, n\hbar\omega, \dots (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$,

$g_n = 1$ – кратность вырождения уровней,

Z – статистический интеграл,

$$Z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}, \quad (1)$$

$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ – вероятность, что осциллятор в термостате находится на n уровне.

Энергия осциллятора в термостате

$$U = \bar{\varepsilon}(\omega, T) = \frac{k_B T^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (2)$$

Энергия осциллятора при высоких температурах $\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1\right)$

В таком интервале температур

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} = 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} \Rightarrow \bar{\varepsilon}(\omega, T) = k_B T$$

В этом случае энергия квантового осциллятора в термостате совпадает с энергией классического осциллятора в термостате $\bar{\varepsilon}(\omega, T) = k_B T$.

Энергия осциллятора при низких температурах $\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \gg 1\right)$

В этом интервале температур

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 = e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \Rightarrow \bar{\varepsilon}(\omega, T) = \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

В этом случае энергия квантового осциллятора в термостате

$$\bar{\varepsilon}(\omega, T) = \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \ll \hbar\omega.$$

Энтропия квантовой системы в термостате, когда $g_n = 1$

В этом случае

$$Z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right), \quad (3)$$

$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T \ln\left(\exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)\right). \quad (4)$$

Энтропия системы в термостате равна

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (5)$$

Подстановка свободной энергии F в выражение (5) даёт

$$S = k_B \ln(Z) + k_B T \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\left(\frac{E_n}{k_B T^2} \right) \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right) \right). \quad (6)$$

Используя выражение для вероятности $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ нахождения квантовой системы на n уровне, можно записать выражение для энтропии в форме

$$S = k_B \ln(Z) + k_B \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\left(\frac{E_n}{k_B T} \right) P_n \right) = k_B \left(\ln(Z) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\left(\frac{E_n}{k_B T} \right) P_n \right) \right). \quad (7)$$

Учитывая, что полная вероятность равна 1

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n = 1,$$

формулу для энтропии запишем в виде

$$S = k_B \left(\ln(Z) \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\left(\frac{E_n}{k_B T} \right) P_n \right) \right) = k_B \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left(\ln(Z) + \frac{E_n}{k_B T} \right). \quad (8)$$

Поскольку

$$\ln(P_n) = -\frac{E_n}{k_B T} - \ln(Z),$$

то выражение для энтропии (8) можно записать в форме

$$S = -k_B \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \ln(P_n). \quad (9)$$

Следует отметить, формула (9) для энтропии квантовой системы в термостате справедлива, когда кратность вырождения всех уровней равна 1.

Квантовая теория равновесного теплового излучения

Спектральная плотность равновесного теплового излучения

Основные понятия и определения

$$\rho(\omega, T) = \frac{dE}{V d\omega} - \text{спектральная плотность равновесного теплового излучения,}$$

dE – энергия равновесного теплового излучения в объёме V и интервале частот

$$(\omega, \omega + d\omega),$$

Энергию dE можно представить как

$$dE = \bar{\varepsilon}(\omega, T) dN. \quad (1)$$

где

$$\bar{\varepsilon}(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \quad (2)$$

энергия одной электромагнитной волны (квантового осциллятора) в состоянии теплового равновесия,

$$dN = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

число электромагнитных волн (осцилляторов поля) в объёме V в интервале частот $d\omega$.

Расчёт dN

dN – число электромагнитных плоских волн в объёме V и в интервале частот $d\omega$ легко рассчитать для кубической полости, когда ребро куба равно L , из условия ортогональности плоских волн в кубической полости

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq L} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} = 0, \text{ когда } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \quad (3)$$

Для выполнения условия (3) вектор $\mathbf{k}$ достаточно задавать в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}^0 \frac{2\pi n_x}{L} + \mathbf{y}^0 \frac{2\pi n_y}{L} + \mathbf{z}^0 \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (4)$$

где $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Для расчёта dN следует отметить, что концы векторов $\mathbf{k}$ образуют в пространстве волновых векторов простую кубическую решётку. Расстояние между ближайшими точками этой решётки равно $\delta k = \frac{2\pi}{L}$. Объём куба $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$, ребро

которого равно $\frac{2\pi}{L}$, есть объём пространства волновых векторов, приходящегося на один волновой вектор (4). Для вычисления dN построим сферический слой радиуса k и толщиной dk . Объём этого слоя равен $4\pi k^2 dk$. Число волновых векторов, оканчивающихся в этом слое, равно

$$\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \quad (5)$$

Здесь $V = L^3$ – объём кубической полости. Условие (5) позволяет рассчитать число электромагнитных волн, волновые вектора которых окажутся в сферическом слое толщиной dk

$$2V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \quad (6)$$

Коэффициент 2 означает, что каждому волновому вектору соответствуют две поляризации электромагнитных волн. Для электромагнитных волн в вакууме существует простая связь между волновым вектором k и частотой ω ($\omega = kc$). Тогда dN равно

$$dN = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (7)$$

Формула (7) для dN позволяет найти dE (1) энергию равновесного теплового излучения в объёме V и интервале частот $d\omega$

$$dE = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (8)$$

Теперь спектральная плотность $\rho(\omega, T)$ равновесного теплового излучения равна

$$\rho(\omega, T) = \frac{dE}{V d\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (9)$$

Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана-Больцмана связывает плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ с температурой T . Полная плотность равновесного теплового излучения $u(T)$ связана со спектральной плотностью $\rho(\omega, T)$ следующим образом

$$u(T) = \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \rho(\omega, T) d\omega. \quad (10)$$

Для взятия интеграла (10) нужно перейти к безразмерной переменной $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. Тогда

интеграл (10) имеет вид

$$u(T) = \frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (11)$$

Определённый интеграл

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

равен $\frac{\pi^4}{15}$. Это позволяет представить плотность равновесного теплового излучения как

$$u(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4. \quad (12)$$

Формула (12) представляет закон Стефана-Больцмана

$$u(T) = \sigma' T^4, \quad (13)$$

Где σ' – постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3}. \quad (14)$$

Закон Вина

Закон Вина устанавливает связь между частотой ω_0 , на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega, T)$ и температурой T . Частота ω_0 может быть найдена из условия

$$\frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} = 0. \quad (15)$$

Производная $\frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega}$ равна

$$\frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \left[\frac{3\hbar \omega^2}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} - \frac{\hbar \omega^3 \left(\frac{\hbar}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1\right)^2} \right]. \quad (16)$$

Подстановка производной (16) в уравнение (15) приводит к трансцендентному уравнению

$$x_0 e^{x_0} = 3(e^{x_0} - 1), \quad (17)$$

где $x_0 = \frac{\hbar \omega_0}{k_B T}$. Уравнение (17) может быть решено численно $x_0 = 2.85$. Подстановка этого

значения в условие $\frac{\hbar \omega_0}{k_B T} = 2.85$ показывает, что частота ω_0 , на которую приходится максимум функции спектральной плотности равновесного теплового излучения $\rho(\omega, T)$, пропорциональна температуре

$$\omega_0 = 2.85 \frac{k_B T}{\hbar}. \quad (18)$$

Расчёт энергетической светимости абсолютно чёрного тела

Под энергетической светимостью R_e абсолютно чёрного тела понимается мощность, излучаемая с единицы поверхности.

Параметры равновесного теплового излучения

$u(T)$ – плотность равновесного теплового излучения,

$\frac{dj}{d\Omega}$ – поток равновесного теплового излучения в единице телесного угла $\left(\frac{dj}{d\Omega} = \frac{cu(T)}{4\pi} \right)$.

Откуда следует, что

$$dj = \frac{cu(T)}{4\pi} d\Omega, \quad (19)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Поток энергии dE , излучаемый с поверхности dS абсолютно чёрного тела под углом θ к нормали равен

$$dE = dj dS \cos(\theta). \quad (20)$$

Полная мощность, излучаемая с поверхности dS равна

$$dE = \frac{cu(T)}{4\pi} dS \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{cu(T)}{4} dS. \quad (21)$$

Последняя формула позволяет найти энергетическую светимость абсолютно чёрного тела

$$R_e = \frac{dE}{dS} = \frac{cu(T)}{4}. \quad (22)$$

Подстановка в (22) плотности $u(T)$ (12) позволяет найти явное выражение для энергетической светимости

$$R_e = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4. \quad (23)$$

Коэффициент в формуле (23), стоящий перед T^4 , называется постоянной Стефана-Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8} \text{ Вт.}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (24)$$

О существовании в природе наименьшей порции электрического заряда
(из неопубликованного сообщения П. А. М. Дирака)

Полную плотность энергии $u(T)$ равновесного теплового излучения можно найти по формуле

$$u(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3 \hbar^3} T^4$$

или

$$u(T) = \sigma' T^4,$$

где $\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3 \hbar^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана. П. А. М. Дирак записал эту формулу в виде

$$\sigma' = \frac{q_e^6}{c^3 \hbar^3} \frac{\pi^2 k_B^4}{15q_e^6}.$$

Здесь q_e – заряд электрона. В системе СГС $\alpha = \frac{q_e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры, и σ' можно представить в виде

$$\sigma' = \frac{\pi^2 k_B^4}{15q_e^6} \left(\frac{1}{137} \right)^3.$$

Если считать, что постоянная тонкой структуры α и заряд электрона q_e независимые величины, а σ' – экспериментальная константа, то в последней формуле q_e нельзя устремлять к нулю, поскольку в этом случае σ' начинает неограниченно возрастать.

Задача о чёрной дыре

Вспомогательный материал

Задача о первой космической скорости

Космическая станция массы m вращается по круговой орбите радиуса R вокруг планеты сферической формы массы M . Найти скорость вращения (1 космическую скорость) космической станции V .

Решение

Запишем 2 закон Ньютона для вращательного движения

$$m \frac{V^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}. \quad (1)$$

Откуда $V = \sqrt{G \frac{M}{R}}$ – 1 космическая скорость.

Задача о второй космической скорости

Какую минимальную скорость V' нужно сообщить телу массы m , находящемуся на поверхности сферической планеты массы M и радиуса R , чтобы тело ушло на бесконечность, если у планеты отсутствует атмосфера?

Вспомогательный материал

Вспомним формулу для потенциальной энергии U двух материальных точек с массами m_1 и m_2 на расстоянии r друг от друга и взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2)$$

Решение

Применим закон сохранения механической энергии для тела массы m , которому согласно условию задачи на поверхности планеты сообщили минимальную скорость V' , такую, что тело ушло на бесконечность.

1. Запишем механическую энергию тела E на поверхности планеты

$$E = \frac{mV'^2}{2} - G \frac{mM}{R}. \quad (3)$$

2. Запишем механическую энергию тела E на бесконечности

$$E = 0.$$

Такой ответ $E = 0$ обусловлен тем, что минимальная скорость тела на бесконечности равна 0 и потенциальная энергия тела на бесконечности равна нулю.

3. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mV'^2}{2} - G \frac{mM}{R} = 0. \quad (4)$$

$$\text{Откуда } V' = \sqrt{2G \frac{M}{R}} - 2 \text{ космическая скорость.}$$

При скорости тела на поверхности планеты $V' = \sqrt{2G \frac{M}{R}}$ тело уходит на бесконечность, но имеет на бесконечности нулевую скорость.

Задача П. С. Лапласа о невидимой звезде

До какого размера R_G нужно сжать звезду сферической формы массы M , чтобы звезда стала невидимой?

Решение

П. С. Лаплас пользовался корпускулярной моделью света. Свет это поток корпускул, двигающихся со скоростью $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м./с}$. При сжатии звезды (радиус звезды R уменьшается) при неизменности массы звезды ($M = \text{const}$) на поверхности звезды растёт ускорение свободного падения $g = G \frac{M}{R^2}$ и сила тяжести, что затрудняет отрыв корпускул света от звезды. При радиусе звезды равном R_G корпускулы света уходят на бесконечность, но имеют на бесконечности нулевую скорость (согласно Лапласу звезда становится невидимой). Такое условие можно записать, приравняв скорость света c второй космической скорости

$$c = \sqrt{2G \frac{M}{R_G}}. \quad (5)$$

Последнее условие позволяет найти R_G

$$R_G = 2 \frac{GM}{c^2}. \quad (6)$$

Величина R_G называется гравитационным радиусом Солнца.

Пример. При $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ (масса Солнца) $R_G \approx 3 \text{ км}$,

Плотность вещества в чёрной дыре при данной M равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_G^3} = 1.8 \cdot 10^{19} \text{ кг/м}^3.$$

Заключение

Согласно П. С. Лапласу, если Солнце сжать при неизменной массе так, что радиус звезды станет равным 3км, то Солнце станет невидимым.

Примечание: При решении этой задачи в рамках общей теории относительности ответ для R_G получается в два раза меньше.

Испарение чёрной дыры

Оценка температуры чёрной дыры по теории размерности

В формуле (6) есть две фундаментальные постоянные: скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ и гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$. Если использовать ещё две константы $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ (постоянная Планка и постоянная Больцмана), то из величин M (масса чёрной дыры), c , G и k_B можно построить величину

$$\frac{\hbar c^3}{GMk_B}, \quad (7)$$

которая имеет размерность температуры. С. Хокингу удалось рассчитать температуру черной дыры

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}. \quad (8)$$

Температура чёрной дыры T (8) позволяет оценить мощность излучения P чёрной дыры по закону Стефана-Больцмана

$$P = 4\pi R_G^2 \sigma T^4, \quad (9)$$

где σ есть постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2 \hbar^3} = 5.76 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (10)$$

Пример. Если масса чёрной дыры равна массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, то температура чёрной дыры $T = 5.8 \cdot 10^{-8} \text{ К}$.

Излучаемая мощность приводит к потере массы M чёрной дыры

$$4\pi R_G^2 \sigma T^4 = -\frac{d}{dt} Mc^2. \quad (11)$$

Закон сохранения энергии (11) позволяет записать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для массы $M(t)$ чёрной дыры

$$\begin{aligned}
4\pi \left(2 \frac{GM(t)}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M(t)} \right)^4 &= -c^2 \frac{dM(t)}{dt} . \\
4\pi \left(2 \frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{M^2(t)} &= -c^2 \frac{dM(t)}{dt} \\
-4\pi \left(2 \frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} dt &= M^2 dM \\
-4\pi \left(2 \frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} \int_{t=0}^{t=\tau} dt &= \int_{M=M_0}^{M=0} M^2 dM \\
-4\pi \left(2 \frac{G}{c^2} \right)^2 \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{c^2} \tau &= -\frac{1}{3} M_0^3
\end{aligned} \tag{12}$$

Интегрирование дифференциального уравнения (12) позволяет найти полное время испарения τ чёрной дыры

$$\tau = \frac{5 \cdot 64^2}{4} \pi \frac{GM_0^2}{\hbar c} \frac{GM_0}{c^3}, \tag{13}$$

где M_0 – начальная масса чёрной дыры.

$$\tau = 5 \cdot 32^2 \cdot \pi \frac{GM_0^2}{\hbar c} \frac{GM_0}{c^3}$$