

Квантовая статистическая механика равновесных систем

Большой канонический квантовый ансамбль Гиббса для невзаимодействующих частиц

Цель занятия: Вывести распределения Ферми и Бозе

Основные понятия, определения и формулы

μ – химический потенциал. Химический потенциал это энергия, которую нужно затратить, чтобы в термостате появилась новая частица,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots$ – энергетические уровни частиц в термостате,

n_1 – число частиц на 1 уровне,

n_2 – число частиц на 2 уровне,

n_3 – число частиц на 3 уровне,

...

$n_1, n_2, n_3, \dots$ – числа заполнения,

$n_1 + n_2 + n_3 + \dots = N$ – полное число частиц в термостате,

$N \neq const$,

$E_{n_1, n_2, n_3, \dots} = \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \varepsilon_3 n_3 + \dots - \mu \sum_i n_i$ – полная энергия частиц в термостате,

$E_{n_1, n_2, n_3, \dots} = \sum_i n_i (\varepsilon_i - \mu)$ – другая форма записи полной энергии.

Основной постулат большого канонического ансамбля Гиббса для невзаимодействующих частиц

$$P_{n_1, n_2, n_3, \dots} = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{E_{n_1, n_2, n_3, \dots}}{k_B T} \right), \quad (1)$$

$P_{n_1, n_2, n_3, \dots}$ – вероятность того, что в термостате на i уровне n_i частиц,

Z – играет роль нормировочной константы и большого статистического интеграла.

Расчёт константы Z (большого статистического интеграла)

Исходной точкой для расчёта константы Z является условие нормировки

$$\sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} P_{n_1, n_2, n_3, \dots} = 1. \quad (2)$$

Условие (2) и определение (1) позволяют найти константу Z

$$Z = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \exp \left(-\frac{E_{n_1, n_2, n_3, \dots}}{k_B T} \right). \quad (3)$$

Константа Z играет роль большого статистического интеграла и позволяет найти термодинамические потенциалы

$$\Omega = -k_B T \ln(Z), \quad \langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \dots \quad (4)$$

Статистика Ферми

В этом случае числа заполнения принимают следующие значения

$$n_1 = 0, 1, \quad n_2 = 0, 1, \quad n_3 = 0, 1, \quad \dots \quad (5)$$

Расчёт Z (в термостате один уровень)

ε_1

$n_1 = 0, 1;$

$$E_{n_1=0} = 0, \quad E_{n_1=1} = \varepsilon_1 - \mu$$

$$Z = e^{-\frac{E_{n_1=0}}{k_B T}} + e^{-\frac{E_{n_1=1}}{k_B T}} = e^{-\frac{0}{k_B T}} + e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mu}{k_B T}} = 1 + e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mu}{k_B T}}. \quad (6)$$

Расчёт Z (в термостате два уровня)

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ & E_{n_1=0, n_2=0} = 0, \quad E_{n_1=1, n_2=0} = (\varepsilon_1 - \mu), \\ & E_{n_1=0, n_2=1} = (\varepsilon_2 - \mu), \quad E_{n_1=1, n_2=1} = (\varepsilon_1 - \mu) + (\varepsilon_2 - \mu). \\ & Z = e^{-\frac{E_{n_1=0, n_2=0}}{k_B T}} + e^{-\frac{E_{n_1=1, n_2=0}}{k_B T}} + e^{-\frac{E_{n_1=0, n_2=1}}{k_B T}} + e^{-\frac{E_{n_1=1, n_2=1}}{k_B T}}, \\ & Z = e^{-\frac{0}{k_B T}} + e^{-\frac{(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{(\varepsilon_1 - \mu) + (\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}}, \\ & Z = \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mu}{k_B T}} \right) \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_2 - \mu}{k_B T}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Расчёт Z (в термостате три уровня)

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \\ & \text{В этом случае} \\ & Z = \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mu}{k_B T}} \right) \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_2 - \mu}{k_B T}} \right) \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_3 - \mu}{k_B T}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Расчёт Z (в термостате N уровней)

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N \\ & \text{В этом случае} \\ & Z = \prod_{i=1}^{i=N} \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}} \right). \\ & \Omega = -k_B T \ln(Z) = - \sum_{i=1}^{i=N} k_B T \ln \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}} \right), \\ & \langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}} + 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция

$$n(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}} + 1} \quad (10)$$

называется функцией Ферми, где $n(\varepsilon, T)$ – среднее число частиц Ферми с энергией ε . Основное свойство функции Ферми при $T = 0K$

$$n(\varepsilon, T) = \begin{cases} 1. & \varepsilon < \mu \\ 0. & \varepsilon > \mu \end{cases}. \quad (11)$$

Статистика Бозе

Возможные числа заполнения

$n_i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ – возможные числа заполнения i уровня,

В термостате 1 уровень с энергией ε_1

Возможные энергии системы

$E_{n_1=0} = 0, E_{n_1=1} = \varepsilon_1 - \mu, E_{n_1=2} = 2(\varepsilon_1 - \mu), E_{n_1=3} = 3(\varepsilon_1 - \mu), \dots$

$$Z_1 = e^{-\frac{0}{k_B T}} + e^{-\frac{(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{2(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{3(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\frac{(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}}} = \left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon_1 - \mu)}{k_B T}}\right)^{-1}. \quad (12)$$

В термостате 1 уровень с энергией ε_2

Возможные энергии системы

$E_{n_2=0} = 0, E_{n_2=1} = \varepsilon_2 - \mu, E_{n_2=2} = 2(\varepsilon_2 - \mu), E_{n_2=3} = 3(\varepsilon_2 - \mu), \dots$

$$Z_2 = e^{-\frac{0}{k_B T}} + e^{-\frac{(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{2(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}} + e^{-\frac{3(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\frac{(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}}} = \left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon_2 - \mu)}{k_B T}}\right)^{-1}. \quad (13)$$

В термостате 1 уровень с энергией ε_1 и 1 уровень с энергией ε_2

Возможные энергии системы

$E_{n_1} + E_{n_2}$

$$Z = \sum_{n_1, n_2=0}^{n_1, n_2=\infty} \exp\left(-\frac{E_{n_1} + E_{n_2}}{k_B T}\right) = \sum_{n_1=0}^{n_1=\infty} \exp\left(-\frac{E_{n_1}}{k_B T}\right) \sum_{n_2=0}^{n_2=\infty} \exp\left(-\frac{E_{n_2}}{k_B T}\right) = Z_1 Z_2$$

Когда в системе N уровней с энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N$, то

$$Z = \prod_{i=1}^{i=N} \left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)}{k_B T}}\right)^{-1}. \quad (14)$$

$$\Omega = -k_B T \ln(Z) = k_B T \sum_{i=1}^{i=N} \ln \left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)}{k_B T}}\right). \quad (15)$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}} - 1}. \quad (16)$$

Функция

$$n(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}} - 1} \quad (17)$$

Называется функцией Бозе.

Трёхмерный Ферми газ невзаимодействующих частиц при $T=0K$

Для исследования свойств газа из невзаимодействующих Ферми частиц воспользуемся ранее полученной функцией Ферми при $T = 0K$

$$n(\varepsilon, T = 0K) = \begin{cases} 1. & \varepsilon < \mu \\ 0. & \varepsilon > \mu \end{cases}, \quad (1)$$

где μ – химический потенциал. Волновые функции для свободных Ферми-частиц имеют вид

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{V}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (2)$$

Здесь V – объём трёхмерной области, в которой движутся свободные Ферми частицы. Для дальнейшего расчёта в качестве трёхмерной области удобно выбрать куб с ребром L , когда $V = L^3$. Волновым функциям (2) соответствуют энергии

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} & \text{(нерелятивистская область)} \\ \hbar c k & \text{(ультрарелятивистская область)} \end{cases}. \quad (3)$$

Следует отметить, что согласно (3) энергия частицы определяется только модулем вектора $\mathbf{k}$. Химический потенциал μ определяется числом свободных частиц N в объёме V . Для установления связи между μ и N потребуем, чтобы волновые функции $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ (2) удовлетворяли условию ортогональности в кубической области, где движутся частицы

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq L} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} = 0, \quad \text{когда } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \quad (4)$$

Для выполнения условия (4) вектор $\mathbf{k}$ достаточно задавать в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}^0 \frac{2\pi n_x}{L} + \mathbf{y}^0 \frac{2\pi n_y}{L} + \mathbf{z}^0 \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (5)$$

где $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Для расчёта μ следует отметить, что концы векторов $\mathbf{k}$ образуют в пространстве волновых векторов простую кубическую решётку. Расстояние между ближайшими точками этой решётки равно $\delta k = \frac{2\pi}{L}$. Объём куба $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$, ребро которого равно $\frac{2\pi}{L}$, есть объём пространства волновых векторов, приходящегося на один волновой вектор (5). Для вычисления μ построим сферический слой радиуса k и толщиной dk . Объём этого слоя равен $4\pi k^2 dk$. Число волновых векторов, оканчивающихся в этом слое, равно

$$\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \quad (6)$$

Формула (6) позволяет найти число состояний dN частиц, для которых волновые вектора заканчиваются в сферическом слое толщиной dk

$$dN = 2V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \quad (7)$$

Множитель 2 учитывает вырождение энергии свободной частицы по ориентации спина. Функция Ферми (1) показывает, что все состояния, у которых энергия ε_k меньше μ свободны. Энергия частицы при $T = 0K$, когда $\varepsilon_k = \mu$, называется энергией ферми ε_F , волновой вектор, соответствующей этой

энергии обозначается как k_F , а сфера в пространстве волновых векторов радиуса k_F называется сферой Ферми. Число состояний частиц внутри сферы Ферми равно

$$2 \frac{\frac{4}{3} \pi k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}. \quad (8)$$

Приравнявая число частиц N в системе величине (8) можно установить связь между числом частиц N и радиусом сферы Ферми k_F

$$N = V \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (9)$$

Радиус сферы Ферми k_F удобно выразить через плотность $n = N/V$ частиц

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}. \quad (10)$$

Энергия нерелятивистского Ферми газа при $T = 0K$

Энергия нерелятивистского газа может быть рассчитана по формуле

$$U = \int_{k=0}^{k=k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} dN, \quad (11)$$

где выражение для dN задаётся формулой (7). Подстановка dN (7) в (11) приводит к следующему выражению для энергии нерелятивистского газа

$$U = V \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m}. \quad (12)$$

Формула (12) позволяет найти среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle = U/N$ нерелятивистской частицы при $T = 0K$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \quad (13)$$

Энергия ультрарелятивистского Ферми газа при $T = 0K$

Энергия ультрарелятивистской частицы задаётся формулой $\varepsilon = \hbar c k$ и энергия ультрарелятивистского газа может быть представлена как

$$U = \int_{k=0}^{k=k_F} \hbar c k dN, \quad (14)$$

где выражение для dN задаётся формулой (7). Подстановка dN (7) в (14) приводит к следующему выражению для энергии ультрарелятивистского газа

$$U = V \frac{c\hbar}{4\pi^2} k_F^4. \quad (15)$$

Средняя энергия $\langle \varepsilon \rangle = U/N$ ультрарелятивистской частицы при $T = 0K$ равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{4} c\hbar k_F. \quad (16)$$

Задача о железной звезде

В настоящем разделе рассматривается задача о параметрах звезды, когда термоядерные реакции в звезде закончились, и температура звезды опустилась до $T = 0K$. Как известно, термоядерные реакции (реакции синтеза) заканчиваются образованием ядер железа, ядра железа не объединяются в более тяжёлые ядра. Такое образование называется железной звездой (белым карликом). И так, веществом, из которого состоит железная звезда, являются: ядра железа и электронный газ. Суммарный электрический заряд такой системы равен нулю, а температура опустилась до $T = 0K$. Ниже проводится расчёт полной энергии E_{tot} такой системы и находятся параметры железной звезды (размеры, удельная плотность вещества). Полная энергия железной звезды определяется энергией электронного газа U_{el} , энергией тяготения U_G и энергией ядер железа U_{Fe}

$$E_{tot} = U_{el} + U_G + U_{Fe}. \quad (1)$$

Ниже даны расчёты U_{el} , U_G , U_{Fe} .

Расчёт энергии тяготения U_G

Расчёт энергии тяготения U_G проводится в модельном представлении, когда звезда имеет сферическую форму, а плотность звезды одинакова во всех точках шара. Полный радиус железной звезды будем обозначать как R , а массу как M . Для расчёта энергии тяготения U_G железной звезды будем использовать известную формулу для энергии тяготения U двух точечных масс m_1 и m_2 , расстояние между которыми равно r

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2)$$

Для дальнейшего расчёта нам понадобится объём звезды $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ и плотность звезды

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (3)$$

В качестве первого этапа расчёта U_G мысленно рассмотрим сферическое тело радиуса r ($r < R$), центр которого совпадает с центром звезды. Масса такого тела $m(r)$ равна

$$m(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (4)$$

Вокруг этой сферы радиуса r построим сферический слой толщиной dr . Масса такого слоя dm равна

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr. \quad (5)$$

Энергия тяготения dU_G сферического слоя массы dm (5) и сферы массы m (4) может быть найдена по формуле (2)

$$dU_G = -G \frac{m(r) \cdot dm}{r}. \quad (6)$$

Полная энергия тяготения U_G может быть представлена как интеграл от величины dU_G

$$U_G = - \int_{r=0}^{r=R} G \frac{m(r) \cdot dm}{r}. \quad (7)$$

После подстановки величин $m(r)$ (4), dm (5) и ρ (3) в выражение (7) полная энергия тяготения U_G (7) имеет вид

$$U_G = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (8)$$

Основные параметры и обозначения

M – масса железной звезды,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объём железной звезды,

R – радиус железной звезды,

m_{Fe} – масса атома железа,

$N_{Fe} = \frac{M}{m_{Fe}}$ – число ядер железа в железной звезде,

Z – число протонов в ядре железа,

$N_e = N_{Fe}Z = \frac{MZ}{m_{Fe}}$ – число электронов в железной звезде,

$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$ – средняя энергия одного нерелятивистского электрона при $T = 0K$ (этот результат

получен в предыдущем разделе),

m_e – масса электрона,

$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N_e}{V} \right)^{1/3}$ – радиус сферы Ферми для электронов,

Энергия U_{el} нерелятивистского электронного газа при $T = 0K$ в железной звезде

Энергия нерелятивистских электронов в звезде равна

$$U_{el} = N_e \langle \varepsilon \rangle. \quad (9)$$

Подстановка в формулу (9) выражений для N_e , $\langle \varepsilon \rangle$, k_F и V из приведённого выше списка даёт возможность представить энергию U_{el} в виде

$$U_{el} = \left(\frac{MZ}{m_{Fe}} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{1}{R^2}. \quad (10)$$

Энергия ядер железа U_{Fe} при $T = 0K$ в железной звезде

Энергию ядер железа при $T = 0K$, если ядра железа частицы Ферми, можно представить как

$$U_{Fe} = N_{Fe} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fe}^2}{2m_{Fe}}. \quad (11)$$

Здесь $k_{Fe} = \left(3\pi^2 \frac{N_{Fe}}{V} \right)^{1/3}$ – радиус сферы Ферми для ядер железа. Формулу (11) для энергии ядер железа можно сравнить с формулой (9) для энергии электронов. Нетрудно видеть, что $U_{el} \gg U_{Fe}$, поскольку $m_{Fe} \gg m_e$, $N_e \gg N_{Fe}$. Это позволяет пренебречь энергией ядер железа U_{Fe} в сравнении с энергией электронов U_{el} и представить полную энергию железной звезды E_{tot} при $T = 0K$ как

$$E_{tot} = U_{el} + U_G. \quad (12)$$

Функция $E_{tot}(R)$ (12)

$$E_{tot}(R) = \left(\frac{MZ}{m_{Fe}} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (13)$$

Полная энергия $E_{tot}(R)$ имеет минимум при $R = R_0$, который можно найти из условия

$$\frac{\partial E_{tot}(R)}{\partial R} = 0. \quad (14)$$

$$R_0 = \frac{1}{GM^2} \left(\frac{MZ}{m_{Fe}} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3}. \quad (15)$$

Для оценки R_0 положим $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ (это масса Солнца), $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$, $Z = 26$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (масса протона), $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, $m_{Fe} = 56 \cdot m_p = 9.4 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$, 56-число нуклонов в ядре железа.

Подстановка этих констант и параметров в формулу (15) позволяет рассчитать радиус Солнца $R_0 = 5.7 \cdot 10^6 \text{ м}$, когда все термоядерные реакции на Солнце закончатся, ядра всех элементов превратятся в ядра железа, а температура опустится до $T = 0 \text{ К}$. Расчёт R_0 позволяет рассчитать удельную плотность ρ Солнца

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R_0^3} = 2.6 \cdot 10^9 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Полученные цифры можно сравнить с радиусом Земли $R_3 = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$ и плотностью Земли $\rho_3 = 5.5 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$.

Расчёт радиуса сферы Ферми в железной звезде

Радиус сферы Ферми для электронов задаётся формулой

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N_e}{V} \right)^{1/3}, \quad (16)$$

где $N_e = \frac{MZ}{m_{Fe}}$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. В состоянии с наименьшей энергией, когда $R = R_0$, радиус сферы Ферми k_{F0} пропорционально $M^{2/3}$

$$k_{F0} \sim M^{2/3}. \quad (17)$$

Формула (17) позволяет сделать вывод, что с увеличением массы железной звезды M радиус сферы Ферми растёт и электроны становятся релятивистскими, а при больших значениях M - ультрарелятивистскими. В этом случае средняя энергия $\langle \varepsilon \rangle$ ультрарелятивистского электрона при $T = 0 \text{ К}$ задаётся формулой

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{4} c \hbar k_F. \quad (18)$$

Формула (18) для средней энергии ультрарелятивистского электрона $\langle \varepsilon \rangle$ при $T = 0 \text{ К}$ была получена в предыдущем разделе.

Условие перехода железной звезды в нейтронную звезду

При больших массах полная энергия железной звезды задаётся формулой

$$E_{tot} = N_e \langle \varepsilon \rangle - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (19)$$

Или

$$E_{tot} = N_e \frac{3}{4} c \hbar k_F - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (20)$$

Радиус сферы Ферми k_F задаётся формулой (16), где $N_e = \frac{MZ}{m_{Fe}}$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Это позволяет представить полную энергию железной звезды в виде

$$E_{tot} = \frac{MZ}{m_{Fe}} \frac{3}{4} c\hbar \left(\frac{9\pi}{4} \frac{ZM}{m_{Fe}} \right)^{1/3} \frac{1}{R} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (21)$$

Формула (21) показывает, при больших значениях массы железной звезды M

$$\frac{MZ}{m_{Fe}} \frac{3}{4} c\hbar \left(\frac{9\pi}{4} \frac{ZM}{m_{Fe}} \right)^{1/3} < \frac{3}{5} GM^2 \quad (22)$$

энергия железной звезды E_{tot} становится отрицательной и при этом E_{tot} неограниченно убывает, когда радиус железной звезды уменьшается. Это означает, что при выполнении условия (22) функция E_{tot} не имеет минимума. Таким образом, при выполнении условия (22) происходит неограниченное сжатие железной звезды. Условие

$$\frac{M_0 Z}{m_{Fe}} \frac{3}{4} c\hbar \left(\frac{9\pi}{4} \frac{ZM}{m_{Fe}} \right)^{1/3} = \frac{3}{5} GM_0^2 \quad (23)$$

позволяет найти максимально возможную массу железной звезды

$$M_0 = \left(\left(\frac{5}{4} \frac{\hbar c}{G} \right) \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{Z}{m_{Fe}} \right)^{4/3} \right)^{3/2} = 2.7 \cdot 10^{30} \text{ кг}. \quad (24)$$

При $M_0 < M$ железная звезда начинает сжиматься, её плотность увеличивается, протоны в ядрах железа поглощают электроны и превращаются в нейтроны, а железная звезда превращается в нейтронную звезду.

Нейтронная звезда

В предыдущем разделе была рассмотрена задача о железной звезде (белом карлике), звезде, в которой термоядерные реакции закончились, и температура звезды опустилась до $T = 0K$. Как известно, термоядерные реакции (реакции синтеза) заканчиваются образованием ядер железа, ядра железа не объединяются в более тяжёлые ядра. Такое образование называется железной звездой (белым карликом). И так, веществом, из которого состоит железная звезда, являются: ядра железа и электронный газ. Суммарный электрический заряд такой системы равен нулю, а температура опустилась до $T = 0K$. Был проведён расчёт полной энергии E_{tot} такой системы и были найдены параметры железной звезды (размеры, удельная плотность вещества). В предыдущем разделе было найдено условие перехода железной звезды в нейтронную звезду. В задаче о белом карлике была найдена максимально возможная масса железной звезды M_0

$$M_0 = \left(\left(\frac{5}{4} \frac{\hbar c}{G} \right) \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{Z}{m_{Fe}} \right)^{4/3} \right)^{3/2} = 2.7 \cdot 10^{30} \text{ кг}. \quad (1)$$

В предыдущем разделе, где рассмотрена задача о железной звезде, дано описание всех параметров входящих в формулу (1). Если масса M железной звезды велика и удовлетворяет условию $M_0 < M$, то железная звезда начинает сжиматься, её плотность увеличивается, протоны в ядрах железа поглощают электроны и превращаются в нейтроны, а железная звезда превращается в нейтронную звезду.

В настоящем разделе проводится расчёт полной энергии E_{tot} нейтронной звезды, когда её температура опустилась до $T = 0K$. Проведён расчёт параметров нейтронной звезды (размеры, удельная плотность вещества), найдено условие перехода нейтронной звезды в чёрную дыру. Полная энергия нейтронной звезды E_{tot} , когда её температура опустилась до $T = 0K$, определяется энергией нейтронного газа U_n и энергией тяготения U_G

$$E_{tot} = U_n + U_G. \quad (2)$$

Расчёт энергии тяготения U_G был сделан в задаче о железной звезде

$$U_G = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (3)$$

Здесь M – масса гравитирующего шара радиуса R . В настоящем разделе параметр R задаёт радиус нейтронной звезды, а параметр M – массу нейтронной звезды. Энергия нейтронного газа при $T = 0K$ может быть представлена как энергия нерелятивистского вырожденного Ферми газа. Эта энергия была найдена в разделе вырожденный Ферми газ

$$U_n = N_n \langle \varepsilon \rangle. \quad (4)$$

Здесь $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_n}$ – средняя энергия одного нерелятивистского фермиона (нейтрона) при $T = 0K$,

$N_n = \frac{M}{m_n}$ – число нейтронов в звезде, m_n – масса нейтрона, k_F – радиус сферы Ферми нейтронов

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N_n}{V} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Здесь $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ – объём нейтронной звезды. Подстановка этого значения V в формулу (5) с учётом

выражения для числа нейтронов $N_n = \frac{M}{m_n}$ позволяет выразить радиус сферы Ферми через радиус нейтронной звезды R

$$k_F = \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{1/3} \frac{1}{R}. \quad (6)$$

Теперь полная энергия вырожденного нейтронного газа (4) равна

$$U_n = \frac{M}{m_n} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{2/3} \frac{1}{R^2}. \quad (7)$$

Это, в свою очередь, позволяет представить полную энергию E_{tot} (2) нейтронной звезды в виде

$$E_{tot}(R) = \frac{M}{m_n} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{2/3} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (8)$$

Полная энергия нейтронной звезды $E_{tot}(R)$ имеет минимум при $R = R_{0n}$, который можно найти из условия

$$\frac{\partial E_{tot}(R)}{\partial R} = 0. \quad (9)$$

$$R_{0n} = \frac{\hbar^2}{Gm_n^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{2/3} \frac{1}{M}. \quad (10)$$

Выбирая в качестве массы нейтронной звезды M её наименьшее возможное значение $M_0 = 2.7 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ (1), можно найти радиус нейтронной $R_{0n} = 10 \text{ км}$, соответствующий этой массе. Соответствующая плотность нейтронной звезды равна

$$\rho = \frac{M_0}{\frac{4}{3} \pi R_{0n}^3} = 6.4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3. \quad (11)$$

Условия перехода нейтронной звезды в чёрную дыру

Анализ формулы (10) для радиуса R_{0n} показывает, что с увеличением массы M нейтронной звезды её радиус R_{0n} уменьшается. Это приводит к тому, что радиус сферы Ферми k_F (6) при этом возрастает и нейтроны становятся ультрарелятивистскими. В этом случае для расчёта энергии нейтронов $U_n = N_n \langle \varepsilon \rangle$ (4) нужно использовать среднее значение $\langle \varepsilon \rangle$ энергии ультрарелятивистского фермиона при $T = 0 \text{ K}$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{4} \hbar c k_F. \quad (12)$$

(Формула (12) была получена в одном из предыдущих разделов) В этом случае полная энергия нейтронной звезды E_{tot} задаётся формулой

$$E_{tot} = N_n \frac{3}{4} \hbar c k_F - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (13)$$

В последнюю формулу (13) можно подставить радиус сферы Ферми k_F (6) и число нейтронов

$N_n = \frac{M}{m_n}$. При этом полная энергия E_{tot} принимает вид

$$E_{tot} = \frac{M}{m_n} \frac{3}{4} \hbar c \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{1/3} \frac{1}{R} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (14)$$

Анализ формулы E_{tot} (14) показывает, что при больших массах M нейтронной звезды

$$\frac{M}{m_n} \frac{3}{4} \hbar c \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m_n} \right)^{1/3} < \frac{3}{5} G M^2 \quad (15)$$

полная энергия E_{tot} отрицательна и при уменьшении радиуса звезды R E_{tot} неограниченно уменьшается. Таким образом, при больших массах звезды происходит неограниченное сжатие нейтронной звезды и превращение её в чёрную дыру. Максимально возможное значение массы нейтронной звезды M_m может быть найдено из условия

$$\frac{M_m}{m_n} \frac{3}{4} \hbar c \left(\frac{9\pi}{4} \frac{M_m}{m_n} \right)^{1/3} = \frac{3}{5} G M_m^2 \quad (16)$$

$$M_m = \left(\frac{1}{m_n} \frac{5}{4} \frac{\hbar c}{G} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{1}{m_n} \right)^{1/3} \right)^{3/2} = 12.6 \cdot 10^{30} \text{ кг} . \quad (17)$$