Соотношение неопределённостей Гейзенберга

Описание движения частицы в классической физике

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ p_x = p_x(t),\ \ p_y = p_y(t),\ \ p_z = p_z(t)$$

Одномерное движение

$$x = x(t),\ \ p_x = p_x(t)$$

Частица имеет только одну координату и один импульс

Описание движения частицы в квантовой физике

Одномерное движение

$\psi = \psi(x,t)$ – движение частицы описывается волновой функцией

Вопрос. К чему это приводит?
Ответ:

Частица имеет много координат и много импульсов.

Δx – область, где $\psi(x)$ отлична от нуля,

Δx – неопределённость координаты.

Как это понимать?

1. Если перед каждым измерением координаты волновая функция частицы есть $\psi(x)$, то значение измеренной координаты попадает в интервал Δx.
2. Если перед каждым измерением импульса волновая функция частицы есть $\psi(x)$, то значение измеренного импульса попадает в интервал Δp_x.

Причём $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ – соотношение неопределённостей.

Задача 1

Поток электронов с дебройлевской длиной волны $\lambda = 11\text{мкм}$ падает на прямоугольную щель шириной $b = 0.1\text{мм}$. Определить с помощью соотношения неопределённостей угловую ширину пучка за щелью в градусах (см. рис. Слева)

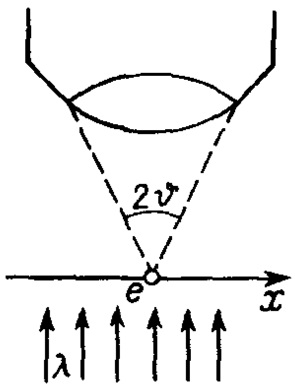

Рис. 2.3

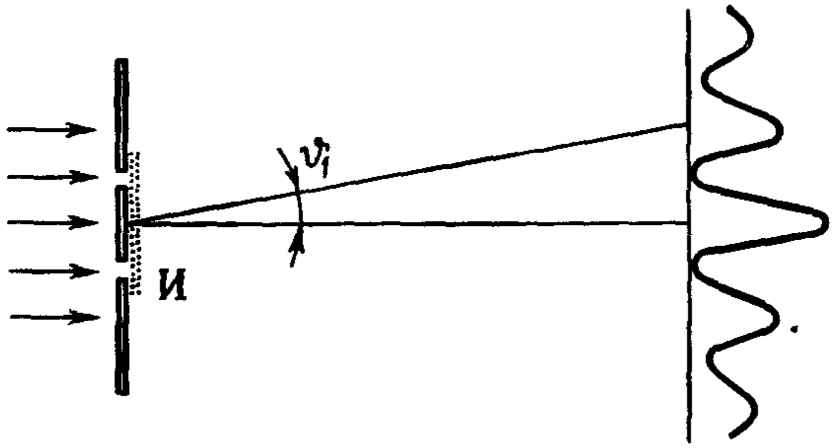

Рис. 2.4

Решение

Вспомним формулу де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p_y} \Rightarrow p_y = \frac{h}{\lambda}.$$

Здесь λ – длина волны де Бройля.

<u>Пояснение</u>: импульс электрона до прохождения через щель направлен по оси y.

Вспомним соотношение неопределённостей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

Здесь $\Delta x = b/2$

<u>Пояснение</u>: импульс электрона после прохождения через щель имеет компоненты p_y и p_x.

Компонента импульса p_y после прохождения через щель не изменяется. После прохождения через щель электрон имеет много импульсов p_x. Все значения импульсов p_x находится в интервале Δp_x. Причём

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{2\hbar}{b}.$$

Максимальное значение p_x равно

$$p_{x,\max} = \frac{2\hbar}{b}.$$

Это позволяет вычислить максимальный угол $\theta_{\max}$ отклонения электрона от оси y

$$tg\left(\theta_{\max}\right) = \frac{p_{x,\max}}{p_y} = \frac{2\hbar}{bp_y} = \frac{2\hbar\lambda}{bh} = \frac{\lambda}{\pi b} \approx 2^o.$$

Задача 2

В некоторый момент область локализации свободного электрона $\Delta x_0 = 0.1 нм$. Оценить ширину области локализации этого электрона спустя промежуток времени $\Delta t = 1 с$.

Решение

Вспомним соотношение неопределённостей

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_x \geq \hbar .$$

Откуда

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x_0} .$$

Область локализации Δx_0 электрона определяет интервал импульсов электрона

$$-p_{x,\max} \leq p_x \leq p_{x,\max} ,$$

где $p_{x\max} = \dfrac{\hbar}{\Delta x_0}$. Откуда

$$m_e V_{x,\max} = \frac{\hbar}{\Delta x_0} ,$$

где $V_{x,\max}$ – максимальная скорость электрона вдоль оси x

$$V_{x,\max} = \frac{\hbar}{\Delta x_0 m_e} .$$

Теперь максимальный путь l_x, который пройдёт электрон, равен

$$l_x = V_{x,\max} \cdot \Delta t = \frac{\hbar \Delta t}{\Delta x_0 m_e} \approx 1 \cdot 10^3 км .$$

Задача 3

Оценить неопределённость скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома водорода порядка $\Delta x_0 = 0.1$нм. Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой боровской орбите $R = 0.529$Å .

Решение

Вспомним соотношение неопределённостей

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_x \geq \hbar .$$

Откуда

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x_0},$$

но неопределённость импульса Δp_x определяет неопределённость скорости ΔV_x

$$\Delta p_x = m_e \Delta V_x .$$

Теперь неопределённость скорости ΔV_x равна

$$\Delta V_x = \frac{\hbar}{m_e \Delta x_0} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} 1.0 \cdot 10^{-10}} = 1 \cdot 10^6 \, м/с .$$

СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНА НА ПЕРВОЙ БОРОВСКОЙ ОРБИТЕ

$$m_e \frac{V^2}{R} = k_0 \frac{q_e^2}{R^2} \Rightarrow V^2 = k_0 \frac{q_e^2}{m_e R} \Rightarrow V = 2.2 \cdot 10^6 \, м./с$$

Задача 4

Оценить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области $l = 1 мкм$.

Решение

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Здесь λ – длина волны де Бройля $(\lambda = h / p)$,

$p = \dfrac{h}{\lambda} = h\dfrac{n}{2l}$ – возможные значения импульсов электрона,

$\dfrac{p^2}{2m_e}$ – кинетическая энергия электрона,

$\dfrac{p^2}{2m_e} = \dfrac{1}{2m_e}\left(h\dfrac{n}{2l}\right)^2$ – возможные значения кинетической энергии электрона,

$\dfrac{1}{2m_e}\left(h\dfrac{1}{2l}\right)^2$ – минимальное значение кинетической энергии электрона.

Задача 5

Частица находится в одномерной потенциальной яме длиной l с бесконечно высокими стенками. Оценить силу, с которой частица действует на стенку, если частица имеет наименьшую энергию.

Решение

Энергия частицы в одномерной яме равна

$$E = \frac{1}{2m_e}\left(h\frac{n}{2l}\right)^2 .$$

Сила F, действующая на стенку

$$F = -\frac{\partial}{\partial l}\frac{1}{2m_e}\left(h\frac{1}{2l}\right)^2 = 2\frac{1}{2m_e}\left(h\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{l^3} = \frac{h^2}{4m_e l^3} .$$

Задача 6

Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле $U=\frac{\chi}{2}x^2$ (гармонический осциллятор).

Оценить с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию частицы в такой яме.

Решение

Полная энергия осциллятора равна

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{\chi}{2}x^2.$$

В точках поворота

$$E=\frac{\chi}{2}A^2,$$

где A – амплитуда колебания.

Неопределённость координаты в Δx этом случае равна A

$\Delta x=A$, поскольку координата осциллятора x при совершении им гармонических колебаний находится в интервале $-A\le x\le A$.

Максимально возможное значение импульса $p_{\max}$ можно найти из условия

$E=\frac{p_{\max}^2}{2m}\Rightarrow p_{\max}=2mE$. Но максимально возможное значение импульса определяет неопределённость импульса $\Delta p=p_{\max}$, поскольку импульс осциллятора p находится в интервале $-p_{\max}\le p\le p_{\max}$.

Соотношение неопределённостей $\Delta x\cdot\Delta p=\hbar$ устанавливает связь между Δx и Δp

$$\Delta p=\frac{\hbar}{\Delta x}.$$

Как было отмечено, полная энергия равна

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{\chi}{2}x^2.$$

При периодическом движении

$E=\frac{\Delta p^2}{2m}+\frac{\chi}{2}\Delta x^2$ или $E=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\Delta x}\right)^2+\frac{\chi}{2}\Delta x^2$, то есть энергия осциллятора зависит от Δx $\left(E=E\left(\Delta x\right)\right)$.

Минимальное значение E можно определить из условия $\frac{dE\left(\Delta x\right)}{d\Delta x}=0$

$$\frac{dE\left(\Delta x\right)}{d\Delta x}=-2\frac{1}{2m}(\hbar)^2\frac{1}{\left(\Delta x\right)^3}+\chi\Delta x=0.$$

Корень последнего уравнения обозначим Δx_0. Этот корень можно найти

$$-\frac{1}{m}(\hbar)^2\frac{1}{\left(\Delta x_0\right)^3}+\chi\Delta x_0=0\Rightarrow\left(\Delta x_0\right)^4=\frac{\hbar^2}{m\chi}\text{ или}$$

$\left(\Delta x_0\right)^2=\frac{\hbar}{\sqrt{m\chi}}$. Минимальная полная энергия осциллятора равна

$$E_{\min}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\Delta x_0}\right)^2+\frac{\chi}{2}\Delta x_0^2=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{m\chi}}{\hbar}+\frac{\chi}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{m\chi}}=\hbar\sqrt{\frac{\chi}{m}}.$$

Трёхмерный Ферми газ невзаимодействующих частиц при T=0K

Для исследования свойств газа из невзаимодействующих Ферми частиц воспользуемся ранее полученной функцией Ферми при $T = 0K$

$$n\left(\varepsilon, T = 0K\right) = \begin{cases} 1. & \varepsilon < \mu \\ 0. & \varepsilon > \mu \end{cases}, \tag{1}$$

где μ – химический потенциал. Волновые функции для свободных Ферми-частиц имеют вид

$$\psi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{r}\right) = \sqrt{\frac{1}{V}} e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)}. \tag{2}$$

Здесь V – объём трёхмерной области, в которой движутся свободные Ферми частицы. Для дальнейшего расчёта в качестве трёхмерной области удобно выбрать куб с ребром L, когда $V = L^3$. Волновым функциям (2) соответствуют энергии

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} & \left(\text{нерелятивистская область}\right) \\ \hbar c k & \left(\text{ультрарелятивистская область}\right) \end{cases}. \tag{3}$$

Следует отметить, что согласно (3) энергия частицы определяется только модулем вектора $\mathbf{k}$. Химический потенциал μ определяется числом свободных частиц N в объёме V. Для установления связи между μ и N потребуем, чтобы волновые функции $\psi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{r}\right)$ (2) удовлетворяли условию ортогональности в кубической области, где движутся частицы

$$\int\limits_{0 \le x, y, z \le L} e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)} e^{-i\left(\mathbf{k}'\mathbf{r}\right)} d^3\mathbf{r} = 0, \quad \text{когда } \mathbf{k} \ne \mathbf{k}'. \tag{4}$$

Для выполнения условия (4) вектор $\mathbf{k}$ достаточно задавать в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}^0 \frac{2\pi n_x}{L} + \mathbf{y}^0 \frac{2\pi n_y}{L} + \mathbf{z}^0 \frac{2\pi n_z}{L}, \tag{5}$$

где n_x, n_y, $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Для расчёта μ следует отметить, что концы векторов $\mathbf{k}$ образуют в пространстве волновых векторов простую кубическую решётку. Расстояние между ближайшими точками этой решётки равно $\delta k = \dfrac{2\pi}{L}$. Объём куба $\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3$, ребро которого равно $\dfrac{2\pi}{L}$, есть объём пространства волновых векторов, приходящегося на один волновой вектор (5). Для вычисления μ построим сферический слой радиуса k и толщиной dk. Объём этого слоя равен $4\pi k^2 dk$. Число волновых векторов, оканчивающихся в этом слое, равно

$$\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3} = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \tag{6}$$

Формула (6) позволяет найти число состояний dN частиц, для которых волновые вектора заканчиваются в сферическом слое толщиной dk

$$dN = 2V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \tag{7}$$

Множитель 2 учитывает вырождение энергии свободной частицы по ориентации спина. Функция Ферми (1) показывает, что все состояния, у которых энергия ε_k меньше μ свободны. Энергия частицы при $T = 0K$, когда $\varepsilon_k = \mu$, называется энергией ферми ε_F, волновой вектор, соответствующей этой энергии обозначается как k_F, а сфера в пространстве волновых векторов радиуса k_F называется сферой Ферми. Число состояний частиц внутри сферы Ферми равно

$$2\frac{\frac{4}{3}\pi k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}. \tag{8}$$

Приравнивая число частиц N в системе величине (8) можно установить связь между числом частиц N и радиусом сферы Ферми k_F

$$N = V\frac{k_F^3}{3\pi^2}. \tag{9}$$

Радиус сферы Ферми k_F удобно выразить через плотность $n = N/V$ частиц

$$k_F = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \tag{10}$$

Энергия нерелятивистского Ферми газа при $T = 0K$

Энергия нерелятивистского газа может быть рассчитана по формуле

$$U = \int_{k=0}^{k=k_F}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}dN, \tag{11}$$

где выражение для dN задаётся формулой (7). Подстановка dN (7) в (11) приводит к следующему выражению для энергии нерелятивистского газа

$$U = V\frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m}. \tag{12}$$

Формула (12) позволяет найти среднюю энергию $\langle\varepsilon\rangle = U/N$ нерелятивистской частицы при $T = 0K$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \tag{13}$$

Энергия ультрарелятивистского Ферми газа при $T = 0K$

Энергия ультрарелятивистской частицы задаётся формулой $\varepsilon = \hbar ck$ и энергия ультрарелятивистского газа может быть представлена как

$$U = \int_{k=0}^{k=k_F}\hbar ck dN, \tag{14}$$

где выражение для dN задаётся формулой (7). Подстановка dN (7) в (14) приводит к следующему выражению для энергии ультрарелятивистского газа

$$U = V\frac{c\hbar}{4\pi^2}k_F^4. \tag{15}$$

Средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle = U/N$ ультрарелятивистской частицы при $T = 0K$ равна

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{4}c\hbar k_F. \tag{16}$$