

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Ф И З И К А

Методические указания к контрольной работе №4
для студентов I-II курсов ЗОТФ

НОВОСИБИРСК
1999

Данные методические указания и контрольные задания составлены в соответствии с рабочей программой по физике, принятой на кафедре Прикладной и теоретической физики НГТУ, и предназначены для студентов I-II курсов заочного общетехнического факультета.

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. Харьков
 канд. техн. наук С.В. Спутай

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Погорельский

Работа подготовлена на кафедре Прикладной и теоретической физики НГТУ.

© Новосибирский государственный
технический университет, 1999

I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

Контрольная работа №4 включает 8 задач по разделам “Электродинамика” и “Колебания и волны”. Для самостоятельного изучения этих разделов, кроме данного учебного пособия, рекомендуется использовать один из следующих учебников:

Основная литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики.- М.: Наука, 1982-1998, т.2.
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: Высшая школа, 1990-1998.

Дополнительная литература

3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике.- М.: Наука, 1985.
4. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма.- М.: Высшая школа, 1983.

Вопросы выносимые на экзамен

1. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле прямого и кругового токов. Магнитное поле движущихся зарядов.
2. Сила Лоренца. Сила Ампера. Взаимодействие параллельных токов.
3. Силы действующие на контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Магнитный поток. Работа по перемещению проводника (контур) с током в магнитном поле.
4. Закон полного тока. Уравнение Максвелла для потока вектора **B** через замкнутую поверхность.
5. Магнитное поле соленоида и тороида. Индуктивность соленоида.
6. Магнитное поле в веществе. Виды магнетиков. Граничные условия для векторов **B** и **H** на границе раздела двух сред.
7. Ток смещения. Уравнение Максвелла о циркуляции вектора **H**.
8. Явление электромагнитной индукции. ЭДС индукции.
9. Уравнение Максвелла о циркуляции вектора **E**.
10. Явление взаимной индукции и самоиндукции.
11. Энергия магнитного поля. Плотность энергии электромагнитного поля.
12. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Примеры.
13. Сложение гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами. Векторные диаграммы.
14. Сложение гармонических колебаний одного направления с близкими частотами. Биения.
15. Сложение перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

16. Затухание свободных колебаний. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Параметры, определяющие затухание.
17. Вынужденные колебания. Амплитудно-частотная характеристика. Резонанс.
18. Энергия гармонических и затухающих колебаний.
19. Волны. Уравнение плоской бегущей волны.
20. Стоячие волны. Получение стоячих волн.
21. Фазовая и групповая скорость волн.
22. Электромагнитные волны. Уравнение плоской электромагнитной волны. Свойства электромагнитных волн.
23. Энергия электромагнитных волн. Вектор Умова-Пойнтинга.

Напоминаем основные требования, предъявляемые к оформлению контрольных работ: условия задач следует переписывать полностью без сокращений, затем нужно сделать краткую запись условия, т.е. все исходные величины записать столбиком в системе единиц “СИ”; вначале получить решение в общем виде, проверить размерность результата и только после этого делать вычисления. Если используемые в решении задачи формулы не являются физическими законами, то необходимо их вывести. При расчетах соблюдайте правила приближенных вычислений. В приведенных ниже условиях задач числовые значения заданы с точностью до трех значащих цифр.

В период сессии студенты-заочники также выполняют две лабораторные работы по разделам “Электромагнетизм” и “Колебания и волны”.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

§1. Магнитостатика.

Магнитное поле, также как и электрическое поле, является одним из проявлений общего понятия *электромагнитного поля*. Язык описания количественных и качественных свойств магнитного поля во многом аналогичен языку описания электрического поля, что позволяет применять при запоминании метод аналогии. Подобно тому, как электрическое поле в данной точке пространства характеризовалось вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$, магнитное поле в данной точке пространства характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В качестве фундаментальных свойств магнитного поля следует упомянуть следующие:

- магнитное поле в заданной системе отсчета порождается электрическими токами, либо зарядами, движущимися относительно данной системы отсчета;
- в системе отсчета, в которой существует магнитное поле, на токи и движущиеся относительно этой системы отсчета заряды действуют силы со стороны магнитного поля;
- если имеется несколько источников магнитного поля, то результирующее магнитное поле в точке наблюдения будет равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых в точке наблюдения каждым из источников в отдельности (*принцип суперпозиции магнитных полей*).

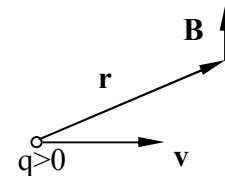
Установление этих свойств явилось результатом многочисленных наблюдений и экспериментов.

1. Закон Био-Савара-Лапласа.

В результате обобщения экспериментальных данных был получен закон, определяющий поле $\vec{B}$ точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\vec{v} \times \vec{e}_r]}{r^2}, \quad (1.1)$$

где $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от движущегося заряда q к точке наблюдения ($\vec{e}_r$ - единичный орт в этом направлении).



Поскольку положение заряда относительно точки наблюдения изменяется во времени, то и величина магнитного поля в точке наблюдения зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. Следует заметить, что характер убывания величины $\vec{B}$ с расстоянием подчиняется закону обратных квадратов характерному и для напряженности электрического поля точечного заряда.

Стационарные (не изменяющиеся со временем) магнитные поля создаются постоянными токами (элементами проводников с током) и получаются из выражений (1.1) для движущихся зарядов путем использования микроскопических представлений о характере протекающего по проводнику тока и принципа суперпозиции.

Так ток по участку проводника (элемент тока) представляется как упорядоченное движение с одинаковой скоростью большого числа носителей заряда, каждый из носителей создает в точке наблюдения “свое” магнитное поле, эти магнитные поля носителей тока, находящихся в данный момент времени в пределах рассматриваемого элемен-

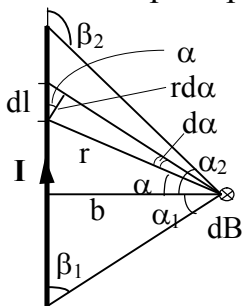
та тока, **векторно** складываются и создают результирующее магнитное поле, создаваемое элементом тока:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{e}_r]}{r^2} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\vec{j} \times \vec{r}] \cdot dV}{r^3} \quad (1.2)$$

где $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ - полный ток текущий через поперечное сечение dS проводника, $d\vec{l}$ - направленный по току элемент длины проводника с током, $\vec{j}$ - вектор плотности тока в элементе тока, $dV = d\vec{l} \cdot d\vec{S}$ - объем элемента тока, $\vec{r}$ - радиус вектор, направленный от элемента тока к точке наблюдения. Записанная формула выражает **закон Био-Савара-Лапласа**.

Формулу (1.2) можно использовать для расчета магнитного поля создаваемого любой конфигурацией постоянных токов. При этом макроскопический ток разбивается на малые прямолинейные отрезки, магнитные поля которых можно определить используя (1.2) и векторно складывая последние для нахождения результирующего поля $\mathbf{B}$. Поскольку, как правило, элементы тока непрерывно примыкают друг к другу, то суммирование осуществляется интегрированием. Следует заметить, что обычно интегрированием находятся отдельные компоненты вектора магнитной индукции в выбранной системе координат, потом по этим компонентам можно реконструировать и сам вектор $\vec{B}$.

Пример 1: Магнитное поле участка прямого тока.



Согласно закону Био-Савара-Лапласа в точке В векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление - от нас. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB , причем $dB = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \cos\alpha}{r^2}$. Из рисунка видно, что $r \cdot d\alpha = dl \cdot \cos\alpha$,

$r=b/\cos\alpha$. Поэтому $dB = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha}{b}$, и проинтегриро-

Вав по α от $-\alpha_1$ до α_2 : $B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1)$ или, через

другие углы (β , см. рисунок)

$$B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{b} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \quad (1.3)$$

В частном случае бесконечно длинного прямого тока

$$B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I}{b}. \quad (1.4)$$

Таким образом, магнитное поле создаваемое бесконечно длинными прямолинейными проводниками имеет одинаковую величину для всех точек, удаленных на одинаковое расстояние от прямой, вдоль которой

расположен проводник с током, а направление поля связано с направлением тока правилом правого винта (буравчика).

Подобным образом может быть рассчитана магнитная индукция в центре отрезка кругового тока, опирающегося на угол φ :

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \cdot \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}, \quad (1.5)$$

где R - радиус кругового витка.

Расчет магнитной индукции на оси кругового витка с током производится покомпонентно: рассчитывается компонента вектора $\vec{B}$, направленная вдоль оси симметрии витка (обычно это компонента B_z), и перпендикулярная к оси симметрии компонента B_r . В случае витка с током из соображений симметрии следует, что $B_r=0$ (в этом можно убедиться и непосредственным расчетом). Следовательно, величина осевой компоненты поля B_z будет равняться величине вектора магнитной индукции для точек, находящихся на оси витка. Эта величина зависит от расстояния h между точкой наблюдения и плоскостью, в которой расположен виток:

$$B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot I}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (1.6)$$

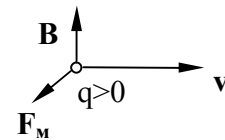
2. Сила Лоренца. Сила Ампера.

Когда в пространстве имеется магнитное поле $\vec{B}$, и в этом поле движется заряд q со скоростью $\vec{v}$, то на этот заряд действует магнитная сила:

$$\vec{F}_M = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Это составная часть полной силы, действующей на заряд в электромагнитном поле и называемой силой Лоренца:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.7)$$



Если в магнитном поле $\vec{B}$ находится участок проводника с током, то каждый носитель тока испытывает со стороны магнитного поля действие силы Лоренца. Магнитные силы, действующие на носители тока, находящихся в данный момент времени в пределах рассматриваемого элемента тока, **векторно** складываются и создают результирующую магнитную силу, действующую на элемент тока, эта сила называется силой Ампера:

$$d\vec{F}_A = I \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}] = [\vec{j} \times \vec{B}] \cdot dV. \quad (1.8)$$

Элементы тока представляют собой физически малые объекты, что надо понимать следующим образом: эти элементы малы по сравнению с характерными расстояниями, на которых рассматриваются поля, создаваемые этими элементами, или малы по сравнению с расстояниями, на которых существенно изменяется величина магнитного поля, в котором эти элементы находятся; но при этом достаточно велики, чтобы содержать в себе большое количество движущихся зарядов, чтобы существенно не сказывалась дискретность заряда.

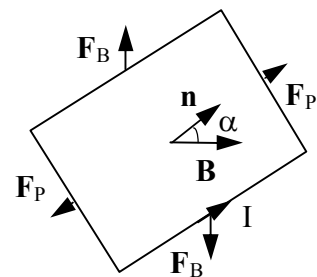
Если от элементов тока перейти к макроскопическим объектам: проводникам различной длины и формы, по которым течет ток, то процедура нахождения силы, испытываемой ими со стороны существующего магнитного поля остается прежней: находится сила, действующая со стороны магнитного поля на каждый элемент проводника, затем эти силы векторно складываются. Выше уже отмечалось, что суммирование обычно осуществляется интегрированием.

Пример 2: Сила взаимодействия параллельных токов (на единицу длины).

Сила тока в проводниках I_1 и I_2 и расстояние между ними b . Каждый элемент тока I_2 находится в магнитном поле тока I_1 , а именно поле $B_1 = (\mu_0/4\pi) \cdot 2 \cdot I_1/b$. Угол между элементом тока I_2 и вектором $\vec{B}$ прямой, поэтому на единицу длины (1 м в “СИ”) проводника с током I_2 действует сила $F_{\text{ед}} = I_2 \cdot B_1 \cdot 1$, или $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{b}$.

3. Силы действующие на контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Рассмотрим поведение плоского замкнутого контура с током в магнитном поле. Для упрощения рассмотрения контур выберем квадратным со стороной a , а магнитное поле однородным. Ток в контуре I течет против часовой стрелки. На каждую из сторон контура действует сила ампера. Направление и величина этих сил может быть найдена, как показано выше. Следует обратить внимание на то, что две силы F_p стремятся растянуть рамку, а две другие, F_B , повернуть рамку таким образом, чтобы ее плоскость стала перпендикулярна направлению вектора магнитной индукции. Такая ориентация рамки была выбрана намеренно, чтобы проиллюстрировать тот факт, что магнитное поле может оказывать на рамку с током ориентирующее и



деформирующее, в данном случае растягивающее, действие. Если же направить ток в рамке в противоположную сторону, то направления всех сил изменятся на противоположные. Результирующая сила, действующая на рамку, равна нулю, так как величина магнитного поля и взаимная ориентация магнитного поля и тока у противоположных сторон рамки в однородном поле “одинаковы”. Поэтому центр рамки не будет перемещаться в пространстве. Тем не менее, рамка будет поворачиваться под действием момента сил, действующих на верхнюю и нижнюю стороны (см. рис.). Этот момент может быть легко сосчитан, исходя из определения момента силы $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$, что в нашем случае дает для величины момента сил $M = 2 \cdot [(a/2) \cdot I \cdot B \cdot a \cdot \sin \alpha]$. Для вектора момента сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле, выражение может быть записано в виде

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}] \quad (1.9)$$

где $\vec{p}_m$ - вектор магнитного момента плоского контура с током. В свою очередь магнитный момент плоского контура произвольной формы определяется как

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}, \quad (1.10)$$

где $\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости контура, связанный правилом правого винта с направлением тока в контуре, S - площадь контура. Таким образом, магнитное поле стремится так ориентировать контур с током, чтобы направление магнитного момента контура совпало с направлением вектора магнитной индукции в месте расположения контура.

Для того чтобы угол α между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ увеличить на $d\alpha$, нужно совершить против сил, действующих на контур в магнитном поле, работу $dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha$. Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над какими-либо телами, т.е. dA идет на увеличение энергии W которой обладает не сориентированный по магнитному полю контур: $dW = p_m B \sin \alpha d\alpha$. Интегрируя, находим, что

$$W_n = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -p_m \cdot B \cdot \cos \alpha. \quad (1.11)$$

Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы энергия была минимальна при сонаправленности векторов магнитного поля $\vec{B}$ и магнитного момента $\vec{p}_m$. Изменение потенциальной энергии взятое с обратным знаком даст работу сил поля по изменению положения рамки:

$$A = -(W_2 - W_1) = p_m \cdot B \cdot \cos \alpha_2 - p_m \cdot B \cdot \cos \alpha_1 = I \cdot S \cdot B \cdot \cos \alpha_2 - I \cdot S \cdot B \cdot \cos \alpha_1.$$

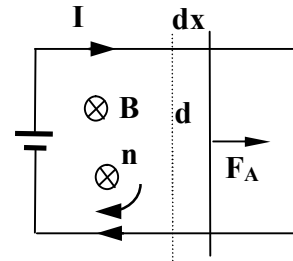
По определению поток вектора магнитной индукции через поверхность S равен $\Phi = \iint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$. В рассмотренном случае магнитный поток

$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ и работу можно записать в виде $A = I (\Phi_2 - \Phi_1)$. Если контур (катушка) состоит из числа N витков, то полный магнитный поток через поверхность, ограниченную таким контуром, будет $\Psi = N \cdot \Phi$, он также называется потокосцеплением. Справедливое для вращения плоского контура с током в магнитном поле выражение для работы через изменение магнитного потока оказывается справедливым и для произвольного перемещения контура или любой его части в магнитном поле:

$$A = I \cdot \Delta \Phi. \quad (1.12)$$

Пример 3. Работа при перемещении подвижной перемычки длиной l с током.

Пусть вектор магнитной индукции направлен “от нас” (за плоскость рисунка) и ток направлен по часовой стрелке. На перемычку действует сила ампера $F_A = I \cdot B \cdot l$. При смещении под действием этой силы вправо на dx эта сила совершает работу $dA = F_A \cdot dx = I \cdot B \cdot l \cdot dx = I \cdot B \cdot dS = I \cdot d\Phi$, где dS - приращение площади контура, $d\Phi$ - изменение магнитного потока через площадь, ограниченную контуром. Таким образом, прямой расчет приводит к результату совпадающему с (1.12).



Проверим, все ли в этом выражении в порядке со знаками, т.к. алгебраические значения векторных величин могут быть либо положительными, либо отрицательными, в зависимости от выбранных направлений “осей” системы координат. Выберем направление обхода контура (“ось” для тока) с током по направлению тока (по часовой стрелке), тогда согласованная с выбранным направлением обхода нормаль к контуру будет направлена “от нас” (это на рисунке обозначено крестиком). При выбранном направлении обхода контура ток оказывается “положительным”, направленным по направлению обхода; магнитный поток также оказывается положительным, векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{n}$ -сонаправлены, и положительным является приращение магнитного потока, так как при данных направлениях векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{n}$ площадь контура увеличивается. Так как сила F_A и dx сонаправлены, то работа силы Ампера тоже положительна. Получается, что все выражения, описывающие работу, имеют один и тот же знак положительны.

4. Закон полного тока. Уравнение Максвелла для потока вектора $\mathbf{B}$ через замкнутую поверхность.

Силовые линии вектора магнитной индукции для магнитных полей создаваемых любыми встречающимися в природе источниками всегда замкнуты (в отличие от линий напряженности электростатического поля, которые начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных). Это фундаментальное свойство магнитного поля нашло свое выражение в **уравнении Максвелла** для потока вектора $\mathbf{B}$ через замкнутую поверхность:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0, \quad (1.13)$$

т.е. число входящих в некоторый объем, ограниченный замкнутой поверхностью, линий вектора $\mathbf{B}$ всегда равно числу выходящих. Таким образом, магнитное поле *не имеет источников – магнитных зарядов* (в том смысле, в каком электрические заряды являются источниками электрического поля).

Другое важное свойство магнитного поля может быть получено из рассмотрения *циркуляции вектора $\mathbf{B}$* вокруг бесконечно длинного прямого проводника с током по окружности радиуса b вдоль силовых линий вектора $\mathbf{B}$. Для циркуляции имеем:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \oint_L B_l \cdot dl = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I}{b} \cdot 2 \cdot \pi \cdot b = \mu_0 \cdot I$$

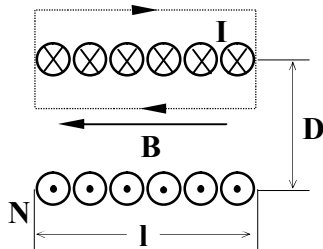
Обобщая, можно доказать, что циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по произвольному контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром L (**закон полного тока**):

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \oint_L B_l \cdot dl = \mu_0 \sum I \quad (1.14)$$

При вычислении суммы, токи, связанные с направлением обхода контура правилом правого винта, считаются положительными.

Закон полного тока в некоторых случаях (при наличии специальной симметрии системы токов) позволяет просто рассчитать величину магнитного поля.

Пример 4: Поле внутри бесконечно длинного (идеального) соленоида с током I .



Рассмотрим участок соленоида длиной l , на которой уместается N витков провода. Из физических соображений можно показать, что магнитное поле существует только внутри соленоида, причем оно однородно и силовые линии поля параллельны оси соленоида. При-

менив теорему о циркуляции $\mathbf{B}$ для показанного на рис. контура получим:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = B \cdot l = \mu_0 \cdot N \cdot I,$$

откуда находим

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot N / l. \quad (1.15)$$

Несмотря на то, что данное выражение получено для идеального соленоида, оно оказывается достаточно точным для магнитных полей внутри реальных достаточно длинных и тонких соленоидов.

Найдем также магнитное поле тороида, который представляет собой тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора. Выберем контур интегрирования L в формуле (1.10) в виде окружности радиуса r , центр которой совпадает с центром тороида. В силу симметрии вектор $\mathbf{B}$ в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру L , а модуль B постоянен. Тогда, $\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = B \cdot 2\pi r$, где B – магнитная индукция в тех точках, где проходит контур.

Если контур проходит внутри тороида, то он охватывает ток равный $2\pi R n I$ (R – радиус тороида, n – число витков на единицу его длины, I – ток в каждом витке). В этом случае $B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi R n \cdot I$, откуда

$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}$. Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает и следовательно магнитная индукция вне тороида равна нулю.

5. Магнитное поле в веществе.

Если создающие магнитное поле проводники с токами находятся не в вакууме, как предполагалось выше, а в какой-либо среде, магнитное поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает дополнительное магнитное поле $\mathbf{B}'$, которое складывается с полем токов $\mathbf{B}_0$. Результирующее поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}_0$.

Для количественного описания свойств магнетиков вводится магнитный момент единицы объема, или *вектор намагничения*

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{p}_m$ – магнитный момент отдельной молекулы, ΔV – физически “бесконечно малый” объем, взятый в окрестности выбранной точки. Сумма берется по всем молекулам заключенным в этом объеме.

Для описания магнитного поля в магнетиках, кроме вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, вводится вектор *напряженности магнитного поля* $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}. \quad (1.17)$$

Как показывают экспериментальные исследования, в однородных и изотропных магнетиках вектор намагничения связан с напряженностью поля в одной и той же точке соотношением

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (1.18)$$

где χ – величина, называемая *магнитной восприимчивостью* вещества. Подставив в формулу (1.17) значение $\mathbf{J}$ из (1.18) легко получить уравнение, связывающее вектора напряженности и магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \equiv \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (1.19)$$

где введена безразмерная величина $\mu = 1 + \chi$, называемая *относительной магнитной проницаемостью* вещества; произведение $\mu_0\mu$ называют абсолютной магнитной проницаемостью. В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости χ все магнетики подразделяются на три группы:

- 1) *диамагнетики*, у которых χ отрицательна и мала, $\mu < 1$.
- 2) *парамагнетики*, у которых χ положительна и мала, $\mu \approx 1$.
- 3) *ферромагнетики*, у которых χ положительна и велика, $\mu \gg 1$.

С особой осторожностью следует относиться к границам раздела между магнетиками, т.к. на этих границах может происходить преломление линий вектора магнитной индукции (и вектора напряженности магнитного поля), связанное с различием тангенциальных (нормальных) к границе компонент вектора $\mathbf{B}$ (и $\mathbf{H}$) по разные стороны от границы.

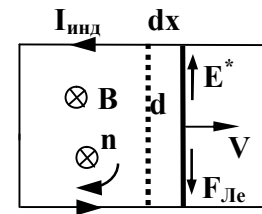
Для удобства рассмотрения полей в веществах, вводят вспомогательный вектор $\mathbf{H}$, обладающий тем свойством, что его циркуляция по замкнутому контуру, зависит лишь от алгебраической суммы макроскопических токов проводимости (не зависит от “молекулярных” токов в веществе).

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = N \cdot I$$

Связь этого вектора вектором магнитной индукции в однородном изотропном магнетике дается выражением:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}$$

Поскольку зашла речь о движущихся в магнитном поле проводниках, то наблюдается еще один эффект - возникновение ЭДС (и тока, если имеется замкнутый контур) в проводниках, движущихся в магнитном поле. Рассмотрим проводящий (для определенности металлический) стержень, движущийся вправо под действием какой-то внешней силы с постоянной скоростью V в однородном магнитном поле. С такой же скоростью двигаются вместе со стержнем и свободные электроны, находящиеся в нем. На движущиеся в магнитном поле электроны действует сила



Лоренца, направленная вниз (на рисунке), и она приводит к тому, что на нижнем конце стержня образуется избыточный отрицательный заряд электронов, а на верхнем конце - положительный не скомпенсированный заряд ионов металла. Возникает разделение заряда, что может интерпретироваться, как существование сторонней силы, а следовательно, и сторонней ЭДС. Роль сторонней силы играет магнитная сила Лоренца. Получается что-то наподобие батарейки, у которой плюс сверху, минус снизу, особенность состоит в том, что данная батарейка существует только пока движется и напряжение на ней, кроме всего прочего, зависит от скорости движения, магнитного поля и их взаимной ориентации. Для расчета величины ЭДС на концах стержня рассмотрим электрон, находящийся в стержне. На электрон, движущийся со стержнем, действует магнитная сила Лоренца, направленная вниз, и электрическая сила со стороны электрического поля, созданного перераспределившимися в стержне зарядами. Под действием этих двух сил электрон в стационарном режиме (при постоянной скорости движения стержня и величине и ориентации поля) будет покоиться относительно стержня, т.е. $(-q) \cdot \vec{E}^* = (-q) \cdot [\vec{V} \times \vec{B}]$, откуда напряженность поля сторонней силы: $\vec{E}^* = [\vec{V} \times \vec{B}]$. Сосчитав работу этого поля по переносу единичного положительного заряда вдоль участка L , где это поле существует, получим ЭДС индукции на этом участке:

$$E_i = \int_L [\vec{V} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l}.$$

В нашем конкретном случае это даст для величины ЭДС: $|E_i| = V \cdot B \cdot l$, где l - длина стержня. Если бы наш стержень двигался по металлическим направляющим, дополняющим стержень до замкнутого контура, то в контуре против часовой стрелки потек бы индукционный ток, величина которого зависела бы от полного сопротивления контура.

Рассмотрим эту же задачу с привлечением средств высшей математики и уже известных уравнений Максвелла для электрического поля. Выберем согласованные направления нормали к рамке и обхода контура (если бы рассматривался отдельный стержень, то можно было бы мысленно дополнить его до замкнутого контура). Согласно уравнению Максвелла

$$E_i = \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \oint_L ((\vec{E} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l}) = \oint_L (\vec{E}^* \cdot d\vec{l}) = \oint_L [\vec{V} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l} = \int_L [\vec{V} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l} = \\ = -V \cdot B \cdot l = -(dx/dt) \cdot B \cdot l = -B \cdot dS/dt = -d(B \cdot S)/dt = -d\Phi/dt$$

При интегрировании мы учли, что элемент длины dl направлен по направлению выбранного обхода контура (т.е. против $\vec{E}^*$, отсюда и “минус”), что циркуляция электростатического поля $\vec{E}$ равна нулю. В результате получено выражение, связывающее возникающую в контуре ЭДС индукции, со скоростью изменения магнитного потока через площадь, ограниченную контуром (одно из уравнений Максвелла):

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = E_i = -d\Phi/dt = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) \right)$$

Полученное из рассмотрения частного случая движения проводника в однородном магнитном поле выражение, может быть обобщено и распространено на более широкий круг явлений, т.к. магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, может изменяться не только вследствие изменения площади самого контура, но и вследствие изменения величины магнитного поля или взаимной ориентации контура и направления магнитного поля.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток через контур. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться. Это влечет за собой изменение магнитного потока через контур, а следовательно, и появление ЭДС индукции. Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется самоиндукцией. Магнитное поле и полный магнитный поток через контур будут пропорциональны силе тока, при этом

$$\Phi = L \cdot I$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью. Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды.

Если же ЭДС индукции в контуре вызывается изменением тока, протекающего по другому контуру, то говорят о явлении взаимной ин-

дукции в контурах. При этом взаимную индуктивность определяют как коэффициент пропорциональности между током в одном контуре и магнитным потоком, создаваемым данным током, через поверхность, ограниченную другим контуром.

Пример 5. Найти индуктивность соленоида с числом витков N и имеющего длину l и диаметр D .

В случае протекания через соленоид тока I , магнитное поле внутри соленоида было бы $B = \mu_0 \cdot I \cdot N / l$. Это поле создало бы магнитный поток через каждый виток $\Phi = B \cdot S = (\mu_0 \cdot I \cdot N / l) \cdot (\pi \cdot D^2 / 4)$. Учитывая, что полный поток через все витки суммируется, получим $\Phi_{\text{полн}} = (\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot D^2 / (4 \cdot l)) \cdot I$. Откуда индуктивность находится в виде $L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot D^2 / (4 \cdot l) = \mu_0 \cdot (N/l)^2 \cdot V$, где V - объем внутри соленоида.

С использованием выражения для индуктивности соленоида легко получить формулу для энергии магнитного поля. Как известно магнитной энергией тока называется величина $W = L \cdot I^2 / 2$. Если подставить в эту формулу выражение для индуктивности соленоида:

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot V \cdot I^2}{2 \cdot l^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V$$

Поскольку V - объем соленоида, а магнитное поле соленоида сосредоточено внутри него (точно также как и электрическое поле конденсатора сосредоточено внутри конденсатора), то $B^2 / (2 \cdot \mu_0)$ играет роль объемной плотности магнитной энергии. Таким образом, магнитная энергия тока может интерпретироваться как энергия электромагнитного поля, распределенного в пространстве с объемной плотностью $w = B^2 / (2 \cdot \mu_0)$, а для расчета полной магнитной энергии нужно проинтегрировать по всему пространству, где существует магнитное поле.

На этом заканчивается обзор основных выражений, знание которых будет способствовать выполнению заданий из раздела “Электромагнетизм”.

Основные формулы по разделу “Электромагнетизм”.

Связь магнитной индукции $\mathbf{B}$ с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \mathbf{H} \quad (2.1)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость изотропной среды, μ_0 - магнитная постоянная.

Закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r^3} \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}] \quad \text{или} \quad dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \alpha}{r^2} \cdot dl \quad (2.2)$$

где $d\vec{B}$ магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника длины dl с током I , $\vec{r}$ - радиус-вектор, направленный от проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция, α - угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и направлением тока в элементе проводника.

Магнитная индукция в центре отрезка кругового тока, опирающегося на угол φ :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot I}{2 \cdot R} \cdot \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \quad (2.3)$$

где R - радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока:

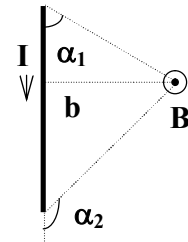
$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot I}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (2.4)$$

где h расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция, создаваемая отрезком проводника с током:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (2.5)$$

Обозначения ясны из рис.1 Направление вектора $\vec{B}$ обозначено точкой - это значит, что $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.



Напряженность магнитного поля внутри соленоида

$$H = n \cdot I \quad (2.6)$$

Рис.1

где n - число витков на единицу длины соленоида.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле:

$$\vec{F} = I \cdot [\Delta \vec{l} \times \vec{B}] \quad \text{или} \quad F = I \cdot \Delta l \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (2.7)$$

где Δl - длина проводника, α - угол между направлением тока в проводнике и вектором $\vec{B}$.

Сила взаимодействия двух параллельных токов (на единицу длины):

$$F = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{l^2} \quad (2.8)$$

где l - расстояние между токами.

Магнитный момент плоского контура с током:

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (2.9)$$

где S - площадь контура, I - ток в контуре, $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к плоскости контура (его направление совпадает с направлением движения правого винта, вращаемого по направлению тока в контуре).

Момент сил, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}] \quad \text{или} \quad M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (2.10)$$

где α - угол между векторами $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$.

Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле:

$$W_n = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -p_m \cdot B \cdot \cos \alpha \quad (2.11)$$

Сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле (сила Лоренца):

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + [\vec{V} \times \vec{B}]) \quad \text{или при} \quad (\vec{E} = 0) \quad F = q \cdot V \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (2.12)$$

где $\mathbf{V}$ - скорость частицы, α - угол между векторами $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$.

Магнитный поток:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot dS \cdot \cos \alpha = B_n \cdot dS \quad \Phi = \int_S B_n \cdot dS \quad (2.13)$$

где α - угол между вектором $\mathbf{B}$ и нормалью к поверхности dS .

Полный магнитный поток (потокосцепление):

$$\Psi = N \cdot \Phi \quad (2.14)$$

где N - число витков катушки (соленоида).

Работа по перемещению замкнутого контура (или его подвижной части) с током в магнитном поле:

$$A = I \cdot \Delta \Phi \quad (2.15)$$

ЭДС индукции:

$$E_i = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.16)$$

ЭДС самоиндукции:

$$E_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (2.17)$$

Индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot V \quad (2.18)$$

где n - плотность намотки, V - объем соленоида.

Уравнение Максвелла о циркуляции вектора $\mathbf{H}$:

$$\oint_L H_l \cdot dl = I + \frac{d}{dt} \iint_S D_n \cdot dS = \iint_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (2.19)$$

Уравнение Максвелла о циркуляции вектора $\mathbf{E}$:

$$\oint_L E_l \cdot dl = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \iint_S \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (2.20)$$

Энергия магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2} \quad (2.21)$$

Плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{H})}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} \quad (2.22)$$

Условия непрерывности отдельных компонент векторов **B** и **H**:

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad H_{t1} - H_{t2} = 0 \quad (2.23)$$

где индексы “n” и “t” обозначают компоненты векторов нормальные и параллельные к границе раздела сред, соответственно.

2.2 Колебания и волны.

Колебаниями называются процессы, имеющие определенную повторяемость во времени. В природе и технике широко распространены колебания различной природы: механические, электромагнитные, электромеханические, химические и т.д.. Независимо от природы колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Простейшими считаются гармонические колебания, т.е. колебания вида

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \quad (2.24, a)$$

которые характеризуются амплитудой A , начальной фазой φ_0 и частотой ω_0 , или связанным с ней периодом колебаний $T=2\cdot\pi/\omega_0$. Функция $x(t)$ в формуле (2.24, a) является общим решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \quad (2.24, б)$$

которое называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Рассмотрим в качестве примера две идеализированные простые системы, в которых могут происходить гармонические колебания.

1. Пружинный маятник - груз массы m , подвешенный на абсолютно упругой пружине жесткости k . Считая, что при отклонении от положения равновесия $x=0$ на груз действует только упругая сила $F=-k\cdot x$, запишем уравнение движения маятника (второй закон Ньютона) $m\cdot a=-k\cdot x$, или $\ddot{x} + (k/m) \cdot x = 0$ (Точкой над буквой обозначили производную по времени t : $\dot{x} \equiv dx/dt$). Сравнивая это уравнение с уравнениями

(2.24) легко видеть, что пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

2. Электромагнитный колебательный контур - электрическая цепь из последовательно включенных конденсатора емкости C и катушки индуктивности L . Омическое сопротивление R . Согласно второму правилу Кирхгофа $I \cdot R + U_c = E_L$, где падение напряжения $U_c = Q/C$, а ЭДС $E_L = -L \cdot \dot{I} = -L \cdot \ddot{Q}$. Таким образом мы получаем уравнение

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \cdot \dot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0 \quad (2.25)$$

которое при $R=0$ переходит в уравнение гармонических колебаний заряда конденсатора Q с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$.

Сложение гармонических колебаний.

Колеблющаяся величина может одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание или, иначе говоря, сложить колебания. Найдем вначале сумму 2-х колебаний одного направления и одинаковой частоты, $x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$, используя метод векторных диаграмм. Последние дают простую наглядную интерпретацию гармонических колебаний вида (2.24, а). Из произвольной точки O оси X отложим вектор длины A , образующий с осью угол φ . Проекция вектора на ось X равна $A \cdot \cos \varphi$. Будем считать, что вектор A равномерно вращается против часовой стрелки вокруг точки O с угловой скоростью ω_0 так, что угол φ изменяется по закону $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$. Тогда X - проекция вектора A будет совершать гармонические колебания по закону (2.24, а).

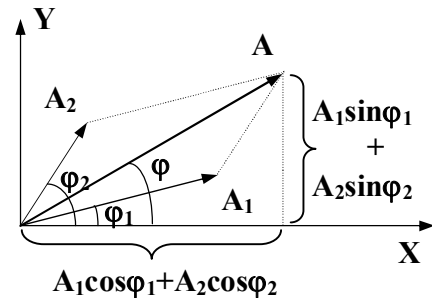


Рис.2

Для сложения колебаний x_1 и x_2 построим векторные диаграммы этих колебаний (Рис.2). Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной. Очевидно, что искомое результирующее колебание описывается изменением во времени проекции вектора $A = A_1 + A_2$. Уравнение результирующего колебания есть

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.26)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Подобным образом легко сложить любое число гармонических колебаний одинаковой частоты.

Биения - важный частный случай, когда два складываемых колебания одного направления мало отличаются по частоте. В результате сложения получаются негармонические колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды результирующего колебания называются биениями. Пусть амплитуды колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ равны A , а частоты - ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета времени выберем так, чтобы начальные фазы колебаний равнялись нулю. Для результирующего колебания $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega t + A\cos(\omega + \Delta\omega)t$ легко получить следующее выражение $x(t) = [2A\cos(\Delta\omega/2)t]\cos\omega t$ (во втором множителе мы пренебрегли малой величиной $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω). Получившиеся колебания описываются произведением двух периодических множителей. Поскольку первый множитель изменяется намного медленнее второго, колебание $x(t)$ можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда которого $\hat{A}$ медленно изменяется со временем по следующему периодическому закону:

$$\hat{A} = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|$$

Период биений $T_6 = 2\pi/\Delta\omega$.

Затухающие колебания.

В реальных колебательных системах всегда имеются силы трения, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних источников, колебания будут затухать. Для большого класса механических и электрических колебательных систем “силы трения” пропорциональны скорости изменения колеблющейся величины. Колебания в таких системах описываются дифференциальным уравнением затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (2.27)$$

общее решение которого есть

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.28)$$

Период затухающих колебаний $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ зависит от частоты свободных незатухающих колебаний ω_0 и от коэффициента затухания β . Последний определяет также скорость изменения амплитуды зату-

хающих колебаний $A(t)=A_0e^{-\beta \cdot t}$. Важной характеристикой затухающих колебаний является логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T \quad (2.29)$$

через который выражаются две другие характеристики: добротность $\Theta=\pi/\lambda$ и число колебаний N_e за время затухания $\tau=1/\beta$, $N_e=1/\lambda$.

Для каждой конкретной колебательной системы основные параметры затухающих колебаний ω_0 и β можно выразить через характеристики системы. Например, для электромагнитного L, C, R - колебательного контура, сравнивая уравнения (2.27) и (2.25), легко найти, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \beta = \frac{R}{2L} \quad (2.30)$$

Вынужденные колебания.

Один из способов получить незатухающие колебания в реальной системе - оказать на нее воздействие периодически изменяющейся “силой”. Рассмотрим здесь пример электромагнитного колебательного контура последовательно подключенного к переменной э.д.с. вида $U(t)=U_m \cos \omega t$. Используя те же законы, что и при выводе уравнения (2.25) нетрудно получить следующее уравнение

$$\ddot{Q} + 2\beta \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = \frac{U_m}{L} \cos(\omega \cdot t) \quad (2.31)$$

Решение этого уравнения равно сумме общего решения (2.28) однородного уравнения затухающих колебаний и частного решения, описывающего вынужденные колебания с частотой, равной частоте вынуждающей “силы” ω . Можно проверить, что частное решение имеет следующий вид

$$Q(t) = Q_m \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad (2.31)$$

где

$$Q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.32)$$

Рассмотрим более подробно поведение амплитуды Q_m вынужденных колебаний, как функции частоты ω . При $\omega=0$ из формул (2.33) находим $Q_m(0)=U_m/(L\omega_0^2)=CU_m$, т.е. значение заряда конденсатора, на который подано постоянное напряжение U_m (статическое отклонение). При больших частотах $\omega \gg \omega_0$ амплитуда быстро убывает: $Q_m(\omega)=U_m/(L\omega^2) \rightarrow 0$. При некотором значении частоты ω_p (резонансная частота) амплитуда достигает максимума. Исследуя Q_m на максимум, легко найти это значение частоты и самой амплитуды:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad Q_m(\omega_p) = \frac{U_m}{L2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = Q_m(0) \frac{\omega_0}{2\beta\sqrt{1 - \beta^2/\omega_0^2}} \quad (2.34)$$

Из формул (2.34) вытекает, что при малом затухании резонансная амплитуда $Q_m(\omega_p) = \Theta \cdot Q_m(0)$. Таким образом добротность Θ характеризует резонансные свойства колебательной системы - показывает во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе больше статического отклонения.

Бегущие и стоячие волны.

Процесс распространения колебаний в пространстве называют волновым процессом, или волной. Если колебания являются гармоническими, волна называется синусоидальной (или гармонической). Получим уравнение плоской бегущей волны - волны, которая распространяется вдоль одного фиксированного направления, а колебания, имеющие одинаковую фазу происходят в плоскостях перпендикулярных к направлению распространения волны (к направлению скорости волны). Пусть волна распространяется вдоль оси X со скоростью V , а источник расположен в точке $x=0$ и совершает гармонические колебания по закону $\xi(0,t) = A \cos \omega t$. В произвольной точке x колебания $\xi(x,t)$ повторяют колебания источника с запаздыванием на время $\tau = x/V$, необходимое для прохождения волны до этой точки. Таким образом, уравнение плоской бегущей синусоидальной волны есть

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - x/V) \equiv A \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad (2.35)$$

В последнем выражении использовано стандартное обозначение волнового числа $k = 2\pi/\lambda$, где длина волны $\lambda = V \cdot T = 2\pi V/\omega$.

Стоячие волны, как следует из названия, описывают установившийся в пространстве процесс колебаний. Образуются стоячие волны при наложении двух бегущих навстречу друг другу синусоидальных волн, имеющих одинаковые частоту и амплитуду: $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$.

Результат сложения

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2.36)$$

описывает распределенные в пространстве колебания с частотой ω , амплитуда которых периодически изменяется с изменением координаты x . В точках с координатами $x = \pm m\lambda/2$, $m=0, 1, 2, \dots$, амплитуда колебаний $|2A \cos kx|$ достигает максимума, равного $2A$. Такие точки называют пучностями стоячей волны. Точки, в которых амплитуда равна нулю, называют узлами. Координаты таких точек определяются урав-

нением $x=\pm(m+1/2)\lambda/2$, $m=0, 1, 2, \dots$. Стоячие волны, в отличие от бегущих, не переносят энергию в пространстве.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Пример 1. По контуру, изображенному на рис.3, идет ток силы $I=10.0$ А. Определить магнитную индукцию в точке О, если радиус дуги $R=10.0$ см, угол $\varphi=60^\circ$.

Дано:
 $I=10.0$ А,
 $R=10.0$ см = $10 \cdot 10^{-2}$ м,
 $\varphi=60^\circ$, $\mu_0=4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

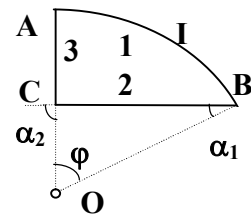


Рис.3

Определить B_O .

Решение: По принципу суперпозиции полей магнитная индукция в точке О равна векторной сумме магнитных индукций, создаваемых отдельными элементами контура с током. Рассмотрим отдельно три участка контура: дугу 1 и прямолинейные отрезки 2 и 3. Для вычисления магнитных индукций, создаваемых этими элементами, можно воспользоваться формулами (2.3), (2.5). Сначала выпишем модули всех трех слагаемых. Так как $\varphi=\pi/3$, то $B_1=\mu_0 \cdot I/(12 \cdot R)$. Далее по формуле (2.5) определим B_2 . Замечая, что углы $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=90^\circ$, а расстояние $\rho=OC=R \cdot \sin \alpha_1=R/2$, находим значение. $B_2=\sqrt{3}/(4 \cdot \pi) \cdot \mu_0 \cdot I/R$. Для определения B_3 заметим, что в этом случае $\alpha_1=\alpha_2=0$, поэтому $B_3=0$. Таким образом, магнитная индукция в точке О является суммой двух векторов $\vec{B}_O=\vec{B}_1+\vec{B}_2$. Определим направления векторов в правой части равенства. Поскольку контур ABC и точка наблюдения О лежат в одной плоскости, все элементарные векторы $d\vec{B}$ (см. формулу (2.2)), определяющие поле контура, оказываются расположенными вдоль нормали к плоскости чертежа. При этом согласно правилу правого винта векторы $d\vec{B}$, образующие сумму $\vec{B}_1$, направлены “от нас”, а образующие сумму $\vec{B}_2$ - “к нам”. Учитывая это, можно записать скалярное равенство $|B_O|=|B_2-B_1|=|\sqrt{3}/(4 \cdot \pi)-1/12| \cdot \mu_0 \cdot I/R$. Подстановка данных дает: $B_O=6.90$ мкТл.

Пример 2. Плоский квадратный контур со стороной $a=10$ см, по которому течет ток силой $I=100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B=1.0$ Тл. Определить работу А, совер-

шаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон, на угол: 1) $\alpha_1 = 90^\circ$; 2) $\alpha_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Дано:

$$B = 1.0 \text{ Тл}, I = 100 \text{ А},$$

$$a = 10 \text{ см} = 0.10 \text{ м},$$

$$\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 3^\circ.$$

Определить A_1, A_2

Решение: Контур с током обладает магнитным моментом (2.9), и во внешнем магнитном поле на него действует момент силы (2.10). По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил $M=0$, а значит, $\alpha=0$, т.е. векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ параллельны. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то момент сил (2.10) будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Для подсчета A воспользуемся известной из курса механики формулой работы, совершаемой моментом сил M при повороте на угол $d\alpha$: $dA = M \cdot d\alpha$. Подставляя значение M из (2.10) и p_m из (2.9), получаем $dA = I \cdot B \cdot a^2 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$. Интегрируя это выражение, найдем работу при повороте на конечный угол: $A = I \cdot B \cdot a^2 \int_0^{\alpha} \sin(\alpha) d\alpha$. Работа при повороте на угол 90° : $A = I \cdot B \cdot a^2 \cdot (-\cos\alpha) \big|_0^{\pi/2} = I \cdot B \cdot a^2$. Подставляя числовые значения в это выражение, находим $A_1 = 1 \text{ Дж}$. При расчете работы A_2 удобно сразу воспользоваться малостью угла $\alpha_2 = 3^\circ = \pi \cdot 3 / 180 = \pi / 60 \text{ рад}$. Для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$ и работа $A_2 = I \cdot B \cdot a^2 \cdot \int_0^{\alpha_2} \alpha d\alpha = I \cdot B \cdot a^2 \cdot \alpha_2^2 / 2$. Подставив значения, $A_2 = 1.37 \text{ мДж}$.

Задачу можно решить и другим способом, используя для подсчета работы формулу (2.15): $A = I \cdot \Delta\Phi$. В начальном положении магнитный поток Φ_1 , пронизывающий контур, равен (см. (2.13)) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = B \cdot a^2$. После поворота на угол 90° конечный поток $\Phi_2 = 0$. Работа внешних сил противоположна по знаку работе сил поля, т.е. $A_1 = -I \cdot \Delta\Phi = -I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot B \cdot a^2$, что совпадает с найденным ранее выражением.

Пример 3. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400 \text{ В}$, попал в однородное магнитное поле напряженностью $H = 1 \text{ кА/м}$. Оп-

ределить радиус кривизны R траектории и частоту n обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

Дано:

$$U=400 \text{ В}, H=1000 \text{ А/м}, m_e=9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \\ q_e=1.6 \cdot 10^{-19} \text{ К}, \mu_0=4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Определить R и n

Решение: Радиус кривизны R определим из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца $\vec{F}_L$ (2.12). Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости и, следовательно, сообщает электрону нормальное ускорение. По второму закону Ньютона, $F_L=m \cdot a_n$, где a_n - нормальное ускорение, которое может быть выражено через скорость частицы V и радиус кривизны R траектории: $a_n=V^2/R$. Таким образом, $q \cdot V \cdot B \cdot \sin \alpha = m \cdot V^2/R$ и, учитывая, что угол $\alpha=90^\circ$, находим радиус $R=m \cdot V/(q \cdot B)$. Неизвестный импульс $m \cdot V$ может быть выражен через кинетическую энергию T электрона: $m \cdot V = \sqrt{2 \cdot m \cdot T}$, а кинетическая энергия T , в свою очередь, определяется изменением потенциальной энергии электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U : $T=q \cdot U$. Выражая также магнитную индукцию B через напряженность H (см. (2.1)), получаем $R=(2 \cdot U \cdot m/q)^{1/2}/(\mu_0 \cdot H)=5.37 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Для определения частоты обращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом: $n=V/(2 \cdot \pi \cdot R)$. Следовательно, $n=q \cdot \mu_0 \cdot H/(2 \cdot \pi \cdot m)=3.5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

Пример 4. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0.1 \text{ Тл}$ равномерно с частотой $n=10 \text{ с}^{-1}$ вращается рамка, состоящая из $N=10^3$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S=150 \text{ см}^2$. Определить мгновенное значение ЭДС индукции E_i , соответствующее углу поворота рамки $\varphi_0=30^\circ$, и среднее значение ЭДС $\langle E_i \rangle$, индуцируемое в рамке при изменении угла φ от значения $\varphi_1=0^\circ$ до $\varphi_2=90^\circ$.

Дано:

$$B=0.1 \text{ Тл}, n=10 \text{ с}^{-1}, N=10^3, \\ S=150 \text{ см}^2=0.015 \text{ м}^2, \\ \varphi_0=30^\circ, \varphi_1=0^\circ, \varphi_2=90^\circ.$$

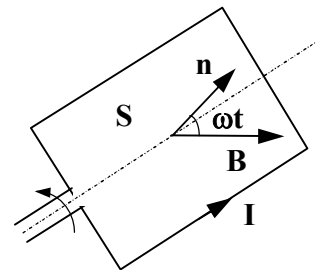


Рис.4

Определить E_i и $\langle E_i \rangle$

Решение: Мгновенное значение ЭДС индукции E_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции (2.16). Воспользовавшись формулой (2.14) для потокосцепления, получаем $E_i = -N \cdot d\Phi/dt$. При вращении рамки (рис.4) магнитный поток Φ , пронизывающий один виток в момент времени t , определяется соотношением $\Phi(t) = B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)$, которое нетрудно получить, используя определение потока (2.13); угол φ в рассматриваемом случае изменяется со временем и равен $\omega \cdot t$. Выполнив дифференцирование по времени, найдем выражение для мгновенного значения ЭДС индукции $E_i = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Круговая частота ω связана с частотой вращения соотношением $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$. Выражая ω через n и подставляя в соответствии с условием задачи значение $\omega \cdot t = \varphi_0$, получаем окончательную формулу $E_i = N \cdot B \cdot S \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \sin(\varphi_0)$. Вычисление дает $E_i = 47.1$ В.

Среднее значение $\langle E_i \rangle$ ЭДС индукции, генерируемой в течение некоторого промежутка времени Δt , равно $\langle E_i \rangle = -\Delta\Psi/\Delta t = -N \cdot \Delta\Phi/\Delta t$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -B \cdot S \cdot (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$; время Δt , за которое произошло это изменение, равно $\Delta t = (\varphi_2 - \varphi_1)/(2 \cdot \pi \cdot n)$. Таким образом, находим $\langle E_i \rangle = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot B \cdot S \cdot (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)/(\varphi_2 - \varphi_1) = 60$ В.

Пример 5. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N=1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I=4$ А магнитный поток $\Phi=6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Дано:

$N=1200$, $I=4$ А, $\Phi=6$ мкВб.

Определить L и W

Решение: Индуктивность L , по определению, связана с потокосцеплением Ψ соотношением $\Psi = L \cdot I$; Ψ , в свою очередь, выражается через магнитный поток и число витков формулой (2.14). Отсюда находим индуктивность соленоида $L = N \cdot \Phi/I$. Энергия магнитного поля соленоида равна $W = L \cdot I^2/2$ (см. формулу (2.21)), или, с учетом выражения для индуктивности, $W = N \cdot \Phi \cdot I/2$. Подставив численные значения получим: $L = 1.8$ мГн, $W = 14.4$ мДж.

Пример 6. Торойд с железным немагнитным сердечником, длина которого по средней линии $l=1.0$ м, имеет воздушный зазор шириной $d=3.0$ мм. По обмотке тороида, содержащей $N=1300$ витков, пустили

ток, в результате чего индукция магнитного поля в зазоре стала $B=1.0$ Тл. Определить силу тока в обмотке, а также плотность энергии магнитного поля в зазоре и внутри сердечника.

Дано:

$l=1.0$ м, $d=3.0$ мм= 0.0030 м,
 $N=1300$, $B=1.0$ Тл.

Определить I , w_z , w_c

Решение: По условию задачи воздушный зазор в тороиде узкий, и рассеянием линий магнитной индукции в нем можно пренебречь. Поэтому через любое поперечное сечение тороида, в том числе и через сечение в воздушном зазоре, проходит один и тот же магнитный поток Φ . Так как площадь S любого сечения одна и та же, то одинаковы и значения магнитной индукции B внутри сердечника и в воздушном зазоре: $B_z=B_c=1$ Тл. Напряженности магнитного поля H_z и H_c различны, так как различны относительные магнитные проницаемости воздуха и железа. Для воздуха $\mu=1$ и тогда $H_z=B_z/\mu_0=8.0 \cdot 10^5$ А/м. Напряженность магнитного поля в сердечнике H_c найдем с помощью графика намагничивания железа, приведенного на рис.8: $H_c=4.2 \cdot 10^2$ А/м. Используя формулу (2.22), находим плотности энергии магнитного поля в зазоре и внутри сердечника: $w_z=B_z \cdot H_z/2=4 \cdot 10^5$ Дж/м³, $w_c=B_c \cdot H_c/2=2.10 \cdot 10^2$ Дж/м³.

Для нахождения тока в обмотке воспользуемся уравнением Максвелла (2.19) о циркуляции вектора H : $\oint_L H_l \cdot dl = \sum_i I_i$. В качестве контура интегрирования выберем окружность, совпадающую со средней линией тороида. Тогда во всех точках контура L , лежащих внутри железа, $H_l=H_c$, а в зазоре $H_l=H_z$, и уравнение принимает вид: $H_c \cdot (l-d) + H_z \cdot d = N \cdot I$. Отсюда находим ток $I=2.0$ А.

Пример 7. Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями $x_1=A_1 \cos([2\pi/T][t+\tau_1])$, $x_2=A_2 \cos([2\pi/T][t+\tau_2])$, где $A_1=3$ см, $A_2=2$ см, $\tau_1=1/6$ с, $\tau_2=1/3$ с, $T=2$ с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и записать уравнение результирующего колебания.

Решение: Сравнивая оба уравнения с канонической формой (2.24, а) $x_1=A_1 \cos(\omega t+\varphi_0)$, находим частоту этих колебаний $\omega=2\pi/T=\pi$ с⁻¹ и начальные фазы $\varphi_1=2\pi\tau_1/T$, $\varphi_2=2\pi\tau_2/T$. Числовые значения начальных фаз равны $\varphi_1=\pi/6$ рад = 30° , $\varphi_2=\pi/3$ рад = 60° . Для построения векторной диаграммы надо фиксировать какой-либо момент времени. Обычно диаграмму строят для момента времени $t=0$. Откладывая отрезки дли-

ной $A_1 = 3$ см и $A_2 = 2$ см под углами $\varphi_1 = 30^\circ$ и $\varphi_2 = 60^\circ$ к оси ОХ и строя их сумму $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ (аналогично диаграмме, изображенной на рис.2), мы получим искомую векторную диаграмму сложения колебаний. Численные значения амплитуды и начальной фазы результирующего колебания находим с помощью формул (2.26). Вычисления дают следующие значения: $A = 4.84$ см, $\varphi = \arctg 0.898 = 42^\circ$. Уравнение результирующего колебания имеет вид $x(t) = 4.84 \cos(\pi t + 0.735)$ см.

Пример 8. Амплитуда колебаний заряда конденсатора электромагнитного колебательного контура за время $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с уменьшилась на 40% от первоначального значения. За это время в контуре произошло $N = 10^3$ полных колебаний. Найти индуктивность, емкость и логарифмический декремент затухания контура, если активное сопротивление $R = 10$ Ом. Чему будет равна амплитуда напряжения на конденсаторе, если в контур последовательно включить переменную ЭДС амплитуды $U_m = 12$ В с частотой $\omega = 0.9\omega_p$?

Решение: Амплитуда колебаний изменяется по закону $Q(t) = Q_0 e^{-\beta t}$, где $\beta = R/(2L)$. Зная во сколько раз амплитуда уменьшилась за время t , находим $\beta = (1/t) \ln(Q_0/Q(t)) = (10^3/5) \ln(10/6) \cong 10^2 \text{ с}^{-1}$. Теперь легко определить индуктивность $L = R/(2\beta) = 10/(2 \cdot 10^2) = 0.05$ Гн.

Для нахождения емкости C контура воспользуемся формулами (2.28) и (2.30), из которых следует, что период колебаний $T = 2 \cdot \pi / \sqrt{1/LC - \beta^2}$. Период колебаний T находим из условий задачи: $T = t/N = 5 \cdot 10^{-6}$ с. Заметим, что период T много меньше времени затухания $\tau = 1/\beta = 0.01$ с. Это означает, что членом β^2 можно пренебречь по сравнению с $1/LC$. Таким образом, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ или $C = (1/L)T^2/(4\pi^2) = (100/5)(5 \cdot 10^{-6})^2/(4 \cdot 3.14^2) = 51$ пФ.

Логарифмический декремент затухания можно рассчитать либо по формуле $\lambda = \beta T$, либо по формуле $\lambda = (1/N) \ln(A_0/A_N)$, где $N = 10^3$, $A_N = 0.6A_0$. Оба способа дают одинаковый результат $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний воспользуемся формулами (2.33), (2.34) и связью $U_c = Q/C$:

$$U_c = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_p^2 + 2\beta^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Подставив в это выражение $\omega^2 = (0.9\omega_p)^2 = 0.81\omega_p^2$, получаем

$$U_c = \frac{U_m}{LC\sqrt{(0.19\omega_p^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2 \cdot 0.81\omega_p^2}}$$

Заметим, что $(1/(LC)) = \omega_0^2 = \omega_p^2 + 2\beta^2$. Выше уже отмечалось, что в условиях данной задачи $\omega_0^2 \gg \beta^2$. Поэтому, пренебрегая малыми поправками, находим $U_c(0.9\omega_p) = U_m/(0.19^2) = 330$ В.

Пример 9. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью $V = 20$ м/с. Две точки, лежащие на этой прямой на расстояниях $x_1 = 12$ м и $x_2 = 15$ м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0.75\pi$. Найти длину волны λ , написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент $t = 1.2$ с, если амплитуда колебаний источника $A = 0.1$ м.

Решение: Точки, находящиеся на расстоянии равном длине волны λ друг от друга, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx , колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \Delta x \cdot 2\pi/\lambda = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda$. Решая это равенство относительно λ , получаем $\lambda = 2\pi(x_2 - x_1)/(\Delta\varphi)$, или, произведя вычисления, находим $\lambda = 8$ м.

Для записи уравнения волны определим также период колебаний и круговую частоту: $T = \lambda/V = 0.4$ с, $\omega = 2\pi/T = 5\pi$ с⁻¹. Подставляя найденные величины в формулу (2.35), получаем уравнение волны $\xi(x,t) = 0.1\cos(5\pi(t - x/20))$ м.

Чтобы найти смещение ξ указанных точек, достаточно подставить в уравнение волны значения x и t : $\xi_1 = 0.1\cos(5\pi(1.2 - 12/20)) = -0.1$ м, $\xi_2 = 0.1\cos(5\pi(1.2 - 15/20)) = 0.071$ м.

4. ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ДЛЯ ЧЕТВЕРТОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Студент-заочник должен решить восемь задач из раздела 5 того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра.

Вариант	Номера задач							
1	401	411	421	431	441	451	461	471
2	402	412	422	432	442	452	462	472
3	403	413	423	433	443	453	463	473
4	404	414	424	434	444	454	464	474
5	405	415	425	435	445	455	465	475
6	406	416	426	436	446	456	466	476
7	407	417	427	437	447	457	467	477

8	408	418	428	438	448	458	468	478
9	409	419	429	439	449	459	469	479
0	410	420	430	440	450	460	470	480

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4.

401. Магнитная стрелка помещена в центре кругового витка, плоскость которого расположена вертикально и составляет угол $\alpha=30^\circ$ с плоскостью магнитного меридиана. Радиус витка $R=20$ см. Определить угол φ , на который повернется магнитная стрелка, если по проводнику пойдет ток силой $I=25$ А (дать два ответа). Горизонтальную составляющую индукции земного магнитного поля принять равной $B=20$ мкТл.

402. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми $d=5$ см, текут одинаковые токи $I=10$ А. Определить индукцию $\vec{B}$ и напряженность $\vec{H}$ магнитного поля в точке, удаленной от каждого провода на расстояние $r=5$ см, если токи текут: а) в одинаковом, б) в противоположных направлениях.

403. Два бесконечных прямых проводника скрещены под прямым углом. По проводникам текут токи силой $I_1=100$ А и $I_2=50$ А. Расстояние между проводниками $d=20$ см. Определить индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в точке, лежащей на середине общего перпендикуляра к проводникам.

404. Ток силой $I=50$ А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти напряженность $\vec{H}$ магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе этого угла и отстоящей от вершины угла на расстоянии $h=20$ см.

405. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности $H_1=50$ А/м. Не изменяя силы тока, проводнику придали форму квадрата. Определить напряженность H_2 магнитного поля в точке пересечения диагоналей квадрата.

406. По контуру в виде равностороннего треугольника со сторонами $a=20$ см течет ток силой $I=50$ А. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке пересечения высот треугольника.

407. По проводнику, изогнутому в виде прямоугольника со сторонами $a=8$ см и $b=12$, течет ток силой $I=50$ А. Определить напряженность $\vec{H}$ и индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в точке пересечения диагоналей.

408. Проводник с током $I=20$ А лежит в плоскости и имеет форму, показанную на рис.5. Радиус изогнутой части проводника $R=40$ см. Определить напряженность $\vec{H}$ и индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в точке O .

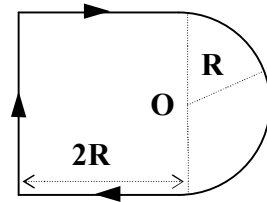


Рис.5

409. Проводник с током $I=40$ А лежит в плоскости и имеет форму, показанную на рис.6. Радиус изогнутой части проводника $R=20$ см. Определить индукцию магнитного поля в точке O .

410. Два круговых проводника радиусами $R_1=10$ см и $R_2=15$ см имеют общий центр O и сориентированы в перпендикулярных плоскостях. По проводникам текут токи $I_1=20$ А и $I_2=30$ А. Найти напряженность $\vec{H}$ магнитного поля в точке O .

411. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка равна 500 А/м. Магнитный момент витка $p_m=6$ А·м². Вычислить силу тока I в витке и его радиус.

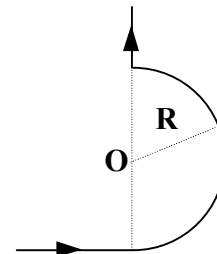


Рис.6

412. Короткая катушка с площадью поперечного сечения $S=250$ см², состоящая из $N=500$ витков провода, по которому течет ток силой $I=5$ А, помещена в однородное магнитное поле напряженностью $H=1000$ А/м. Найти: 1) магнитный момент p_m катушки; 2) вращающий момент M , действующий на катушку, если ось катушки составляет угол $\alpha=30^\circ$ с линиями поля.

413. Виток радиусом $R=20$ см, по которому течет ток силой $I=50$ А, свободно установился в однородном магнитном поле напряженностью $H=10^3$ А/м. Виток повернули относительно диаметра на угол $\alpha=30^\circ$. Определить совершенную работу A .

414. Протон и α -частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус R_1 кривизны траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории α -частицы?

415. Квадратный контур со стороной $a=10$ см, в котором течет ток силой $I=6$ А, находится в магнитном поле с индукцией $B=0.8$ Тл под углом $\varphi=50^\circ$ к линиям индукции. Какую работу A нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

416. В однородном магнитном поле с индукцией $B=2$ Тл движется α -частица. Траектория ее движения представляет собой винтовую линию

с радиусом $R=1$ см и шагом $h=6$ см. Определить кинетическую энергию α -частицы.

417. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью $S=100$ см². Поддерживая в контуре постоянную силу тока $I=50$ А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить индукцию магнитного поля B , если при перемещении контура была совершена работа $A=0.4$ Дж.

418. Два иона с одинаковыми зарядами, пройдя одну и ту же разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса которого $m_1=12$ а.е.м., описал дугу окружности радиусом $R_1=2$ см. Определить массу m_2 (в а.е.м.) другого иона, который описал дугу окружности радиусом $R_2=2.31$ см.

419. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0.5$ Тл равномерно движется проводник длиной $l=20$ см. По проводнику течет ток силой $I=2$ А. Скорость движения проводника $V=10$ см/с и направлена перпендикулярно к линиям поля. Найти работу A перемещения проводника за время $t=10$ с и мощность P , развиваемую при перемещении.

420. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U=300$ В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $a=4$ мм от него. Какая сила F действует на электрон, если по проводнику пропускать ток силой $I=5$ А?

421. Рамка площадью $S=100$ см² равномерно вращается с частотой $n=5$ с⁻¹ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля ($B=0.5$ Тл). Определить среднее значение ЭДС индукции $\langle E_i \rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения.

422. Рамка, содержащая $N=1000$ витков площадью $S=1000$ см², равномерно вращается с частотой $n=10$ с⁻¹ в магнитном поле напряженностью $H=5 \cdot 10^4$ А/м. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям напряженности. Определить максимальную ЭДС индукции $E_{i \max}$, возникающую в рамке.

423. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0.5$ Тл вращается с частотой $n=10$ с⁻¹ стержень длиной $l=20$ см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов U на концах стержня.

424. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. При этом по цепи прошел заряд

$Q=50$ мкКл. Определить изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ через кольцо, если сопротивление цепи гальванометра $R=10$ Ом.

425. Проволочный виток диаметром $D=5$ см и сопротивлением $R=0.02$ Ом находится в однородном магнитном поле $B=0.3$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\varphi=40^\circ$ с линиями индукции. Какой заряд Q протечет по витку при выключении магнитного поля?

426. Соленоид сечением $S=10$ см² содержит $N=1000$ витков. Индукция B магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I=5$ А равна 0.1 Тл. Определить: 1) индуктивность L соленоида; 2) среднюю ЭДС индукции $\langle E_i \rangle$, возникающую на концах обмотки соленоида при изменении за время $\Delta t=0.01$ с магнитной индукции внутри соленоида до значения $B_k=0.5$ Тл.

427. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет $N=250$ витков и индуктивность $L_1=36$ мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2=100$ мГн, обмотку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков стало в катушке после перемотки?

428. Соленоид содержит $N=600$ витков. При силе тока $I=10$ А магнитный поток $\Phi=80$ мВб. Определить индуктивность L соленоида.

429. Соленоид содержит $N=800$ витков. Сечение сердечника из немагнитного материала $S=10$ см². По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B=8$ мТл. Определить среднее значение ЭДС $\langle E_i \rangle$ самоиндукции, которая возникает на концах обмотки, если сила тока уменьшается практически до нуля за время $\Delta t=0.8$ мс.

430. Скорость горизонтально летящего самолета $V=950$ км/ч. Найти ЭДС индукции E_i , генерируемую на концах крыльев самолета, если вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_v=39.8$ А/м и размах крыльев самолета $l=12.5$ м.

431. По проводнику, изогнутому в виде кольца радиусом $R=20$ см, содержащему $N=500$ витков, течет ток силой $I=2$ А. Определить плотность энергии w магнитного поля в центре кольца.

432. Обмотка соленоида содержит $n=20$ витков на каждый сантиметр длины. При какой силе тока I плотность энергии магнитного поля в соленоиде будет $w=0.1$ Дж/м³? Считать, что магнитное поле соленоида во всем объеме однородно.

433. Соленоид имеет длину $l=0.6$ м и сечение $S=10$ см². При некоторой силе тока, протекающего по обмотке, в соленоиде создается магнитный поток $\Phi=0.1$ мВб. Чему равна энергия магнитного поля соленоида?

Сердечник выполнен из немагнитного материала, и магнитное поле во всем объеме постоянно.

434. При какой силе тока I в прямолинейном проводнике бесконечной длины на расстоянии $r=5$ см от него объемная плотность энергии магнитного поля будет $w=1$ мДж/м³?

435. В соленоиде сечением $S=5$ см² создан магнитный поток $\Phi=20$ мкВб. Определить плотность энергии w магнитного поля соленоида. Сердечник отсутствует. Магнитное поле считать однородным во всем объеме соленоида.

436. Магнитный поток Φ в соленоиде, содержащем $N=1000$ витков, равен 0.2 мВб. Определить энергию W магнитного поля соленоида, если сила тока в обмотке $I=1$ А. Сердечник отсутствует. Магнитное поле считать однородным во всем объеме соленоида.

437. Тороидальная катушка содержит $N=500$ витков. Найти энергию W магнитного поля, если при токе $I=2$ А магнитный поток через поперечное сечение тора $\Phi=1.0$ мВб.

438. Катушка индуктивности $L=2.0$ мкГн и сопротивление $R=2.0$ Ом подключены к источнику постоянной ЭДС $E=3.0$ В (рис.7). Параллельно катушке включено сопротивление $R_0=2.0$ Ом. Найти количество тепла, которое выделится на сопротивлениях R и R_0 после размыкания ключа K . Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

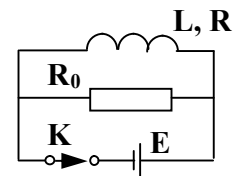


Рис.7

439. По проводнику, изогнутому в виде кольца радиусом $R=30$ см, содержащему $N=1000$ витков, течет ток силой $I=5.0$ А. Определить плотность энергии магнитного поля w в точке, лежащей на оси кольца и отстоящей от его центра на расстояние $h=40$ см.

440. Определить энергию W соленоида, содержащего $N=1500$ витков, если при силе тока в обмотке $I=2.0$ А в соленоиде создается магнитный поток $\Phi=0.2$ мкВб. Магнитное поле считать однородным во всем объеме соленоида.

Указание: при решении задач 441...450 необходимо использовать кривые намагничения ферромагнитных материалов, приведенные на рис.8.

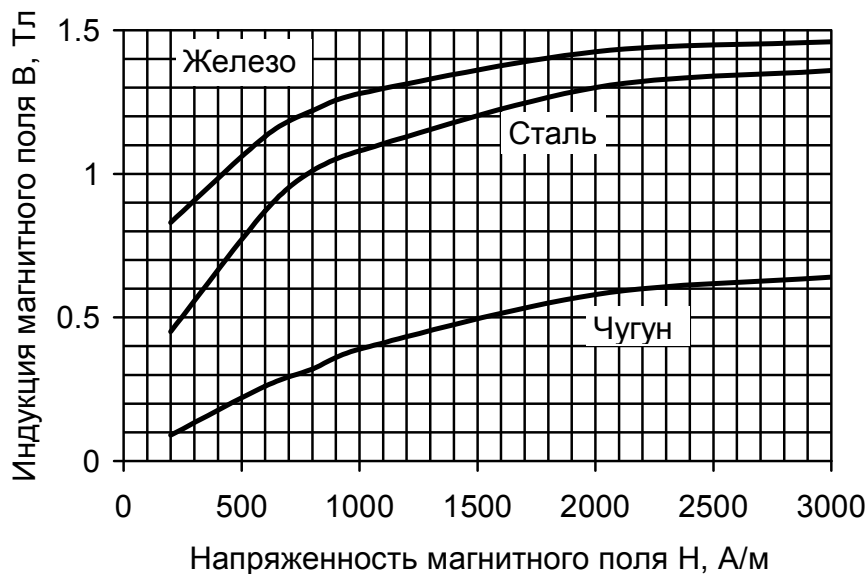


Рис.8

441. В железном сердечнике соленоида индукция $B=1.3$ Тл. Железный сердечник заменили стальным. Во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной?

442. На железном сердечнике, имеющем форму тора со средним диаметром $D=500$ мм, размещена обмотка с общим числом витков $N=1000$. В сердечнике сделан поперечный прорез, в результате чего образовался воздушный зазор шириной $d=1$ мм. При токе в обмотке силой $I=0.85$ А напряженность магнитного поля в зазоре $H=6.0$ А/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Рассеянием линий магнитной индукции пренебречь.

443. Соленоид намотан на чугунное кольцо сечением $S=5.0$ см². При силе тока $I=1.0$ А магнитный поток $\Phi=225$ мкВб. Определить число витков n соленоида, приходящихся на один сантиметр длины средней линии кольца.

444. Стальной сердечник тороидального соленоида имеет длину (измеренную вдоль средней линии) $l=1.0$ м. В сердечнике сделан поперечный воздушный зазор шириной $d=4.0$ мм. Обмотка соленоида содержит $n=8$ витков на 1 см длины. При какой силе тока I индукция магнитного поля в зазоре будет равна $B=1.0$ Тл?

445. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с узким воздушным зазором, содержит $N=1000$ витков. По обмотке течет ток силой

- $I=1.0$ А. При какой ширине зазора d индукция B магнитного поля в нем будет равна 0.5 Тл? Длина l тороида вдоль средней линии равна 1.0 м.
446. Длина l чугунного тора по средней линии равна 1.2 м, его сечение $S=20$ см². По обмотке тороида течет ток, создающий в узком воздушном зазоре магнитный поток $\Phi=0.5$ мВб. Ширина зазора d равна 8 мм. Какова должна быть ширина зазора, чтобы магнитный поток в нем увеличился вдвое, если сила тока не изменится?
447. Длина железного тора по средней линии равна $l=0.628$ м. Рассчитайте индукцию B магнитного поля на оси тороида, если по обмотке с общим числом витков $N=1000$ течет ток силой $I=1.2$ А.
448. Железный сердечник, имеющий форму тора с квадратным сечением, несет на себе обмотку из $N=1000$ витков. Внутренний радиус тора $a=200$ мм, внешний $b=250$ мм. Определить энергию W , запасенную в сердечнике, если по обмотке течет ток силой $I=1.2$ А. Расчет произвести приближенно, полагая напряженность H магнитного поля одинаковой по всему сечению тороида и равной значению H_0 в центре сечения.
449. Железное кольцо, средний диаметр которого $D=300$ мм, а площадь сечения $S=500$ мм², несет на себе обмотку из $N=800$ витков. По обмотке пропущен ток силой $I=3.0$ А. В кольце имеется поперечный разрез шириной $d=2.0$ мм. Пренебрегая рассеянием линий магнитной индукции B в зазоре, найти: а) магнитную проницаемость μ железа при этих условиях; б) поток магнитной индукции Φ через поперечное сечение кольца.
450. Определить силу тока I , при которой в узком воздушном зазоре шириной $d=3.6$ мм тороида с железным сердечником магнитная индукция $B=1.4$ Тл. Длина тороида по средней линии $l=80$ см, его обмотка содержит $N=1500$ витков.
451. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $X_1 = 0.02 \cdot \sin(5\pi \cdot t + \pi/2)$ м и $X_2 = 0.03 \cdot \sin(5\pi \cdot t + \pi/4)$ м.
452. Два одинаково направленных колебания заданы уравнениями $X_1 = 4 \cdot \sin(\pi \cdot t)$ и $X_2 = 3 \cdot \sin(\pi \cdot t + \pi/2)$. Записать уравнение результирующего колебания. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.
453. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C=25$ нФ и катушки с индуктивностью $L=1.015$ Гн. Начальный заряд конденсатора $q_0=2.5$ мкКл. Написать уравнения (с числовыми коэффициентами) изменения со временем t энергии электрического поля W_E , энергии магнитного поля W_B и полной энергии W контура. Найти значения

этих величин в момент времени $T/8$, где T - период колебаний в контуре.

454. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре изменяется по закону $U_C = 50 \cdot \cos(10^4 \pi \cdot t)$ В. Емкость конденсатора $C = 0.1$ мкФ. Найти период колебаний T , индуктивность L контура, закон изменения тока I в цепи со временем t и длину волны λ , на которую настроен этот контур.

455. Ток в электромагнитном колебательном контуре изменяется по закону $I = -0.02 \cdot \sin(400\pi \cdot t)$ А. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период колебаний T и емкость C контура. Записать уравнение изменения со временем энергии W_E электрического поля в контуре.

456. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L = 1.00$ мГн и переменного конденсатора, емкость которого C может изменяться в пределах от 9.7 до 92 пФ. В каком диапазоне длин волн может принимать радиостанции этот приемник?

457. Материальная точка совершает колебания вида $X = 5 \cdot \sin(2 \cdot t)$ см. В момент времени, когда пружинный маятник имел потенциальную энергию $W_n = 0.1$ мДж, на нее действовала возвращающая сила $F = 5$ мН. Найти этот момент времени t и соответствующую ему фазу колебаний.

458. Два одинаково направленных колебания заданы уравнениями $X_1 = 2 \cdot \sin(\pi \cdot t + \pi/3)$ см и $X_2 = 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)$ см. Записать уравнение результирующего колебания. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

459. Определить возвращающую силу F в момент времени $t = 0.2$ с и полную энергию W пружинного маятника, совершающего колебания по закону $X = 15 \cdot \sin(4\pi \cdot t)$ см. Масса колеблющегося тела $m = 20$ г.

460. Определить максимальное ускорение $a_{\max}$ материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 25$ см, если наибольшая скорость точки $V_{\max} = 0.5$ м/с. Записать также уравнение колебаний.

461. Амплитуда затухающих колебаний за время $t_1 = 5$ мин уменьшилась в 2 раза. За какое время t_2 , считая от начального момента, амплитуда уменьшится в 8 раз?

462. Логарифмический декремент затухания маятника $\lambda = 0.003$. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы энергия колебаний уменьшилась вдвое.

463. Груз массы $m = 0.5$ кг подвешен к пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0.004$. Определить число N полных колебаний,

которые должен совершить груз, чтобы амплитуда колебаний $A(t)$ уменьшилась в 3 раза. За какое время t это произойдет?

464. Электромагнитный колебательный контур за время $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$ с потерял 60% своей первоначальной энергии. Определить индуктивность контура, если активное сопротивление $R = 10$ Ом.

465. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 10^3$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных незатухающих колебаний, если резонансная (по напряжению) частота системы $\nu_p = 998$ Гц.

466. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частотах $\nu_1 = 400$ Гц и $\nu_2 = 600$ Гц равны между собой. Определить резонансную (по напряжению) частоту ν_p . Считать, что коэффициент затухания $\beta \ll \omega_0$.

467. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота вынуждающей “силы” будет больше резонансной частоты: а) на 10 %; б) в два раза? Коэффициент затухания $\beta = 0.1 \cdot \omega_0$, где ω_0 - частота собственных незатухающих колебаний.

468. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивления $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора и энергия, запасенная в контуре, за один период колебаний?

469. Индуктивность катушки колебательного контура $L = 1$ Гн. Чему равно омическое сопротивление контура, если известно, что амплитуда собственных колебаний в нем за 0.05 с уменьшается в 2.7 раза?

470. Определить добротность Q колебательного контура по следующим данным: резонансная (по напряжению) частота $\nu_p = 600$ кГц, емкость $C = 350$ пФ, омическое сопротивление $R = 15$ Ом.

471. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0.25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость c распространения колебаний и максимальную скорость частиц воздуха $V_{\max}$.

472. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $X = 10 \cdot \sin((\pi/2) \cdot t)$ см. Найти уравнение волны, если скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с. Записать и изобразить графически уравнение колебаний точки, отстоящей на расстоянии $l = 600$ м от источника колебаний. Записать и изобразить графически уравнение колебаний для точек волны в момент времени $t = 4$ с после начала колебаний.

473. Источник волн колеблется по закону $X = 4 \cdot \sin(600\pi \cdot t)$ см. Найти смещение X от положения равновесия точки, находящейся на расстоя-

- нии $l=75$ см от источника колебаний, для момента времени $t=0.01$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c=300$ м/с.
474. Найти смещение X от положения равновесия, скорость V и ускорение a точки, находящейся на расстоянии $l=20$ м от источника колебаний, в момент времени $t=1$ с. Скорость распространения колебаний $c=100$ м/с, уравнение колебаний источника $X = 0.5 \cdot \sin(2.5\pi \cdot t)$ см.
475. Найти разность фаз $\Delta\phi$ колебаний двух точек, отстоящих от источника на расстояниях $l_1=10$ м и $l_2=16$ м. Период колебаний $T=0.04$ с, скорость распространения колебаний $c=300$ м/с.
476. Найти разность фаз $\Delta\phi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии $\Delta l=2.5$ м друг от друга, если длина волны $\lambda=1.0$ м.
477. Найти смещение X от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l=\lambda/2$, для момента времени $t=T/6$. Амплитуда колебаний $A=0.05$ м.
478. Смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l=4$ см, в момент времени $t=T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.
479. Определить скорость c распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\phi$ колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta l=12$ см, равна $\pi/2$. Частота колебаний $\nu=24$ Гц.
480. Найти длину волны λ , если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны $l=15$ см.

ФИЗИКА
Методические указания

Редактор
Технический редактор
Корректор

Подписано в печать _____. Формат _____. Бумага оф-
сетная. Тираж _____ экз.
Уч.- изд. л. _____. Печ. л. _____. Изд. № _____. Заказ № _____.

Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К.Маркса, 20.