МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ДИЗАЙНА И ТЕХНОЛОГИЙ
(филиал)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению задач по теоретической механике
(раздел кинематика)

для студентов специальностей:

280800 Технология швейных изделий
280900 Конструирование швейных изделий
281000 Технология кожи и меха
281100 Технология изделий из кожи
281200 Конструирование изделий из кожи
170700 Машины и аппараты текстильной и легкой промышленности

дневной и заочной форм обучения

Новосибирск – 2003

УДК 531.01 (076)

Составитель: д.т.н., профессор А.М. Красюк

Рецензент: д.т.н., профессор Ю.И. Подгорный

Работа подготовлена кафедрой МЕХАНИКИ

Методические указания к решению задач по теоретической механике (раздел кинематика) - Новосибирск, НТИ МГУДТ, 2003, 28 с., Илл.6.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью методической разработки является формирование у студентов навыков в поиске выбора методов решения задач кинематики.

Несмотря на большое разнообразие механизмов и устройств, для которых решаются задачи кинематики, имеется весьма ограниченное число методов решения этих задач. Все эти методы базируются также на ограниченном числе теоретических предпосылок, усвоить которые необходимо до начала решения задач.

Пособие состоит из двух разделов. В первом разделе приводится подборка определений, теорем и формул. Это тот минимум, который студент обязан безусловно знать не только при защите курсовых работ по кинематике или при сдаче экзамена, но и к моменту проведения аудиторных практических занятий по соответствующей теме. Во втором разделе приводятся алгоритмы и приемы решения задач.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Кинематика условно делится на два раздела – кинематику точки, то есть тела, размерами которого можно пренебречь и положение которого можно определять как положение геометрической точки, и кинематику твердого тела.

1.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Движение точки считается заданным, если известны уравнения ее движения, т.е. зависимости изменения координат точки от времени. Движение характеризуется кинематическими параметрами: траекторией, скоростью и ускорением.

<u>Траекторией точки</u> называется кривая, которую она описывает в выбранной системе отсчета (координат).

<u>Скорость точки</u> равна векторной производной от радиус-вектора точки $(\bar{r})$ по времени, то есть

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (1)$$

Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории в сторону ее движения (рисунок1).

Ускорение точки равно векторной производной от вектора ее скорости по времени, то есть

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \qquad (2)$$

Ускорение точки всегда направлено в сторону вогнутости траектории ее движения.

Закон движения точки считается известным, если заданы условия, позволяющие определять положение точки в любой момент времени.

При координатном способе задания закона движения точки задаются ее координаты как известные функции времени.

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат точки как функции времени, то есть

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \qquad (3)$$

Например, $x = 2\sin t; \quad y = 3t^2 + 1; \quad z = 0$.

При естественном способе задания движения указываются траектории движения точки и закон ее движения по траектории

$$S = S(t), \qquad (4)$$

где S – дуговая координата

Любой вектор полностью определяется одним из двух способов:

а) проекциями вектора на координатные оси;

б) модулем вектора и его направлением в пространстве.

При координатном способе задания движения точки ее скорость и ускорение определяются проекциями на координатные оси

$$V_x = \dot{x}, \;\; V_y = \dot{y}, \;\; V_z = \dot{z} \tag{5}$$

$$a_x = \ddot{x}, \; a_y = \ddot{y}, \;\; a_z = \ddot{z} \tag{6}$$

При естественном способе задания движения точки модуль скорости определяется по формуле

$$V = \frac{dS}{dt} \quad , \tag{7}$$

где вектор $\overline{V}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки. Ускорение определяется проекциями на координатные оси: касательную - t и нормаль - n, т.е. ускорение точки состоит из двух взаимно перпендикулярных составляющих, называемых касательным (тангенциальным) ускорением a_t и нормальным ускорением a_n модули которых соответственно равны:

$$a_t = \frac{dV}{dt} \; , \tag{8}$$

$$a_n = \frac{V^2}{r} \; , \tag{9}$$

где r - радиус кривизны траектории в точке M.

Ускорение a_t совпадает с направлением вектора скорости точки, если $a_t > 0$ (движение ускоренное), или направлен в сторону, противоположную скорости, если $a_t < 0$ (движение замедленное). Ускорение a_n всегда направлен по главной нормали к траектории движения точки в сторону вогнутости траектории, рисунок 1.

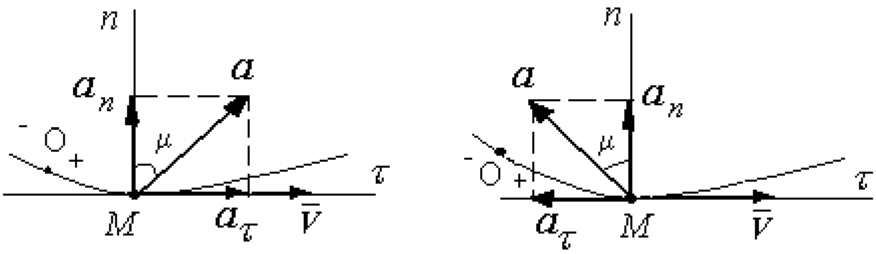


Рисунок 1

1.2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В зависимости от способов задания движения тела, то есть от вида уравнений, однозначно определяющих положение тела в выбранной системе отсчета в любой момент времени, различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоскопараллельное (плоское);
- сферическое;
- общий случай движения.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во время движения параллельной своему первоначальному положению.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения.

Плоскопараллельным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Сферическим называется такое движение твердого тела, при котором одна точка, связанная с телом, остается все время неподвижной.

При поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. Траектории движения точке также одинаковы, но параллельно смещенные. Закон движения задается законом движения какой-либо точки тела. Скорости и ускорения определяются также, как для изолированной точки (см. п.1.1).

1.3 ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси z его положение определяется углом поворота j . Закон движения тела $j = j(t)$

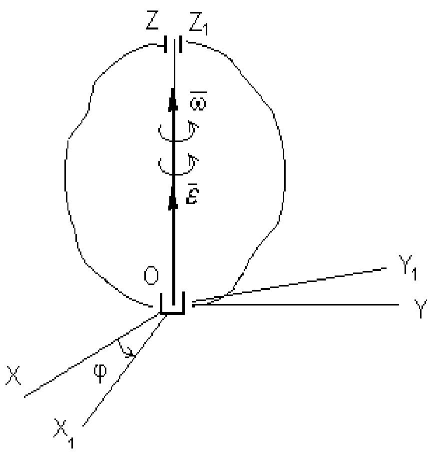


Рисунок 2

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются угловая скорость *w* и угловое ускорение *e*.

Угловая скорость тела в данный момент времени равна производной от угла поворота по времени, то есть

$$w = \frac{dj}{dt} \tag{10}$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно производной от угловой скорости по времени, то есть

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 j}{dt^2} \tag{11}$$

Вектором угловой скорости называется вектор, численно равный абсолютному значению производной угла поворота по времени $\overline{w} = \frac{|dj|}{dt}$ и направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

Вектором углового ускорения называется вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости, то есть

$$\vec{e} = \frac{d\overrightarrow{w}}{dt}$$

Траекторией движения любой точки вращающегося тела является окружность с центром на оси вращения.

Скорость любой точки вращающегося тела направлена перпендикулярно прямой, соединяющей ее с осью вращения, в сторону вращения тела и равна по модулю произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения:

$$V = w \cdot h\ ;\ \ (\bar{V} = \bar{w} \cdot \bar{r}) \tag{12}$$

где h - длина отрезка MO_1 или радиус окружности, описываемой точкой, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки.

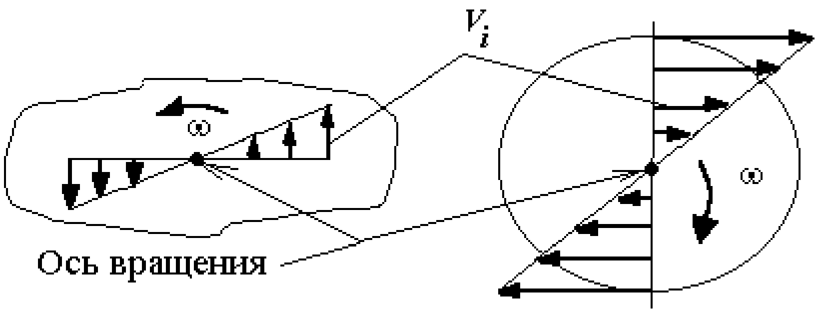
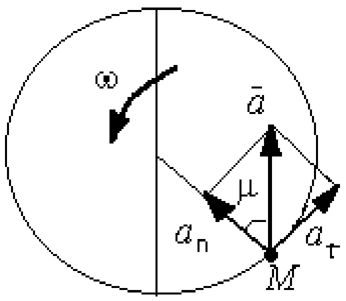


Рисунок 3

Ускорение точки раскладывается на тангенциальную a_t и нормальную a_n составляющие, (рисунок 4):



$$a_t = e\ h, \tag{13}$$

$$a_n = w^2\ h \tag{14}$$

Рисунок 4

1.4 ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоское движение твердого тела можно представить как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с произвольной точкой тела, принятой за полюс, и относительного вращательного движения вокруг полюса.

Закон движения

$$x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t),\ \ \ j = j(t),$$

где A - полюс.

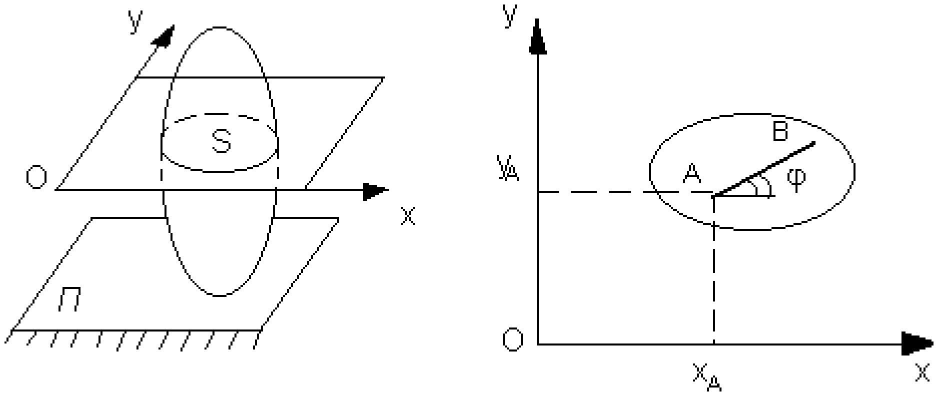


Рисунок 5

Плоское движение, как и вращательное, характеризуется угловой скоростью (см.п.1.3)

$$w = \frac{dj}{dt}$$

и угловым ускорением $$e = \frac{dw}{dt}. \qquad (15)$$

<u>Скорость</u> любой точки *B* при плоском движении равна геометрической сумме двух скоростей: скорости любой другой точки *A*, принятой за полюс, и скорости точки *B* которую она получает при вращении тела вокруг полюса *A*, то есть

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \qquad (16)$$

где $$\bar{V}_{BA} = w\,h, \qquad (17)$$

h- расстояние от точки *B* до полюса *A* (рисунок 6).

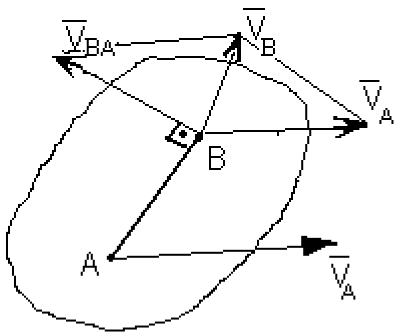


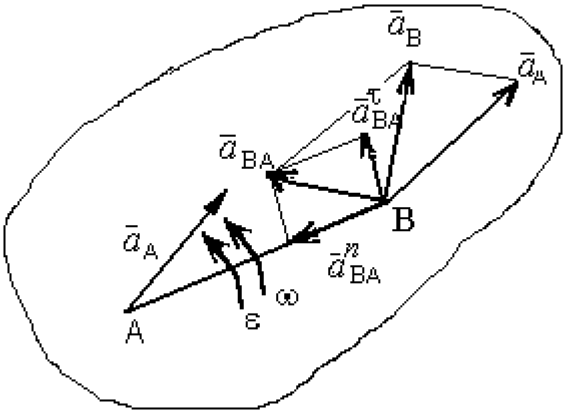
Рисунок 6

Скорость $\bar{V}_{BA}$ направлена перпендикулярно прямой, соединяющей точку *B* с полюсом *A* в сторону относительного вращения тела:

$$\bar{V}_{BA} \perp \bar{AB}.$$

<u>Ускорение</u> любой точки *B* тела при плоском движении равно геометрической сумме трех ускорений: ускорения любой другой точки *A*, принятой за полюс, нормального ускорения a_{BA}^n и тангенциального ускорения a_{BA}^t при вращательном движении тела вокруг полюса *A*:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA}, \tag{18}$$



где $$a^n_{BA} = w^2 h, \tag{19}$$

$$a^t_{BA} = e\, h. \tag{20}$$

Рисунок 7

Нормальное ускорение всегда направлено от точки к полюсу (рисунок 7), а тангенциальное – перпендикулярно прямой *BA*, соединяющей точку *B* с полюсом, в сторону углового ускорения *e*.

Если $w \neq 0$, то всегда имеется точка, принадлежащая плоской фигуре, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей. Если известно положение мгновенного центра скоростей (точка *P*), то скорость любой точки *A* тела при плоском его движении можно определять так же, как при вращательном (см. п. 1.3), считая, что плоская фигура вращается вокруг точки *P*, то есть

$$V_A = w \cdot AP \tag{21}$$

Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к направлению скоростей двух точек плоской фигуры, восстановленным из этих точек (рисунок 8*а*). Если плоская фигура катится без скольжения по другой неподвижной фигуре, то в каждый момент времени мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения этих фигур (рисунок 8*б*).

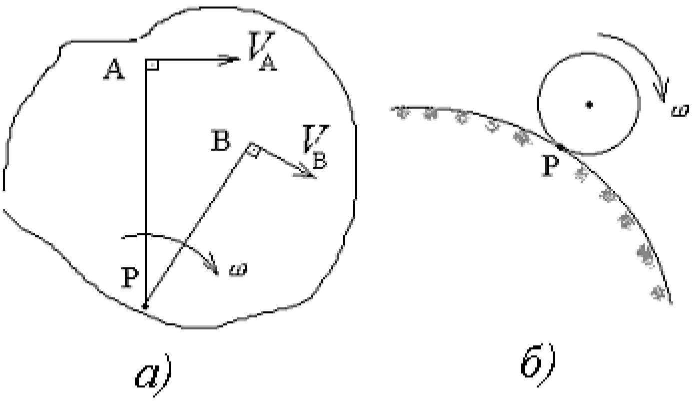


Рисунок 8

1.5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Как определить скорость и ускорение точки в заданной системе отсчета, если известные закон ее движения (либо скорость и ускорение) в другой системе? В таком случае удобно рассмотреть движение точки как сложное.

Например, точка *M* движется вдоль трубки *OD* (рисунок 9). Трубка *OD* и ось Ox_1 вращаются вокруг оси *z* с угловой скоростью *w*. Требуется определить скорость и ускорение точки *M* в неподвижной системе координат *Oxyz*. В этом случае движение точки удобно представить как сложное, состоящее из двух простых движений: прямолинейного относительного движения вдоль оси Ox_1 и переносного движения, то есть вращательного движения вместе с трубкой *OD*.

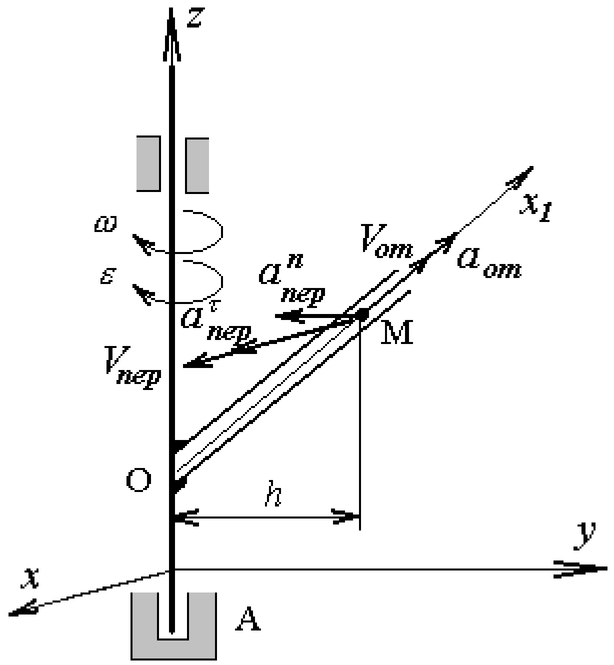


Рисунок 9

Абсолютным движением называется движение точки относительно системы координат, принятой в качестве неподвижной.

Относительным движением называется движение точки относительно подвижной системы координат.

Переносным движением называется движение подвижной системы координат относительно неподвижной.

Скорость (ускорение) точки относительно неподвижной системы координат называется абсолютной скоростью (абсолютным ускорением). Обозначения

$\overrightarrow{V_a}$ *и* $\overrightarrow{a_a}$

Скорость (ускорение) точки относительно подвижной системы координат называется <u>относительной скоростью (относительным ускорением)</u>. Обозначения - $\overline{V}_{om}$ и $\overline{a}_{om}$

<u>Переносной скоростью (переносным ускорением)</u> называется скорость (ускорение) той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка. Обозначения $\overline{V}_{nep}$ и $\overline{a}_{nep}$

Относительное движение точки *M* (рисунок 9) является прямолинейным, поэтому относительная скорость $\overline{V}_{om}$ и относительное ускорение a_{om} направлены вдоль оси *Ox*.

Переносная скорость точки *M* - это скорость точки *M* трубки *OD*, совпадающей в данный момент с движущейся точкой *M*. Так как трубка *OD* совершает вращательное движение, то переносная скорость и переносное ускорение определяют как скорость, так и ускорение точки *M* вращающегося тела. То есть, переносная скорость направлена параллельно оси *Ox* и перпендикулярно плоскости *yOz* ($V_{nep} = w\,h$). Переносное ускорение точки *M*, как ускорение точки вращающегося тела, раскладывается на два вектора: $\overline{a}^{t}_{nep}$ ($a^{t}_{nep} = e\,h$), который направлен параллельно оси *Ox*, и $\overline{a}^{n}_{nep}$ ($a^{n}_{nep} = w^{2}\,h$), который направлен от точки *M* к оси вращения *Oz* (рисунок 9).

<u>Правило.</u> Для определения относительной скорости и ускорения следует мысленно остановить переносное движение, а для определения переносной скорости и ускорения следует мысленно остановить относительное движение.

<u>Теорема</u>. Абсолютная скорость точки, при сложном движении, равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

$$\overline{V}_{a} = \overline{V}_{om} + \overline{V}_{nep} \tag{22}$$

<u>Теорема</u> (теорема Кориолиса): абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{от} + \overline{a}_к \ , \tag{23}$$

где

$$\overline{a}_к = 2\overline{w}_{пер} + \overline{V}_{от} \tag{24}$$

и есть кориолисово ускорение.

Как видно из (24), кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного движения (угловой скорости подвижной системы координат) на вектор относительной скорости точки.

Если переносное движение вращательное либо плоское, то всегда $\overline{w}_{пер} \perp \overline{V}_{от}$ и

$$a_к = 2w_{пер} \cdot V_{от} \tag{25}$$

В этом случае для определения направления вектора кориолисова ускорения достаточно повернуть вектор относительной скорости на 90^{O} по направлению переносного вращения (рисунок 10).

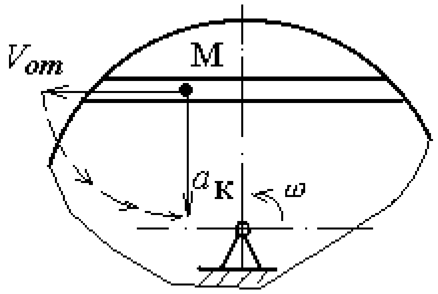


Рисунок 10

1.6. РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении задач кинематики часто встречаются ситуации, когда искомые скорость либо ускорение точки входят слагаемыми в векторные уравнения, вытекающие из (16), (18), (22) и (23).

Рассмотрим случай, когда все векторы, входящие в векторное уравнение, лежат в одной плоскости. Пусть имеется уравнение

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \tag{a}$$

Спроектировав это уравнение на координатные оси Ox и Oy, получим два алгебраических уравнения

$$\begin{cases} a_x = b_x + c_x + d_x \\ a_y = b_y + c_y + d_y \end{cases} \quad (в)$$

Каждый вектор, лежащий в плоскости *OXY*, полностью определяется двумя числами: либо проекциями на две координатные оси, либо модулем и углом, который вектор составляет с одной из осей координат. Из системы (в) можно найти только два неизвестных числа. Таким образом, если в векторном уравнении (а) известны все векторы, кроме одного, то система (в) позволяет определить его аналитически. Если в уравнении (а) неизвестны только два вектора по модулю, но известны по направлению, то система (в) позволяет определить эти неизвестные модули аналитически.

Кроме одного векторного уравнения при решении задач встречается система уравнений типа

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \\ \vec{a} = \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} \end{cases} \quad (c)$$

Эта система легко приводится к одному уравнению типа (а)

$$\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e} + \vec{f} + \vec{g}$$

из которого, как указано выше, можно аналитически найти либо один неизвестный вектор, либо модули двух векторов. После этого из 1-го либо из 2-го уравнения системы (с) можно определить неизвестный вектор *a*.

Задача 1. На рисунке 11 показана кинематическая схема механизма, состоящего из вращающегося с заданной угловой скоростью $w_{AB} = 20\ рад/с$ кривошипа *AB*, шатуна *BC* и коромысла *CD*.

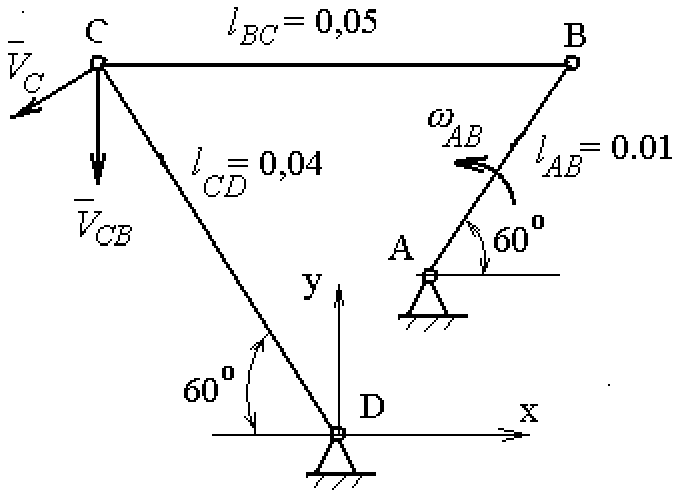


Рисунок 11

Все звенья соединены между собой и стойкой при помощи плоских шарниров. Требуется определить скорость шарнира С в указанном на рисунке положении механизма. Длины звеньев указаны на рисунке в метрах.

Решение.

Точка *C* принадлежит коромыслу *CD*, совершающему вращательное движение. Следовательно, вектор $\overline{V}_C$ направлен перпендикулярно отрезку *CD* и равен модулю:

$$V_C = w_{CD} \cdot l_{CD} \tag{e}$$

Так как угловая скорость w_{CD} неизвестна, то из этой формулы невозможно определить модуль вектора $\overline{V}_C$.

С другой стороны, точка *C* принадлежит и телу *CB*, совершающему плоское движение. Поэтому, приняв точку *B* за полюс, можно записать следующее векторное уравнение (см. п.1.4):

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB} \tag{f}$$

Вектор $\overline{V}_{CB}$ направлен перпендикулярно прямой *BC* (рисунок 11), а скорость $\overline{V}_B$ точки *B*, как принадлежащей одновременно вращающемуся телу *AB*, направлена перпендикулярно отрезку *AB* и равна по модулю:

$$V_B = w_{AB} \cdot l_{AB} = 20 \cdot 0{,}01 = 0{,}2\ м/с.$$

Таким образом, в уравнении (f) вектор $\overline{V}_B$ известен полностью, а остальные два вектора – только по направлению спроектировав (f) на оси Dx и Dy получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -V_C \cdot \cos 30° = -V_B \cdot \cos 30° + 0, \\ -V_C \cdot \cos 60° = V_B \cdot \cos 60° - V_{CB} \end{cases} \tag{g}$$

Из первого уравнения системы находим, что модуль искомой скорости $V_C = V_B = 0{,}05\ м/с$. Направление вектора V_C указано на рисунке 11 верно, так как в результате решения оказалось, что $V_C > 0$.

Если бы требовалось определить угловые скорости звеньев CD и BC, то из (е) получим

$$w_{CD} = \frac{V_C}{l_{CD}} = \frac{0{,}2}{0{,}04} = 5\ рад/с.$$

Угловая скорость w_{CD} направлена против часовой стрелки (направление вращения вектора V_C вокруг оси D).

Так как при плоском движении $V_{BC} = w_{BC} \cdot l_{BC}$, то из второго уравнения системы (g) находим v_{BC}

$$V_{CB} = (V_B + V_C) \cdot \cos 60^\circ = (0{,}2 + 0{,}2) \cdot \cos 60^\circ = 0{,}2\ м/с \quad \text{и}$$

$$w_{BC} = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} = \frac{0{,}2}{0{,}05} = 4\ рад/с.$$

Угловая скорость w_{BC} направлена против часовой стрелки (направление вращения вектора V_{CB} вокруг полюса B).

Задача 2. Определить ускорение точки C механизма, показанного на рисунке 11, если $w_{AB} = 20\ рад/с = const$.

<u>Решение</u>. Так как точка C принадлежит звену CD, совершающему вращательное движение, то

$$\overrightarrow{a_C} = \vec{a}_C^{\,n} + \overrightarrow{a_C^t} \qquad (h_1)$$

где $a_C^n = w_{CD}^2 \cdot l_{CD} = 5^2 \cdot 0{,}04 = 1\ м/с$, а вектор $\bar{a}_C^t$ известен только по направлению (рис.12), так как $a_C^t = e_{CB} \cdot l_{CD}$ и e_{CD} неизвестно. Так как точка C принадлежит одновременно звену BC, совершающему плоское движение, то

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,t} \qquad (h_2)$$

где $a_{CB}^n = w_{BC}^2 \cdot l_{CB} = 4^2 \cdot 0{,}05 = 0{,}8\ м/с^2$ и вектор $a_{CB}^t = e_{CB} \cdot l_{CB}$ известен только по направлению (значение e_{CB} неизвестно). Из системы уравнений (h_1) и (h_2) получаем:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,t} = \overrightarrow{a_B} + \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,t} \qquad (p)$$

так как точка *B* принадлежит вращающемуся телу *AB* и $a_B^t = e_{AB} \cdot l_{AB} = 0$, т.к. $w_{AB} = const$, то $e_{AB} = 0$.

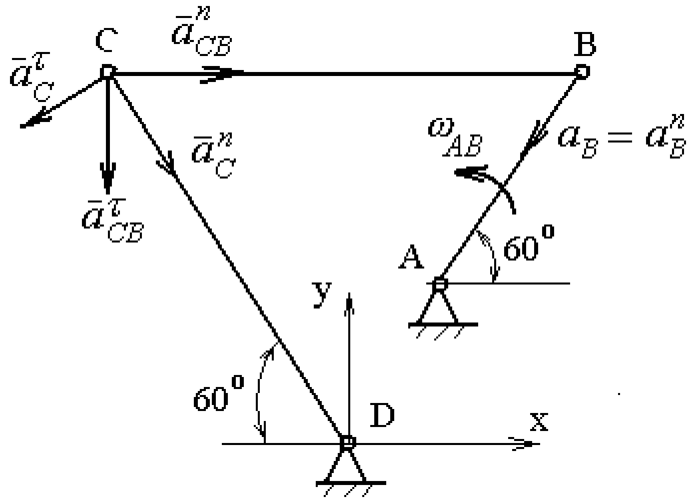


Рисунок 12

В уравнении (р) вектора $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_B$ *и* $\vec{a}_{CB}^{\,n}$ известны как по модулю, так и по направлению, а вектора $\vec{a}_C^{\,t}$ и $\vec{a}_{CB}^{\,t}$- только по направлению. Спроектировав уравнение (р) на 2 оси, получим 2 уравнения для нахождения модулей векторов $\vec{a}_C^{\,t}$ и $\vec{a}_{CB}^{\,t}$. Для решения поставленной задачи достаточно найти только $\vec{a}_C^{\,t}$. по-этому, спроектировав уравнение (р) на ось Dx, получим

$$a_C^n \cdot \cos 60° - a_C^t \cdot \cos 30° = -a_B \cdot \cos 60° + a_{CB}^n,$$

откуда

$$a_C^t = \frac{\left(a_C^n + a_B\right) \cdot \cos 60° - a_{CB}^n}{\cos 30°} = \frac{(1+4) \cdot 0{,}5 - 0{,}8}{\cos 30°} = 1{,}96\ м/с^2.$$

Теперь в правой части уравнения (h_1) оба вектора известны и по модулю и по направлению. Спроектировав это уравнение на оси координат, найдем проекции искомого вектора на неподвижные оси Dy и Dx.

Спроектировав (р) на ось Dy, можно определить модуль вектора $\vec{a}_{CB}^{\,t}$, что, в свою очередь, позволяет при необходимости найти угловое ускорение звена BC, так как

$$a_{CB}^t = e_{CB} \cdot l_{CB}$$

$$-a_c^n \cdot \cos 30° - a_C^t \cdot \cos 60° - a_B \cdot \cos 30° =$$

$$= 1 \cdot \cos 30° + 1{,}96 \cdot \cos 60° - 4 \cdot \cos 30° = -1{,}62 \ \text{м} / \text{с}^2$$

Знак (-) означает, что вектор $\vec{a}^{\,t}_{CB}$ имеет направление, противоположное тому, которое показано на рис.12.

$$e_{CB} = \frac{\left| a^t_{CB} \right|}{l_{CB}} = \frac{1{,}62}{0{,}05} = 32{,}4 \ \text{рад} / \text{с}^2$$

Угловое ускорение направлено по часовой стрелке.

В полном объеме теоретические основы кинематики изложены в учебниках [1,2].

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

В разделе I приведены основные формулы и уравнения, позволяющие решать большинство задач кинематики. Эти формулы и уравнения достаточно просты, следовательно, и решение задач несложно, однако при условии, что ясно, какими из формул пользоваться. Ниже приведены последовательности рассуждений, приводящих к решению основных задач кинематики.

2.1. Определение скоростей и ускорений точек

Если требуется определить скорость либо ускорение точки, то метод решения задачи зависит прежде всего от того, принадлежит ли точка твердому телу, либо речь идет об изолированной точке (размерами тела пренебрегаем и его положение определяем как положение геометрической точки), закон движения которой задан в некоторой системе отсчета. В последнем случае формулы для определения скорости и ускорения точки зависят от способа задания ее движения (см.п.1.1).

Если точка принадлежит телу, то метод решения задачи зависит от того, самостоятельно ли движется это тело или оно является звеном некоторого механизма, то есть его движение зависит от движения остальных звеньев.

Если тело движется самостоятельно (например, колесо катится по дороге), то следует решить, какой вид движения совершает тело и воспользоваться методами определения скоростей и ускорений точек тела, совершающего соответствующий вид движения.

Если точки принадлежит звену механизма, то и здесь следует выбрать один из нескольких вариантов. В случае, когда точка принадлежит одновременно двум звеньям механизма, то необходимо записать уравнения, описывающие скорость и ускорение этой точки для каждого звена. Таким образом получится система уравнений. В случае, когда точка принадлежит одному звену, сначала следует определить скорость и ускорение какой-нибудь другой точки этого звена и принять ее за полюс.

2.2. Определение угловой скорости и углового ускорения тела

Задача 3. На рисунке 13 показана схема планетарного механизма, состоящего из неподвижного колеса радиуса R, кривошипа (водила) OA, вращающегося вокруг оси колеса 1, и подвижного колеса 2, шарнирно соединенного с кривошипом OA. При вращении кривошип OA заставляет колесо 2 катиться без скольжения по колесу 1. Определить скорость и ускорение точки *M*.

Дано:

$w_{OA} = 10 \;\; рад/с,$

$e_{OA} = 2 \;\; рад/с^2,$

$R = 0{,}2 \; м,$

$r = 0{,}1 \; м.$

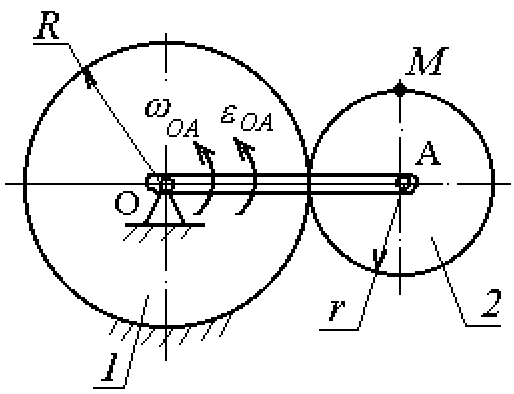


Рисунок 13

Решение

Точка *M* принадлежит колесу 2. Для определения скорости и ускорения этой точки необходимо найти скорость и ускорение какой-нибудь другой точки, которая в последствии будет принята за полюс колеса 2. В качестве полюса следует принимать такую точку, скорость и ускорение которой либо известно, либо не трудно найти. В донном случае такой точкой является шарнир A. Точка А принадлежит одновременно двум звеньям механизма: колесу 2 и кривошипу OA.

Определим скорость и ускорение шарнирной точки A. Известны угловая скорость e_{OA} и w_{OA}, поэтому скорость $\bar{V}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ определяются по формулам (12)-(14): $V_A = w_{OA} \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0{,}3 = 3\ м/с,$

$$a_A^n = w_{OA}^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0{,}3 = 30\ м/с^2,$$

$$a_A^t = e_{OA}^2 \cdot l_{OA} = 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6\ м/с^2,$$

где $l_{OA} = R + r = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3\ м.$

Вектор скорости точки A направлен перпендикулярно прямой AO в сторону вращения кривошипа OA, то есть вверх (рисунок 14). Так как направление e_{OA} совпадает с направлением w_{OA}, то тангенциальная составляющая ускорения a_A^t совпадает с направлением скорости точки A, а нормальное ускорение направлено от точки A к оси вращения.

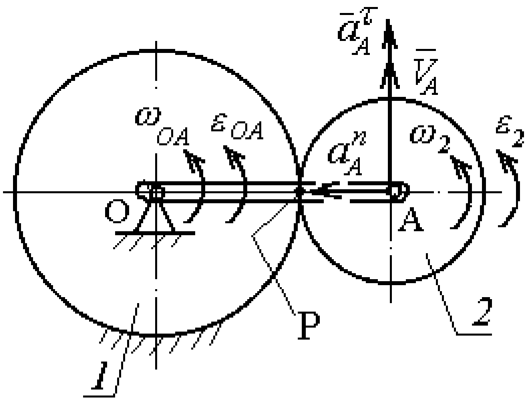


Рисунок 14

Определим угловую скорость w_2 – колеса 2. Рассуждения при выборе метода решения выполняются в следующей последовательности: закон движения колеса 2 неизвестен, колесо 2 совершает плоское движение и известно положение мгновенного центра скоростей (точка P на рис. 14), который находится в точке контакта колес 1 и 2, так как колесо 2 катится без скольжения по неподвижному колесу 1.

$$w_2 = \frac{V_A}{l_{AP}} = \frac{V_A}{r} = \frac{3}{0{,}1} = 30\ рад/с.$$

Определим угловое ускорение e_2 колеса 2.

Зависимости $j_2(t)$ и $w_2(t)$ неизвестны, однако расстояние от точки *A* до мгновенного центра скоростей (точки *P*) постоянно и равно r, следовательно, можно найти производную по времени от угловой скорости w_2 (тангенциальная составляющая ускорения точки *A* – a_A^t найдена ранее).

$$e_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_A}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^t}{r} = \frac{0{,}6}{0{,}1} = 6\ рад/c^2.$$

Определение скорости и ускорение точки M колеса 2.

Рассуждения при выборе метода решения производятся в следующей последовательности: точка принадлежит телу, входящему в состав механизма, однако угловая скорость w_2 этого тела и его ускорение e_2 известны (определены ранее), тело совершает плоское движение, причем известны скорость и ускорение точки A (также определена ранее).

Приняв точку A за полюс, согласно (16) и (17) получим

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA} \qquad (26)$$

где
$$V_{MA} = w_2 \cdot l_{MA} = 30\cdot 0{,}1 = 3\,м/c.$$

Спроектировав (26) на оси Ox и Oy (рисунок 15), получим

$$V_{MX} = V_{MA} = 3\,м/c;\ \ V_{MY} = V_A = 3\,м/c;$$

$$V_M = \sqrt{V_{MX}^2 + V_{MY}^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24\,м/c.$$

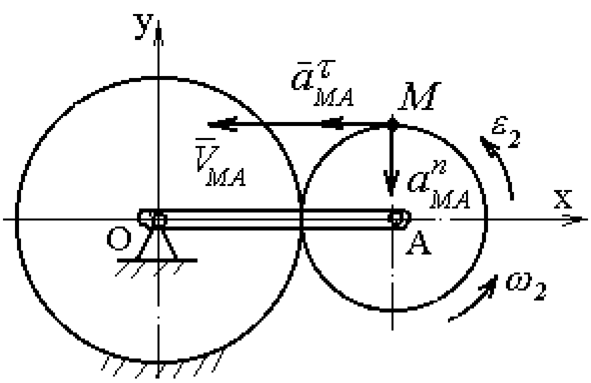
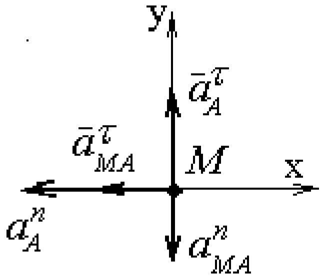


Рисунок 15

Согласно формул (18) – (29), получим

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_A^t + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^t, \quad (27)$$

где
$$a_{MA}^n = w_2^2 \cdot l_{MA} = 30^2 \cdot 0{,}1 = 90\, м/с^2,$$
$$a_{MA}^t = e_2 \cdot l_{MA} = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6\, м/с^2.$$



Спроектировав (27) на оси координат (рисунок 16), получим:

Рисунок 16

$$a_{MX} = -a_A^n - a_{MA}^t = -30 - 0{,}6 = -30{,}6\, м/с^2;$$
$$a_{MY} = a_A^t - a_{MA}^n = 0{,}6 - 90 = -89{,}4\ м/с^2;$$
$$a_M = \sqrt{a_{MX}^2 + a_{MY}^2} = \sqrt{(-30{,}6)^2 + (-89{,}4)^2} = 94{,}5\, м/с^2.$$

Задача 4. На рисунке 17 показана схема дифференциального механизма, состоящего из вращающихся вокруг оси 0 колеса 1 и кривошипа OA, и колеса 2, которое в результате взаимодействия с кривошипом 2 при помощи плоского шарнира A катится без скольжения относительно колеса 1.

Дано:

$w_{OA} = 10\ рад/с,$

$e_{OA} = 2\ рад/с^2,$

$w_1 = 5\ рад/с,$

$e_1 = 6\ рад/с^2$

$R = r = 0{,}2\ м.$

Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса 2.

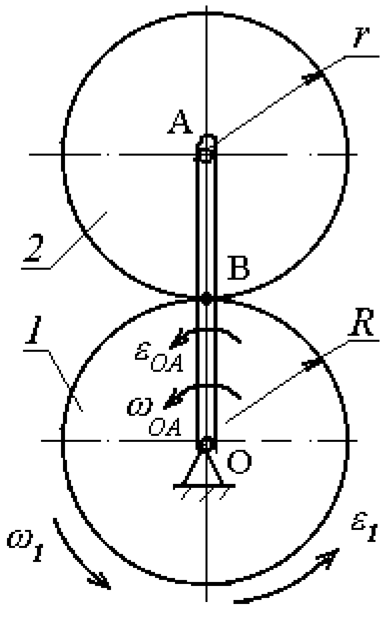


Рисунок 17

Решение.

Определим угловую скорость колеса 2

Заметим, что точка B контакта колес не является в данной задаче мгновенным центром скоростей, так как колесо 1 вращается и скорости всех его точек (кроме точки O) не равные нулю.

Чтобы определить угловую скорость колеса 2 из формулы (17), надо знать скорость какой-либо точки колеса во вращательном движении вокруг другой точки. Для этого предварительно определим скорости точке A и B колеса 2.

Так как точка A одновременно принадлежит кривошипу AO, то ее скорость равна

$$V_A = w_{OA} \cdot l_{OA} = w_{OA}(R + r) = 10 \cdot (0{,}2 + 0{,}2) = 4\ м/с.$$

Скорости точек B колес 1 и 2 одинаковые, так как они вращаются без проскальзывания друг относительно друга. Так как угловая скорость колеса 1 известна, то

$$V_B = w_1 \cdot l_{BO} = w_1 \cdot R = 5 \cdot 0{,}2 = 1\ м/с.$$

Направление скоростей точек A и B показано на рисунке 18.

Так как тело совершает плоское движение, то приняв точку В за полюс, можно записать векторное уравнение (см. п.1.4):

$$\overline{V}_A = \overline{V}_B + \overline{V}_{AB} \qquad (28)$$

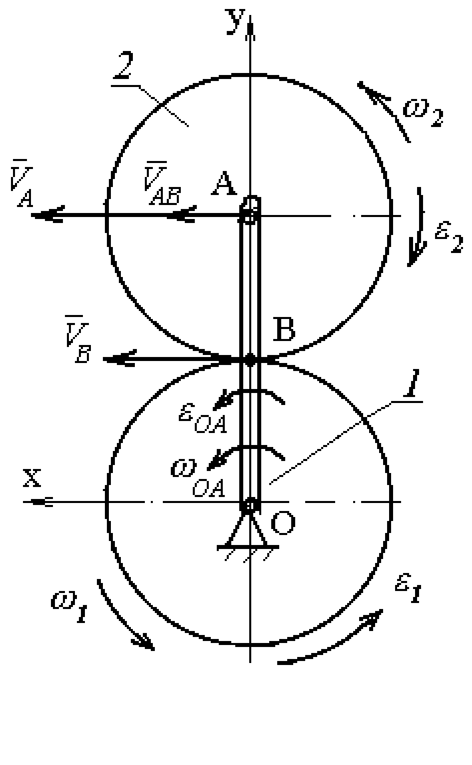


Рисунок 18

Вектор $\overline{V}_{AB}$ направлен перпендикулярно прямой AB. Предположим, что он направлен влево. Спроектировав (28) на оси X, получим

$$V_A = V_B + V_{AB}, \text{ откуда } V_{AB} = V_A - V_B.$$

Из того, что $V_{AB} > 0$ следует, что выбранное направление вектора $\bar{V}_{AB}$ оказалось верным.

$$w_2 = \frac{V_{AB}}{l_{AB}} = \frac{V_{AB}}{r} = \frac{V_A - V_B}{r} = \frac{4-1}{0,2} = 15 \ рад/c. \qquad (29)$$

Определим угловое ускорение колеса 2.

Так как ускорение a^t_{AB} неизвестно, то выразим e_2 через e_1 и e_{BA}.

С учетом (29) получим

$$e_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_A - V_B}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{dV_A}{dt} - \frac{dV_B}{dt}\right) = \frac{1}{r}\left(a^t_A - a^t_B\right) \qquad (30)$$

Так как точка *A* принадлежит вращающемуся кривошипу *OA*, а точка *B* – колесу – 1 , то

$$a^t_A = e_{OA} \cdot l_{OA} = e_{OA}(R + r); \qquad a^t_B = e_1 \cdot l_{OB} = e_1 \cdot R,$$

и из (30) следует

$$e_2 = \frac{1}{r}\left(a^t_A - a^t_B\right) = \frac{1}{r}\left[e_{OA}(R+r) - e_1 R\right] = \frac{1}{0,2}\left[2 \cdot (0,2 + 0,2) - 6,02\right] = -2 \ рад/c^2$$

Знак минус в данном случае означает, что угловое ускорение колеса 2 направлено в сторону, противоположную угловым ускорениям кривошипа и колеса I, то есть по часовой стрелке (рисунок 18).

Задача 7. На рисунке 19 показана схема подъемного механизма, состоящего из барабана 1, на который наматывается трос, перекинутый через неподвижный блок 3 и закрепленный в точке *E*. К центру подвижного блока 3

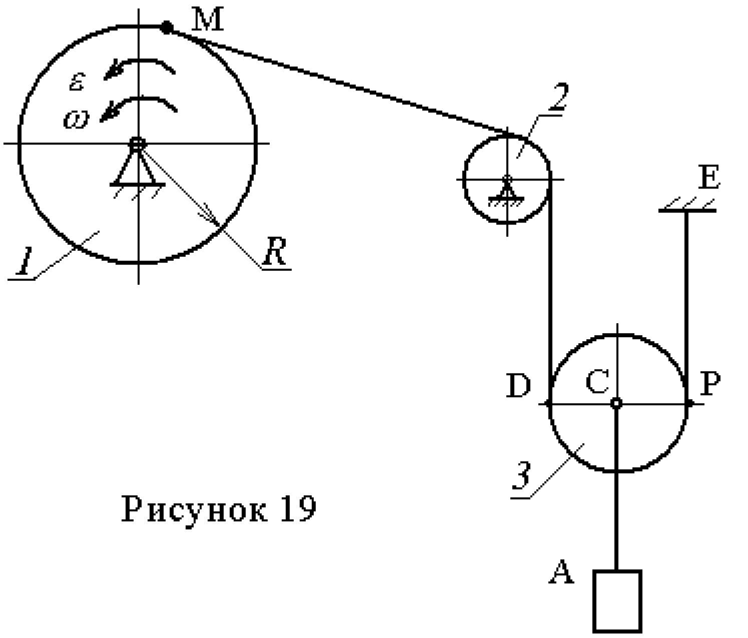


Рисунок 19

шарнирно прикреплен стержень (трос) с грузом *A*. Груз движется вертикально.

Дано:

$w = 10\ рад/с$;

$e = 20\ рад/с^2$;

$R = 0{,}4\ м$.

Определить: скорость V и ускорение a груза *A*.

<u>Решение.</u> Груз *A* вместе со стержнем движется поступательно. Следовательно, достаточно определить скорость и ускорение точки *C*. Эта точка одновременно принадлежит блоку 3, совершающему плоское движение (движение не вращательное, так как центр блока перемещается), то есть

$$\bar{V} = \bar{V}_C, \quad \bar{a} = \bar{a}_C.$$

Следовательно, задача заключается в определении скорости и ускорения точки *C* тела, совершающего плоское движение.

Определим сначала скорость точки *C*.

Точка D принадлежит нерастяжимой нити, следовательно, на участке нити *MD* скорость всех точек нити по модулю одинакова и равна скорости V_M барабана 1, в которой точки троса начинают контактировать с барабаном (точка *M* нити не может перемещаться относительно точки *M* барабана). Следовательно,

$$V = V_D = V_M$$

Скорость точки D определена она как $V_D = V_M = wR = 10 \cdot 0{,}4 = 4\ м/с$, вектор скорости направлен вверх, рисунок 20.

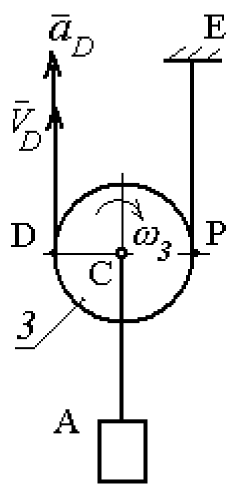


Рисунок 20

Участок троса EP неподвижен, следовательно, точка P блока 3 неподвижна, она является мгновенным центром скоростей. Из (21) следует

$$w_D = \frac{V_D}{l_{DP}} = \frac{V_D}{2r}, \qquad V_C = w_3 \cdot l_{CP} = w_3 \cdot r = \frac{V_D}{2} = \frac{4}{2} = 2 \ \text{м}/c,$$

где r - радиус блока 3.

Заметим, что так как $V_D = V_M$ в любой момент времени, то

$$a = \frac{dV_M}{dt} = \frac{dV_D}{dt} = a_M^t$$

Правая часть уравнения определяет тангенциальную составляющую ускорения точки M вращающегося тела, следовательно

$$a = \frac{dV_M}{dt} = a_M^t = e \cdot R = 20 \cdot 0{,}4 = 8 \, \text{м}/c^2.$$

Ускорение груза также направлено вверх, так как угловое ускорение барабана направлено против часовой стрелки и $\bar{a}_M^t$ - влево.

Так как точка C движется прямолинейно, то

$$a = \frac{dV_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_D}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_M}{2}\right) = \frac{a_M^t}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ \text{м}/c^2,$$

2.3. Другие задачи кинематики

2.3.1. Определение нормального и тангенциального ускорения точки, движение которой задано координатным способом.

Пусть $x = 2\cos 3t; \quad e = 3\sin 3t$

Согласно формулам (8) и (9), для нахождения тангенциального ускорения a^t надо знать $V(t)$. По формуле (5) найдем

$$V_X = \dot{x} = -6\sin 3t, \quad V_Y = \dot{y} = 6\cos 3t,$$

тогда $V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{(-6\sin 3t)^2 + (6\cos 3t)^2} = 6 \, \text{м}/c.$

Следовательно: $a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(6) = 0.$

Для определения нормального ускорения по формуле (9) надо знать радиус кривизны траектории движения точки. Если он неизвестен (в данном примере его легко определить, если найти траекторию движения точки), то нормальное ускорение можно определить из уравнений

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \text{и} \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2,$$

где $a_x = \dot{V}_x = -18\cos 3t$, $a_y = \dot{V}_y = -18\sin 3t$.

Тогда

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = \left(a_x^2 + a_y^2\right) - a_t^2 = (-18\cos 3t)^2 + (-18\sin 3t)^2 - 0 = 18^2$$

$$a_n = \sqrt{a_n^2} = \sqrt{18^2} = 18 \ м/с^2.$$

2.3.2. Определение радиуса кривизны траектории движения точки

Пусть требуется определить радиус кривизны траектории движения точки, движения точки, движение которой задано координатным способом:

$$x = 2\cos 3t; \quad y = 2\sin 3t.$$

Радиус кривизны фигурирует только в формуле (9), из которой следует

$$r = \frac{V^2}{a_n},$$

то есть для его определения надо знать скорость и нормальную составляющую ускорения точки, которая определена в задаче 2.3.1.

Таким образом,

$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{6^2}{18} = 2 \ м/с.$$

Список использованных источников

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов.- 10-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1986. – 416 с. и последующие издания.

2.Бутенин М.В., Лунц Я.Л., Маркин Д.Р. Курс теоретической механики, Т 1,2: Учебник. – М.: 1970 и последующие издания.