НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. ВАСЮКОВ

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

2020

Обработка сигналов – совокупность операций, направленных на наиболее эффективную передачу, хранение и извлечение информации.

2

Первые устройства обработки сигналов были аналоговыми, т.е. оперировали сигналами непрерывного времени и сводились к фильтрации, умножению частоты, модуляции, детектированию и преобразованию частоты (переносу спектра).

Недостатки аналоговых устройств – дрейф параметров, производственный разброс, необходимость настройки устройства после сборки и др.

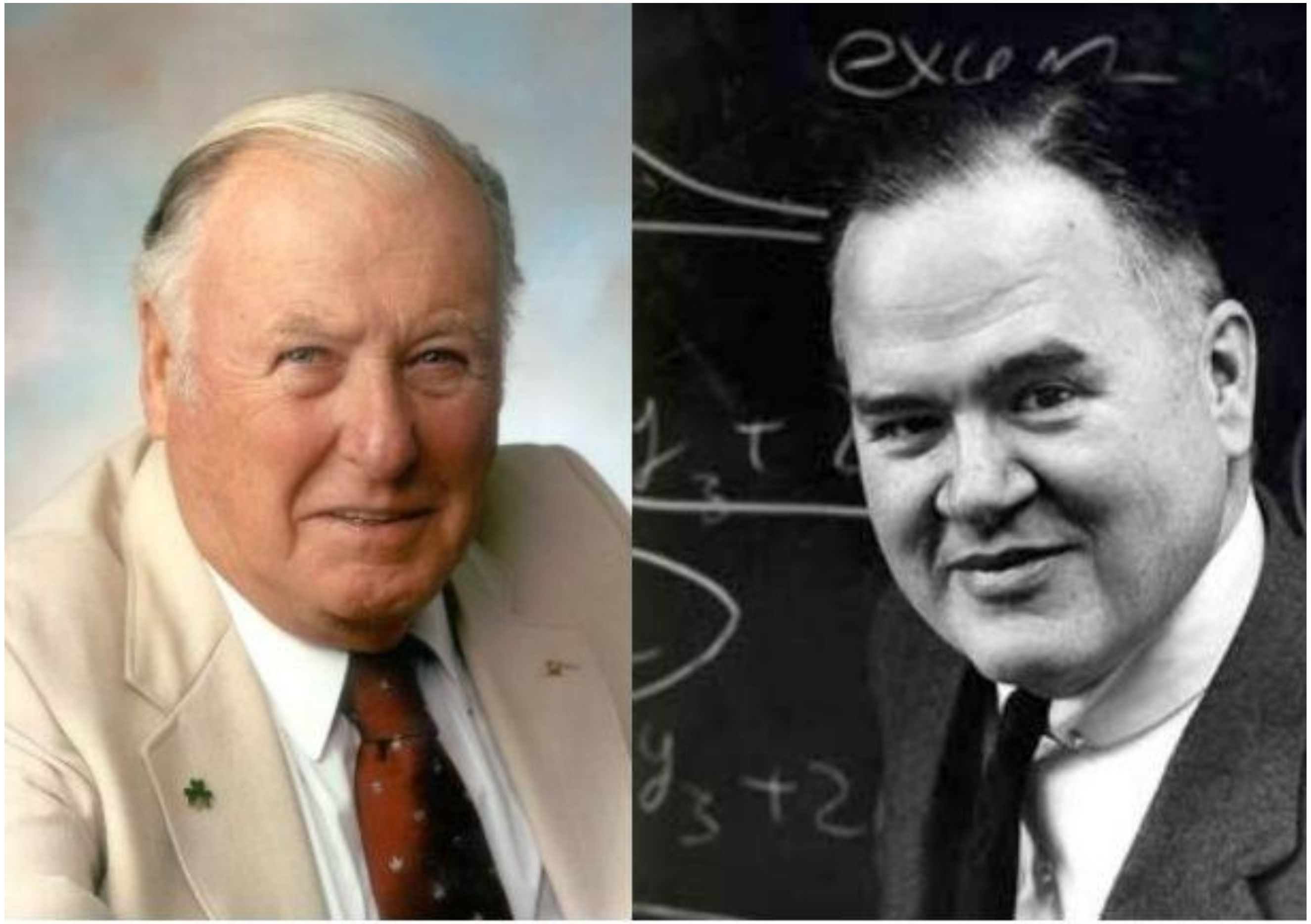
Согласованная фильтрация выполнялась с помощью ЛЗ на ПАВ. Активно использовались операционные усилители для выполнения операций суммирования, дифференцирования, интегрирования, функциональных преобразований[3] (логарифмирование и т.п.).

20–30-е годы XX в. – в работах Х. Найквиста и В.А. Котельникова была доказана возможность взаимно-однозначного представления аналогового сигнала с ограниченной полосой частот последовательностью его значений (отсчётов), взятых через определенные промежутки времени.

50–60-е годы – универсальные ЦВМ стали применяться для цифрового моделирования аналоговых устройств и систем; были разработаны основы цифровой фильтрации.

1965 год – открытие класса эффективных («быстрых») алгоритмов дискретного преобразования Фурье (алгоритм Кули – Тьюки)

4

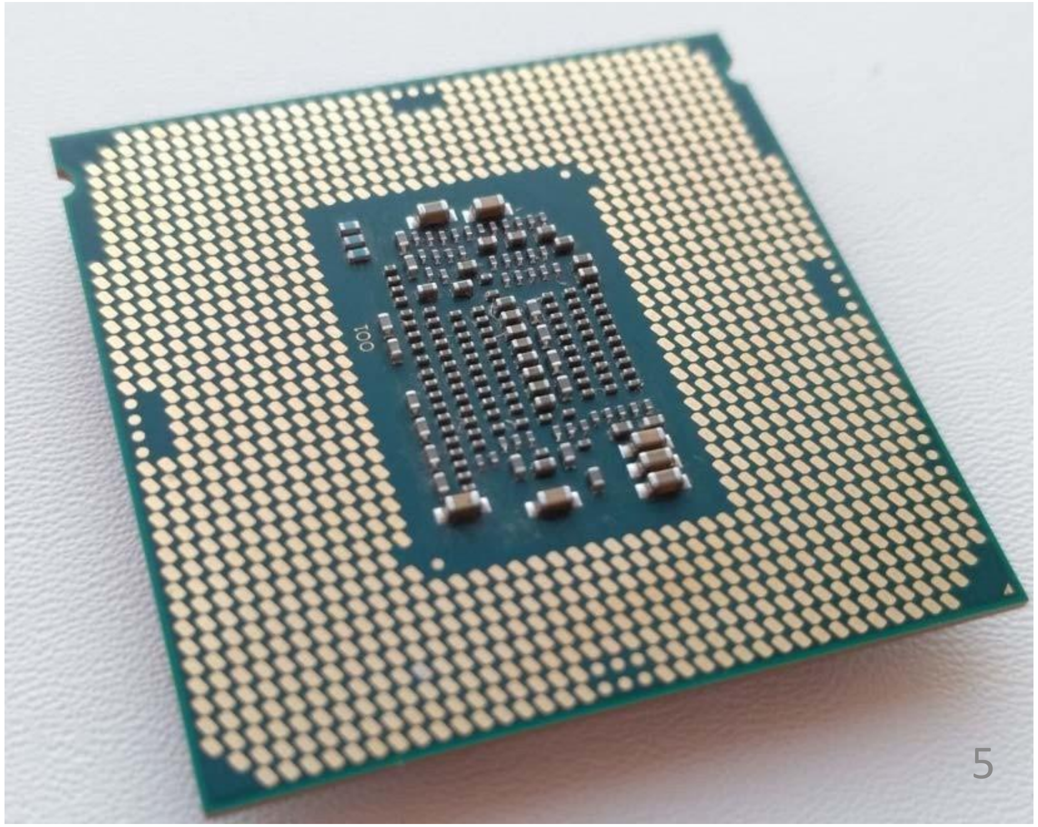


James William Cooley (1926 - 2016)   John Wilder Tukey (1915-2000)

1971 год – появление первого микропроцессора Intel 4040; тем самым были созданы предпосылки цифровой обработки сигналов в реальном времени.

Intel 4040

Intel core i7 7700



Преимущества ЦОС перед аналоговой обработкой:

1. принципиальная возможность реализации практически *любых* алгоритмов обработки (в аналоговой технике могут быть реализованы далеко не всякие алгоритмы); развитие элементной базы обеспечивает реализуемость все более широкого класса алгоритмов обработки в *реальном масштабе времени*;
2. потенциально сколь угодно высокая *точность* реализации алгоритмов, определяемая разрядностью;
3. принципиальная возможность *безошибочного* воспроизведения сигналов при передаче, копировании и хранении; вероятность безошибочного воспроизведения может быть повышена на основе помехоустойчивого кодирования, которое применимо только к цифровым сигналам;

4. принципиальная стабильность алгоритмов ЦОС (отсутствие дрейфа параметров вследствие старения элементов или влияния среды);
5. возможность практически мгновенного изменения алгоритмов ЦОС при необходимости (например, обновления);
6. возможность изменения алгоритмов ЦОС в зависимости от свойств сигналов и помех (адаптации).

Недостатком ЦОС является ограниченное быстродействие устройств, недостаточное (пока) для обработки сигналов на СВЧ (выше 5–10 ГГц). Эта граница непрерывно отодвигается.

Дискретный сигнал.

Математическая модель дискретного сигнала – 7

последовательность

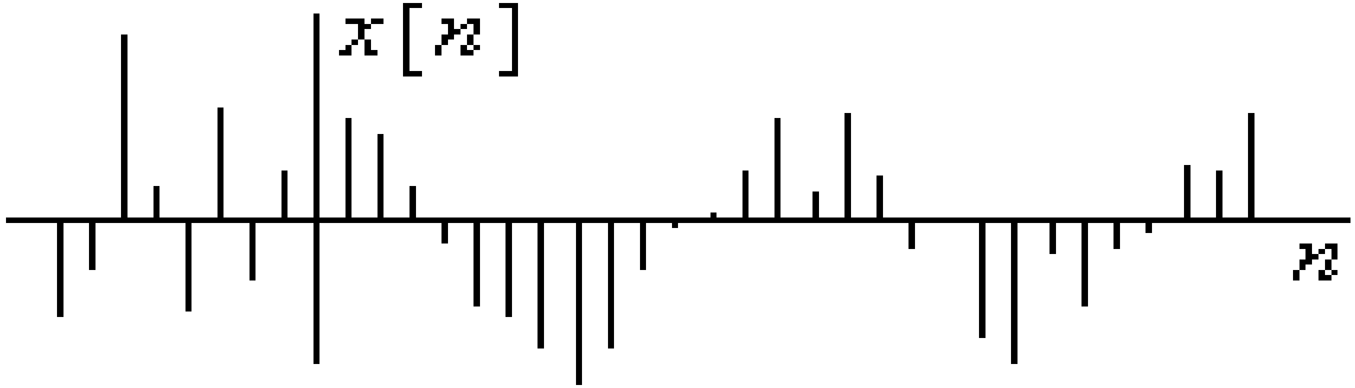
$x[n]$, где n принимает значения из дискретного множества,

функция $x[\cdot]$ может принимать значения из непрерывного

множества $\mathbb{R}$ вещественных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел, или

множества векторов (обработка ПВС или цветных

изображений).



В радиотехнике и связи обычно дискретный сигнал получается путём дискретизации аналогового сигнала.

Согласно теореме отсчётов (Котельникова), аналоговый сигнал $x_a(t)$ со спектром, лежащим в полосе $(-F_в, F_в)$, может быть без потерь информации заменён последовательностью [8]

$x[n] = x_a(nT_d)$ мгновенных значений (отсчётов), измеренных через промежутки времени $T_d < 1/\ 2F_в$. Это значит, что аналоговый сигнал может быть восстановлен по его отсчётам Частота дискретизации $F_d = 1/\ T_d$ – количество отсчётов в секунду.

Многие последовательности изначально являются дискретными. Но если возникает надобность, любой последовательности можно сопоставить аналоговый сигнал с финитным спектром, из которого она могла бы быть получена путем дискретизации.

В дальнейшем предполагается, что аргумент n последовательности $x[n]$ принимает целые значения от $-\infty$ до $+\infty$ (обозначается $n = -\infty, +\infty$). Чтобы отличать дискретный аргумент от непрерывного, принято заключать его в квадратные скобки.

Цифровой сигнал – дискретный сигнал, *квантованный* по уровню, т.е. последовательность, принимающая значения из дискретного (к тому же, как правило, конечного) множества.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦОС

Элементарные операции

Результатом сдвига последовательности $x[n]$ по времени на m отсчётов вправо является новая последовательность $y[n]$, которая в момент $n+m$ принимает то же значение, что последовательность $x[n]$ в момент n . Таким образом, при любом n

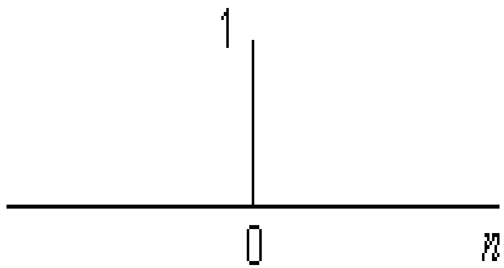
$$y[n+m]=x[n] \text{ или } y[n]=x[n-m].$$

Последовательность $y[n]$ является результатом обращения $x[n]$ по времени, если при любом n значение $y[-n]= x[n]$, поэтому $y[n]=x[-n]$.

Элементарные последовательности

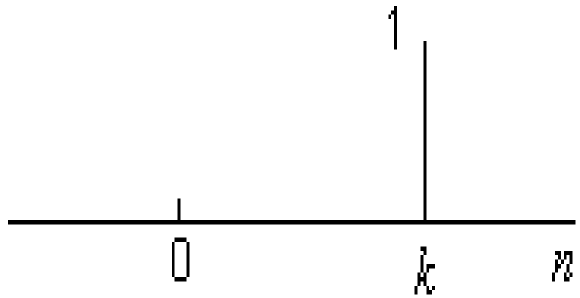
1. δ-Последовательность, определяемая выражением

$$\delta[n]=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases}$$



Такая же последовательность, задержанная на k шагов

$$\delta[n-k]=\begin{cases}1, n=k\\0, n\neq k\end{cases}$$

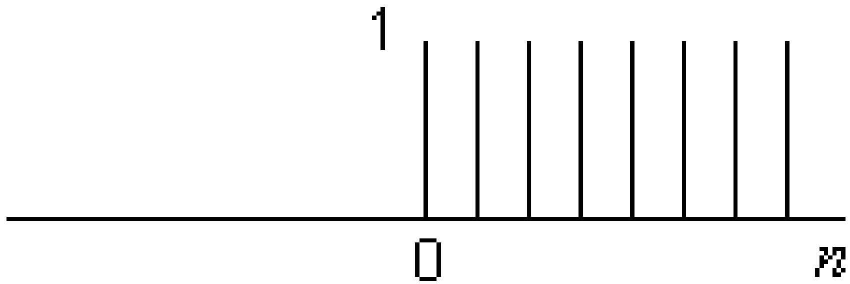


$$x[m]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-m]$$

описывает выделение определённого (m-го) отсчёта последовательности

2. Единичная ступенчатая последовательность

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$



Очевидны соотношения

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

– дискретные аналоги известных формул

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \qquad \delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t)$$

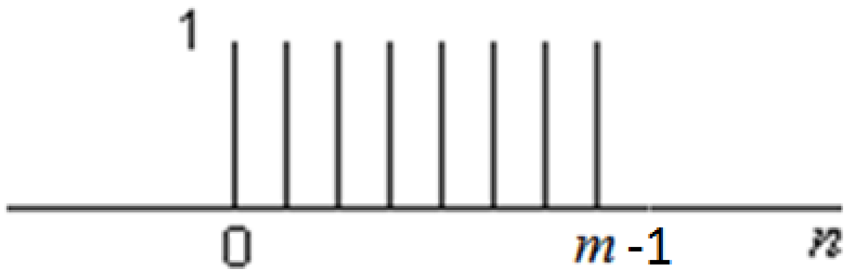
запись вида $y[n] = x[n]u[n]$

означает, что последовательность правосторонняя, или каузальная

Аналогично для обозначения левосторонних последовательностей используется множитель $u[-n]$

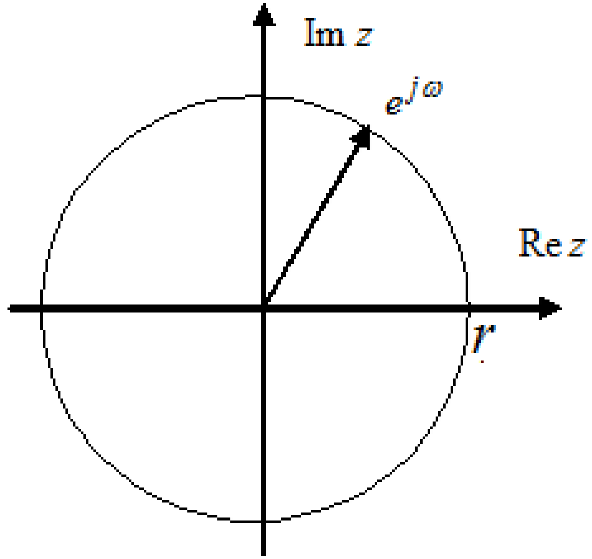
Комбинация вида $u[n] - u[n-m]$

позволяет компактно описать последовательность



3. Экспоненциальная последовательность

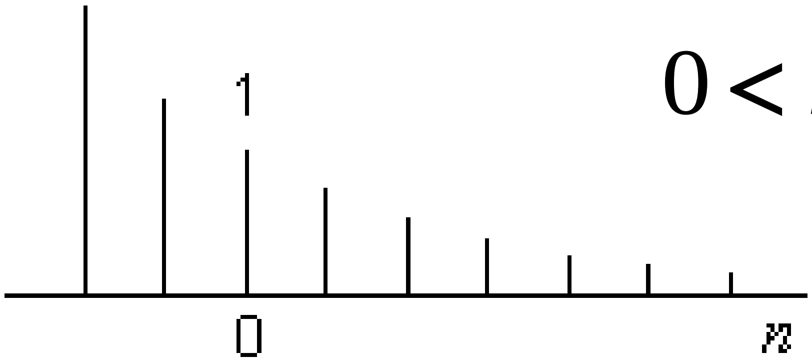
$$e[n] = a^n \qquad a = re^{j\omega}$$ – комплексное число



может быть представлена в виде

$$e[n] = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n)$$

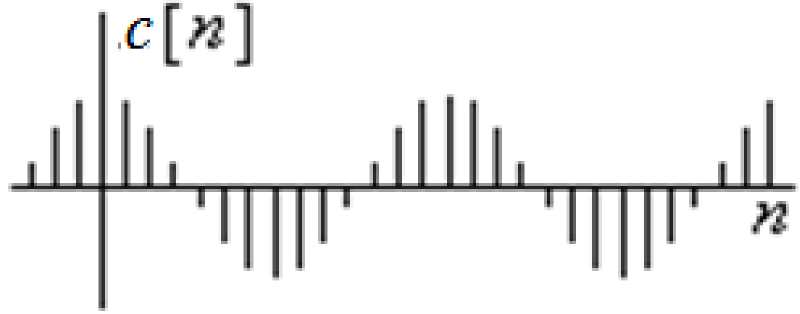
При $\omega = 0$ вещественная экспоненциальная последовательность (геом. прогрессия)



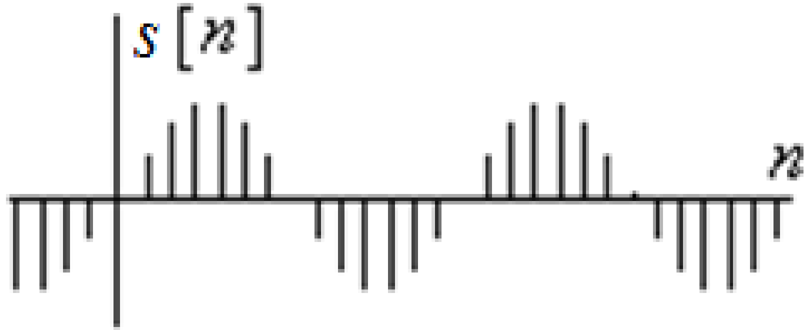
$$0 < r < 1$$

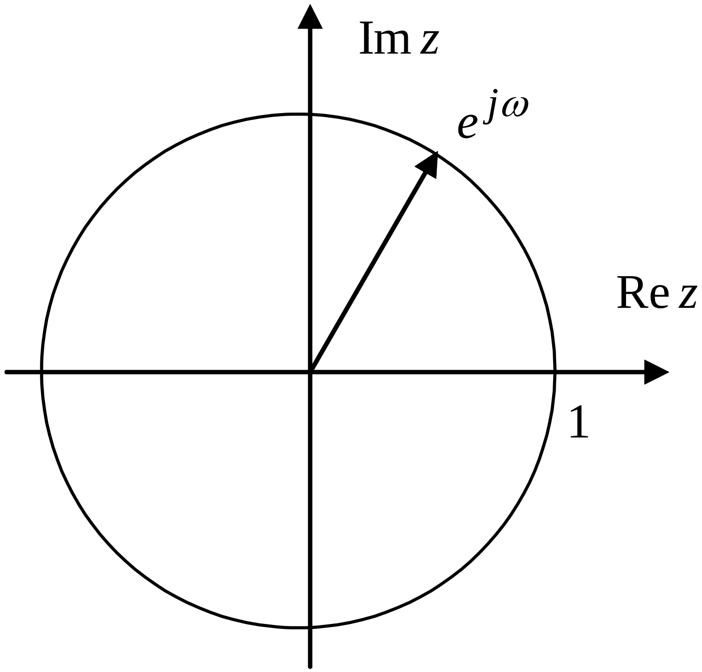
При $r = 1$ вещественная и мнимая части

$$c[n] = \mathrm{Re}\{e[n]\} = \cos \omega n$$



$$s[n] = \mathrm{Im}\{e[n]\} = \sin \omega n$$





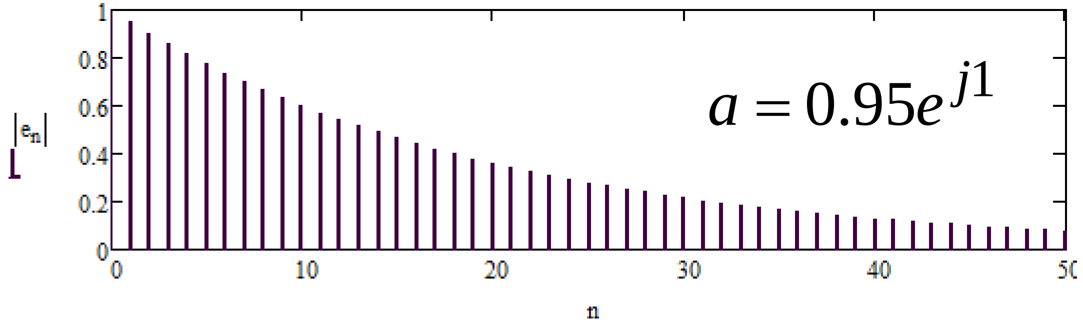
Вещественная величина ω имеет смысл круговой частоты

$$-\pi \le \omega \le \pi$$

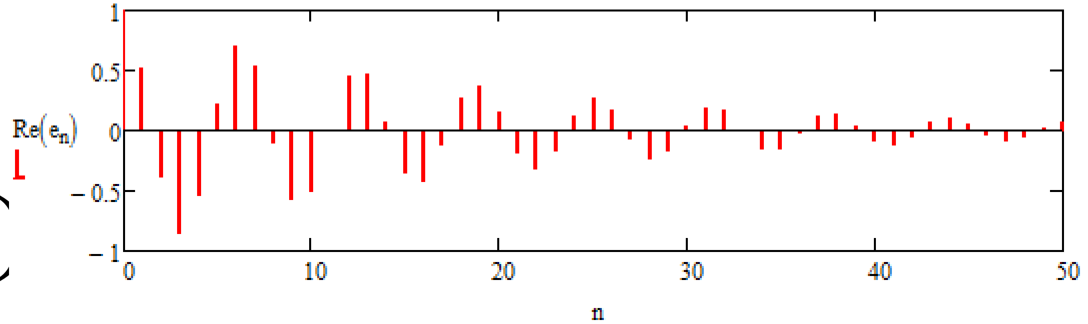
Экспоненциальная комплексная последовательность более общего вида

$$e[n]=r^n e^{j\omega n}e^{j\varphi}=r^n\left[\cos(\omega n+\varphi)+j\sin(\omega n+\varphi)\right]$$

вещественная и мнимая части

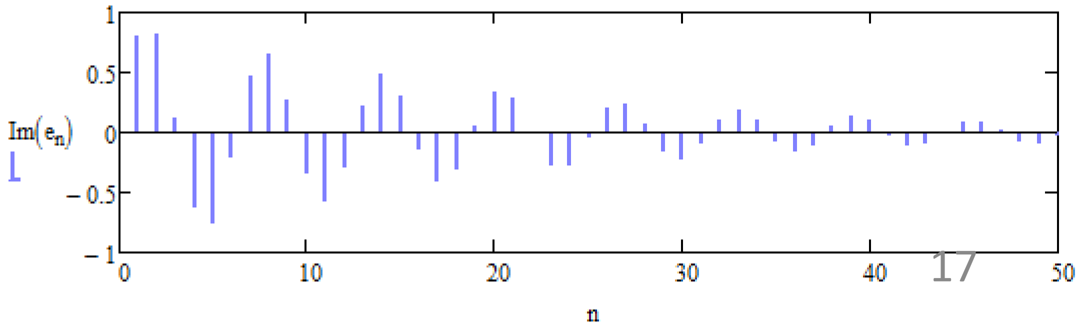


$$c[n]=\mathrm{Re}\{r^n\}\cos(\omega n+\varphi)$$



$$s[n]=\mathrm{Re}\{r^n\}\sin(\omega n+\varphi)$$

При $|r|<1$ убывают



Последовательность $\tilde{x}[n]$ является *периодической*, если

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N]$$

при некотором целом N и любом n.
Наименьшее значение N, при котором равенство выполняется, называется периодом.

Дискретные косинусоида и синусоида могут быть *непериодическими.* Условие периодичности

$$c[n] = \cos(\omega n + \varphi) = \cos(\omega n + \omega N + \varphi)$$

возможно только если $\omega N = 2\pi k$ при некотором целом k

$$\boxed{\frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{N}}$$

Чтобы изучать последовательности с общих позиций, необходимо ввести математическую модель.
Удобной для изучения алгебраической моделью множества последовательностей является линейное (векторное) пространство.

Пространство последовательностей
Линейное пространство – это, по определению, множество M элементов, называемых *векторами*, обладающее следующими свойствами:

$$\text{A.} \quad \forall x, y \in M \quad \exists\ (x+y) \in M$$

$$a1. \ \ x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$a2. \ \exists\ \vec{0} \in M \ : \ \forall x \in M \quad x+\vec{0}=x$$

$$a3. \ \forall x \in M \quad \exists\ (-x) \in M \ : \ x+(-x)=\vec{0}$$

$$a4. \ \ x+y=y+x \quad \forall x, y \in M$$

Условия а1 – а4 известны в алгебре, как аксиомы *коммутативной (а́белевой) группы*.

$$Б.\ \forall x \in M \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}:\ \alpha\, x \in M$$

$$б1.\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \forall x \in M \ :\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x\ ;$$

$$б2.\ \exists 1 \in \mathbb{F}\ \ \forall x \in M:\ \ 1x = x$$

$$б3 - б4.\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall x, y \in M:\begin{cases} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x \end{cases}$$

Множество $\boldsymbol{M}$ – *линейное* (векторное) *пространством*

над полем $\mathbb{F}$

Множество $\boldsymbol{M}$ вещественных последовательностей вида

$$x[n],\ \ n = \overline{-\infty, +\infty}$$

с операциями сложения и умножения на вещественное число (скаляр) удовлетворяет всем перечисленным условиям, значит, образует линейное (векторное) пространство *над полем* $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Аналогично множество комплексных последовательностей образует векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В дальнейшем для общности рассматривается именно это пространство.

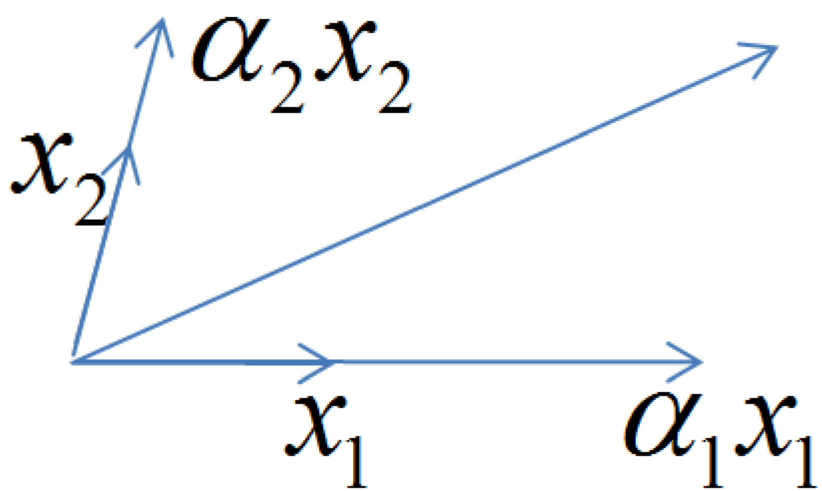
Линейная комбинация

Поскольку определены суммирование последовательностей и умножение последовательности на скаляр, то определена взвешенная сумма (*линейная комбинация*)

$$x=\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k$$

для любой совокупности векторов $x_k \in M,\ k=\overline{1,K}$
со скалярными (весовыми) коэффициентами

$$\alpha_k \in \mathbb{C}, k=\overline{1,K}$$



Линейная оболочка

Если зафиксировать векторы $x_k, \; k=\overline{1,K}$

то получаемые *при всевозможных* наборах

$$\left\{\alpha_k \in \mathbb{C}, k=\overline{1,K}\right\}$$

линейные комбинации образуют *линейную оболочку* совокупности векторов $\left\{x_k, \; k=\overline{1,K}\right\}$

которую принято обозначать

$$Span\left\{x_k, \; k=\overline{1,K}\right\}$$

Например, линейная оболочка двух (неколлинеарных) векторов на плоскости – это вся плоскость.
Линейная оболочка трёх (не лежащих в одной плоскости) векторов – это трёхмерное пространство.

Линейная независимость

Множество векторов $\left\{x_k,\ k=\overline{1,K}\right\}$
линейно независимо, если никакой из векторов данного множества нельзя представить в виде линейной комбинации остальных; иначе говоря, равенство

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k x_k = 0 \quad \text{возможно только при} \quad \alpha_k = 0 \quad \forall\ k$$

Линейная оболочка множества $\boldsymbol{K}$ линейно независимых векторов (последовательностей) из $\boldsymbol{M}$ образует $\boldsymbol{K}$ - мерное *подпространство* пространства $\boldsymbol{M}$

Базис пространства

Базис $\{v_k, \ k = \overline{1, K}\}$
– множество векторов из пространства $\boldsymbol{M}$ такое, что любой вектор из $\boldsymbol{M}$ можно записать как линейную комбинацию базисных векторов

$$x = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v_k$$

Число $\boldsymbol{K}$ называется размерностью пространства $\boldsymbol{M}$,

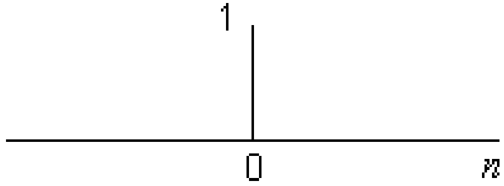
$$K = \dim(M)$$

Если в пространстве $\boldsymbol{M}$ можно найти сколько угодно линейно независимых векторов, то пространство бесконечномерно

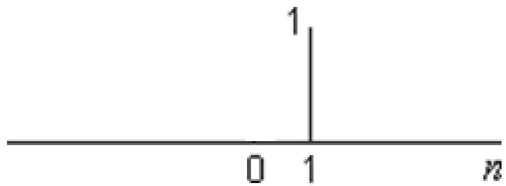
$$\dim(M) = \infty$$

Пример. Для множества (пространства) последовательностей вида $x[n], n=\overline{0,N-1}$ базис можно задать, например, в виде следующего набора векторов

$$e_0=\delta[n],\quad n=\overline{0,N-1}$$

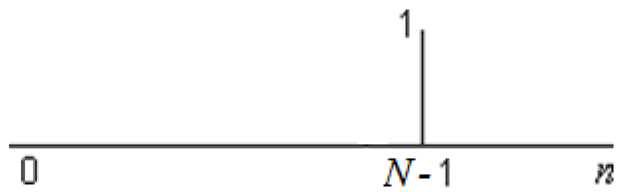


$$e_1=\delta[n-1],\quad n=\overline{0,N-1}$$

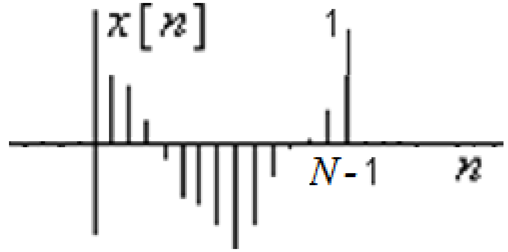


$$e_k=\delta[n-k],\quad n=\overline{0,N-1}$$

$$e_{N-1}=\delta[n-N+1],\quad n=\overline{0,N-1}$$



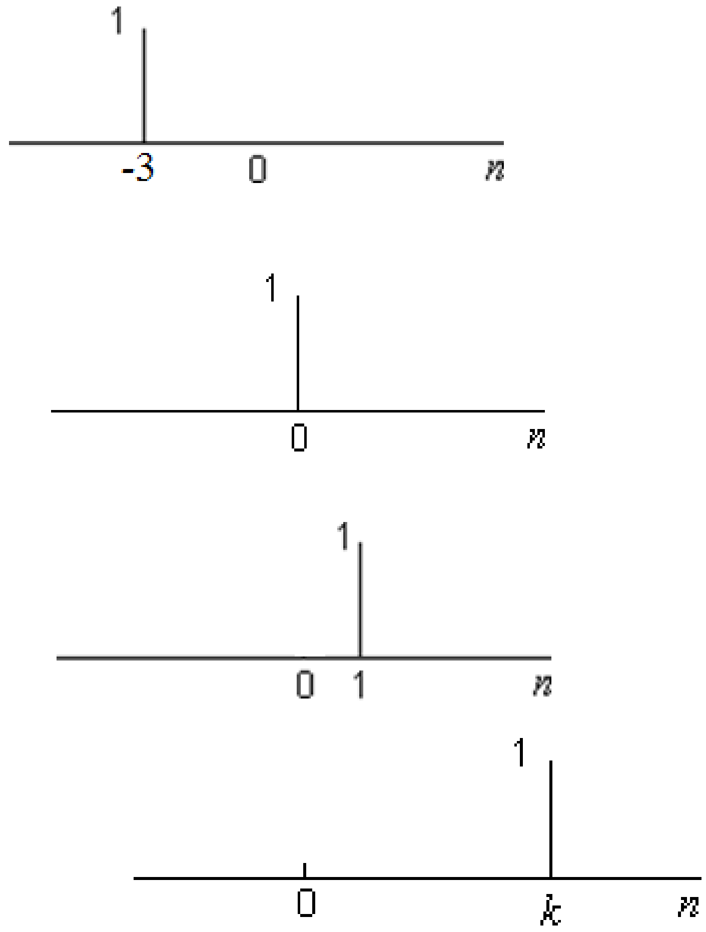
$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\delta[n-k]$$



Пример. Один из возможных базисов для пространства последовательностей бесконечной длины

$$\{\delta[n-k],\ \ k=\overline{-\infty,\infty}\}$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



Легко видеть, что любой конечный набор базисных последовательностей линейно независим. Пространство бесконечномерно.

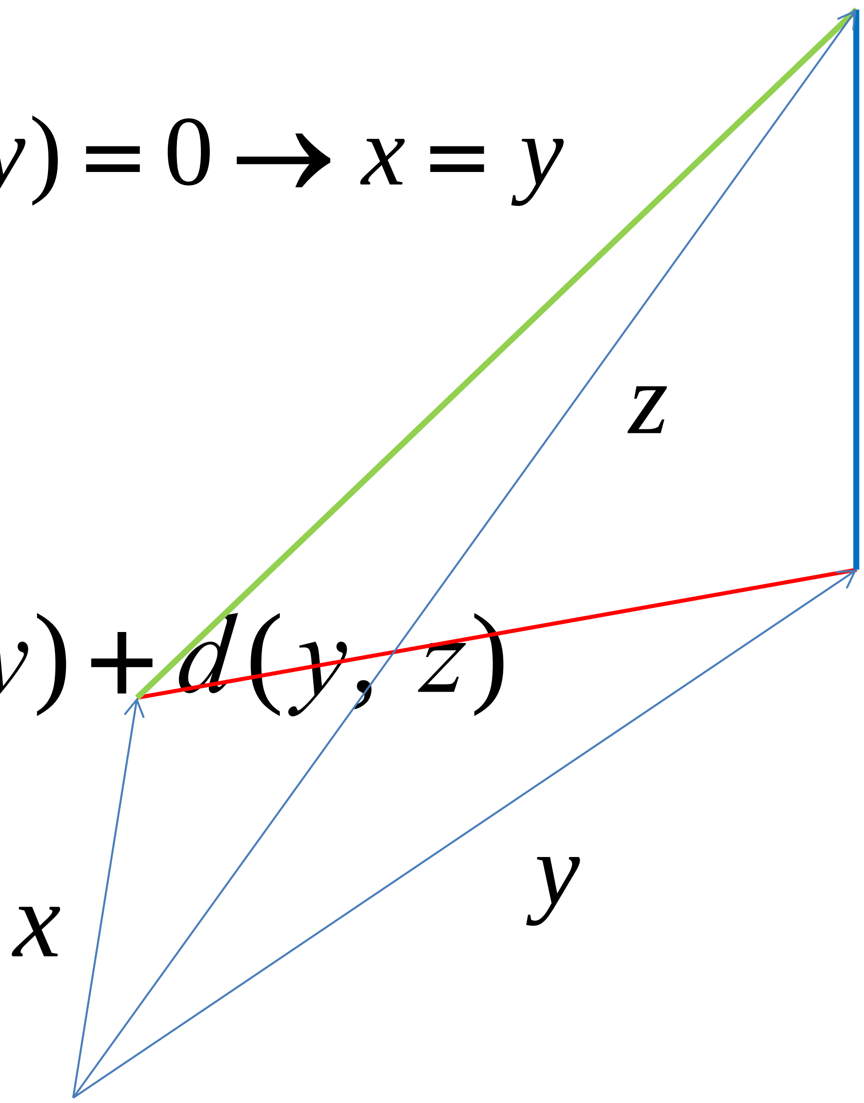
Метрика

Метрика должна удовлетворять следующим очевидным свойствам расстояния, формулируемым в виде аксиом

$$a)\ d(x,\ y) \geq 0;\ \ d(x,\ y) = 0 \rightarrow x = y$$

$$б)\ \ d(x,\ y) = d(y,\ x)$$

$$в)\ \ d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$$



Метрику можно задать многими способами, например:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$$

$$d_3(x, y) = \max_{n=\overline{-\infty,\infty}} \left\{ |x[n] - y[n]| \right\}$$

Норма

должна удовлетворять следующим очевидным свойствам

$$a)\quad \|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \rightarrow x = \vec{0}$$

$$б)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$в)\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$$

Норму, как и метрику, можно ввести различными способами. Для аналоговых сигналов чаще всего применяется норма

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x} \qquad E_x = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Для дискретных сигналов часто используется норма

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = E_x$$

Кроме того, иногда используется норма

$$\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$$

Пространство с заданной на нём нормой называется нормированным.

Сравнивая аксиомы метрики и нормы, нетрудно заметить их сходство. Поэтому, в частности, всегда можно (но не обязательно) метрику определить как норму разности векторов:

$$d(x,\ y) = \|x - y\|$$

$$d_2(x,\ y) = \|x - y\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x[n] - y[n] \,|^2 \right)^{1/2}$$

$$d_2(x,\ y) = \left(\int_0^T |\, x(t) - y(t) \,|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Скалярное произведение

Это функционал, удовлетворяющий условиям (аксиомам):

$$a)\ (x,y)=(y,x)^*$$

$$б)\ (\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$$

$$в)\ (x,x)\geq 0;\ (x,x)=0\rightarrow x=\vec{0}$$

Учитывая а) и б), можно записать

$$(x,\alpha y+\beta z)=(\alpha y+\beta z,x)^*=\alpha^*(y,x)^*+\beta^*(z,x)^*=$$

$$=\alpha^*(x,y)+\beta^*(x,z)$$

Из условия $\quad в)\ (x,x) \geq 0;\ (x,x) = 0 \rightarrow x = \vec{0}$

следует, что через скалярное произведение можно задать норму $\quad \|x\| = \sqrt{(x,x)}$

далее определить метрику как норму разности векторов. Если полученное таким образом пространство полно (то есть вместе с любой сходящейся последовательностью векторов содержит предел этой последовательности), то оно называется гильбертовым пространством. Отметим, что в конечномерном случае гильбертово пространство является евклидовым. Таким образом, гильбертово пространство – это обобщение евклидова пространства на бесконечномерный случай.

В пространстве последовательностей скалярное произведение определяется выражением

$$(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^{*}[n]$$

$$(x, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x^{*}[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^{2} = E_{x}$$

$$\sqrt{E_{x}} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|_{2}$$

l_{2} – пространство последовательностей ограниченной энергии, для которых $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^{2} < \infty$

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Если $(x, y) = 0$, последовательности ортогональны

$$\frac{(x, y)}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \cos \varphi$$

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

по существу, означает, что косинус угла между векторами не превосходит по модулю единицы.

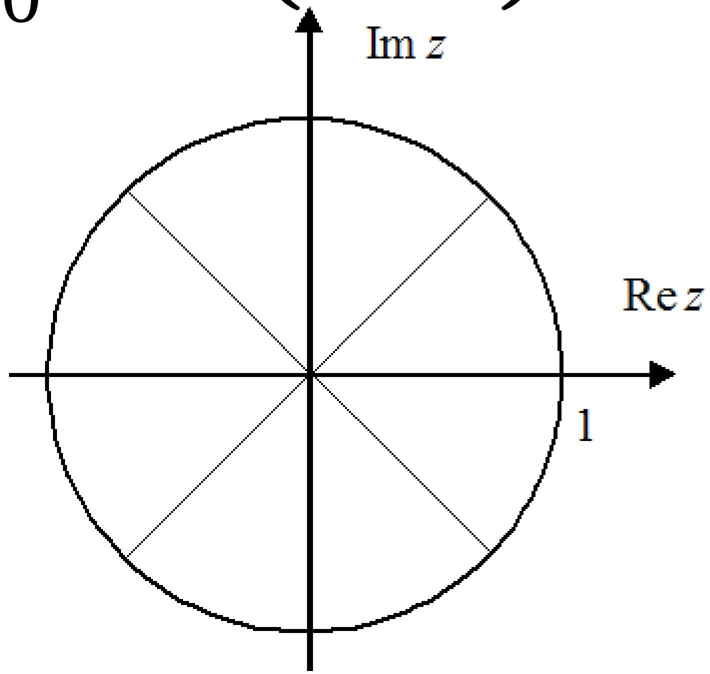
Пример

$$x[n] = \cos\left(2\pi n / N\right),\ \ n = \overline{0, N-1}$$

$$y[n] = \sin\left(2\pi n / N\right),\ \ n = \overline{0, N-1}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{N} n\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{4\pi}{N} n\right)\right\} = 0$$



Пространство l_2

последовательностей ограниченной энергии, снабженное скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n]$$

порождающим норму

$$\sqrt{E_x} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|_2$$

и метрику

$$d_2(x,\ y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x[n] - y[n] \,|^2 \right)^{1/2}$$

полно в этой метрике и, следовательно, является *гильбертовым*

Базисы пространства последовательностей

как найти коэффициенты для представления произвольного вектора в заданном базисе?

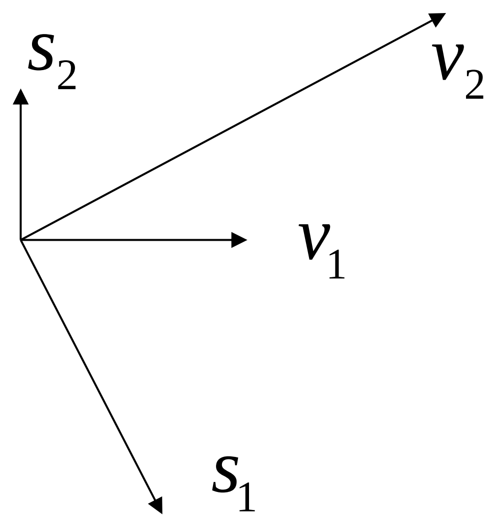
$$x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k v_k$$

произвольный базис

$$\{v_i\ , i = \overline{1,\infty}\}$$

сопряженный базис

$$\{s_i\ , i = \overline{1,\infty}\}$$



должен удовлетворять условию

$$(v_i, s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

Найдем скалярное произведение произвольного вектора
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$$

и вектора s_k из сопряженного базиса

$$(x, s_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i, s_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (v_i, s_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{ik} = \alpha_k$$

Таким образом, получаем формулу для коэффициентов $\alpha_k = (x, s_k)$

Особенно удобно, если все векторы базиса попарно ортогональны и имеют норму, равную 1. Такие базисы называются *ортонормальными* (ортонормированными).

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

$$(x, u_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i, u_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(u_i, u_k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{ik} = \alpha_k$$

Формула для коэффициентов $\alpha_i = (x, u_i)$

Процедура Грама–Шмидта

Пусть в гильбертовом пространстве задана совокупность линейно-независимых векторов

$$\{v_i\ , i=\overline{1,\infty}\}$$

Введем вспомогательную совокупность векторов

$$\{w_i\ , i=\overline{1,\infty}\}$$

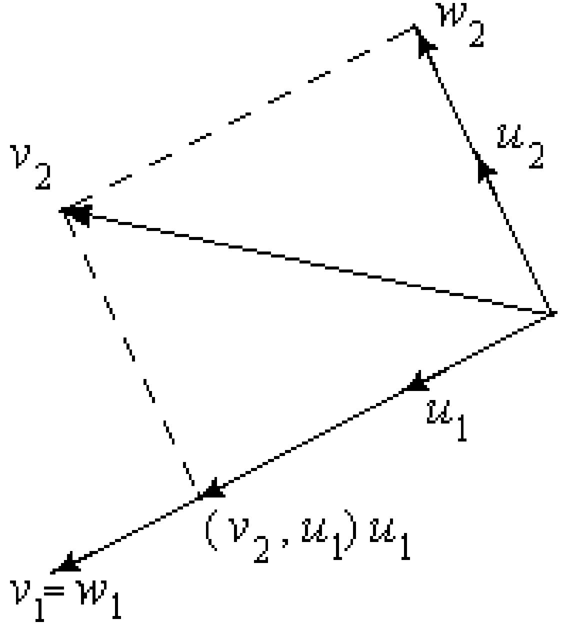
1-й шаг: $w_1 = v_1\,;\quad u_1 = \dfrac{1}{\|w_1\|_2} w_1$

2-й шаг: $w_2 = v_2 - (v_2, u_1\,)u_1\,;\quad u_2 = \dfrac{1}{\|w_2\|_2} w_2$

1-й шаг: $w_1 = v_1$; $u_1 = \dfrac{1}{\left\| w_1 \right\|_2} w_1$

2-й шаг: $w_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1$; $u_2 = \dfrac{1}{\left\| w_2 \right\|_2} w_2$

3-й шаг: $w_3 = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2$;



$u_3 = \dfrac{1}{\left\| w_3 \right\|_2} w_3$

Полнота базиса

Если базис полон, то в данном пространстве не существует векторов, ортогональных *всем* векторам базиса. Полнота базиса означает, что взяв достаточно большое, но конечное число N базисных векторов, можно аппроксимировать данный вектор *с любой заданной точностью* конечной суммой

$$x_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i$$

Представление $x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i u_i$

произвольной последовательности относительно *ортонормального полного* базиса $\{u_i, i = \overline{-\infty, \infty}\}$

называется *обобщённым рядом Фурье*

Равенство Парсеваля

$$\|x\|_2^2 = (x,x) = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i u_i , \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k \right) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_i \alpha_k^* (u_i , u_k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \alpha_i^* =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} | \alpha_i |^2$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} | \alpha_i |^2$$

Обобщение равенства Парсеваля

$$(x,y)=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i u_i\ ,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k u_k\right)=$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_i\,\beta_k^*(u_i\ ,u_k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\beta_k^*$$

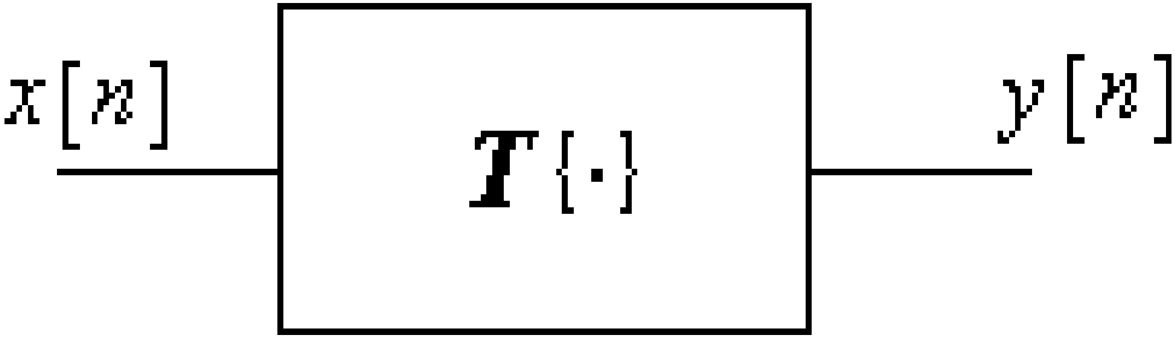
Равенство Парсеваля, в частности, позволяет пользоваться понятиями нормы и скалярного произведения последовательностей, представленных в ортонормальном полном базисе, не конкретизируя вид этого базиса.

Для полного ортонормального базиса справедливо *неравенство Бесселя*

$$\|x\|_2 > \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^2$$

ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ

Любой алгоритм обработки – это отображение множества (пространства) последовательностей в некоторое множество решений.



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$T\{\cdot\}$ - оператор

Линейные операторы

Будем рассматривать цепи, для которых выполняется *принцип суперпозиции*

$$T\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} =$$

$$= \alpha T\{x_1[n]\} + \beta T\{x_2[n]\}$$

Такие цепи (операторы, алгоритмы) называются *линейными*. Цепи (операторы, алгоритмы), не удовлетворяющие принципу суперпозиции, называются *нелинейными*.

Пример. Цепь, описываемая выражением

$$y[n] = x^2[n]$$

не удовлетворяет принципу суперпозиции (является нелинейной), так как при подстановке в качестве входного сигнала взвешенной суммы

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

выходной сигнал

$$\left(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\right)^2 \neq \alpha\left(x_1[n]\right)^2 + \beta\left(x_2[n]\right)^2$$

Линейные дискретные цепи

Принцип суперпозиции означает, что операции образования линейной комбинации и оператор можно менять местами

$$T\{\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]\}=$$

$$=\alpha T\{x_1[n]\}+\beta T\{x_2[n]\}$$

Если входной сигнал представить в виде взвешенной суммы (линейной комбинации) элементарных (базисных) последовательностей, то реакция (отклик) цепи будет взвешенной с такими же коэффициентами суммой откликов на элементарные (базисные) последовательности.

Представим входной сигнал в виде линейной комбинации сдвинутых δ-последовательностей

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]d[n-k]\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

Обозначим отклик цепи на δ-последовательность

$$T\{\delta\,[n-k]\} = h[n,k]$$

$$y\,[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta\,[n-k]\}$$

$$y\,[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k]$$

ЛИС-цепи

Важный подкласс класса линейных цепей составляют цепи, для которых вид оператора $T\{\cdot\}$ не зависит от сдвига k
поэтому изменение реакции такой цепи на сдвинутую последовательность при разных сдвигах

$$k = \overline{-\infty, +\infty}$$

выражается также лишь в сдвиге отклика. Для таких цепей, называемых *линейными инвариантными к сдвигу* (сокращённо *ЛИС-цепями*), или *линейными стационарными*

$$h[n,k] = h_k[n] = h[n-k]$$

Дискретная свёртка

Для ЛИС-цепей связь входной и выходной последовательностей задаётся выражением

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

называемым *дискретной свёрткой*, а $h[\cdot]$ представляет собой функцию одного дискретного аргумента (последовательность) и называется *импульсной характеристикой* дискретной цепи. Символическая форма записи свёртки

$$y = x \otimes h \quad \text{или} \quad y = x * h$$

Любая ЛИС-цепь *полностью* определяется своей импульсной характеристикой, которая представляет собой отклик

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\,[k]\,h[n-k],\ n = \overline{-\infty,+\infty}$$

Контрпример. Устройство, понижающее частоту следования отсчётов (компрессор частоты), линейно, т.к. описывается выражением

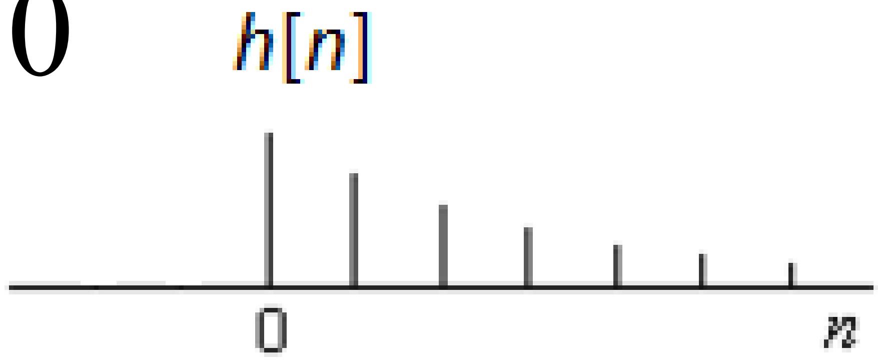
$$y\,[n] = x[Dn],\ n = \overline{-\infty,\infty}$$

но не является инвариантным к сдвигу

$$y\,[n+k] = x[D(n+k)] \neq x[Dn+k],\ n = \overline{-\infty,\infty}$$

Часто (особенно в системах ЦОС, работающих в реальном масштабе времени) на импульсную характеристику накладывается условие *каузальности* (причинности)

$$h[n] \equiv 0, \text{ при } n < 0$$



Это означает, что отклик цепи не может зависеть от будущих значений входной последовательности

СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОЙ СВЁРТКИ

I. Ассоциативность свёртки

$$w = x \otimes y$$

$$v \otimes (x \otimes y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] w[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] y[n-k-r] \right) = \left| \begin{matrix} \text{заменим} \\ r = s-k \end{matrix} \right| =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] x[s-k] y[n-k-s+k] =$$

$$\left| \begin{matrix} \textit{заменим} \\ q[s] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k]x[s-k] = v \otimes x \end{matrix} \right|$$

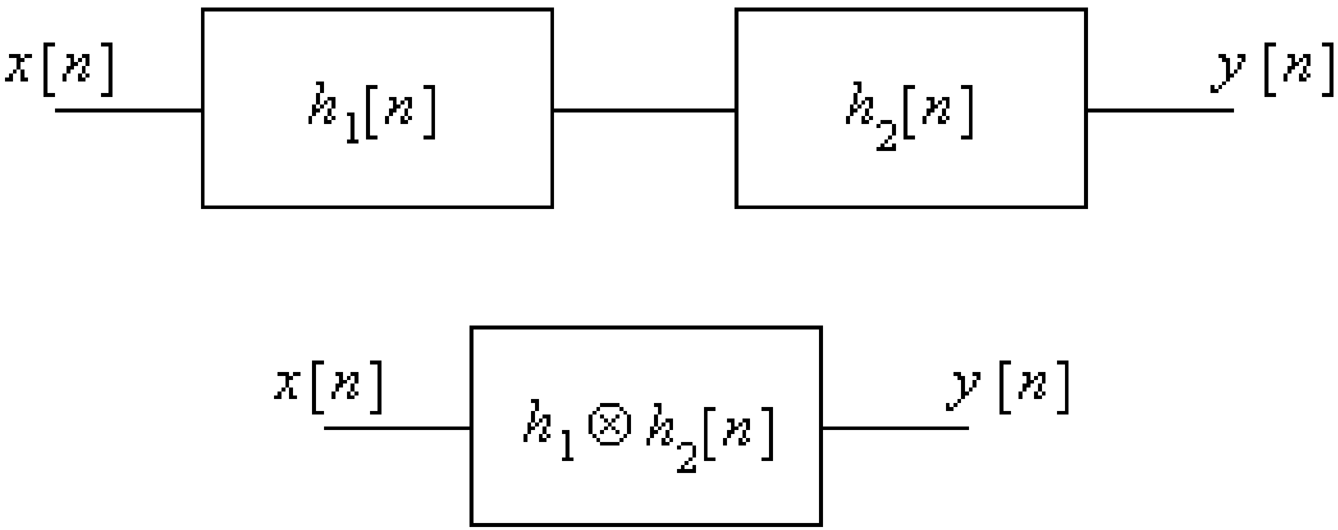
$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} q[s]y\,[n-s] = q \otimes y = (v \otimes x) \otimes y$$

$$v \otimes (x \otimes y) = (v \otimes x) \otimes y = v \otimes x \otimes y$$

Ассоциативность свёртки

$$v \otimes (x \otimes y) = (v \otimes x) \otimes y = v \otimes x \otimes y$$

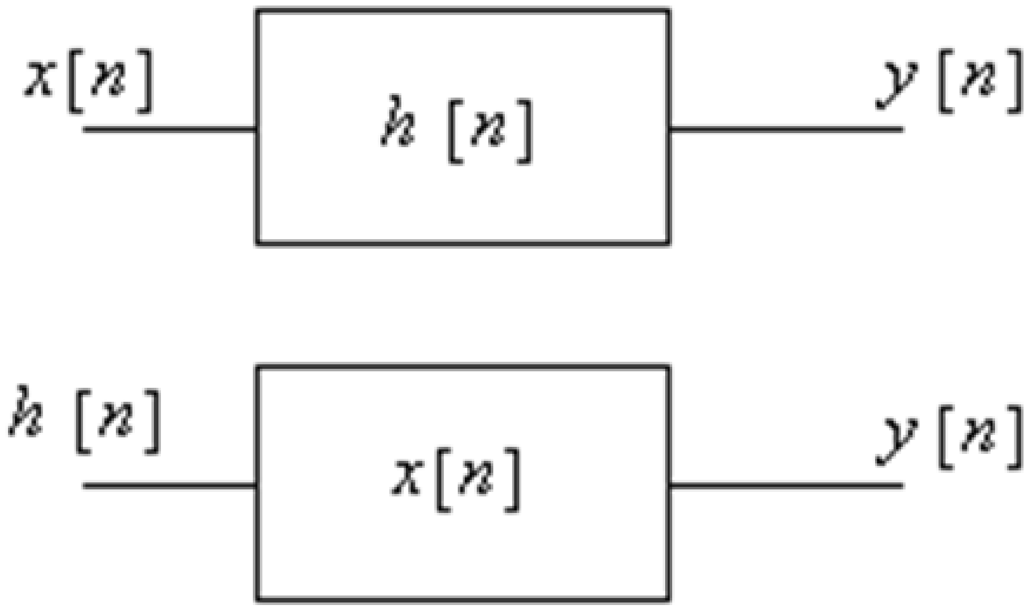
означает эквивалентность



СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОЙ СВЁРТКИ

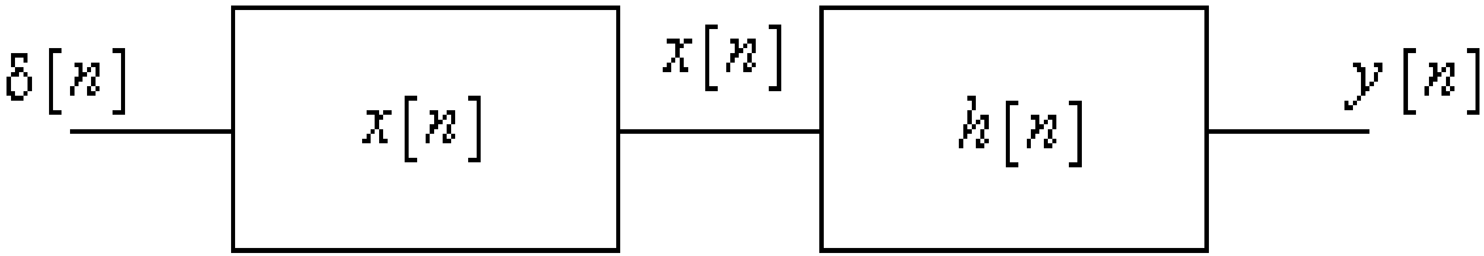
II. Коммутативность свёртки

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$



$$y = x \otimes h = h \otimes x$$

Можно считать *любую* последовательность импульсной характеристикой некоторой *воображаемой* (гипотетической) цепи, т.е. откликом этой цепи на последовательность $\delta\,[n]$



III. Дистрибутивность свёртки

1) $$x \otimes (y+v) = x \otimes y + x \otimes v$$

2) $$a(x \otimes y) = ax \otimes y = x \otimes ay$$

$$x \otimes (y+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\big(y[n-k]+v[n-k]\big) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]v[n-k]$$

$$a(x \otimes y) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ax[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]ay[n-k]$$

Таким образом, оба свойства дистрибутивности доказаны.

$$x \otimes (y+v) = x \otimes y + x \otimes v$$

$$a(x \otimes y) = ax \otimes y = x \otimes ay$$

Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность – это свойства умножения.

Благодаря «равноправию» входных последовательностей и импульсных характеристик ЛИС-цепей мы можем рассматривать те и другие как элементы единого пространства последовательностей.

Ограничимся последовательностями с конечной нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Множество всех таких (комплексных) последовательностей обозначается l_1

На этом множестве определены операции сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{C}$, при этом выполняются аксиомы линейного пространства

Кроме того, на нём определена двухместная операция свёртки, ассоциативная и дистрибутивная. Такие математические структуры называются *алгебрами*, а операция (в данном случае свёртка) называется обобщённым *умножением*. Если в алгебре есть элемент е, такой, что для всех X

$$x \otimes e = x$$

то это алгебра с единицей.

Легко убедиться, что $x \otimes \delta = x$,

Поэтому l_1 - нормированная коммутативная алгебра с единицей относительно свёртки (ба́нахова алгебра).

Условие устойчивости

ЛИС-цепь устойчива, если *ограниченная* по амплитуде входная последовательность не вызывает *бесконечного* отклика. Это *ОВОВ-устойчивость* (от слов «ограниченный вход – ограниченный выход»).

ДУ) если импульсная характеристика имеет конечную l_1-норму (является абсолютно суммируемой), т.е. $\|h\|_1 < \infty$ то цепь устойчива в указанном смысле.

$$|x[n]| \leq K_0$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq K_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

НУ) $$\|h\|_1 = \infty$$

Ограниченное воздействие

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[-n] \neq 0 \\ 0, & h[-n] = 0 \end{cases}$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h[k]h^*[k]}{|h[k]|} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty.$$

Итак, пространство l_1 «состоит из импульсных характеристик устойчивых ЛИС-цепей»

и является алгеброй, но операция (обобщенное умножение, т.е. свёртка) неудобна.
Обычное умножение является *локальной* операцией, результат свёртки при любом значении аргумента получается с учетом значений исходных последовательностей *при всех* значениях аргументов.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Подходящей *моделью* могла бы стать другая алгебра с обычным умножением