НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Цифровая обработка сигналов

В.Н. Васюков

2020

# Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим ДПФ длины $N = 2^r$, где $r$ – целое число:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Общепринято обозначение $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

$W_N^{kn}$ при фиксированном $k$ можно рассматривать, как последовательность $\tilde{w}[n] = W_N^{kn}$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, периодичную с периодом $N / k$, при фиксированном $n$ можно рассматривать $W_N^{kn}$, как последовательность $\tilde{w}[k] = W_N^{kn}$, $k = \overline{-\infty, \infty}$, $N / n$-периодичную по $k$.

Разобьем выражение на слагаемые с четными и нечетными номерами

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-2} x[n]{W_N}^{kn} + \sum_{n=1}^{N-1} x[n]{W_N}^{kn}, \quad k = \overline{0,}$$

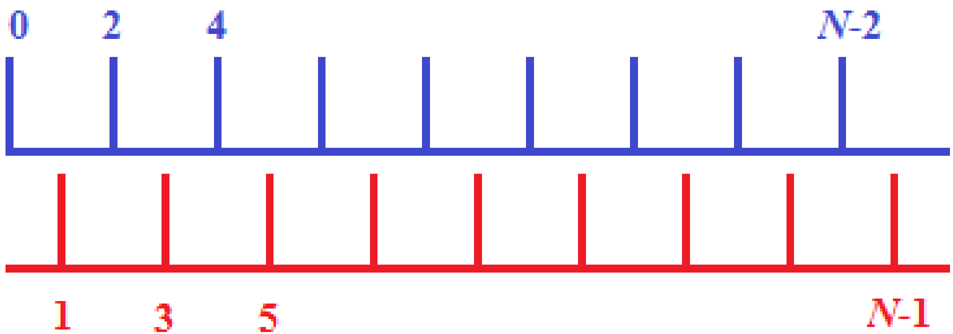
*(чётные)* *(нечётные)*

.

Введем $\nu = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}$, так, что $n = 2\nu$ для четных $n$, а для нечетных $n = 2\nu + 1$. Тогда можно записать

$$X[k] = \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{10}[\nu]{W_N}^{2\nu k} + \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{11}[\nu]{W_N}^{(2\nu+1)k},$$

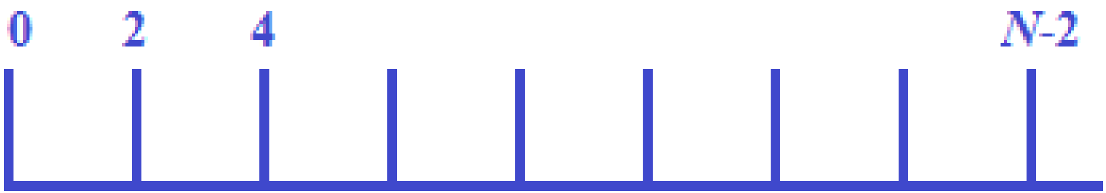
где $x_{10}[\nu] = x[2\nu] = x[n]$ – последовательность отсчётов из $x[n]$ с четными номерами $n$, а $x_{11}[\nu] = x[2\nu+1] = x[n]$– последовательность отсчётов с нечетными номерами. Таким образом, $x[n]$ представляет собой две *подпоследовательности*, как бы «вдвинутые» друг в друга.




Рассмотрим 1-ю сумму

$$\sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{10}[\nu] W_N^{\,2\nu k} = \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{10}[\nu] e^{-j\frac{2\pi}{N}2\nu k} = \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{10}[\nu] e^{-j}$$

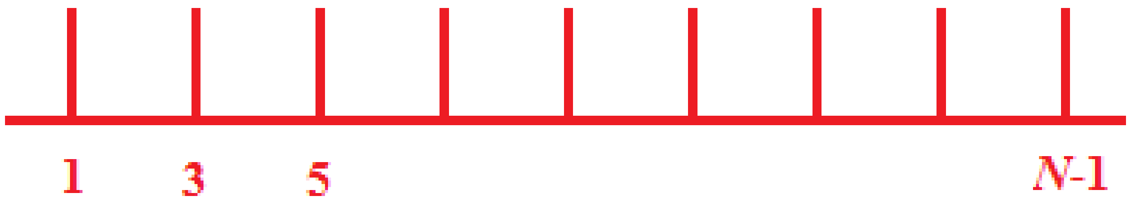
$$= \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{10}[\nu] W_{\frac{N}{2}}^{\,\nu k}$$ – это $N/2$-точечное ДПФ .



Аналогично 2-я сумма:

$$\sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{11}[\nu] W_N^{(2\nu+1)k} = W_N^{k} \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{11}[\nu] e^{-j\frac{2\pi}{N}2\nu k} =$$

$$= W_N^{k} \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{11}[\nu] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}\nu k} = W_N^{k} \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{11}[\nu] W_{\frac{N}{2}}^{\nu k}.$$



Таким образом, ДПФ последовательности $x[n]$ может быть выражено через ДПФ двух подпоследовательностей вдвое меньшей длины:

$$X[k] = X_{10}[k] + W_N{}^k X_{11}[k], \text{ если } k = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}.$$

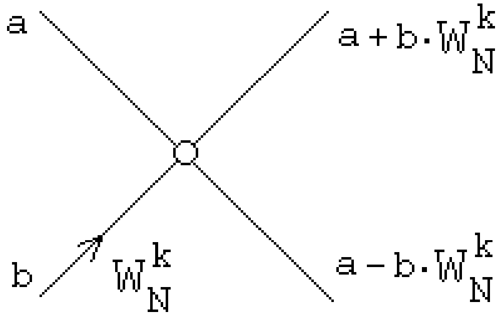
Вспомним, что коэффициенты ДПФ образуют последовательность, периодичную с периодом, равным количеству отсчётов преобразуемой последовательности. Поэтому $X_{10}[k]$ и $X_{11}[k]$ имеют период $\frac{N}{2}$, следовательно, вторая половина отсчётов может быть найдена с учётом этой периодичности при $k=\overline{\frac{N}{2},N-1}$

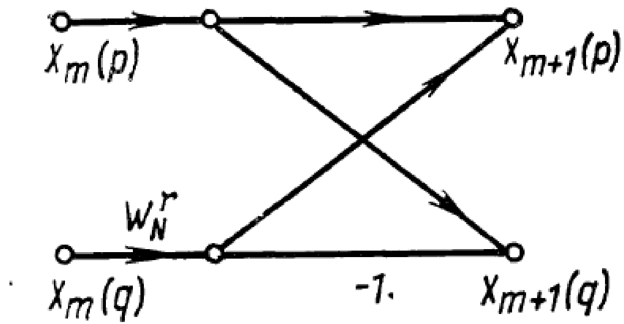
$$X[k+\frac{N}{2}]=X_{10}[k+\frac{N}{2}]+W_N{}^k W_N{}^{N/2} X_{11}[k+\frac{N}{2}]=$$

$$=X_{10}[k]-W_N{}^k X_{11}[k].$$

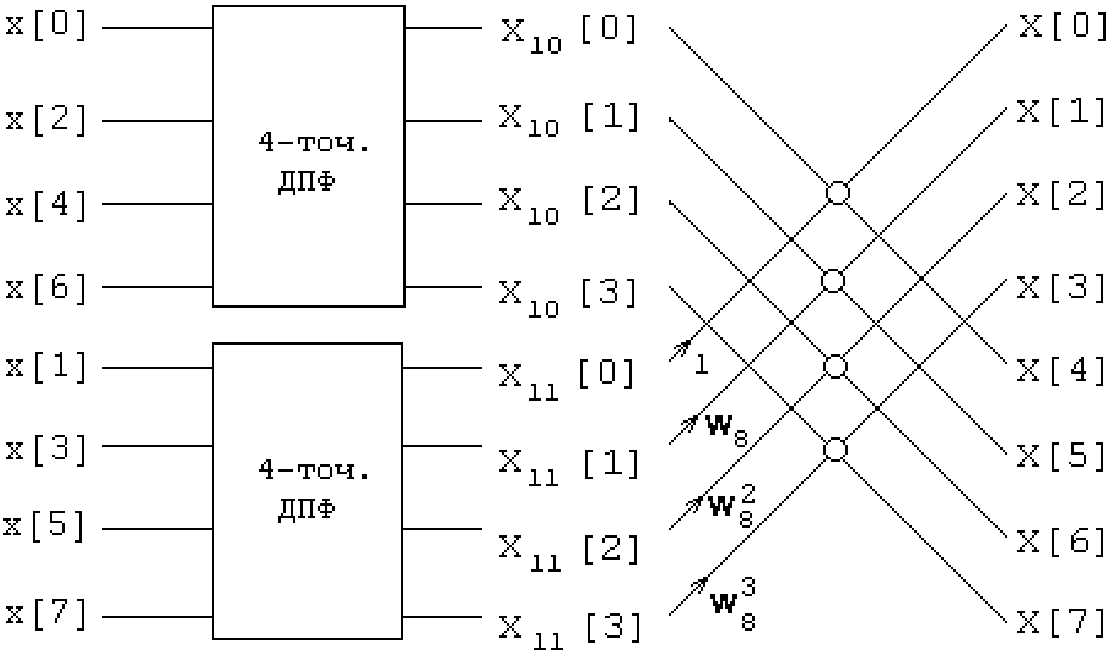
Итак, $X[k]=\begin{cases} X_{10}[k]+W_N{}^k X_{11}[k], k=\overline{0,N/2-1}, \\ X_{10}[k]-W_N{}^k X_{11}[k], k=\overline{N/2,N-1} \end{cases}$

Введём схематическое обозначение операции («бабочка»)

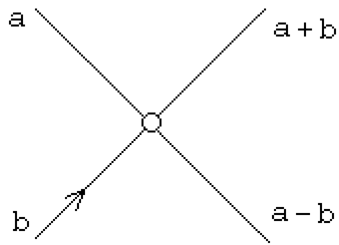


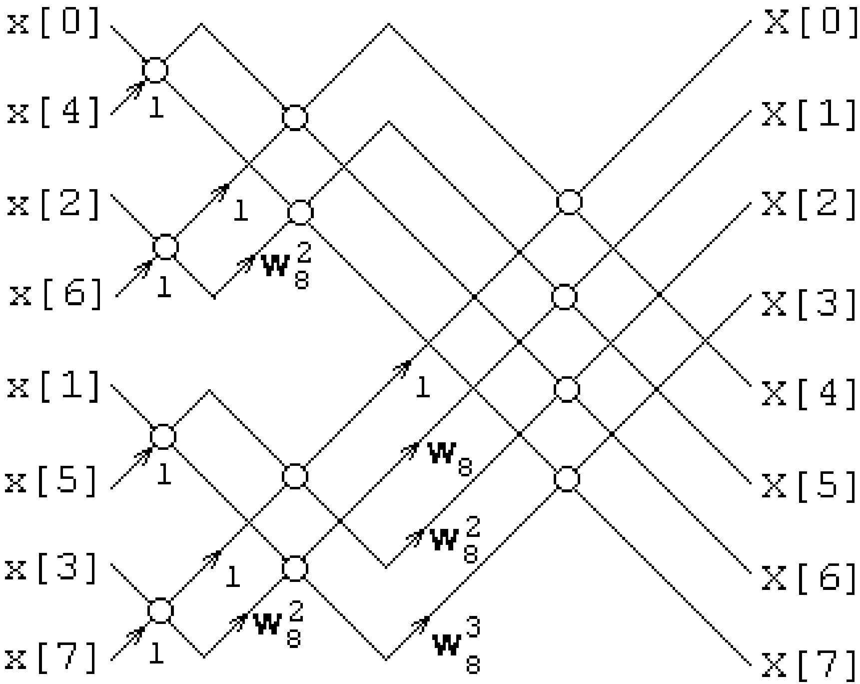

ДПФ последовательности $x[n]$ может быть выражено через ДПФ четной и нечетной подпоследовательностей при всех значениях $k$.

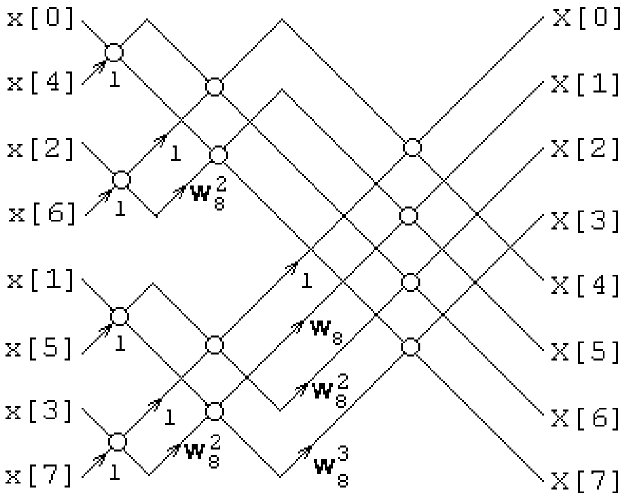



4-точечные ДПФ можно таким же способом свести к 2-точечным, выделяя в последовательности $x_{10}$ две подпоследовательности – с четными $x_{100}$ и нечетными $x_{101}$ номерами, в последовательности $x_{11}$ выделяются две подпоследовательности – с четными $x_{110}$ и нечетными $x_{111}$ номерами и т.д.). Двухточечное ДПФ изображается «бабочкой» наиболее простого вида



# Граф-схема 8-точечного ДПФ






Каждый «слой» схемы требует выполнения примерно $N/2$ комплексных умножений. Если $N = 2^r$, то «слоев» $r = \log_2 N$, поэтому всего требуется $\frac{N}{2}\log_2 N$ умножений и $N\log_2 N$ сложений (вычитаний).

Для вычисления ДПФ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = \overline{0, N-1}$$

необходимо $N^2$ умножений. По алгоритму БПФ нужно $\frac{N}{2}\log_2 N$ умножений, т.е. в $\frac{2N}{\log_2 N}$ раз меньше. Например, при $N = 64 = 2^6$ выигрыш составляет

$$\frac{2^{12}}{2^5 \cdot 6} = \frac{128}{6} \approx 21{,}3;$$ при $N = 1024 = 2^{10}$ выигрыш будет уже $$\frac{2^{20}}{2^9 \cdot 10} = \frac{2^{11}}{10} = 204{,}8.$$

выигрыш тем значительнее, чем больше $N$.

Рассмотренный алгоритм называется БПФ с прореживанием по времени. При этом отсчёты переставляются в опрделённом порядке – двоично-инверсном

| Номер | Двоичное представление | Двоичная инверсия | Двоично-инверсный номер |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 100 | 4 |
| 2 | 010 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 110 | 6 |
| 4 | 100 | 001 | 1 |
| 5 | 101 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 011 | 3 |
| 7 | 111 | 111 | 7 |

# БПФ с прореживанием по частоте

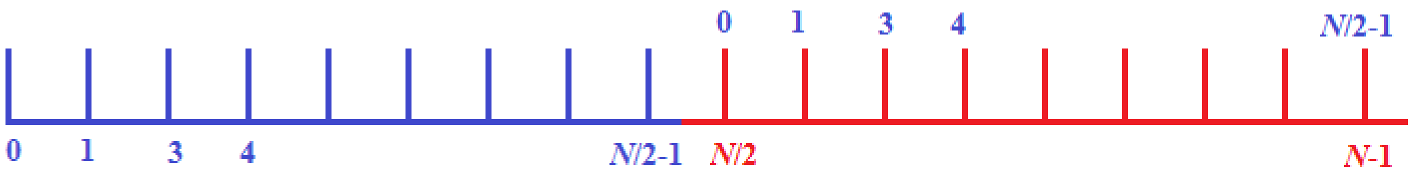
Как и раньше,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}, \; W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Разобьём последовательность на две части:

$$x_1[n] = x[n], \quad n = \overline{0, N/2-1},$$

$$x_2[n] = x[n+N/2], \quad n = \overline{0, N/2-1}.$$



Тогда

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N{}^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N{}^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}$$

или

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n]W_N{}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n]W_N{}^{k(n+N/2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n]W_N{}^{kn} + W_N{}^{kN/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n]W_N{}^{kn}$$

Учитывая $W_N^{kN/2} = e^{-j\frac{2\pi kN/2}{N}} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$

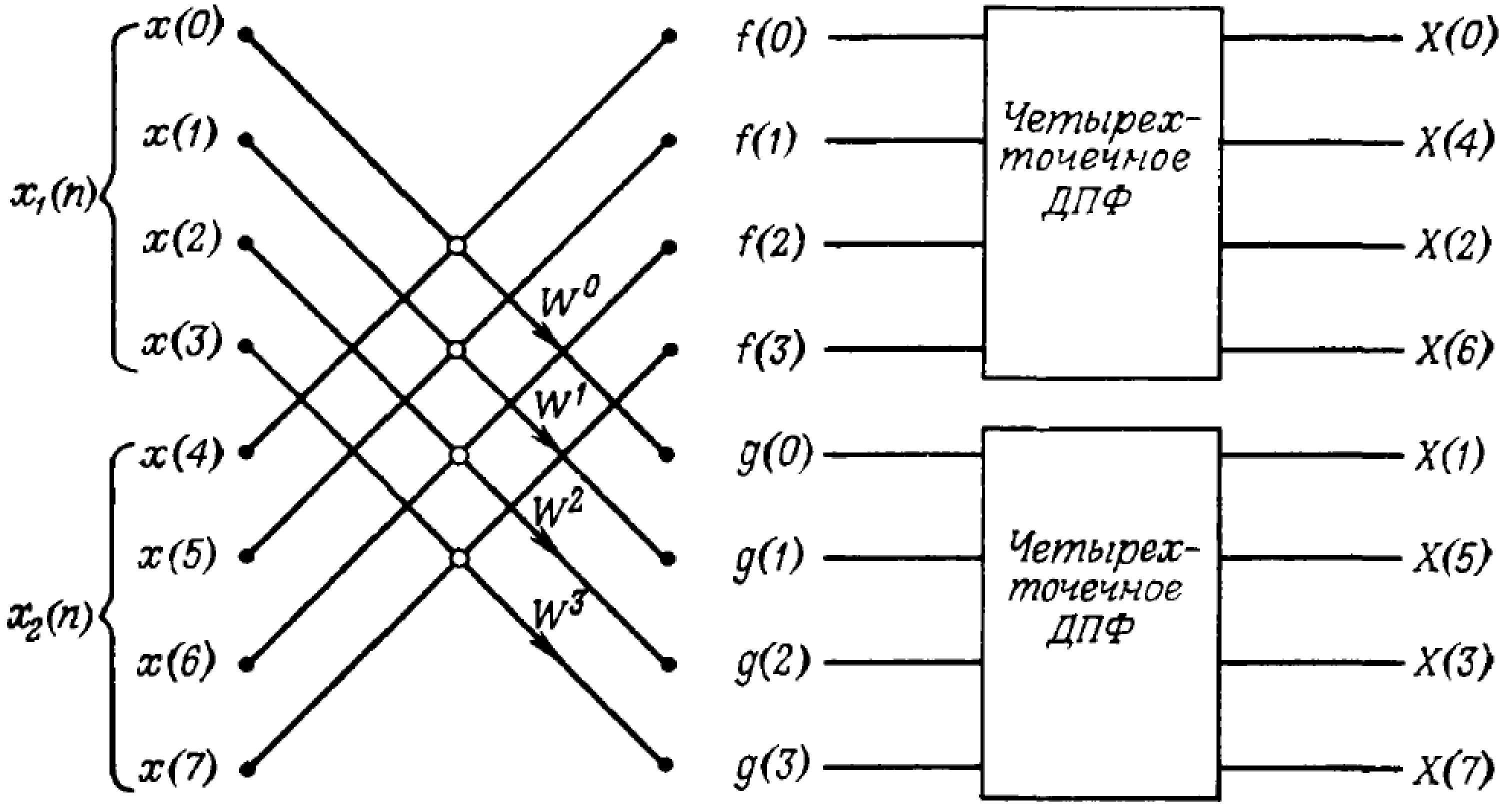
Получим $X[k]=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{x_1[n]+(-1)^k x_2[n]\right\}W_N{}^{kn}$

Для чётных $X[2k]=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{x_1[n]+x_2[n]\right\}W_N{}^{2kn}=$

$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{x_1[n]+x_2[n]\right\}W_{N/2}{}^{kn}$, для нечётных

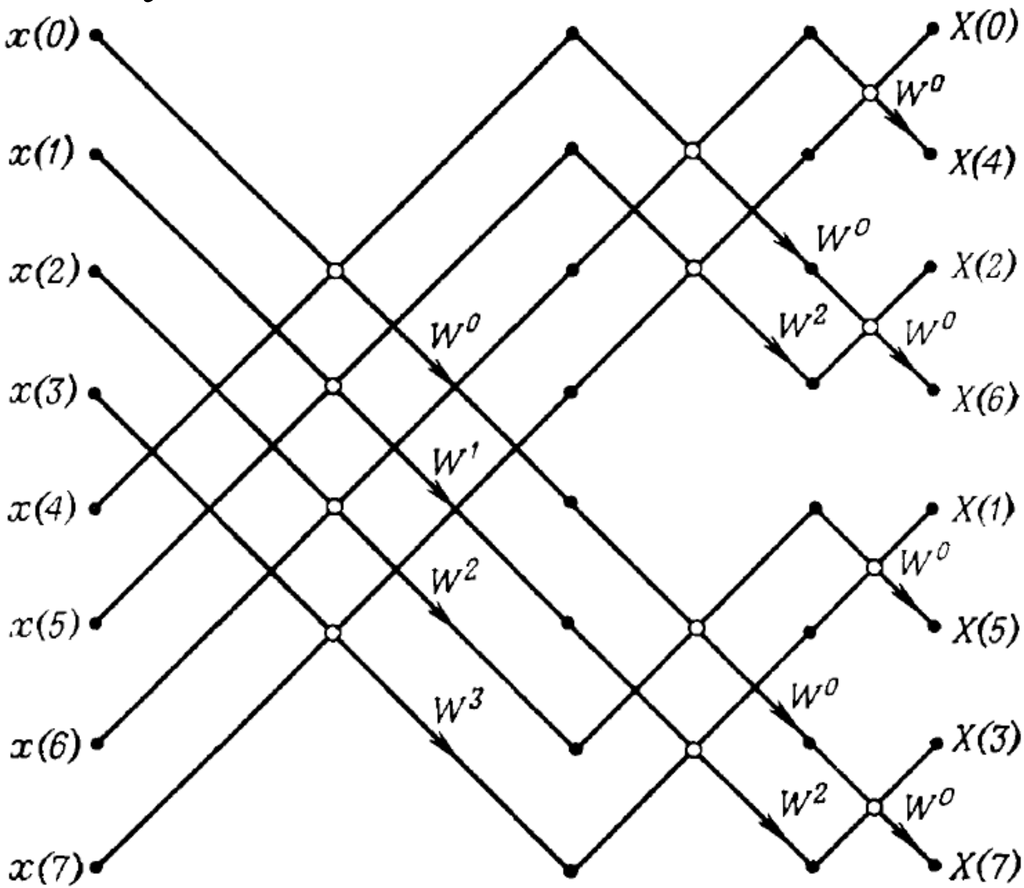
$$X[2k+1]=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{x_1[n]-x_2[n]\right\}W_N{}^{(2k+1)n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{x_1[n]-x_2[n]\right\}W_N^n W_{N/2}{}^{kn}$$




Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение ЦОС, 1979.

# Повторяя, получим



# Вычисление обратного БПФ с помощью прямого

Обратное ДПФ

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}.$$

Применим комплексное сопряжение

$$x[n] = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn}\right)^*$$

Таким образом, последовательность действий:

1) комплексное сопряжение частотных отсчётов

2) прямое БПФ

3) комплексное сопряжение полученных временных отсчётов

4) нормировка (деление на $N$)

# Двумерное БПФ

$$X[k,l]=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}x[n,m]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j\frac{2\pi}{M}lm},$$

$k=\overline{0,N-1}, l=\overline{0,M-1};$ $N^2M^2$ умножений

можно вычислить в два этапа

$$V[n,l]=\sum_{m=0}^{M-1}x[n,m]e^{-j\frac{2\pi}{M}lm},\ n=\overline{0,N-1}, l=\overline{0,M-1}$$

$$X[k,l]=\sum_{n=0}^{N-1}V[n,l]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k=\overline{0,N-1}, l=\overline{0,M-1}$$

Количество умножений $M \cdot N \times N = MN^2$

$$V[n,l] = \sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-j\frac{2\pi}{M}lm}, \; n = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, M-1}$$

и ещё $M \cdot N \times M = M^2 N$

$$X[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} V[n,l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \; k = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, M-1}$$

Всего $MN^2 + M^2N = MN(M+N) < M^2N^2$

Это следствие разделимости ДПФ,

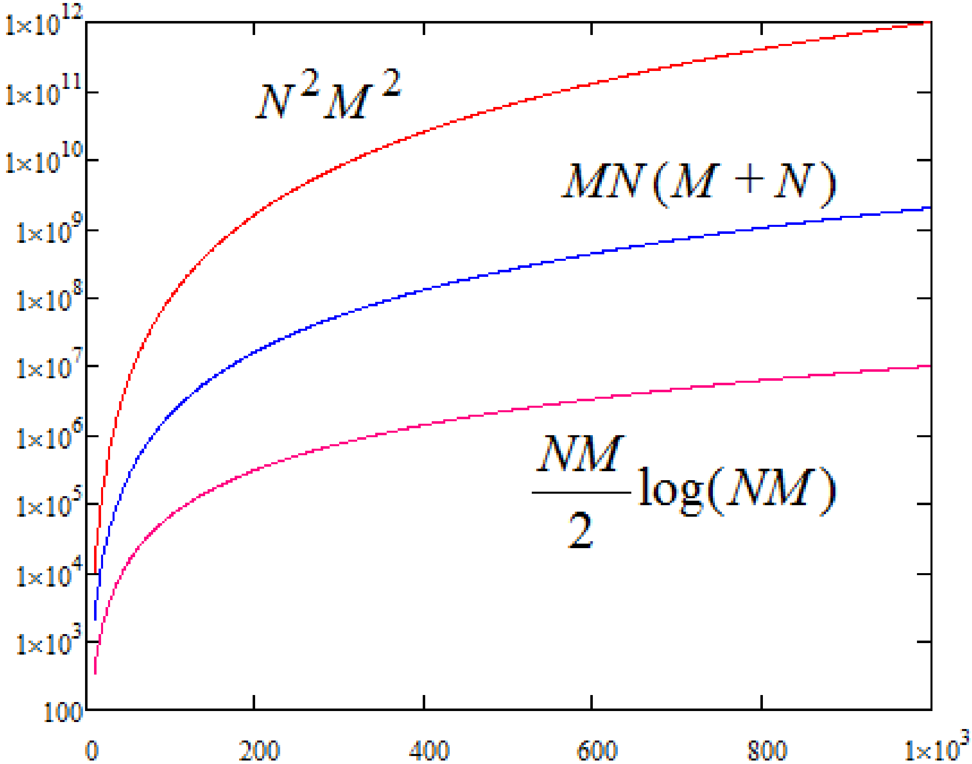
но если можно применить БПФ (если $M$ и $N$ – степени двойки), то можно получить большую экономию с использованием БПФ $M \cdot \frac{N}{2} \log N$

$$V[n,l] = \sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-j\frac{2\pi}{M}lm}, \; n = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, M-1}$$

и ещё $N \cdot \frac{M}{2} \log M$

$$X[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} V[n,l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \; k = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, M-1}$$

Всего $M \cdot \frac{N}{2} \log N + N \cdot \frac{M}{2} \log M = \frac{NM}{2} \log(NM)$




По горизонтали $N = M$, по вертикали количество умножений