3.3. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АНТИКАУЗАЛЬНОЙ ЦЕПИ

Рассмотрим антикаузальную чисто рекурсивную ЛИС-цепь, описываемую уравнением

$$Y(z) = \frac{X(z)}{A(z)},$$

где $A(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k z^k$.

Умножая обе части уравнения на $A(z)$, получим алгебраическое уравнение, связывающее z-образы,

$$\alpha_0 Y(z) + \alpha_1 z^1 Y(z) + ... + \alpha_{M-1} z^{(M-1)} Y(z) = X(z),$$

откуда обратным z-преобразованием получаем разностное уравнение

$$\alpha_0 y[n] = x[n] - \alpha_1 y[n+1] - ... - \alpha_{M-1} y[n+M-1] =$$
$$= x[n] - \sum_{k=1}^{M-1} \alpha_k y[n+k].$$

Поделив обе части уравнения на α_0 и введя новые обозначения для коэффициентов, получим уравнение

$$y[n] = \beta x[n] + \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n+k], \qquad (3.4)$$

соответствующее структурной схеме, представленной на рис. 3.2.

Особенность схемы состоит в том, что при вычислении значений выходной последовательности $y[n]$ используются ранее вычисленные «БУДУЩИЕ» значения той же последовательности.

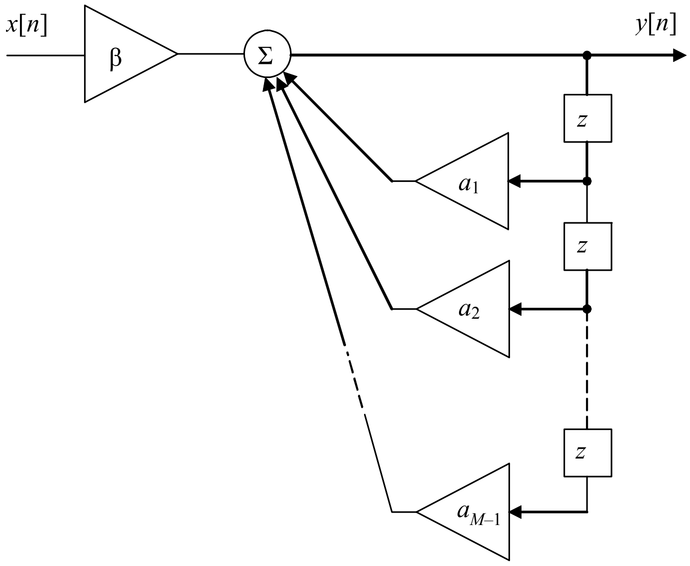

Рис. 3.2. Структура рекурсивной АНТИКАУЗАЛЬНОЙ цепи

Здесь и далее предполагается, что для любого разностного уравнения заданы соответствующие *начальные условия.* Для уравнения (3.4), например, при $n = 0,1,2,...$ начальными условиями являются значения выходной последовательности $y[M-1]$, $y[M-2]$, …, $y[1]$.

Пример 3.1. Простейшая рекурсивная антикаузальная цепь описывается уравнением $y[n] = x[n] + ay[n+1]$ и имеет структурную схему, представленную на рис. 3.3.

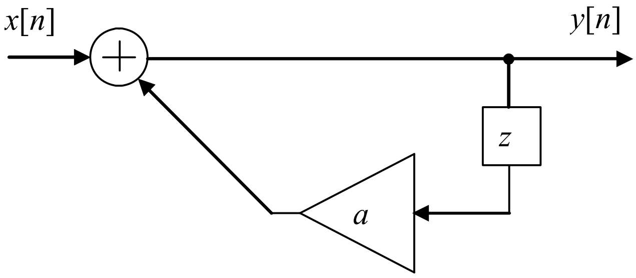

Рис. 3.3. Структура простейшей рекурсивной цепи

Нетрудно видеть, что передаточная функция этой цепи $H(z) = \dfrac{1}{1 - az}$ характеризуется одним полюсом $d = a^{-1} = 1/a$, причем для устойчивости цепи необходимо и достаточно условие $|d| > 1$. Импульсную характеристику $h[n]$ простейшей рекурсивной цепи можно вычислить рекуррентно, подставляя $\delta[n]$ в качестве $x[n]$ при нулевых начальных условиях и определяя $y[n]$ для $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$ и т.д.

Очевидно, $y[n] = 0$ при $n > 0$ (подразумеваются нулевые начальные условия). При $n = 0$ имеет место воздействие $\delta[n] = 1$ и поэтому $y[0] = 1$. При $n = -1$ сигнал на входе $\delta[n] = 0$, но для выходной последовательности, прошедшей элемент опережения, $y[n+1] = y[0] = 1$, поэтому сигнал на выходе $y[n] = y[-1] = a$. Рассуждая аналогично, получим $y[n] = h[n] = a^n$ для всех $n \le 0$. Таким образом, импульсная характеристика простейшей рекурсивной цепи представляет собой комплексную экспоненциальную АНТИКАУЗАЛЬНУЮ последовательность

$$h[n] = a^n = r^n \mathrm{e}^{j\omega n}, \; n \le 0,$$

где $re^{j\omega} = a$. ◄

Импульсную характеристику простейшей рекурсивной цепи можно вычислить и другим способом. Следует вспомнить, что *z*-образ последовательности конечной длины есть полином, а *z*-образ бесконечной последовательности – степенной ряд, причем степень переменной $s = z$ фиксирует порядковый *номер* соответствующего отсчета последовательности. Перемножение полиномов эквивалентно свертке последовательностей конечной длины. Полиномы можно не только умножать, но и делить, пользуясь обычным алгоритмом деления «углом». Поэтому деление единицы (*z*-образа δ-последовательности) на полином $1 - az$ (знаменатель передаточной функции простейшей рекурсивной цепи) дает ряд по степеням $s = z$, последовательность коэффициентов которого представляет собой импульсную характеристику:

$$\begin{array}{l|l}
1 & \underline{1-az} \\
\underline{1-az} & 1+az+a^2z^2+a^3z^3+\ldots \\
az & \\
\underline{az\ \ -a^2z^2} & \\
\quad a^2z^2 & \\
\quad \underline{a^2z^2-a^3z^3} & \\
\qquad a^3z^3 & \\
\qquad \underline{a^3z^3-a^4z^4}\ \text{и т.д.} &
\end{array}$$

Из начала полученного ряда видно, что последовательность значений импульсной характеристики $1, a, a^2, a^3, \ldots$ соответствует формуле $h[n]=a^n$ при $n=0,-1,-2,-3,\ldots$.

Наконец, импульсную характеристику произвольной ЛИС-цепи можно найти через обратное z-преобразование передаточной функции.

3.4. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ И СТРУКТУРА АНТИКАУЗАЛЬНОЙ ЛИС-ЦЕПИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Разностное уравнение антикаузальной цепи

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n+k]+\sum_{r=1}^{M-1} a_r y[n+r],$$

откуда следует структурная схема ЛИС-цепи конечного порядка (рис. 3.4).

Переходя от последовательностей к их z-образам, получим алгебраическое уравнение

$$Y(z)\left[1-\sum_{r=1}^{M-1} a_r z^r\right]=X(z)\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^k ,$$

из которого найдем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^k}{1 - \sum_{r=1}^{M-1} a_r z^r} = B(z)\frac{1}{A(z)}. \quad (3.6)$$

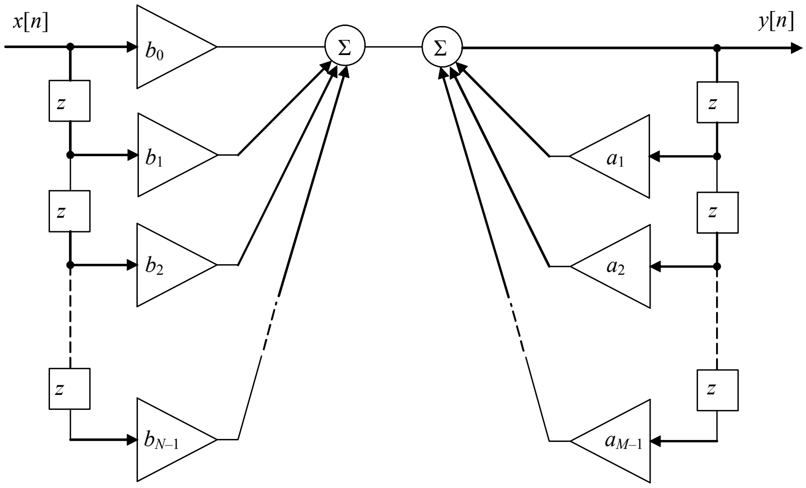

Рис. 3.4. Структура антикаузальной ЛИС-цепи конечного порядка

Из полученного уравнения видно, что умножение z-образа входной последовательности на $H(z)$ можно заменить умножением на $B(z)$ с последующим делением на $A(z)$. Поэтому ЛИС-цепь конечного порядка (т.е. ЛИС-цепь, состоящая из конечного числа элементов) в общем случае может быть представлена последовательным (*каскадным*) соединением КИХ- и БИХ-цепей (нерекурсивной и рекурсивной цепей), уже рассмотренных ранее. Следовательно, импульсная характеристика этой цепи равна свертке импульсных характеристик ее нерекурсивной и рекурсивной частей и имеет в общем случае *бесконечную* длину. Исключением является случай, когда полином $B(z)$ делится на $A(z)$ без остатка, т.е. $B(z) = A(z)\,C(z)$, где $C(z)$ – некоторый полином относительно z. В этом случае цепь фактически имеет передаточную функцию в виде полинома $C(z)$ и, следовательно, импульсную характеристику конечной длины, хотя по структуре является рекурсивной цепью.

3.5. СТРОЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНТИКАУЗАЛЬНОЙ ЛИС-ЦЕПИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть передаточная функция ЛИС-цепи имеет вид

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} b_k z^k}{1-\sum\limits_{r=1}^{M-1} a_r z^r}=\frac{B(z)}{A(z)}, \tag{3.7}$$

где $a_0 = 1$.

Известно, что полином с вещественными коэффициентами порядка Q имеет Q корней, которые могут либо быть вещественными, либо составлять комплексно-сопряженные пары. Корни могут также совпадать (быть кратными). Следовательно, знаменатель передаточной функции (3.7) имеет $(M-1)$ корней.

Рассмотрим три частных случая.

А. Простые вещественные корни

Допустим, что знаменатель $A(z)$ передаточной функции (3.7) имеет только вещественные корни, причем все они различны. Обозначим корни d_1, d_2, ..., d_{M-1}.

Предположим вначале, что порядок полинома-числителя $(N-1)$ меньше порядка $(M-1)$ полинома-знаменателя, т. е. передаточная функция представляет собой правильную дробь.

Образуем сумму элементарных дробей вида

$$\frac{C_1}{1-d_1^{-1}z}+\frac{C_2}{1-d_2^{-1}z}+...+\frac{C_{M-1}}{1-d_{M-1}^{-1}z}. \tag{3.8}$$

Приводя слагаемые к общему знаменателю и складывая, получим в знаменателе согласно основной теореме алгебры полином $A(z)$, а в числителе – полином степени не выше $(M-2)$. Приравнивая полученную дробь передаточной функции, можно найти неопределенные коэффициенты C_1, C_2, …, C_{M-1}. Тем самым доказано, что дробно-рациональная передаточная функция, у которой степень числителя *меньше* степени знаменателя, может быть представлена в виде суммы элементарных дробей

$$H(z) = \frac{C_1}{1 - d_1^{-1} z} + \frac{C_2}{1 - d_2^{-1} z} + \ldots + \frac{C_{M-1}}{1 - d_{M-1}^{-1} z}, \qquad (3.9)$$

а сама ЛИС-цепь – в виде параллельного соединения простейших рекурсивных цепей (рис. 3.5). Импульсная характеристика этой цепи равна сумме экспоненциальных импульсных характеристик простейших АНТИКАУЗАЛЬНЫХ рекурсивных цепей, соединенных параллельно:

$$h[n] = \sum_{k=1}^{M-1} C_k d_k^n u[-n],$$

затухающих при $n \to -\infty$ при условии, что все полюсы находятся вне 1-окружности.

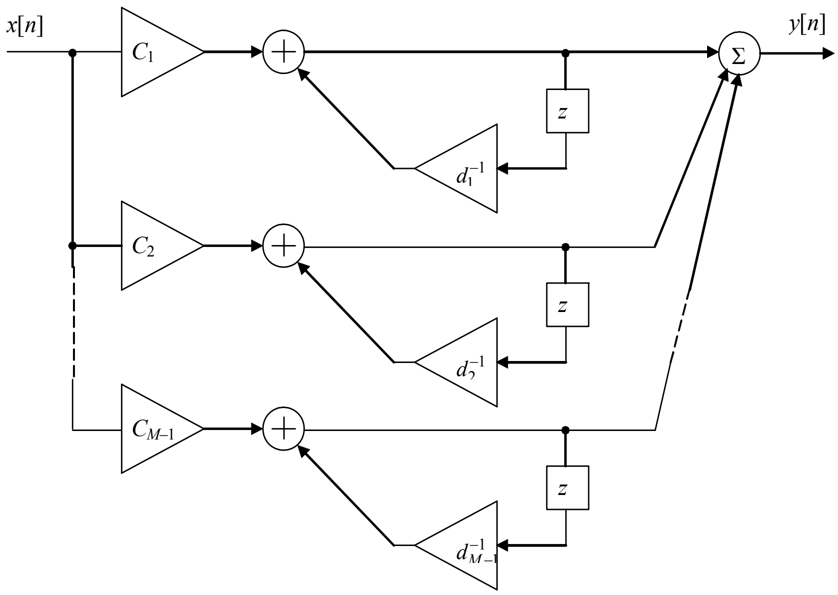

Рис. 3.5. Структура ЛИС-цепи в виде параллельного соединения простейших рекурсивных цепей

Предположим теперь, что степень числителя $(N-1)$ *не меньше* степени знаменателя $(M-1)$. Тогда числитель $B(z)$ можно поделить на знаменатель $A(z)$ и записать передаточную функцию в виде суммы

$$H(z) = D(z) + \frac{B'(z)}{A(z)},$$

где $D(z)$ – целая часть передаточной функции – полином степени $(N-M)$; $B'(z)$ – остаток от деления. Второе слагаемое представляет собой правильную дробь, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя, и соответствует ранее рассмотренному случаю. Суммирование передаточных функций соответствует параллельному соединению цепей. Такой случай иллюстрируется следующим примером.

Пример 3.3. Пусть передаточная функция цепи имеет вид

$$H(z) = \frac{8z^3 + 4z^2 + z - 16}{4z^2 + z + 7.5}.$$

Выполняя деление «углом» полинома-числителя на полином-знаменатель

$$\begin{array}{l|l} 8z^3 + 4z^2 + z - 16 & \underline{4z^2 + z + 7.5} \\ \underline{8z^3 + 2z^2 + 15z} & 2z + 0,5 \\ \quad 2z^2 - 14z - 16 & \\ \quad \underline{2z^2 + 0,5z + 3.75} & \\ \qquad -14,5z - 19.75, & \end{array}$$

получим результат деления с остатком

$$2z + 0,5 - \frac{14,5z + 19.75}{4z^2 + z + 7.5},$$

поэтому передаточная функция может быть записана в виде суммы полинома и правильной дроби, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя:

$$H(z) = 2z + 0,5 - \frac{15,5z + 19.75}{4z^2 + z + 7.5} = 2z + 0,5 - \frac{2.067z + 2.633}{0.533z^2 + 0.133z + 1.}.$$

Правильная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{C_1}{1 - d_1^{-1}z} + \frac{C_2}{1 - d_2^{-1}z}$$

где $d_1 = -0.125 + j1.364$, $d_2 = -0.125 - j1.364$, а коэффициенты C_1, C_2 можно найти путем приведения суммы к общему знаменателю и приравнивания числителя полученного выражения числителю правильной дроби, в результате чего получается система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2.633 \\ C_1 d_2^{-1} + C_2 d_1^{-1} = 2.067. \end{cases}$$

Решение этой системы – пара коэффициентов $C_1 = 1.3165 - j1.542$, $C_2 = 1.3165 + j1.542$.

Импульсная характеристика цепи имеет вид

$$h[n] = 0.5\delta[n] + 2\delta[n+1] - C_1 d_1^n u[-n] - C_2 d_2^n u[-n]$$ ◄

Если корни знаменателя комплексно-сопряженные (как в данном примере), то часть импульсной характеристики, соответствующая правильной дроби в составе передаточной функции, может быть приведена к виду

$$C_k (d_k)^n + C_k^* (d_k^*)^n = \left|C_k\right| e^{j\varphi_k} \left\{\left|d_k\right| e^{j\omega_k}\right\}^n + \left|C_k\right| e^{-j\varphi_k} \left\{\left|d_k\right| e^{-j\omega_k}\right\}^n =$$

$$= \left|C_k\right| \cdot \left|d_k\right|^n \cdot 2\cos(\omega_k n + \varphi_k).$$