

С.И.Баскаков

Радио/ технические цепи и сигналы

Издание третье, переработанное
и дополненное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Радиотехника»



Москва
«Высшая школа» 2000

УДК 621.37
ББК 32.841
Б 27

*Федеральная целевая программа
книгоиздания России*

**Первое издание учебника удостоено
Диплома Почета ВДНХ СССР в 1984 г.**

**Рецензент: — проф. М.П. Демян
(Московский государственный авиационный институт — ТУ)**

ISBN 5-06-003843-2

© ГУП «Издательство «Высшая школа», 2000

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

Оглавление

Предисловие к третьему изданию	6
Из предисловия к первому изданию	6
Введение	9
Часть 1. Радиотехнические сигналы	11
Глава 1. Элементы общей теории радиотехнических сигналов	11
1.1. Классификация радиотехнических сигналов	11
1.2. Динамическое представление сигналов	16
1.3. Геометрические методы в теории сигналов	23
1.4. Теория ортогональных сигналов	27
Глава 2. Спектральные представления сигналов	38
2.1. Периодические сигналы и ряды Фурье	38
2.2. Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье	43
2.3. Основные свойства преобразования Фурье	51
2.4. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов	55
2.5. Преобразование Лапласа	61
2.6. Вейвлет-анализ	65
Глава 3. Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа	72
3.1. Взаимная спектральная плотность сигналов. Энергетический спектр	72
3.2. Корреляционный анализ сигналов	77
3.3. Автокорреляционная функция дискретного сигнала	83
3.4. Взаимокорреляционная функция двух сигналов	87
Глава 4. Модулированные сигналы	92
4.1. Сигналы с амплитудной модуляцией	92
4.2. Сигналы с угловой модуляцией	100
4.3. Сигналы с внутриимпульсной частотной модуляцией	108
4.4. Сигналы для стереофонии	114
Глава 5. Сигналы с ограниченным спектром	119
5.1. Некоторые математические модели сигналов с ограниченным спектром	119
5.2. Теорема Котельникова	127
5.3. Узкополосные сигналы	127
5.4. Аналитический сигнал и преобразование Гильберта	131
Глава 6. Основы теории случайных сигналов	142
6.1. Случайные величины и их характеристики	142
6.2. Статистические характеристики систем случайных величин	149
6.3. Случайные процессы	155
Глава 7. Корреляционная теория случайных процессов	164
7.1. Спектральные представления стационарных случайных процессов	164

7.2. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов	170
7.3. Узкополосные случайные процессы	177
Часть 2. Радиотехнические цепи, устройства и системы	190
Глава 8. Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы	190
8.1. Физические системы и их математические модели	190
8.2. Импульсные, переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем	193
8.3. Линейные динамические системы	200
8.4. Спектральный метод	209
8.5. Операторный метод	216
Глава 9. Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы	224
9.1. Некоторые модели частотно-избирательных цепей	224
9.2. Частотно-избирательные цепи при широкополосных входных воздействиях	230
9.3. Частотно-избирательные цепи при узкополосных входных воздействиях	235
Глава 10. Воздействие случайных сигналов на линейные стационарные цепи	253
10.1. Спектральный метод анализа воздействия случайных сигналов на линейные стационарные цепи	253
10.2. Источники флуктуационных шумов в радиотехнических устройствах	262
Глава 11. Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях	274
11.1. Безынерционные нелинейные преобразования	274
11.2. Спектральный состав тока в безынерционном нелинейном элементе при гармоническом внешнем воздействии	278
11.3. Нелинейные резонансные усилители и умножители частоты	283
11.4. Безынерционные нелинейные преобразования суммы нескольких гармонических сигналов	286
11.5. Получение модулированных радиосигналов	291
11.6. Амплитудное, фазовое и частотное детектирование	294
11.7. Воздействие стационарных случайных сигналов на безынерционные нелинейные цепи	300
Глава 12. Преобразования сигналов в линейных параметрических цепях	307
12.1. Прохождение сигналов через резистивные параметрические цепи	307

12.2. Энергетические соотношения в параметрических реактивных элементах цепи	315
12.3. Принципы параметрического усиления	319
12.4. Воздействие гармонических сигналов на параметрические системы со случайными характеристиками	326
Глава 13. Элементы теории синтеза линейных частотных фильтров	333
13.1. Частотные характеристики четырехполосников	333
13.2. Фильтры нижних частот	338
13.3. Реализация фильтров	343
Глава 14. Активные цепи с обратной связью и автоколебательные системы	349
14.1. Передаточная функция линейной системы с обратной связью	349
14.2. Устойчивость цепей с обратной связью	354
14.3. Активные RC-фильтры	359
14.4. Автогенераторы гармонических колебаний. Режим малого сигнала	364
14.5. Автогенераторы гармонических колебаний. Режим большого сигнала	372
Глава 15. Дискретные сигналы. Принципы цифровой фильтрации	382
15.1. Модели дискретных сигналов	382
15.2. Дискретизация периодических сигналов	388
15.3. Теория z-преобразования	396
15.4. Цифровые фильтры	400
15.5. Реализация алгоритмов цифровой фильтрации	405
15.6. Синтез линейных цифровых фильтров	414
Глава 16. Некоторые вопросы теории помехоустойчивости радиоприема	423
16.1. Выделение полезного сигнала с помощью линейного частотного фильтра	423
16.2. Оптимальная линейная фильтрация сигналов известной формы	427
16.3. Реализация согласованных фильтров	433
16.4. Оптимальная фильтрация случайных сигналов	440
16.5. Сравнение помехоустойчивости радиосистем с амплитудной и частотной модуляцией	443
16.6. Оценка информационных параметров радиоканала	448
Заключение	455
Приложения	456
Список рекомендуемой литературы	457
Предметный указатель	459

Предисловие к третьему изданию

Подготавливая третье издание учебника, автор решил сохранить перечень глав и принцип организации учебного материала, принятые в предыдущих изданиях. Изменения коснулись лишь некоторых вопросов. Так, при изложении теории модулированных колебаний кратко рассматривается метод построения многоканальных систем на примере стереофонического радиовещания. В заключительную главу учебника введен параграф, дающий читателю возможность познакомиться с основными понятиями теории информации и научиться оценивать пропускную способность некоторых радиоканалов, близких по своим свойствам к тем, которые используются на практике. Наконец, в текст учебника введен материал, касающийся теории вейвлет-преобразований, которые в последние годы вызывают растущий интерес среди радиоинженеров.

В основу учебника положен материал лекций, которые автор на протяжении последних лет читал студентам радиотехнического факультета Московского энергетического института (технического университета). Хочется выразить искреннюю признательность моим многочисленным ученикам за их интерес к этому курсу и за стремление по-настоящему глубоко освоить фундаментальные принципы современной радиотехники. Автор благодарен своим коллегам по кафедре основ радиотехники и многим сотрудникам радиотехнического факультета МЭИ, которые неизменно помогали в работе своими советами и обсуждениями, а также рецензенту книги профессору М.П. Демину за полезные замечания.

При подготовке этой книги к печати мною были приложены все усилия к тому, чтобы устранить неточности, допущенные в предыдущих изданиях. Если внимательный читатель обнаружит погрешности и в этом издании, то автор целиком берет на себя моральную ответственность за их появление.

Автор

Из предисловия к первому изданию

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» в настоящее время занимает одно из центральных мест среди фундаментальных дисциплин, определяющих своим содержанием профессиональную подготовку радиоинженеров. Следуя за направлением научно-технического прогресса, отражая развитие элементной базы радиоэлектроники и ее теоретического арсенала, этот курс объединяет и систематизирует наиболее важные принципы в области радиотехники.

Содержание данной книги соответствует программе курса «Радиотехнические цепи и сигналы», утвержденной МВ и ССО СССР. Предполагается, что читатель, приступивший к изучению книги, прослушал ряд предшествующих курсов, таких, как «Введение в специальность», «Высшая математика», «Физика» и «Основы теории цепей».

Работая над текстом, автор стремился возможно теснее сблизить излагаемый материал с практикой учебной работы в вузе. Это в первую очередь определило принцип отбора материала и степень детальности освещения: на страницы книги вынесено лишь то, что, как показывает практический опыт преподавания, может быть полностью усвоено студентами за отведенное на это время. Изучение конкретных схемотехнических решений, их сравнительный анализ — все это относится уже к специальным инженерным дисциплинам, изучаемым позднее.

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» отличается разнообразием содержания, обилием понятий и методов, с которыми студенты сталкиваются впервые. Большую роль в этом курсе играют математические приемы исследования. Прочное овладение ими совершенно обязательно, поскольку они служат логическим фундаментом построения последующих радиотехнических дисциплин. Для связи теоретических положений и радиотехнической практики в главах книги приводится много примеров, раскрывающих характерные приемы инженерного анализа.

Содержание и структура книги. Учебник состоит из двух частей. Первая часть **РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ** знакомит читателя с методами, принятыми в настоящее время для описания и изучения свойств сигналов. Рассматриваются вопросы классификации сигналов, фундаментальный принцип геометрической трактовки пространства сигналов, спектральный и корреляционный анализ детерминированных колебаний, теория модулированных радиосигналов, а также дискретное представление непрерывных сигналов с ограниченным спектром. Подробно излагаются методы описания и измерения характеристик случайных сигналов.

Во второй части **РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ, УСТРОЙСТВА И СИСТЕМЫ** дано систематическое изложение принципов анализа и расчета явлений прохождения разнообразных сигналов, как детерминированных, так и случайных, через линейные и нелинейные радиотехнические цепи. Особо подчеркнута роль узкополосных частотно-избирательных цепей. Рассмотрены вопросы прохождения сигналов через линейные параметрические цепи. Описаны приемы синтеза линейных четырехполюсников с заданными частотными характеристиками. Изучая безынерционные нелинейные цепи, читатель познакомится с важнейшими видами преобразования сигналов — модуляцией, детектированием, умножением и преобразованием частоты. Рассмотрена теория автогенераторов гармонических колебаний. Изложены направления, возникшие в радиотехнике сравнительно недавно под влиянием успехов микроэлектронной технологии. Сюда относятся активные фильтры для обработки аналоговых сигналов и как одно из наиболее перспективных направлений — цифровая фильтрация сигналов. Наконец, приведены элементы теории оптимальной линейной фильтрации детерминированных и случайных сигналов.

Открыв эту книгу, читатель, безусловно, обратит внимание на принцип ее оформления. На страницах наряду с основным текстом имеются поля, куда вынесена вспомогательная, дополнительная и наглядно-графическая информация. В частности, на полях сосредоточены:

1. **НАПОМИНАНИЯ**, относящиеся к ранее пройденным учебным курсам, например к курсам физики и основ теории цепей.

2. **СВЕДЕНИЯ СПРАВОЧНОГО ХАРАКТЕРА**, такие, как значения фундаментальных физических констант, табличные интегралы и т. д.

3. **КРАТКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ**, цель которых — показать наличие межпредметных связей, обратить внимание на общность методов, принятых в радиотехнике и в других, порой далеких, областях научной и прикладной деятельности.

4. **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РИСУНКИ**, которые в тексте, как правило, не упоминаются, однако служат неотъемлемыми элементами излагаемого учебного материала. Наличие этих рисунков, помимо сокращения объема книги, дает возмож-

ность в известной мере приблизить стиль книжного изложения к стилю живой лекторской речи.

5. УКАЗАНИЯ, помогающие организовать работу читателя с текстом. На полях книги в соответствующих местах появляются следующие сигнальные значки:

■ — в данном месте текста описан некоторый принцип, имеющий первостепенное значение для радиотехники;

● — указание на то, что в тексте сформулировано новое понятие, которое читателю предлагается запомнить;

▲ — читателю рекомендуется решить некоторую задачу (или задачи) из числа приведенных в конце главы; задача иллюстрирует теоретическое положение, изложенное в основном тексте.

В настоящее время учебный процесс в вузе характеризуется высокой интенсивностью. Это требует от студента четкого планирования своего времени. Стремясь помочь студентам в этом важном деле, автор уделил особое внимание оптимальной дозировке материала, предлагаемого для усвоения и повторной проработки.

Каждая глава книги отвечает отдельной большой теме лекционного курса. Основной структурной единицей главы является параграф, приближенный по своему объему к отдельной лекции. Самая мелкая структурная единица — пункт, в котором содержится некоторый завершенный вопрос.

В конце каждой главы помещены **РЕЗУЛЬТАТЫ**, прочное знание которых является обязательным.

Следующей, более активной фазой самоконтроля являются ответы на **ВОПРОСЫ**. Особенно большую пользу эта работа может принести студентам при подготовке к экзаменам.

Желательно, чтобы читатель по мере изучения курса постоянно обращался к разделу **ЗАДАЧИ**. Здесь собран материал для самостоятельной работы, по тематике и уровню сложности отвечающий содержанию той или иной главы.

В методический аппарат каждой главы включен факультативный раздел **БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАНИЯ**. Работа над этими заданиями рекомендуется студентам, которые глубоко интересуются методами теоретической радиотехники и имеют склонность к научным исследованиям.

Отзывы о книге просьба направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Введение

Радиотехника — научно-техническая область, задачами которой являются:

- 1) изучение принципов генерации, усиления, излучения и приема электромагнитных колебаний и волн, относящихся к радиодиапазону;
- 2) практическое использование этих колебаний и волн для целей передачи, хранения и преобразования информации.

На первоначальном этапе своего развития вслед за изобретением радио (А. С. Попов, 1895 г.) радиотехника решала преимущественно проблемы электро-связи, используя электромагнитные колебания с длинами волн в несколько сотен или тысяч метров. В настоящее время круг применений радиотехники необычайно расширился. Радиосвязь, телевидение, радиоуправление, радиолокация, радионавигация, радиотехнические методы в биологии, медицине, геофизике — таков далеко не полный перечень отраслей радиотехники.

Науку, занимающуюся изучением физических основ радиотехники, называют *радиофизикой*. Радиофизика — быстро развивающаяся ветвь прикладного естество-знания, тесно связанная с такими фундаментальными областями, как квантовая механика, физика твердого тела и др.

Проникновение радиотехники в смежные области (электронику, вычислительную технику) обусловило возникновение широкой научно-технической области, получив-шей собирательное название *радиоэлектроники*.

Радиотехника и радиоэлектроника получили всестороннее развитие в нашей стране. Большой общепризнанный вклад в фундаментальные основы радиотехники внесли отечественные ученые — академики Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, В. А. Фок, А. И. Берг, В. А. Котельников и многие другие.

Как известно читателю из курса «Введение в специальность», передача сообще-ния от источника к получателю с помощью радиотехнических методов осущест-вляется по *радиоканалу*. Основные элементы радиоканала — передатчик, приемник и физическая среда, в которой происходит распространение электромагнитных волн. Средой распространения может быть как свободное пространство, так и спе-циальные технические устройства — волноводы, кабели и другие линии передачи.

Сигнал, поступающий от первичного источника сообщений, на передающей стороне радиоканала с помощью микрофона, передающей телевизионной камеры или других подобных устройств преобразуется в электрические колебания. Эти колебания не могут быть непосредственно использованы для возбуждения электро-магнитных волн ввиду их относительной низкочастотности. Поэтому в радио-технике применяют способы передачи сигналов, основанные на том, что низкочас-тотные колебания, содержащие исходное сообщение, с помощью специальных устройств управляют параметрами достаточно мощного *несущего колебания*, частота которого лежит в радиодиапазоне. Процесс подобного преобразования сигналов называют *модуляцией* несущего колебания.

Модулированный сигнал излучается антенной передатчика. Возбужденные при этом электромагнитные волны вызывают появление в антенне приемника радио-сигнала, уровень которого обычно весьма мал. После частотной фильтрации и усиления принятый сигнал должен быть подвергнут *демодуляции* (*детектированию*) — операции, обратной по отношению к модуляции. В результате на выходе приемника возникает колебание, являющееся копией переданного исходного сообщения.

Приведенное описание принципа функционирования простейшего радиоканала подчеркивает, что передача сообщений по радиоканалу сопровождается разнообразными *преобразованиями сигналов*. Эти преобразования осуществляются посредством соответствующих физических систем — *радиотехнических цепей*. Каждая радиотехническая цепь выполняет определенную операцию над сигналами, характер которой целиком зависит от внутренней структуры цепи. Так, принято различать усилители, фильтрующие частотно-избирательные системы, преобразователи формы электрических колебаний, модуляторы, детекторы и многие другие виды радиотехнических цепей, рассматриваемые в данном курсе.

В любом реальном радиоканале помимо полезного сигнала неизбежно присутствуют *помехи*, возникающие по многим причинам, — из-за хаотического теплового движения электронов в элементах цепей, несовершенства контактов в аппаратуре, влияния соседних радиоканалов с близкими несущими частотами, наличия в пространстве шумового космического радиоизлучения и т. д. Способность радиотехнических средств передачи информации противодействовать вредному влиянию помех и обеспечивать высокую верность передачи называют *помехоустойчивостью*. В современной радиотехнике задача создания помехоустойчивых систем является одной из центральных. Отдельная отрасль, получившая название *статистической радиотехники* и базирующаяся на вероятностных методах, занимается теорией и практикой построения таких систем. Одним из наиболее действенных путей достижения высокой помехоустойчивости является использование совершенных видов модуляции сигналов и, в частности, *помехоустойчивого кодирования* сообщений.

Итак, в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» изучаются следующие основные вопросы:

- 1) свойства разнообразных полезных сигналов и помех, а также принципы их математического описания;
- 2) свойства физических систем, выполняющих роль радиотехнических цепей;
- 3) методы анализа преобразований сигналов в радиотехнических цепях, способы построения основных видов цепей;
- 4) приемы синтеза радиотехнических цепей с заданными свойствами.

В наши дни радиотехника является бурно развивающейся научно-прикладной областью. Говоря о ближайших перспективах ее развития, следует подчеркнуть тенденцию перехода ко все более высокочастотным диапазонам электромагнитных колебаний и волн. Так, колебания сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона, ранее применявшиеся в основном в радиолокации, стали широко использоваться в телевизионных, связных и телеметрических радиоканалах. Достигнуты большие успехи в создании лазерных линий связи с несущими частотами, лежащими в световом и инфракрасном диапазонах.

Быстрыми темпами развивается *элементная база* радиотехники и радиоэлектроники. Если традиционные радиотехнические цепи представляли собой почти исключительно комбинации линейных и нелинейных электрических цепей, то сейчас интенсивно исследуются и внедряются в практику *функциональные устройства и системы*, производящие обработку сигналов за счет специфических волновых и колебательных явлений в твердых телах — полупроводниках, диэлектриках и магнитных материалах. Огромную роль в современной радиотехнике играют изделия микроэлектронной технологии. Доступные, недорогие, надежные и быстродействующие *интегральные микросхемы* решающим образом изменили облик многих областей радиотехники. Микроэлектроника обусловила широкий переход к принципиально новым *цифровым способам* обработки и преобразования радиотехнических сигналов.

Есть все основания ожидать, что отрасли радиотехники будут и впредь расширяться и развиваться на базе прогресса во многих смежных областях науки и техники.

1. Радио/ технические сигналы

Глава 1

Элементы общей теории радиотехнических сигналов

Термин «сигнал» часто встречается не только в научно-технических вопросах, но и в повседневной жизни. Иногда, не задумываясь о строгости терминологии, мы отождествляем такие понятия, как *сигнал*, *сообщение*, *информация*. Обычно это не приводит к недоразумениям, поскольку слово «сигнал» происходит от латинского термина «*signum*» — «знак», имеющего широкий смысловой диапазон.

Тем не менее, приступая к систематическому изучению теоретической радиотехники, следует по возможности уточнить содержательный смысл понятия «сигнал». В соответствии с принятой традицией сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений. В практике человеческой деятельности сообщения неразрывно связаны с заключенной в них информацией.

Круг вопросов, базирующихся на понятиях «сообщение» и «информация», весьма широк. Он является объектом пристального внимания инженеров, математиков, лингвистов, философов. В 40-х годах К. Шеннон завершил первоначальный этап разработки глубокого научного направления — теории информации.

Следует сказать, что упомянутые здесь проблемы, как правило, далеко выходят за рамки курса «Радиотехнические цепи и сигналы». Поэтому в этой книге не будет излагаться связь, которая существует между физическим обликом сигнала и смыслом заключенного в нем сообщения. Тем более не будет обсуждаться вопрос о ценности информации, заключенной в сообщении и в конечном счете в сигнале.

Информация наряду с материей и энергией принадлежит к фундаментальным философским категориям естествознания

1.1. Классификация радиотехнических сигналов

Приступая к изучению каких-либо новых объектов или явлений, в науке всегда стремятся провести их предварительную классификацию. Ниже такая попытка предпринята применительно к сигналам. Основная цель — выработка кри-

териев классификации, а также, что очень важно для последующего, установление определенной терминологии.

Описание сигналов посредством математических моделей. Сигналы как физические процессы можно изучать с помощью различных приборов и устройств — электронных осциллографов, вольтметров, приемников. Такой эмпирический метод имеет существенный недостаток. Явления, наблюдаемые экспериментатором, всегда выступают как частные, единичные проявления, лишенные той степени обобщенности, которая позволила бы судить об их фундаментальных свойствах, предсказывать результаты в изменившихся условиях.

Для того чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчетов, следует указать способ их математического описания или, говоря языком современной науки, создать *математическую модель* исследуемого сигнала.

Математической моделью сигнала может быть, например, функциональная зависимость, аргументом которой является время. Как правило, в дальнейшем такие математические модели сигналов будут обозначаться символами латинского алфавита $s(t)$, $u(t)$, $f(t)$ и т. д.

Создание модели (в данном случае физического сигнала) — первый существенный шаг на пути систематического изучения свойства явления. Прежде всего математическая модель позволяет абстрагироваться от конкретной природы носителя сигнала. В радиотехнике одна и та же математическая модель с равным успехом описывает ток, напряжение, напряженность электромагнитного поля и т. д.

Существенная сторона абстрактного метода, базирующегося на понятии математической модели, заключена в том, что мы получаем возможность описывать именно те свойства сигналов, которые объективно выступают как определяющие важные. При этом игнорируется большое число второстепенных признаков. Например, в подавляющем большинстве случаев крайне затруднительно подобрать точные функциональные зависимости, которые соответствовали бы электрическим колебаниям, наблюдаемым экспериментально. Поэтому исследователь, руководствуясь всей совокупностью доступных ему сведений, выбирает из наличного арсенала математических моделей сигналов те, которые в конкретной ситуации наилучшим и самым простым образом описывают физический процесс. Итак, выбор модели — процесс в значительной степени творческий.

Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Поэтому в дальнейшем часто будем говорить о *вещественных* и *комплексных сигналах*. Использование того или другого принципа — дело математического удобства.

Зная математические модели сигналов, можно сравнивать эти сигналы между собой, устанавливая их тождество и различие, проводить классификацию.

Одномерные и многомерные сигналы. Типичным для радиотехники сигналом является напряжение на зажимах какой-

●
математическая
модель

$u(t) = U_m \cos \omega_0 t$ —
формула как мо-
дель детерминиро-
ванного сигнала

В большинстве слу-
чаев носителями
радиотехнических
сигналов являются
электромагнитные
колебания

●
вещественные и
комплексные сиг-
налы

либо цепи или ток в ветви. Такой сигнал, описываемый одной функцией времени, принято называть *одномерным*. В этой книге чаще всего будут изучаться одномерные сигналы. Однако иногда удобно вводить в рассмотрение *многомерные*, или *векторные*, сигналы вида

$$\vec{V}(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\},$$

образованные некоторым множеством одномерных сигналов. Целое число N называют *размерностью* такого сигнала (терминология заимствована из линейной алгебры).

Многомерным сигналом служит, например, система напряжений на зажимах многополюсника.

Отметим, что многомерный сигнал — упорядоченная совокупность одномерных сигналов. Поэтому в общем случае сигналы с различным порядком следования компонент не равны друг другу:

$$\{v_1, v_2\} \neq \{v_2, v_1\}.$$

Многомерные модели сигналов особенно полезны в тех случаях, когда функционирование сложных систем анализируется с помощью ЭВМ.

Детерминированные и случайные сигналы. Другой принцип классификации радиотехнических сигналов основан на возможности или невозможности точного предсказания их мгновенных значений в любые моменты времени.

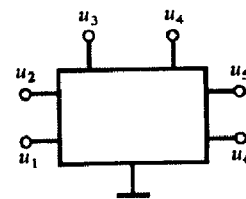
Если математическая модель сигнала позволяет осуществить такое предсказание, то сигнал называется *детерминированным*. Способы его задания могут быть разнообразными — математическая формула, вычислительный алгоритм, наконец, словесное описание.

Строго говоря, детерминированных сигналов, равно как и отвечающих им детерминированных процессов, не существует. Неизбежное взаимодействие системы с окружающими ее физическими объектами, наличие хаотических тепловых флуктуаций и просто неполнота знаний о начальном состоянии системы — все это заставляет рассматривать реальные сигналы как случайные функции времени.

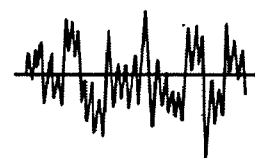
В радиотехнике *случайные сигналы* часто проявляют себя как помехи, препятствующие извлечению информации из принятого колебания. Проблема борьбы с помехами, повышение помехоустойчивости радиоприема — одна из центральных проблем радиотехники.

Может показаться, что понятие «случайный сигнал» противоречиво. Однако это не так. Например, сигнал на выходе приемника радиотелескопа, направленного на источник космического излучения, представляет собой хаотические колебания, несущие, однако, разнообразную информацию о природном объекте.

Между детерминированными и случайными сигналами нет непреодолимой границы. Очень часто в условиях, когда уровень помех значительно меньше уровня полезного сигнала



Пример многомерного сигнала



Оциллограмма типичного случайного сигнала

с известной формой, более простая детерминированная модель оказывается вполне адекватной поставленной задаче.

Методы статистической радиотехники, развитые в последние десятилетия для анализа свойств случайных сигналов, имеют много специфических черт и базируются на математическом аппарате теории вероятностей и теории случайных процессов. Этому кругу вопросов будет целиком посвящен ряд глав настоящей книги.

Импульсные сигналы. Очень важный для радиотехники класс сигналов представляют собой *импульсы*, т. е. колебания, существующие лишь в пределах конечного отрезка времени. При этом различают *видеоимпульсы* (рис. 1.1, а) и *радиоимпульсы* (рис. 1.1, б). Различие между этими двумя основными видами импульсов состоит в следующем. Если $u_v(t)$ — видеоимпульс, то соответствующий ему радиоимпульс $u_p(t) = u_v(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (частота ω_0 и начальная фаза φ_0 произвольны). При этом функция $u_v(t)$ называется *огибающей* радиоимпульса, а функция $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ — его *заполнением*.

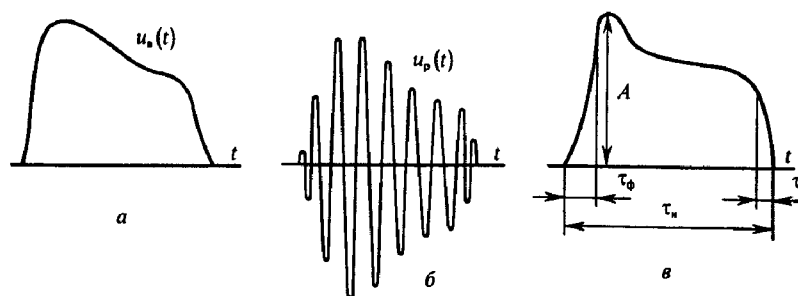


Рис. 1.1. Импульсные сигналы и их характеристики:

а — видеоимпульс; б — радиоимпульс; в — определение числовых параметров импульса

Происхождение термина «видеоимпульс» связано с тем, что впервые такие колебания стали применяться в технике телевидения

Создание приборов для измерения параметров импульсов — важная область измерительной техники

В технических расчетах вместо полной математической модели, которая учитывает подробности «тонкой структуры» импульса, часто пользуются числовыми параметрами, дающими упрощенное представление о его форме. Так, для видеоимпульса, близкого по форме к трапеции (рис. 1.1, в), принято определять его *амплитуду* (высоту) A . Из временных параметров указывают *длительность импульса* τ_n , *длительность фронта* τ_ϕ и *длительность среза* τ_c .

В радиотехнике имеют дело с импульсами напряжения, амплитуды которых лежат в пределах от долей микровольта до нескольких киловольт, а длительности достигают долей наносекунды.

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Заканчивая краткий обзор принципов классификации радиотехнических сигналов, отметим следующее. Часто физический процесс, порождающий сигнал, развивается во времени таким образом, что значения сигнала можно измерять в любые моменты времени. Сигналы этого класса принято называть *аналоговыми* (континуальными). Термин «аналоговый сигнал» под-

черкивает, что такой сигнал «аналогичен», полностью подобен порождающему его физическому процессу.

Одномерный аналоговый сигнал наглядно представляется своим графиком (осциллограммой), который может быть как непрерывным, так и с точками разрыва.

Первоначально в радиотехнике использовались сигналы исключительно аналогового типа. Такие сигналы позволяли с успехом решать относительно несложные технические задачи (радиосвязь, телевидение и т. д.). Аналоговые сигналы было просто генерировать, принимать и обрабатывать с помощью доступных в те годы средств.

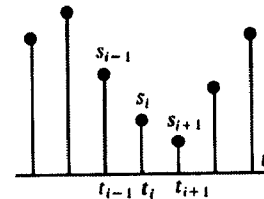
Возросшие требования к радиотехническим системам, разнообразие применений заставили искать новые принципы их построения. На смену аналоговым в ряде случаев пришли импульсные системы, работа которых основана на использовании *дискретных сигналов*. Простейшая математическая модель дискретного сигнала $s_d(t)$ — это счетное множество точек $\{t_i\}$ (i — целое число) на оси времени, в каждой из которых определено отсчетное значение сигнала s_i . Как правило, шаг дискретизации $\Delta = t_{i+1} - t_i$ для каждого сигнала постоянен.

Одно из преимуществ дискретных сигналов по сравнению с аналоговыми — отсутствие необходимости воспроизводить сигнал непрерывно во все моменты времени. За счет этого появляется возможность по одной и той же радиолинии передавать сообщения от разных источников, организуя многоканальную связь с разделением каналов по времени.

Интуитивно ясно, что быстро изменяющиеся во времени аналоговые сигналы для их дискретизации требуют малого шага Δ . В гл. 5 этот фундаментально важный вопрос будет подробно исследован.

Особой разновидностью дискретных сигналов являются *цифровые сигналы*. Для них характерно то, что отсчетные значения представлены в форме чисел. По соображениям технических удобств реализации и обработки обычно используют двоичные числа с ограниченным и, как правило, не слишком большим числом разрядов. В последнее время наметилась тенденция к широкому внедрению систем с цифровыми сигналами. Это связано со значительными успехами, достигнутыми микроэлектроникой и интегральной схемотехникой.

Следует иметь в виду, что в сущности любой дискретный или цифровой сигнал (речь идет о сигнале — физическом процессе, а не о математической модели) является сигналом аналоговым. Так, медленно изменяющемуся во времени аналоговому сигналу $s(t)$ можно сопоставить его дискретный образ, имеющий вид последовательности прямоугольных видеопульсов одинаковой длительности (рис. 1.2, а); высота этих импульсов пропорциональна значениям $s(t)$ в отсчетных точках. Однако можно поступить и по-иному, сохраняя высоту импульсов постоянной, но изменяя их длительность в соответствии с текущими отсчетными значениями (рис. 1.2, б).



Модель дискретного сигнала

```

. . . . .
111001011
101110010
010011100
100110011
. . . . .
. . . . .

```

Последовательные отсчеты цифрового сигнала

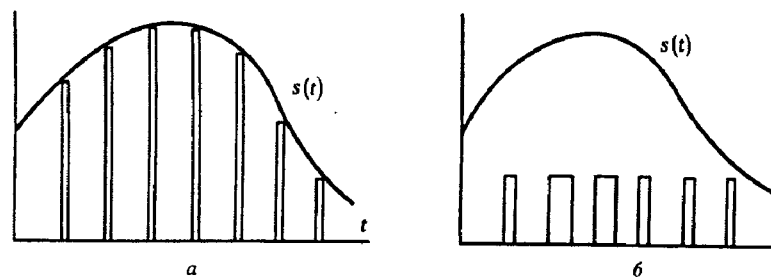
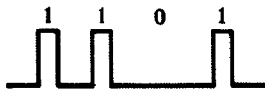


Рис. 1.2. Дискретизация аналогового сигнала:

a — при переменной амплитуде; *b* — при переменной длительности отсчетных импульсов



Оба представленных здесь способа дискретизации аналогового сигнала становятся эквивалентными, если положить, что значения аналогового сигнала в точках дискретизации пропорциональны площади отдельных видеоимпульсов.

Фиксирование отсчетных значений в виде чисел осуществляется также путем отображения последних в виде последовательности видеоимпульсов. Двоичная система счисления идеально приспособлена для этой процедуры. Можно, например, сопоставить единице высокий, а нулю — низкий уровень потенциала. Дискретные сигналы и их свойства будут детально изучаться в гл. 15.

1.2. Динамическое представление сигналов

Многие задачи радиотехники, например вычисление отклика физической системы на известное входное воздействие, требуют специфической формы представления сигналов. Необходимо не только располагать информацией о мгновенном значении сигнала, но и знать его поведение на всей временной оси как «в прошлом», так и в «будущем».

Принцип динамического представления. Способ получения таких моделей сигналов состоит в следующем. Реальный сигнал приближенно представляется суммой некоторых элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени. Если теперь устремить к нулю длительность отдельных элементарных сигналов, то, естественно, в пределе будет получено точное представление исходного сигнала. Будем называть этот способ описания сигналов *динамическим представлением*, подчеркивая этим развивающийся во времени характер процесса.

Широкое применение нашли два способа динамического представления. Согласно первому из них в качестве элементарных сигналов используются ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени Δ (рис. 1.3, *a*). Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени Δ .

При втором способе элементарными сигналами служат прямоугольные импульсы. Эти импульсы непосредственно примыкают друг к другу и образуют последовательность, вписанную в кривую или описанную вокруг нее (рис. 1.3, *b*).

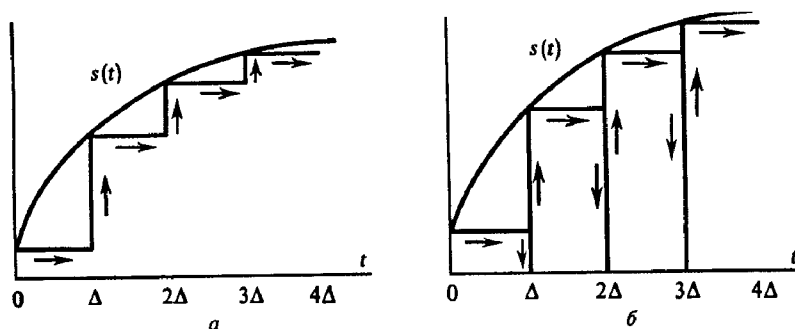


Рис. 1.3. Способы динамического представления сигналов (стрелками показаны пути изменения во времени отдельных элементарных слагаемых)

Рассмотрим свойства элементарного сигнала, используемого для динамического представления по первому способу.

Функция включения. Пусть дан сигнал, математическая модель которого задается системой равенства:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < -\xi, \\ 1/2(t/\xi + 1), & -\xi \leq t \leq \xi, \\ 1, & t > \xi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Такая функция описывает процесс перехода некоторого физического объекта из «нулевого» в «единичное» состояние. Переход совершается по линейному закону за время 2ξ . Если параметр ξ устремить к нулю, то в пределе переход из одного состояния в другое будет совершаться мгновенно. Математическая модель этого предельного сигнала получила название *функции включения* или *функции Хевисайда*:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

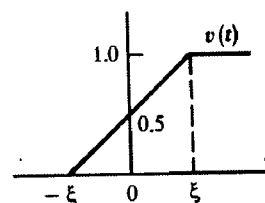
В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину t_0 . Запись смещенной функции такова:

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1/2, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Приведенный здесь способ определения функции включения не является единственным возможным. Например, функции, образующие последовательность

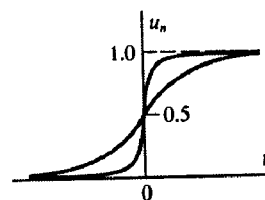
$$u_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)},$$

как нетрудно проверить, с ростом номера n все более точно аппроксимируют разрывный сигнал, претерпевающий скачок на единицу при $t = 0$.



Оливер Хевисайд (1850—1925)—английский физик

В задачах практического характера обычно допустим и менее строгий подход, когда значение функции Хевисайда в точке $t=0$ не принимается во внимание

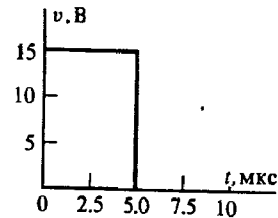


В теоретической радиотехнике функции включения широко используются для описания разрывных, в частности, импульсных сигналов. Часто это можно сделать из очевидных соображений, не прибегая к общей методике динамического представления.

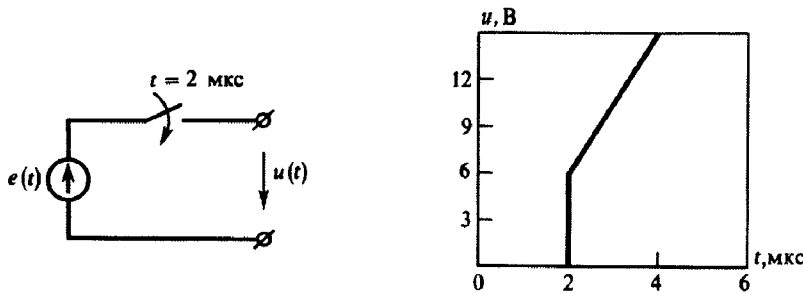
Пример 1.1. Импульсный сигнал v прямоугольной формы имеет длительность 5 мкс и амплитуду 15 В. Начало отсчета времени совпадает с фронтом импульса. Записать аналитическое выражение этого сигнала.

Эффект скачка уровня при $t = 0$ описывается функцией $v = 15\sigma(t)$. Для того чтобы импульс окончился при $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ с, необходимо вычесть такой же импульс включения, запаздывающий на этот отрезок времени. Окончательно

$$v(t) = 15\sigma(t) - 15\sigma(t - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ В.}$$



Пример 1.2. Источник ЭДС, линейно изменяющейся во времени по закону $e(t) = 3 \cdot 10^6 t$ В, подключается к внешним цепям идеальным коммутатором, который срабатывает в момент времени $t_0 = 2$ мкс. Записать математическую модель напряжения на выходе такого устройства.



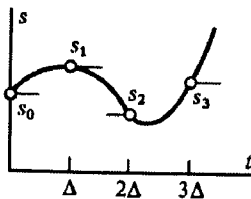
При временах, меньших 2 мкс, напряжение на выходе источника равно нулю, поэтому очевидно, что

$$u(t) = 3 \cdot 10^6 t \cdot \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}) \text{ В.}$$

Этот процесс можно записать и по-иному, представив его как сумму импульса включения амплитудой 6 В, возникающего в момент срабатывания коммутатора, и линейно нарастающего импульса:

$$u(t) = [6 + 3 \cdot 10^6 (t - 2 \cdot 10^{-6})] \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}) \text{ В.}$$

▲
решите задачи 1 и 2



Динамическое представление произвольного сигнала посредством функций включения. Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, причем для определенности положим, что $s(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $\{\Delta, 2\Delta, 2\Delta, \dots\}$ — последовательность моментов времени и $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ — отвечающая им последовательность значений сигнала. Если $s_0 = s(0)$ — начальное значение, как видно из построения, текущее значение сигнала при любом t приближенно равно сумме ступенчатых функций:

$$\begin{aligned} s(t) &\approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\ &= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta). \end{aligned}$$

Если теперь шаг Δ устремить к нулю, то дискретную переменную $k\Delta$ можно заменить непрерывной переменной τ . При этом малые приращения $(s_k - s_{k-1})$ превращаются в дифференциалы $ds = (ds/d\tau) d\tau$, и мы получаем формулу динамического представления произвольного сигнала посредством функций Хевисайда:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Пример 1.3. Сигнал $s(t)$ равен нулю при $t < 0$ и изменяется по закону квадратичной параболы $s(t) = At^2$ при $t > 0$. Найти динамическое представление этого сигнала.

Здесь $s_0 = 0$, $ds/d\tau = 2A\tau$, поэтому

$$s(t) = 2A \int_0^{\infty} \tau \sigma(t - \tau) d\tau.$$

В соответствии с последней формулой высота элементарных ступеней, из которых складывается сигнал, линейно нарастает во времени.

Переходя ко второму способу динамического представления сигнала, когда элементами разложения служат короткие импульсы, следует ввести новое важное понятие.

Дельта-функция. Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы, заданный следующим образом:

$$v(t; \xi) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right]. \quad (1.5)$$

При любом выборе параметра ξ площадь этого импульса равна единице:

$$P_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1.$$

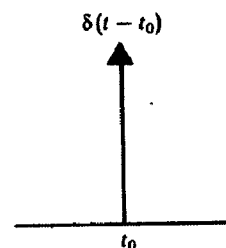
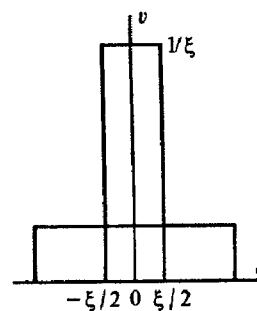
Например, если v — напряжение, то $P_v = 1$ В·с.

Пусть теперь величина ξ стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел последовательности таких функций при $\xi \rightarrow 0$ носит название *дельта-функции*, или *функции Дирака*:

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t; \xi). \quad (1.6)$$

Дельта-функция — интересный математический объект. Будучи равной нулю всюду, за исключением точки $t = 0$ (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), дельта-функция тем не менее обладает единичным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.7)$$



Так выглядит символическое изображение дельта-функции

В нашем курсе будет постоянно использоваться аппарат дельта-функций. Основная причина, делающая дельта-функцию столь удобной в физических задачах, состоит в следующем. Напомним известное положение механики: если на материальную точку массой m в интервале времени (t_1, t_2) действует переменная сила $F(t)$, то изменение количества движения точки

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt.$$

Таким образом, существенно важна не сама сила, а ее импульс, фигурирующий в правой части последнего равенства. Дельта-функция как раз и является математической моделью короткого внешнего воздействия с единичным импульсом (площадью).

Здесь с ростом n длительность импульса сокращается, а его высота возрастает

В математике показано, что свойства дельта-функции присущи пределам многих последовательностей обычных классических функций. Приведем два характерных примера:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n/(2\pi)} \exp(-nt^2/2), \quad (1.8)$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin nt/(\pi t)]. \quad (1.9)$$

Динамическое представление сигнала посредством дельта-функций. Вернемся к задаче описания аналогового сигнала суммой примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (см. рис. 1.3, б). Если s_k — значение сигнала на k -м отсчете, то элементарный импульс с номером k представляется так:

$$\eta_k(t) = s_k [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)]. \quad (1.10)$$

В соответствии с принципом динамического представления исходный сигнал $s(t)$ должен рассматриваться как сумма таких элементарных слагаемых:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \quad (1.11)$$

В описываемом здесь способе динамического представления сигнала, для того чтобы получить какое-либо мгновенное значение, нужно располагать сведениями о поведении сигнала на всей оси времени

В этой сумме отличным от нуля будет только один член, отвечающий тому номеру k , который удовлетворяет неравенству

$$t_k < t < t_{k+1}.$$

Если подставить (1.10) в (1.11), предварительно разделив и умножив на величину шага Δ , то

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \Delta.$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, необходимо заменить суммирование интегрированием по формальной переменной τ , дифференциал которой $d\tau$ будет отвечать величине Δ .

Поскольку

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \tau - \Delta)] \frac{1}{\Delta} = \delta(t - \tau),$$

получим искомую формулу динамического представления сигнала

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.12)$$

Можно усмотреть важное свойство дельта-функции: ее физическая размерность такая же, как и размерность частоты, т. е. c^{-1} .

Итак, если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен δ -импульс. Принято говорить, что в этом состоит *фильтрующее свойство* дельта-функции.

Отсюда вытекает структурная схема системы, осуществляющей измерение мгновенных значений аналогового сигнала $s(t)$. Система состоит из двух звеньев: перемножителя и интегратора. Ясно, что измерение величины $s(t_0)$ будет тем точнее, чем короче тот реальный сигнал (например, прямоугольный видеоимпульс), который приближенно представляет дельта-функцию.

Обобщенные функции как математические модели сигналов. В классической математике полагают, что функция $s(t)$ должна принимать какие-то значения в каждой точке оси t . Однако рассмотренная функция $\delta(t)$ не вписывается в эти рамки — ее значение при $t = 0$ не определено вообще, хотя эта функция и имеет единичный интеграл. Очевидна необходимость расширить само понятие функции как математической модели сигнала. Современная математика преодолела эту трудность, введя принципиально новое понятие *обобщенной функции*.

В основе идеи обобщенной функции лежит простое интуитивное соображение. Держа в руках и рассматривая какой-нибудь предмет, мы его поворачиваем, стремясь получить множество проекций этого объекта на всевозможные плоскости. Аналогом «проекции» исследуемой функции $f(t)$ может служить, например, значение интеграла

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad (1.13)$$

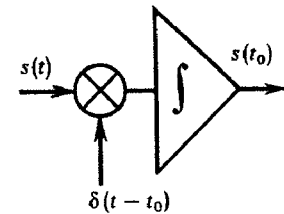
при известной функции $\varphi(t)$, которую называют *пробной функцией*.

Каждой функции $\varphi(t)$ отвечает, в свою очередь, некоторое конкретное числовое значение (f, φ) . Поэтому говорят, что формула (1.13) задает некоторый *функционал* на множестве пробных функций $\varphi(t)$. Непосредственно видно, что данный функционал линеен, т. е.

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2).$$

При этом размерности обеих частей формулы (1.12) оказываются одинаковыми

● **фильтрующее свойство дельта-функции**



● **функционал**

Если этот функционал к тому же еще и непрерывен, то говорят, что на множестве пробных функций $\varphi(t)$ задана обобщенная функция $f(t)$. Подчеркнем, что интеграл в правой части выражения (1.13) нужно понимать формально-аксиоматически, а не как предел соответствующих интегральных сумм. Именно с таких позиций следует рассматривать формулу динамического представления (1.12):

$$(\delta(t - \tau), s(\tau)) = s(t).$$

Обобщенные функции иногда называют также распределениями

Обобщенные функции, даже не заданные явными выражениями, обладают многими свойствами классических функций. Так, обобщенные функции можно дифференцировать. Для этого следует принять во внимание, что пробные функции $\varphi(t)$ являются финитными, т. е. обращаются в нуль вне конечного отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$. Тогда производная $f' = df/dt$ обобщенной функции $f(t)$ задается функционалом

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= f(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = - (f, \varphi'). \end{aligned}$$

В качестве примера найдем производную функции Хевисайда $\sigma(t)$, рассматривая последнюю как обобщенную функцию. Здесь

$$(\sigma', \varphi) = -(\sigma, \varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t), \quad (1.14)$$

причем это равенство необходимо понимать именно в смысле теории обобщенных функций, поскольку в классическом смысле производная $\sigma'(t)$ при $t = 0$ просто не существует.

Таким же образом можно определить и производную дельта-функции:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

Хотя явная формула для $\delta'(t)$ отсутствует, такой математический объект существует и действует по правилу — каждой классической функции $\varphi(t)$ он сопоставляет числовое значение ее производной в нуле с точностью до знака.

В настоящее время теория обобщенных функций получила широкое развитие и многочисленные применения. На ее основе созданы математические методы изучения процессов, для которых средства классического анализа оказываются недостаточными.

1.3. Геометрические методы в теории сигналов

При решении многих теоретических и прикладных задач радиотехники возникают такие вопросы: 1) в каком смысле можно говорить о величине сигнала, утверждая, например, что один сигнал значительно превосходит другой; 2) можно ли объективно оценивать, насколько два неодинаковых сигнала «похожи» друг на друга?

В XX в. был создан функциональный анализ — раздел математики, обобщающий наши интуитивные представления о геометрической структуре пространства. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию сигналов, в основе которой лежит концепция сигнала как вектора в специальном образом сконструированном бесконечномерном пространстве.

Линейное пространство сигналов. Пусть $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots\}$ — множество сигналов. Причина объединения этих объектов — наличие некоторых свойств, общих для всех элементов множества M .

Пример 1.4. Множество M образовано всевозможными аналоговыми сигналами, отличными от нуля на интервале времени $(0, 15 \text{ мкс})$ и равными нулю вне этого интервала.

Пример 1.5. Множество M состоит из сигналов вида $s_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ — гармонических колебаний, отличающихся своими амплитудами, частотами и начальными фазами.

Исследование свойств сигналов, образующих такие множества, становится особенно плодотворным тогда, когда удается выразить одни элементы множества через другие элементы. Принято говорить, что множество сигналов наделено при этом определенной *структурой*. Выбор той или иной структуры должен быть продиктован физическими соображениями. Так, применительно к электрическим колебаниям известно, что они могут складываться, а также умножаться на произвольный масштабный коэффициент. Это дает возможность в множествах сигналов ввести *структуру линейного пространства*.

Множество сигналов M образует *вещественное линейное пространство*, если справедливы следующие аксиомы:

1. Любой сигнал $u \in M$ при любых t принимает лишь вещественные значения.
2. Для любых $u \in M$ и $v \in M$ существует их сумма $w = u + v$, причем w также содержится в M . Операция суммирования коммутативна: $u + v = v + u$ и ассоциативна: $u + (v + x) = (u + v) + x$.
3. Для любого сигнала $s \in M$ и любого вещественного числа α определен сигнал $f = \alpha s \in M$.
4. Множество M содержит особый нулевой элемент $\emptyset$, такой, что $u + \emptyset = u$ для всех $u \in M$.

В этой книге при изложении методов функционального анализа мы будем вынуждены прибегать в ряде случаев к качественным представлениям.

Читателю, интересующемуся этими методами более глубоко, можно рекомендовать [7, 8]

■ структура линейного пространства

Приведенная здесь система аксиом линейного пространства не является исчерпывающе полной. В математике, исходя из требований логической строгости, эту систему дополняют рядом вспомогательных утверждений

Правило сложения напряжений на элементах цепи, включенных последовательно, есть следствие второго закона Кирхгофа

Если математические модели сигналов принимают комплексные значения, то, допуская в аксиоме 3 умножение на комплексное число, приходим к понятию *комплексного линейного пространства*.

Введение структуры линейного пространства является первым шагом на пути к геометрической трактовке сигналов. Элементы линейных пространств часто называют *векторами*, подчеркивая аналогию свойств этих объектов и обычных трехмерных векторов.

Ограничения, налагаемые аксиомами линейного пространства, весьма жестки. Далеко не каждое множество сигналов оказывается линейным пространством.

Пример 1.6. Множество M состоит из всевозможных прямоугольных видеоимпульсов напряжения, существующих на интервале времени $(0, 20 \text{ мкс})$, причем амплитуды импульсов не превышают 10 В.

Сложив, например, импульсы с амплитудами 6 и 8 В, получаем импульс, не принадлежащий множеству M . Поэтому M не есть линейное пространство.

Понятие координатного базиса. Как и в обычном трехмерном пространстве, в линейном пространстве сигналов можно выделить специальное подмножество, играющее роль координатных осей.

Говорят, что совокупность векторов $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, принадлежащих M , является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_i \alpha_i e_i = 0$$

возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов α_i .

Система линейно независимых векторов образует *координатный базис* в линейном пространстве. Если дано разложение некоторого сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) = \sum_i c_i e_i,$$

то числа $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ являются *проекциями* сигнала $s(t)$ относительно выбранного базиса.

В задачах теории сигналов число базисных векторов, как правило, неограниченно велико. Такие линейные пространства называют *бесконечномерными*. Естественно, что теория этих пространств не может быть вложена в формальную схему линейной алгебры, где число базисных векторов всегда конечно.

Какой-либо элемент координатного базиса не может быть выражен в виде линейной комбинации оставшихся элементов

Пример 1.7. Линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n$$

(такие функции называются аналитическими).

Координатным базисом в этом пространстве служит система одночленов $\{e_0 = 1; e_1 = t; e_2 = t^2; \dots\}$.

Нормированное линейное пространство. Энергии сигнала. Для того чтобы продолжить и углубить геометрическую трактовку теории сигналов, необходимо ввести новое понятие, которое по своему смыслу соответствует длине вектора. Это позволит не только придать точный смысл высказыванию вида «первый сигнал больше второго», но и указать, на сколько он больше.

Длину вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов L является *нормированным*, если каждому вектору $s(t) \in L$ однозначно сопоставлено число $\|s\|$ — норма этого вектора, причем выполняются следующие аксиомы нормированного пространства:

1. Норма неотрицательна, т. е. $\|s\| \geq 0$. Норма $\|s\| = 0$ тогда и только тогда, если $s = \emptyset$.

2. Для любого числа α справедливо равенство $\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$.

3. Если $s(t)$ и $p(t)$ — два вектора из L , то выполняется неравенство треугольника: $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$.

Можно предложить разные способы введения нормы сигналов. В радиотехнике чаще всего полагают, что вещественные аналоговые сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} \quad (1.15)$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное). Для комплексных сигналов норма

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt},$$

где $*$ — символ комплексно-сопряженной величины.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (1.16)$$

Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его зажимах существует напряжение $s(t)$.

Данная аксиоматика в равной мере относится как к аналоговым, так и к дискретным сигналам

●
норма сигнала

Если сигнал дискретен, то операция интегрирования должна быть заменена суммированием по всем отсчетам сигнала

●
энергия сигнала

Пример 1.8. Сигнал $s(t)$ представляет собой треугольный импульс напряжения с амплитудой U и длительностью τ_n . Вычислить энергию и норму такого сигнала.

На интервале времени $(0, \tau_n)$ сигнал описывается функцией

$$s(t) = Ut/\tau_n.$$

Энергия сигнала

$$E_s = (U^2/\tau_n^2) \int_0^{\tau_n} t^2 dt = U^2 \tau_n / 3.$$

Норма сигнала

$$\|s\| = \sqrt{E_s} = U \sqrt{\tau_n/3}.$$

Пример 1.9. Вычислить энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей. Импульс существует на интервале времени $(0, \tau_n)$ и описывается функцией $s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

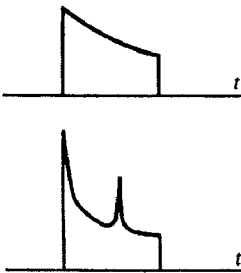
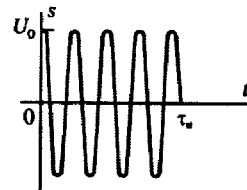
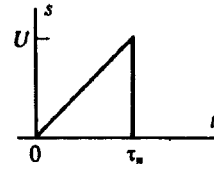
В соответствии с формулой (1.16)

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_n} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0 \tau_n + \varphi_0} \cos^2 x dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$E_s = \frac{U_0^2}{4\omega_0} [2(\omega_0 \tau_n + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0 \tau_n + \varphi_0)].$$

Если внутри импульса содержится много периодов высокочастотного заполнения, так что $\omega_0 \tau_n \gg 1$, то $E_s \approx U_0^2 \tau_n / 2$ независимо от выбора параметров ω_0 и φ_0 .



Энергии этих сигналов отличаются незначительно

Определять норму сигнала с помощью формулы (1.15) целесообразно по следующим причинам:

1. В радиотехнике о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например количества теплоты, выделяемой в резисторе.

2. Энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, может быть, и значительным, но происходящим на коротких отрезках времени.

Линейное нормированное пространство с конечной величиной нормы вида (1.15) носит название *пространства функций с интегрируемым квадратом* и кратко обозначается L_2 .

Метрическое пространство. Теперь необходимо ввести еще одно фундаментальное понятие, которое обобщало бы наше обычное представление о расстоянии между точками в пространстве.

Говорят, что линейное пространство L становится *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $u, v \in L$ сопоставлено неотрицательное число $\rho(u, v)$, называемое *метрикой*, или *расстоянием* между этими элементами. Метрика, независимо от способа ее определения, должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

1. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ (рефлексивность метрики).
2. $\rho(u, u) = 0$ при любых $u \in L$.

●
метрика

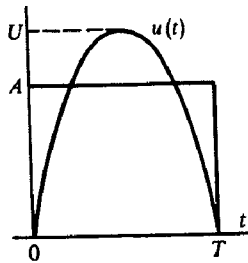
3. Каков бы ни был элемент $w \in L$, всегда $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:

$$\rho(u, v) = \|u - v\|. \quad (1.17)$$

Норму, в свою очередь, можно понимать как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом: $\|u\| = \rho(u, \emptyset)$.

Зная метрику, можно судить, например, о том, насколько хорошо один из сигналов аппроксимирует другой.



Пример 1.10. Сигнал $u(t)$ представляет собой отрезок синусоиды, обращаясь в нуль на концах отрезка $[0, T]$. Высота импульса U известна. Выбрать амплитуду A прямоугольного импульса $v(t)$ той же длительности так, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным.

Сигнал $u(t)$ представляется формулой

$$u(t) = U \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Квадрат расстояния между сигналами

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T \left(U \sin \frac{\pi t}{T} - A \right)^2 dt.$$

Проведя интегрирование, имеем

$$\rho^2(u, v) = U^2 T/2 - 4AUT/\pi + A^2 T.$$

То, что в точке экстремума действительно достигается минимум, вытекает из положительности второй производной исследуемой функции

▲

решите задачу 8

Исследуя это выражение на экстремум, убеждаемся, что минимум расстояния будет достигнут, если $A = 2U/\pi \approx 0.637U$. При этом

$$\rho_{\min}^2 = U^2 T(1/2 - 4/\pi^2) \approx 0.095 U^2 T,$$

$$\rho_{\min} \approx 0.308 U \sqrt{T}.$$

Заметим, что энергия синусоидального импульса

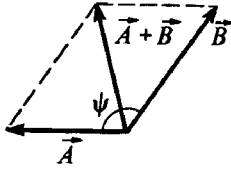
$$E_u = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{U^2 T}{2},$$

его норма $\|u\| = 0.707 U \sqrt{T}$.

Итак, при выбранной метрике минимально достижимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.

1.4. Теория ортогональных сигналов

Введя в множестве сигналов структуру линейного пространства, определив норму и метрику, мы, тем не менее, лишены возможности вычислить такую характеристику, как угол между двумя векторами. Это удастся сделать, сформу-



В задачах физики скалярное произведение векторов возникает всегда при вычислении работы сил поля при заданном перемещении в пространстве

лировав важное понятие скалярного произведения элементов линейного пространства.

Скалярное произведение сигналов. Напомним, что если в обычном трехмерном пространстве известны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, то квадрат модуля их суммы

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A}, \vec{B}), \quad (1.18)$$

где $(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \psi$ — скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла ψ между ними.

Действуя по аналогии, вычислим энергию суммы двух сигналов u и v :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt. \quad (1.19)$$

В отличие от самих сигналов их энергии неаддитивны — энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую взаимную энергию

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt.$$

Сравнивая между собой формулы (1.18) и (1.19), определим скалярное произведение вещественных сигналов u и v :

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt, \quad (1.20)$$

Следует отметить, что в соответствии с формулой (1.21) угол между двумя сигналами должен лежать в интервале от 0 до 180°

а также косинус угла между ними:

$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (1.21)$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $(u, u) \geq 0$;
2. $(u, v) = (v, u)$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$, где λ — вещественное число;
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

Линейное пространство с таким скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства, называется *вещественным гильбертовым пространством* H .

Справедливо фундаментальное неравенство Коши — Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (1.23)$$

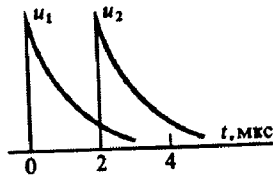
Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в нем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt, \quad (1.24)$$

такое, что $(u, v) = (v, u)^*$.

Давид Гильберт (1862—1943) — известный немецкий математик

Из данного неравенства вытекает, в частности, что косинус угла между векторами в пространстве сигналов не превышает единицы



Пример 1.11. Имеются два смещенных во времени экспоненциальных импульса (В):

$$u_1(t) = 5 \exp(-10^5 t) \sigma(t),$$

$$u_2(t) = 5 \exp[-10^5(t - 2 \cdot 10^{-6})] \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}).$$

Найти скалярное произведение данных сигналов, а также угол ψ между ними.

Энергии этих сигналов одинаковы:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Скалярное произведение

$$(u_1, u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5(t - 2 \cdot 10^{-6})} dt = 1.023 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Отсюда $\cos \psi = 0.819$ и $\psi = 35^\circ$.

Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье. Два сигнала u и v называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt = 0. \quad (1.25)$$

Пусть H — гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$, ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.26)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал $s(t) \in H$ в ряд:

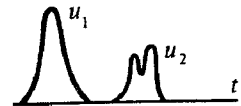
$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \quad (1.27)$$

Представление (1.27) называется *обобщенным рядом Фурье* сигнала $s(t)$ в выбранном базисе.

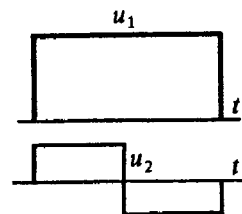
Коэффициенты данного ряда находят следующим образом. Возьмем базисную функцию u_k с произвольным номером k , умножим на нее обе части равенства (1.27) и затем проинтегрируем результаты по времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k dt. \quad (1.28)$$

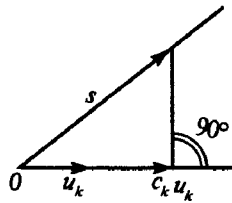
■ принцип ортогональности



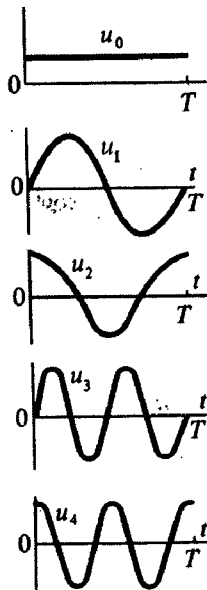
Два таких импульса разнесены во времени и заведомо ортогональны



Два таких импульса также ортогональны



На геометрическом языке интерпретация формулы (1.29) такова: коэффициент обобщенного ряда Фурье есть проекция вектора на базисное направление



Сигналы, соответствующие функциям Уолша, легко генерируются с помощью микроэлектронных переключаемых схем

Ввиду ортонормированности базиса в правой части равенства (1.28) останется только член суммы с номером $i = k$, поэтому

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k). \quad (1.29)$$

Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом большого принципиального значения. Вместо того чтобы изучать функциональную зависимость в несчетном множестве точек, мы получаем возможность характеризовать эти сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье c_k .

Примеры ортонормированных базисов. Способы построения систем взаимно ортогональных функций подробно изучены в математике (см., например, [7]). Здесь в качестве примеров будут описаны две наиболее важные и распространенные системы.

Ортонормированная система гармонических функций. Читатель может самостоятельно убедиться в том, что на отрезке $[0, T]$ система тригонометрических функций с кратными частотами, дополненная постоянным сигналом.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, \\ u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t/T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t/T, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{2m-1} &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t/T, \\ u_{2m} &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t/T, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

образует ортонормированный базис.

Разложение периодических функций в ряды Фурье по этой системе будет подробно рассмотрено в гл. 2.

Ортонормированная система функций Уолша. В последнее время под влиянием методов обработки дискретных сигналов большое внимание уделяют ортонормированной системе функций Уолша, которые на отрезке своего существования $[-T/2, T/2]$ принимают лишь значения ± 1 .

Введем безразмерное время $\vartheta = t/T$ и будем обозначать k -ю функцию Уолша, как это принято, символом $wal(k, \vartheta)$. Аналитическое описание данных функций довольно сложно (см. Приложения). Однако идею построения этой системы легко усмотреть из рис. 1.4, на котором изображены графики нескольких первых функций Уолша.

Очевидна нормированность функций Уолша при любом значении k :

$$\|wal(k, \vartheta)\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} wal^2(k, \vartheta) d\vartheta = 1.$$

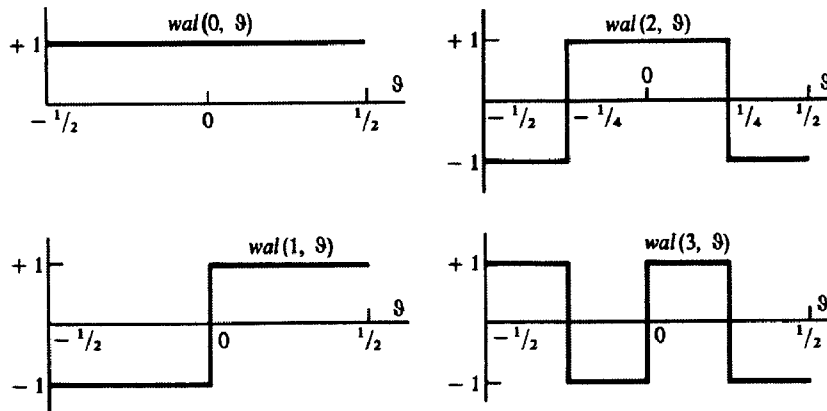


Рис. 1.4. Графики нескольких первых функций Уолша

Ортогональность этих функций следует из принципа их построения и может быть проверена непосредственно. Например:

▲ решите задачу 10

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \text{wal}(1, \vartheta) \text{wal}(2, \vartheta) d\vartheta &= \int_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2 d\vartheta + \int_{-1/4}^0 (-1) \cdot 1 d\vartheta + \\ &+ \int_0^{1/4} 1^2 d\vartheta + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot (-1) d\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Разложение сигнала с конечной энергией, заданного на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}(k, t/T). \quad (1.31)$$

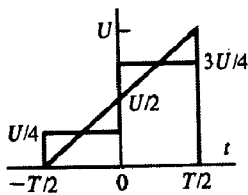
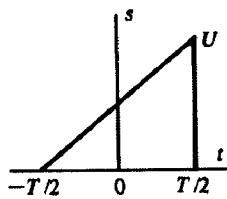
Пример 1.12. Найти первые два коэффициента в разложении импульса треугольной формы по системе функций Уолша.

На отрезке времени $[-T/2, T/2]$ разлагаемый сигнал описывается функцией $s(t) = U(t/T + 1/2)$.

Вычисляем коэффициенты обобщенного ряда Фурье:

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(0, \vartheta) d\vartheta = U \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/2, \\ c_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(1, \vartheta) d\vartheta = -U \int_{-1/2}^0 (\vartheta + 1/2) d\vartheta + \\ &+ U \int_0^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/4. \end{aligned}$$

Итак, при аппроксимации колебания треугольной формы двумя первыми членами ряда по системе функций Уолша получается приближенное представление ступенчатой формы. Отметим, что с точки зрения введенной выше энергетической нормы уже такая грубая аппроксимация является удовлетворительной. Действительно, энергия исходного сигнала



$$E_s = U^2 \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2)^2 d\vartheta = U^2/3,$$

в то время как энергия разности

$$\|s(\vartheta) - c_0 \text{wal}(0, \vartheta) - c_1 \text{wal}(1, \vartheta)\|^2 = 4U^2 \int_0^{1/4} x^2 dx = U^2/48$$

составляет лишь $1/16$, или 6.25 % от энергии аппроксимируемого сигнала.

Энергия сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье. Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, разложенный в ряд по ортонормированной базисной системе:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(t),$$

и вычислим его энергию, непосредственно подставив этот ряд в соответствующий интеграл:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j u_i u_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j \int_{t_1}^{t_2} u_i u_j dt. \quad (1.32)$$

Поскольку базисная система функций ортонормирована, в сумме (1.32) отличными от нуля окажутся только члены с номерами $i = j$. Отсюда получается замечательный результат:

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2. \quad (1.33)$$

Смысл этой формулы таков: энергия сигнала есть сумма энергий всех компонент, из которых складывается обобщенный ряд Фурье.

Оптимальность разложения сигнала по ортогональному базису. Для сигнала $s(t)$ введем конечномерную аппроксимацию:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^N c_k u_k(t)$$

с не известными пока коэффициентами c_k и выберем эти коэффициенты так, чтобы минимизировать энергию ошибки аппроксимации:

$$\mu = \|s - \tilde{s}\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (s - \sum_k c_k u_k)^2 dt = \min. \quad (1.34)$$

Необходимое условие минимума состоит в том, что коэффициенты должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\frac{\partial \mu}{\partial c_m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (1.35)$$

Предполагается, что операции интегрирования и суммирования перестановочны

Данная формула обобщает теорему Пифагора на случай бесконечномерных пространств

В развернутой форме энергия ошибки аппроксимации

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} \left[s^2 - 2s \sum_{k=0}^N c_k u_k + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i c_j u_i u_j \right] dt.$$

Поскольку рассматриваемая базисная система функций ортогональна, отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \int_{t_1}^{t_2} (c_m^2 u_m^2 - 2s c_m u_m) dt = 0.$$

Приняв во внимание единичную норму базисных функций, приходим к выводу, что равенства (1.35) будут выполняться, если

$$c_m = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_m(t) dt,$$

что полностью совпадает с выражением (1.29) для коэффициентов обобщенного ряда Фурье.

Более тщательный анализ (на нем здесь не останавливаемся), когда рассматривается также вторая производная энергии ошибки, показывает, что при разложении сигнала в обобщенный ряд Фурье обеспечивается не просто экстремум, а именно минимум энергии ошибки аппроксимации.

Напомним в заключение, что гильбертово пространство сигналов, по определению, обладает важным свойством полноты: если предельное значение суммы

$$s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N c_k u_k(t)$$

существует, то этот предел сам является некоторым элементом гильбертова пространства.

В полном функциональном пространстве норма ошибки аппроксимации монотонно убывает с ростом N — числом учитываемых членов ряда. Выбирая N достаточно большим, всегда можно снизить норму ошибки до любой приемлемо малой величины.

Аппаратурная реализация ортогонального разложения сигнала. Рассмотрим структурную схему устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций (рис. 1.5).

Основными элементами здесь являются генераторы тех базисных функций, по которым проводится разложение. Анализируемый сигнал одновременно подается на совокупность множительных звеньев, осуществляющих перемножение этого сигнала и соответствующей базисной функции. С выходов перемножителей сигналы поступают на интеграторы. При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени уровень, величина которого

Следует иметь в виду, что близость нормы сигнала к норме конечного отрезка обобщенного ряда Фурье вовсе не означает сходимости суммы ряда к мгновенному значению сигнала в каждой точке. В математике резкие «всплески» суммы ряда Фурье получили название явления Гиббса

В точке минимума первая производная обращается в нуль, а вторая производная положительна

●
полнота пространства

Пример структурной схемы, типичной для теоретического анализа. Практическая схема выглядит гораздо сложнее. Например, должны быть предусмотрены цепи, осуществляющие синхронизацию всех генераторов базисных функций

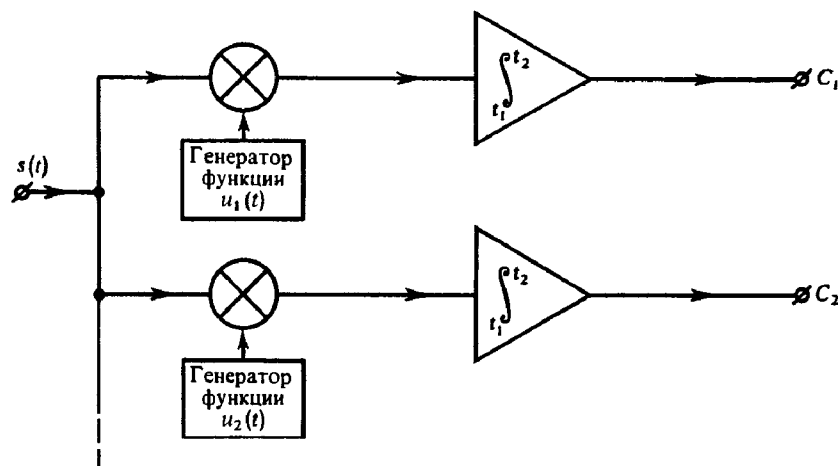


Рис. 1.5. Структурная схема устройства для аппаратного анализа сигналов

В соответствии с формулой (1.29) в точности равна тому или иному коэффициенту обобщенного ряда Фурье.

Ясно, что работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удастся воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования перемножителей и интеграторов.

Система, изображенная на рис. 1.5, важна и в прикладном, и в теоретическом смысле. Анализируя ее, еще раз убеждаемся, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел.

Результаты

- ◇◇ Для теоретического исследования сигналов необходимо построить их математические модели.
- ◇◇ Классификация сигналов осуществляется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей. Принято различать одномерные и многомерные, детерминированные и случайные, аналоговые и дискретные сигналы. Разновидностью последних являются цифровые сигналы.
- ◇◇ Принцип динамического представления позволяет описывать сигналы, учитывая их поведение как «в прошлом», так и «в будущем».
- ◇◇ Для динамического представления используются два элементарных сигнала — функция включения и дельта-функция (функция Дирака).
- ◇◇ Путем введения структуры некоторые множества сигналов могут быть превращены в линейные функциональные пространства.
- ◇◇ Система линейно независимых векторов образует координатный базис, по которому можно разложить произвольный вектор, принадлежащий линейному пространству.
- ◇◇ Аналогом длины вектора в линейном пространстве сигналов служит его норма. Квадрат нормы называется энергией сигнала.
- ◇◇ Линейное пространство сигналов становится метрическим пространством, если определить метрику — расстояние между двумя векторами.

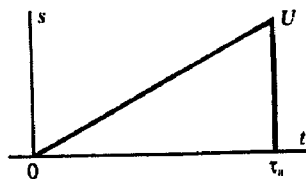
- ◇◇ Чтобы найти угол между двумя элементами линейного пространства, вводят понятие скалярного произведения, пропорционального взаимной энергии сигналов. Если скалярное произведение равно нулю, то сигналы ортогональны.
- ◇◇ Представление сигнала в виде разложения по ортонормированному базису называют обобщенным рядом Фурье. Коэффициентами такого ряда служат скалярные произведения разлагаемого сигнала и соответствующих базисных векторов.
- ◇◇ Энергия сигнала равна сумме энергий всех членов обобщенного ряда Фурье.
- ◇◇ Разложение сигнала по ортонормированному базису обеспечивает минимум энергии ошибки аппроксимации.
- ◇◇ Процесс извлечения полезной информации, содержащейся в сигнале, можно представить себе как аппаратное определение числовых значений коэффициентов обобщенного ряда Фурье этого сигнала.

Вопросы

1. Назовите два-три физических процесса, для описания которых требуются случайные математические модели.
2. Какие числовые характеристики применяют для описания моделей импульсных сигналов?
3. В чем состоит разница между видеоимпульсом и радиоимпульсом?
4. Почему замена аналогового сигнала дискретным при некоторых условиях может стать неадекватной?
5. Как формулируется принцип динамического представления сигнала?
6. Каковы основные свойства дельта-функции?
7. Перечислите важнейшие аксиомы линейного пространства.
8. Каков физический смысл квадрата нормы сигнала?
9. Как следует понимать геометрический смысл неравенства Коши — Буняковского?
10. Изобразите графически несколько ортогональных сигналов.
11. Какие функциональные пространства называют гильбертовыми пространствами?
12. Почему удобно разлагать сигналы по ортогональной системе функций Уолша?
13. Чем обобщенные функции отличаются от классических функций?

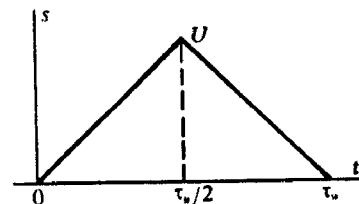
Задачи

1. Импульс напряжения треугольной формы изображен на рисунке:

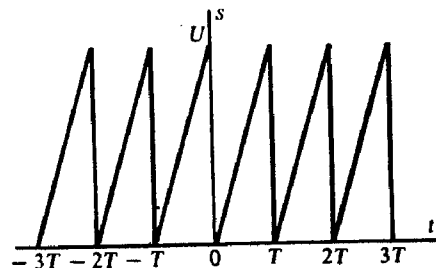


Составьте математическую модель этого сигнала, используя комбинацию функций включения. Убедитесь в том, что решение данной задачи неоднозначно.

2. Решите задачу 1 применительно к симметричному треугольному импульсу, имеющему длительность τ_n и амплитуду U .



3. Составьте математическую модель бесконечной последовательности одинаковых импульсов треугольной формы:



4. В соответствии с формулой (1.4) найдите динамическое представление экспоненциального видеоимпульса, описываемого функцией $u(t) = \exp(-\alpha t) \sigma(t)$.

5. Найдите динамическое представление гауссова видеоимпульса $u(t) = U_0 \exp(-\beta t^2)$, определенного на всей бесконечной оси времени. Обратите внимание на модификацию, которой должна быть подвергнута формула (1.4).

6. Найдите энергию и норму сигнала, описываемого математической моделью вида

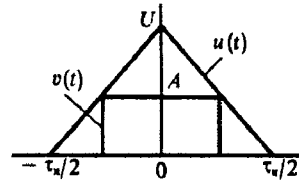
$$u(t) = U_0 \exp(-\alpha |t|).$$

7. Вычислите энергию и норму импульса косинусоидальной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \omega_0 t < -\pi/2; \\ U_m \cos \omega_0 t, & -\pi/2 \leq \omega_0 t \leq \pi/2; \\ 0, & \omega_0 t > \pi/2. \end{cases}$$

8. Сигнал $u(t)$ представляет собой симметричный треугольный импульс, сигнал

$v(t)$ — вписанный в него импульс прямоугольной формы:



Какова должна быть амплитуда прямоугольного импульса, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным?

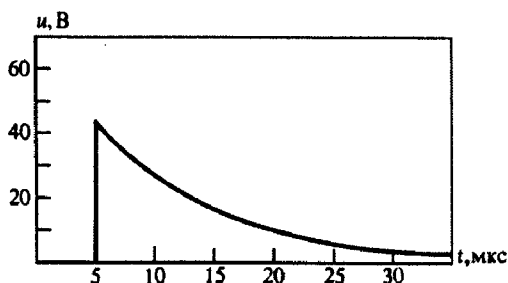
9. Используя принцип ортогональности, на основании рис. 1.4 постройте график функции $\text{wal}(3, \vartheta)$.

10. Покажите, что взаимные расстояния между любыми двумя функциями из совокупности $\text{wal}(0, \vartheta)$, $\text{wal}(1, \vartheta)$, $\text{wal}(2, \vartheta)$ одинаковы и равны $\sqrt{2}$.

11. Проведите такой же анализ для ортонормированной системы тригонометрических функций [см. формулы (1.30)]. Сравните результаты. Можно ли здесь провести аналогию с известной теоремой Пифагора?

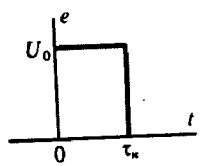
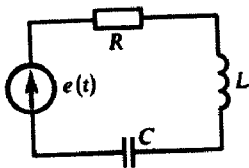
Более сложные задания

12. В эксперименте была зафиксирована осциллограмма сигнала $u(t)$:



Есть предположение, что этот сигнал описывается экспоненциальной функцией времени. Предложите по возможности простой графический способ проверки этой гипотезы.

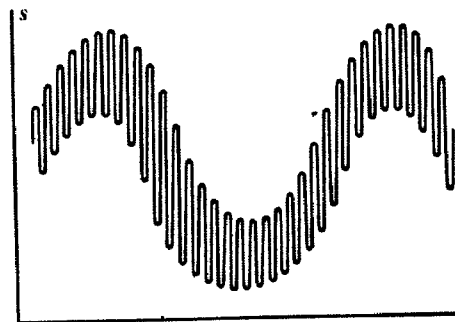
13. Последовательный колебательный контур возбуждается источником импульсной ЭДС:



Параметры системы: $R = 5 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мкГн}$, $C = 2 \text{ нФ}$. Длительность импульса $\tau_n = 0.5 \text{ мкс}$, его амплитуда $U_0 = 12 \text{ В}$. Покажите, что в данном случае реальный импульс можно описать математической моделью вида $A\delta(t)$. Каков должен быть при этом коэффициент A ?

Перечислите несколько простых физических ситуаций, относящихся к повседневному опыту, когда воздействие на какую-либо систему можно приближенно заменить дельта-импульсом.

14. Предложите математическую модель для аналитического описания сигнала следующего вида:



15. Докажите, что дельта-функцию можно рассматривать как предел вида

$$\delta(t) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin qt}{t} \right).$$

16. Докажите, что если H — вещественное гильбертово пространство, содержащее сигналы u и v , то имеет место равенство параллелограмма:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

17. Докажите, что в комплексном гильбертовом пространстве справедливо тождество

$$4(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \\ + j\|u + jv\|^2 - j\|u - jv\|^2.$$

18. Пусть $\{u_k(t)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — ортонормированный базис в некотором гильбертовом пространстве H . Покажите, что для произвольных $s_1, s_2 \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (s_1, u_k)(s_2, u_k).$$

19. В гильбертовом пространстве сигналов заданы произвольный вектор u и вектор v , имеющий единичную норму. По аналогии с геометрией обычных векторов на плоскости вектор $w = (u, v)v$ называют ортогональной проекцией вектора u на направление v . Докажите, что вектор $y = u - w$ ортогонален вектору v . Обобщая полученный результат, покажите, что если $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ — система взаимно ортогональных векторов с единич-

ными нормами, то вектор

$$y = u - (u, v_1)v_1 - \dots - (u, v_N)v_N$$

при любом выборе u ортогонален по отношению к каждому из векторов рассматриваемой системы.

20. Пусть в гильбертовом пространстве сигналов задана система взаимно неортонормальных векторов $\{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$. На ее основе постройте ортонормированную систему векторов $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ таким образом, чтобы каждый вектор u_k являлся линейной комбинацией вида

$$u_k = c_{k0}g_0 + c_{k1}g_1 + \dots + c_{kn}g_n + \dots$$

с постоянными коэффициентами.

21. Используя прием, найденный при решении предыдущей задачи, вычислите три первых базисных вектора u_0, u_1, u_2 , получаемых путем ортогонализации и нормировки системы степенных функций $\{1, t, t^2, \dots\}$ на отрезке $-1 \leq t \leq 1$. Получите числовые значения трех первых коэффициентов c_0, c_1 и c_2 обобщенного ряда Фурье для сигнала $f(t) = \exp(t)$ на рассматриваемом отрезке. Вычислите норму абсолютной ошибки аппроксимации данного сигнала тремя членами ряда. Оцените относительную ошибку аппроксимации.

22. Рассмотрите предыдущую задачу в другой постановке: найдите коэффициенты многочлена второй степени $z(t) = A + Bt + Ct^2$ таким образом, чтобы данный многочлен аппроксимировал сигнал $f(t) = \exp(t)$ на отрезке $-1 \leq t \leq 1$ с наименьшей среднеквадратической ошибкой.

Глава 2

Спектральные представления сигналов

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисов для представления радиотехнических сигналов, исключительное место занимают гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Значение гармонических сигналов для радиотехники обусловлено рядом причин.

В частности:

1. Гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований, осуществляемых стационарными линейными электрическими цепями. Если такая цепь возбуждена источником гармонических колебаний, то сигнал на выходе цепи остается гармоническим с той же частотой, отличаясь от входного сигнала лишь амплитудой и начальной фазой.

2. Техника генерирования гармонических сигналов относительно проста.

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено *спектральное разложение* этого сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его спектр.

2.1. Периодические сигналы и ряды Фурье

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодический сигнал $s(t)$ со следующим свойством:

$$s(t) = s(t \pm nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Здесь T — период сигнала.

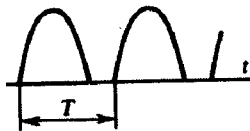
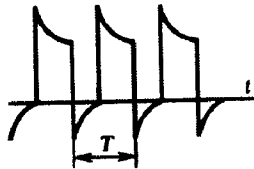
Ставится задача найти спектральное разложение такого сигнала.

Ряд Фурье. Зададим на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ рассмотренный в гл. 1 ортонормированный базис, образованный гармоническими функциями с кратными частотами:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, & u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t/T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t/T, & u_3 &= \sqrt{2/T} \sin 4\pi t/T, \\ u_4 &= \sqrt{2/T} \cos 4\pi t/T, & u_5 &= \sqrt{2/T} \sin 6\pi t/T, \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Любая функция u_m из этого базиса удовлетворяет условию периодичности (2.1). Поэтому, выполнив ортогональное разложение сигнала $s(t)$ в этом базисе, т. е. вычислив коэффициенты

$$c_m = (s, u_m), \quad (2.3)$$



Примеры периодических сигналов

получим спектральное разложение

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t), \quad (2.4)$$

справедливое на всей бесконечности оси времени.

Ряд вида (2.4) называется *рядом Фурье* данного сигнала.

Введем *основную частоту* $\omega_1 = 2\pi/T$ последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения по формуле (2.3), запишем ряд Фурье для периодического сигнала

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (2.5)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t dt.$$

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит не зависящую от времени *постоянную составляющую* и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых *гармоник* с частотами $\omega_n = n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), кратными основной частоте последовательности.

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой A_n и начальной фазой φ_n . Для этого коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

так что

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = b_n/a_n.$$

Подставив эти выражения в (2.5), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (2.7)$$

которая иногда оказывается удобнее.

Спектральная диаграмма периодического сигнала. Так принято называть графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы (рис. 2.1).

Здесь по горизонтальной оси в некотором масштабе отложены частоты гармоник, а по вертикальной оси представлены их амплитуды и начальные фазы.

Следует обратить внимание на то, что энергия периодического сигнала неограниченно велика. Поэтому здесь нужно говорить о мощности сигнала, т. е. об энергии в единицу времени

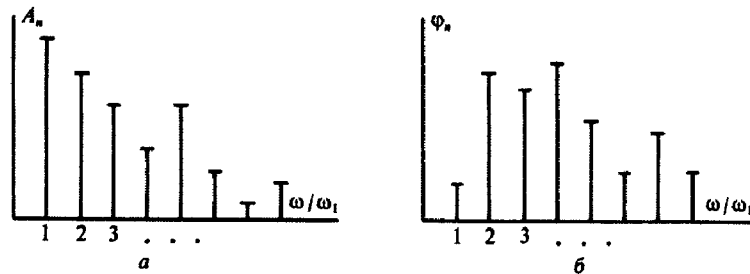
● основная частота

Из формул для коэффициентов ряда Фурье следует, что четный сигнал имеет только косинусоидальные, а нечетный — только синусоидальные слагаемые

● гармоники

Колебания с номерами $n = 2, 3, \dots$ обычно называют высшими гармониками

▲ решите задачи 1 и 2



Разные сигналы различаются прежде всего скоростью убывания амплитудных коэффициентов с ростом номера гармоник

Рис. 2.1. Спектральные диаграммы некоторого периодического сигнала:

a — амплитудная; *б* — фазовая

Особо интересуются амплитудной диаграммой, которая позволяет судить о процентном содержании тех или иных гармоник в спектре периодического сигнала.

Изучим несколько конкретных примеров.

Пример 2.1. Ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов $s(t)$ с известными параметрами τ_n , T , A , четной относительно точки $t = 0$.

В радиотехнике отношение $q = T/\tau_n$ называют *скважностью* последовательности. По формулам (2.6) находим

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q},$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau_n}{2}.$$

Окончательную формулу ряда Фурье удобно записать в виде

$$s(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos n\omega_1 t \right]. \quad (2.8)$$

На рис. 2.2 представлены амплитудные диаграммы рассматриваемой последовательности в двух крайних случаях.

Важно отметить, что последовательность коротких импульсов, следующих друг за другом достаточно редко ($q \gg 1$), обладает богатым спектральным составом.

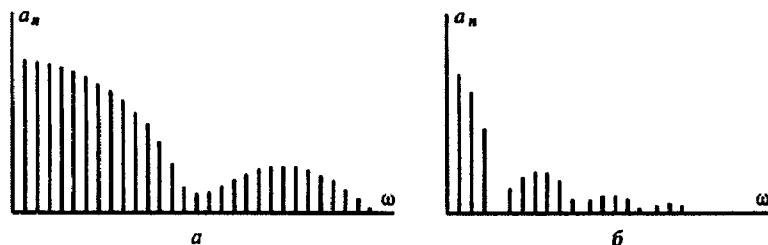


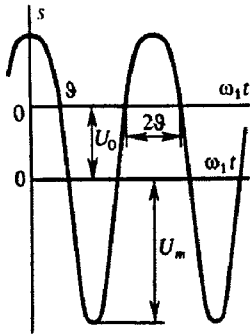
Рис. 2.2. Амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов:

a — при большой скважности; *б* — при малой скважности

Скважность последовательности

Периодические последовательности импульсов, используемые, например, в радиолокации, имеют значения скважности, достигающие нескольких тысяч

Принято говорить, что спектральная диаграмма рассмотренного вида имеет *лепестковую структуру*



●
угол отсечки

Аксель Иванович Берг (1892–1979) — академик, крупный советский ученый в области радиотехники

Функции Берга часто встречаются в инженерных расчетах. В Приложениях к книге даны их таблицы.

Пример 2.2. Ряд Фурье периодической последовательности импульсов, образованной гармоническим сигналом вида $U_m \cos \omega_1 t$, ограниченным на уровне U_0 (предполагается, что $|U_0| < U_m$).

Введем специальный параметр — угол отсечки ϑ , определяемый из соотношения $U_m \cos \vartheta = U_0$, откуда $\vartheta = \arccos(U_0/U_m)$.

В соответствии с этим величина 2ϑ равна длительности одного импульса, выраженной в угловой мере: $\omega_1 \tau_n = 2\vartheta$.

Аналитическая запись импульса, порождающего рассматриваемую последовательность, имеет вид

$$s(t) = U_m \cos \omega_1 t - U_0, \quad -\vartheta \leq \omega_1 t \leq \vartheta.$$

Постоянная составляющая последовательности

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\vartheta/\omega_1}^{\vartheta/\omega_1} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) d(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Амплитудный коэффициент первой гармоники

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) \cos \omega_1 t d(\omega_1 t) = \frac{U_m}{2\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta).$$

Аналогично вычисляют амплитуды a_n гармонических составляющих при $n = 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{2U_m}{\pi} \frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \cos n\vartheta \sin \vartheta}{n(n^2 - 1)}.$$

Полученные результаты обычно записывают так:

$$a_0/2 = U_m \gamma_0(\vartheta); \quad a_n = U_m \gamma_n(\vartheta),$$

где $\gamma_0(\vartheta), \gamma_1(\vartheta), \gamma_2(\vartheta), \dots$ — так называемые функции Берга:

$$\gamma_0(\vartheta) = \frac{1}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta),$$

$$\gamma_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta), \quad (2.9)$$

$$\gamma_n(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \cos n\vartheta \sin \vartheta}{n(n^2 - 1)} \quad \text{при } n = 2, 3, \dots$$

Графики некоторых функций Берга приведены на рис. 2.3.

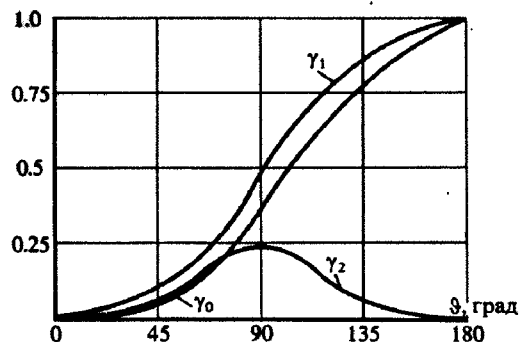


Рис. 2.3. Графики нескольких первых функций Берга

Комплексная форма ряда Фурье. Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить и несколько по-иному, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

Функции из рассматриваемой системы принимают комплексные значения. Поэтому при вычислении скалярного произведения используется операция комплексного сопряжения

Легко видеть, что функции этой системы периодичны с периодом T и ортонормированы на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, так как

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Ряд Фурье произвольного периодического сигнала в данном случае принимает вид

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}$$

где c_n — коэффициенты

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Обычно используют следующую форму записи:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.11)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.12)$$

Выражение (2.11) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме.

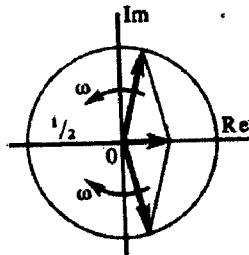
Спектр сигнала в соответствии с формулой (2.11) содержит компоненты на отрицательной полуоси частот, причем $C_{-n} = C_n^*$. В ряде (2.11) слагаемые с положительными и отрицательными частотами объединяются в пары, например:

$$C_n e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + |C_n| e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Итак, отрицательная частота — понятие не физическое, а математическое, вытекающее из способа представления комплексных чисел.

Изображение периодического сигнала на комплексной плоскости. Структура ряда Фурье (2.11) дает возможность изобразить периодический сигнал посредством бесконечной суммы вращающихся векторов на комплексной плоскости (рис. 2.4).

Построение осуществляется следующим образом. Из начала координат комплексной плоскости (точка 0) строят вещественный вектор C_0 , который отображает член с номе-



Положительной частоте соответствует вектор, вращающийся против часовой стрелки, а отрицательной частоте — вектор, вращающийся по часовой стрелке

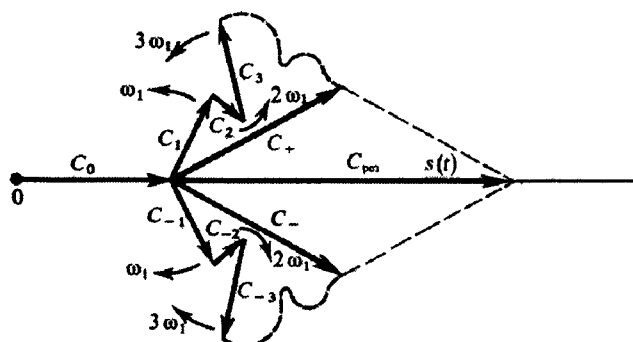


Рис. 2.4. Графическое отображение ряда Фурье в комплексной форме

ром $n = 0$. Затем в формуле (2.11) полагают $t = 0$ и строят суммы векторов

$$C_+ = C_1 + C_2 + C_3 + \dots,$$

$$C_- = C_{-1} + C_{-2} + C_{-3} + \dots,$$

1) 2

отвечающие вкладу слагаемых с положительными и отрицательными частотами. Если ряд Фурье сходится, то каждая из сумм отображается вектором конечной длины.

Как указывалось, коэффициенты ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами комплексно сопряжены, поэтому вектор $C_+ + C_-$ всегда вещественный. Будучи сложен с постоянной составляющей C_0 , он образует вектор, длина которого равна $s(0)$ — значению сигнала в начальный момент времени.

В дальнейшем картина трансформируется — векторы $C_1, C_2, \dots$, соответствующие положительным частотам, вращаются с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots$ в сторону увеличения фазового угла, в то время как векторы $C_{-1}, C_{-2}, \dots$ вращаются в противоположном направлении. Конечный результирующий вектор в каждый момент времени определяет текущее значение сигнала.

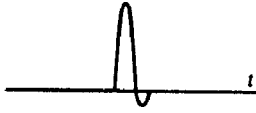
Такая наглядная интерпретация спектрального разложения периодического сигнала будет использована в последующем параграфе.

Для сходимости ряда Фурье необходимо, чтобы длины символических векторов, отвечающих высшим гармоникам, достаточно быстро уменьшались с ростом их номеров

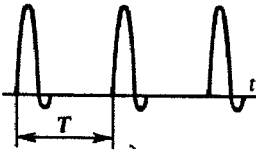
2.2. Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье

Метод рядов Фурье допускает глубокое и плодотворное обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Среди последних для радиотехники наибольший интерес представляют импульсные сигналы.

Периодическое продолжение импульса. Пусть $s(t)$ — одиночный импульсный сигнал конечной длительности. Дополнив его мысленно такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , получим изу-

Одиночный сигнал

и периодическая последовательность



ченную ранее периодическую последовательность $s_{\text{пер}}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье

$$s_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (2.13)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.14)$$

Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, устремим к бесконечности период повторения T . При этом, очевидно:

1. Частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах (2.13) и (2.14) дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить непрерывной ω — текущей частотой.

2. Амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченными малыми из-за наличия величины T в знаменателе формулы (2.14).

Наша задача состоит теперь в нахождении предельного вида формулы (2.13) при $T \rightarrow \infty$.

Понятие спектральной плотности сигнала. Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_n e^{j\varphi_n}, \quad C_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}.$$

Каждой такой паре отвечает гармоническое колебание

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

с комплексной амплитудой $2A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$.

В физике принято говорить, что при этом наблюдается когерентное сложение гармонических колебаний

Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты ω_0 . В пределах этого интервала будет содержаться $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому составляющие можно складывать так, как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt. \quad (2.15)$$

Функция

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.16)$$

носит название *спектральной плотности* сигнала $s(t)$. Формула (2.16) осуществляет *преобразование Фурье* данного сигнала.

Физический смысл понятия спектральной плотности. Интерпретацию полученных результатов удобно провести, перейдя от угловой частоты ω к циклической частоте $f = \omega/(2\pi)$. При этом формула (2.15) приобретет вид

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0) \Delta f. \quad (2.17)$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ есть коэффициент пропорциональности между длиной малого интервала частот Δf и отвечающей ему комплексной амплитудой ΔA_{f_0} гармонического сигнала с частотой f_0 . Коэффициент 2 означает, что вклад в амплитуду дают в равной мере и положительные и отрицательные частоты, образующие окрестности точек $\pm f_0$.

Принципиально важно, что спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. На векторной диаграмме непериодического сигнала (рис. 2.5) длины элементарных векторов бесконечно малы, поэтому вместо ломаных линий (T конечно) получаются гладкие кривые ($T \rightarrow \infty$). Если на оси частот взять некоторую последовательность равноотстоящих точек $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$, то модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ установит линейный масштаб вдоль кривых: чем больше модуль спектральной плотности в заданной области частот, тем реже будут располагаться частотные точки на векторной диаграмме.

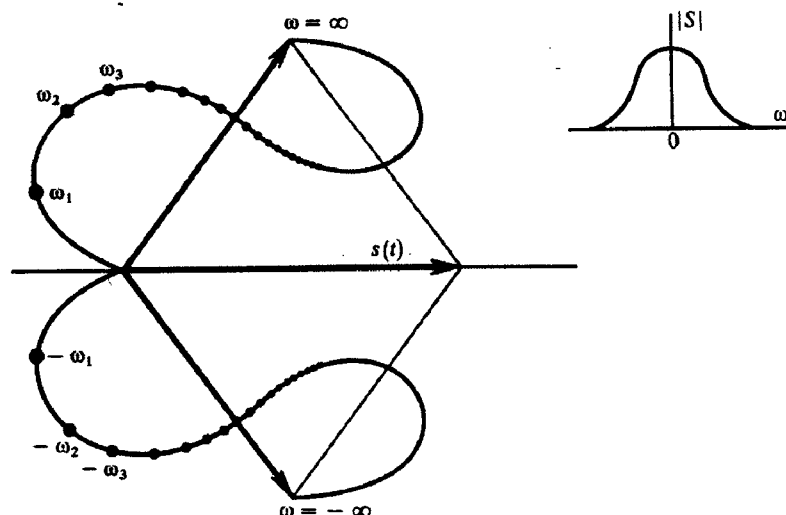


Рис. 2.5. Векторная диаграмма непериодического сигнала (справа изображена зависимость модуля спектральной плотности от частоты)

Спектральную плотность называют также спектральной функцией или Фурье-образом сигнала

Данная диаграмма построена для некоторого фиксированного момента времени; с течением времени конфигурация кривых будет изменяться весьма сложным образом, поскольку чем выше частота, тем с большей угловой скоростью будут вращаться соответствующие участки кривых. Однако фактически важна не форма кривой, а лишь проекция на горизонтальную ось ее конечной точки (см. рисунок).

Обратное преобразование Фурье. Решим обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной.

Положим вновь, что непериодический сигнал получается из периодической последовательности, когда ее период устремляется к бесконечности. Воспользовавшись формулами (2.13) и (2.14), запишем

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}.$$

Входящий сюда коэффициент $1/T$ пропорционален разности между частотами соседних гармоник:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1]$$

при любом целом n . Таким образом,

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками неограниченно сокращаются, последнюю сумму следует заменить интегралом

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.18)$$

Эта важная формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала $s(t)$.

Сформулируем окончательно фундаментальный результат: сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.19)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Метод спектральных разложений чрезвычайно обогащает теорию сигналов. Например, часто математическая модель сигнала, представленная функцией $s(t)$, т. е. во временной области, сложна и недостаточно наглядна. В то же время описание этого сигнала в частотной области посредством функции $S(\omega)$ может оказаться простым. Однако гораздо

Один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — функцию во временной области и функцию в частотной области

▲
решите задачу 3

важнее другое: спектральное представление сигналов открывает прямой путь к анализу прохождения сигналов через широкий класс радиотехнических цепей, устройств и систем. Эти методы будут подробно изучены в гл. 8 и 9.

Условие существования спектральной плотности сигнала. В математике детально исследован вопрос о том, какими свойствами должна обладать функция $s(t)$ для того, чтобы ее преобразование Фурье действительно существовало.

Опуская доказательство [7], приведем окончательный результат: сигналу $s(t)$ можно сопоставить его спектральную плотность $S(\omega)$ в том случае, если этот сигнал *абсолютно интегрируем*, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Подобное условие значительно сужает класс допустимых сигналов. Так, в указанном классическом смысле невозможно говорить о спектральной плотности гармонического сигнала $u(t) = U_m \cos \omega_0 t$, существующего на всей бесконечной оси времени.

Однако в современной математике разработаны приемы, позволяющие разумным образом вычислять спектральные плотности неинтегрируемых сигналов. Правда, при этом оказывается, что такие спектральные плотности будут уже не обычными, классическими, а обобщенными функциями. Вопрос о спектральном представлении неинтегрируемых сигналов будет рассмотрен в этой главе позднее.

А теперь на конкретных примерах изучим технику вычисления спектральных плотностей импульсных колебаний.

Спектральная плотность прямоугольного видеопульса. Пусть данный сигнал $s(t)$ имеет амплитуду U , длительность τ_n и располагается симметрично относительно начала отсчета времени. На основании формулы (2.16)

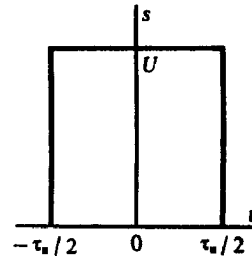
$$\begin{aligned} S(\omega) &= U \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\ &= 2U \int_0^{\tau_n/2} \cos \omega t dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_n}{2}. \end{aligned}$$

Спектральная плотность рассматриваемого сигнала есть вещественная функция частоты. Удобно ввести безразмерную переменную $\xi = \omega \tau_n/2$ и окончательно представить результат так:

$$S(\xi) = U \tau_n \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (2.20)$$

Отметим, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса: $S(0) = U \tau_n$. График, построенный по формуле (2.20), изображен на рис. 2.6.

● абсолютная интегрируемость сигнала



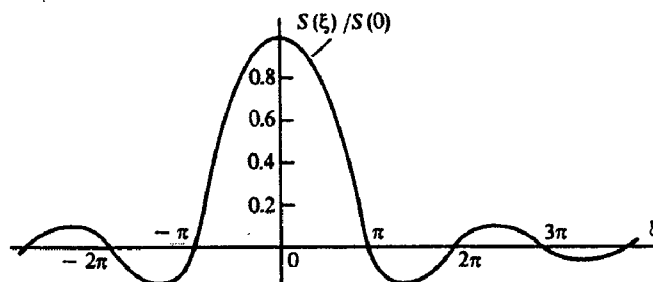
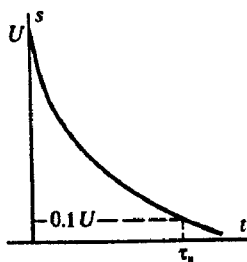


Рис. 2.6. График нормированной спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функция параметра $\xi = \omega\tau_u/2$



■
определение эф-
фективной дли-
тельности импуль-
са

Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса. Рассмотрим сигнал, описываемый функцией $s(t) = U \exp(-\alpha t) \sigma(t)$ при положительном вещественном значении параметра α .

Такой сигнал, строго говоря, лишь условно можно назвать импульсом из-за его поведения при $t \rightarrow \infty$. Однако условие $\alpha > 0$ обеспечивает достаточно быстрое (экспоненциальное) уменьшение мгновенных значений сигнала с ростом времени. Эффективную длительность подобных импульсов в радиотехнике обычно определяют из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала: $\exp(-\alpha\tau_u) = 0.1$, откуда

$$\tau_u = 2.303/\alpha.$$

Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса

$$S(\omega) = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{U}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Подставляя пределы, имеем

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}. \quad (2.21)$$

Можно отметить две принципиальные особенности, отличающие спектральную плотность экспоненциального колебания от спектра импульса прямоугольной формы:

1. В соответствии с формулой (2.21) величина $S(\omega)$ не обращается в нуль ни при каком конечном значении частоты.
2. Спектральная плотность экспоненциального импульса есть комплекснозначная функция $S(\omega) = |S(\omega)| \exp[j\psi(\omega)]$, имеющая модуль (амплитудный спектр) $|S(\omega)| = U/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ и аргумент (фазовый спектр) $\psi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega/\alpha)$.

Соответствующие графики представлены на рис. 2.7, а, б.

Спектральная плотность гауссова видеоимпульса. Данный сигнал описывается функцией вида $s(t) = U \exp(-\beta t^2)$.

Эффективную длительность гауссова импульса определим из условия десятикратного уменьшения мгновенного значения сигнала. Обратившись к чертежу, видим, что длительность τ_u должна удовлетворять соотношению $\exp[-\beta(\tau_u/2)^2] = 0.1$,

▲
решите задачи 5 и 6

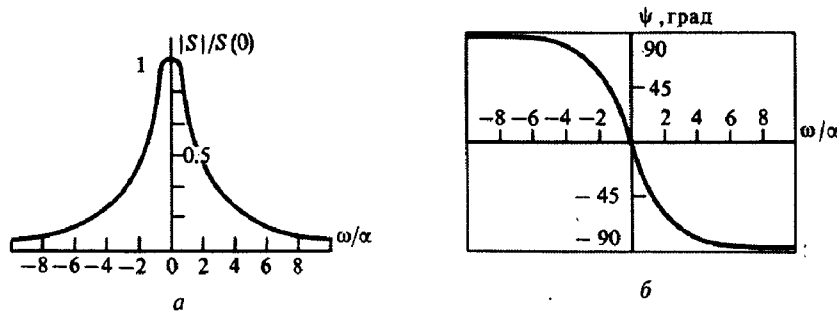


Рис. 2.7. Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса: а — нормированный амплитудный спектр; б — фазовый спектр

преобразуя которое получаем

$$\tau_n = \frac{2\sqrt{-\ln 0.1}}{\sqrt{\beta}} = \frac{3.035}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.22)$$

Спектральная плотность рассматриваемого импульса

$$S(\omega) = U \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt. \quad (2.23)$$

Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы можно было воспользоваться табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Для этого из показателя экспоненты в (2.23) выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} \beta t^2 + j\omega t &= \beta t^2 + j\omega t - \omega^2/(4\beta) + \omega^2/(4\beta) = \\ &= [\sqrt{\beta}t + j\omega/(2\sqrt{\beta})]^2 - \omega^2/(4\beta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(\omega) = U e^{-\omega^2/(4\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{\beta}t + j\omega/(2\sqrt{\beta}))^2] dt.$$

Введем новую переменную $\xi = \sqrt{\beta}t + j\omega/(2\sqrt{\beta})$, такую, что $dt = d\xi/\sqrt{\beta}$. Это позволяет представить искомую спектральную плотность в виде

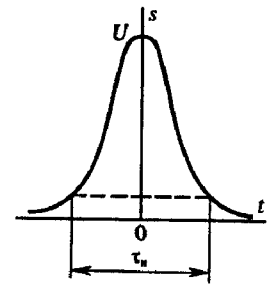
$$S(\omega) = \frac{U e^{-\omega^2/(4\beta)}}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

откуда окончательно имеем

$$S(\omega) = U \sqrt{\pi/\beta} e^{-\omega^2/(4\beta)}. \quad (2.24)$$

Итак, спектральная плотность гауссова импульса вещественна и описывается гауссовой функцией частоты.

Спектральная плотность дельта-функции. Пусть сигнал $s(t)$ представляет собой короткий импульс, сосредоточенный в точке $t = 0$ и имеющий площадь A . Такой сигнал имеет



Такую математическую модель часто используют в тех случаях, когда исследуемый импульс обладает большой степенью «гладкости»

математическую модель $s(t) = A\delta(t)$. Спектральная плотность этого сигнала

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t) dt.$$

На основании фильтрующего свойства дельта-функции (см. гл. 1) входящий сюда интеграл численно равен значению классической функции в точке, где сосредоточена обобщенная функция. Поэтому

$$S(\omega) = A = \text{const} \quad (2.25)$$

Такое поведение спектра дельта-функции есть следствие исходной идеализации

Итак, дельта-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах. Интересно интерпретировать этот результат на векторной диаграмме рис. 2.5. В момент возникновения импульса ($t = 0$) все элементарные гармонические составляющие складываются когерентно, поскольку в соответствии с (2.25) спектральная плотность вещественна. Амплитуды этих составляющих при увеличении частоты не убывают (ср. с предыдущими примерами). Таким образом, при $t = 0$ наблюдается бесконечно большое значение сигнала. Во все другие моменты времени сигнал будет обращаться в нуль, так как векторная сумма (см. рис. 2.5) «свертывается» в точку.

Связь между длительностью импульса и шириной его спектра. Если проанализировать частные случаи, изученные выше, то можно сделать очень важный вывод: *чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.*

Под шириной спектра здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например изменяется в пределах от $|S|_{\max}$ до $0.1|S|_{\max}$.

Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс, полагая при этом, что верхняя граничная частота спектра ω_b — это частота, соответствующая первому нулю спектральной плотности. Нетрудно видеть, что

$$\omega_b \tau_n / 2 = \pi \quad \text{или} \quad f_b \tau_n = 1.$$

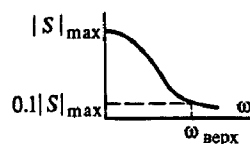
Обратившись к экспоненциальному видеоимпульсу, можно условно положить, что на верхней граничной частоте модуль спектральной плотности уменьшается в 10 раз по отношению к максимальному значению. Отсюда следует [см. (2.20) и ниже], что

$$1/\sqrt{1 + (\omega_b/\alpha)^2} = 0.1 \quad \text{или} \quad \omega_b = \sqrt{99}\alpha,$$

а значит, $f_b = \omega_b/(2\pi) = 1.584\alpha$.

Поскольку эффективная длительность экспоненциального импульса $\tau_n = 2.303/\alpha$, произведение $f_b \tau_n = 3.647$.

Наконец, спектр дельта-импульса, имеющего бесконечно малую длительность, неограниченно протяжен.



▲
решите задачу 4

Итак, произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы:

$$f_s \tau_n = O(1).$$

Это соотношение имеет первостепенное значение для радиотехники. Оно определяет требования к ширине полосы пропускания радиотехнического устройства. Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего усилителя. Короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать условия радиоприема в значительной полосе частот.

Говорят, что ширина спектра и длительность импульса связаны соотношением неопределенности (термин, заимствованный из квантовой механики)

2.3. Основные свойства преобразования Фурье

Научившись вычислять спектральные плотности достаточно простых, но часто встречающихся импульсных сигналов, перейдем к систематическому изучению свойств преобразования Фурье.

Линейность преобразования Фурье. Это важнейшее свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов $s_1(t), s_2(t), \dots$, причем $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$, ..., то взвешенная сумма сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega). \quad (2.26)$$

Здесь a_i — произвольные числовые коэффициенты.

Для доказательства формулы (2.26) следует подставить сумму сигналов в преобразование Фурье (2.16).

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности. Пусть $s(t)$ — сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t \, dt = \\ &= A(\omega) - jB(\omega). \end{aligned}$$

Подставим это выражение в формулу обратного преобразования Фурье (2.18):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) \, d\omega.$$

Для того чтобы сигнал, полученный путем такого двукратного преобразования, оставался вещественным, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах всегда равен нулю

Это возможно лишь в том случае, если вещественная часть $A(\omega)$ спектральной плотности сигнала есть четная, а мнимая часть $B(\omega)$ — нечетная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega). \quad (2.27)$$

Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени. Предположим, что для сигнала $s(t)$ известно соответствие $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на t_0 секунд позднее. Принимая точку t_0 за новое начало отсчета времени, обозначим этот смещенный сигнал как $s(t - t_0)$. Покажем, что

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.28)$$

Доказательство очень простое. Действительно,

Замена переменной
 $t - t_0 = x$

$$\begin{aligned} s(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega x} dx = S(\omega) e^{-j\omega t_0}. \end{aligned}$$

Модуль комплексного числа $\exp(-j\omega t_0)$ при любых t_0 равен единице, поэтому амплитуды элементарных гармонических составляющих, из которых складывается сигнал, не зависят от его положения на оси времени. Информация об этой характеристике сигнала заключена в частотной зависимости аргумента его спектральной плотности (фазовом спектре).

Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени. Предположим, что исходный сигнал $s(t)$ подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени t играет новая независимая переменная kt (k — некоторое вещественное число). Если $k > 1$, то происходит «сжатие» исходного сигнала; если же $0 < k < 1$, то сигнал «растягивается» во времени.

Оказывается, что если $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (2.29)$$

Действительно,

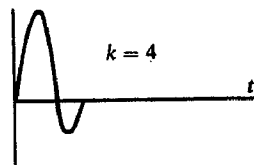
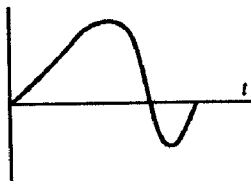
$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{k}x} dx,$$

откуда следует формула (2.29).

Итак, для того чтобы, например, сжать сигнал во времени, сохраняя его форму, необходимо распределить те же спектральные составляющие в более широком интервале частот при соответствующем пропорциональном уменьшении их амплитуд.

К рассматриваемому здесь вопросу близко примыкает следующая задача. Дан импульс $s(t)$, отличный от нуля на

Исходный сигнал



Сжатый сигнал

отрезке $[0, \tau_n]$ и характеризуемый спектральной плотностью $S(\omega)$. Требуется найти спектральную плотность $S_{\text{обр}}(\omega)$ «обращенного во времени» сигнала $s_{\text{обр}}(t)$, который представляет собой «зеркальную копию» исходного импульсного колебания. Поскольку очевидно, что $s_{\text{обр}}(t) = s(\tau_n - t)$, то

$$S_{\text{обр}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_n - t) e^{-j\omega t} dt.$$

Выполнив замену переменной $x = \tau_n - t$, находим, что

$$\begin{aligned} S_{\text{обр}}(\omega) &= e^{-j\omega\tau_n} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{j\omega x} dx = \\ &= e^{-j\omega\tau_n} S(-\omega) = e^{-j\omega\tau_n} S^*(\omega). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла. Пусть сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ заданы. Будем изучать новый сигнал $f(t) = ds/dt$ и поставим цель найти его спектральную плотность $F(\omega)$.

По определению,

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \tau)}{\tau}. \quad (2.31)$$

Преобразование Фурье — линейная операция, значит, равенство (2.31) справедливо и по отношению к спектральным плотностям. Учитывая (2.28), получаем

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{\tau} S(\omega). \quad (2.32)$$

Представляя экспоненциальную функцию рядом Тейлора: $\exp(-j\omega\tau) = 1 - j\omega\tau - (\omega\tau)^2/2 - \dots$, подставляя этот ряд в (2.32) и ограничиваясь первыми двумя членами, находим

$$F(\omega) = j\omega S(\omega). \quad (2.33)$$

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает. Как следствие, модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем спектра исходного сигнала.

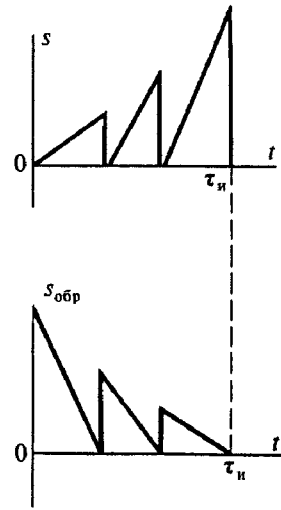
Формула (2.33) обобщается на случай спектра производной n -го порядка. Легко доказать, что если $g(t) = d^n s/dt^n$, то

$$G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega). \quad (2.34)$$

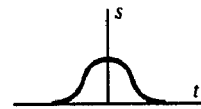
Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является *оператором дифференцирования, действующим в частотной области*.

Рассмотренная функция $s(t) = \int f(t) dt$ является первообразной (неопределенным интегралом) по отношению к функции $f(t)$. Из (2.33) формально следует, что спектр первообразной

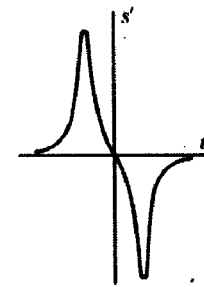
$$S(\omega) = F(\omega)/(j\omega). \quad (2.35)$$



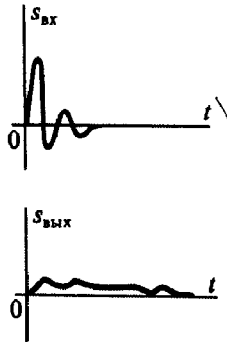
Сигнал



и его производная



При дифференцировании происходит обострение сигнала



На выходе интегратора происходит сглаживание входного сигнала

Рассмотренный интегратор называют иногда фильтром скользящего среднего

Таким образом, множитель $1/(j\omega)$ служит оператором интегрирования в частотной области.

Спектральная плотность сигнала на выходе интегратора. Во многих радиотехнических устройствах находят применение так называемые *интеграторы* — физические системы, выходной сигнал которых пропорционален интегралу от входного воздействия. Рассмотрим конкретно интегратор, осуществляющий преобразование входного сигнала $s_{вх}(t)$ в выходной сигнал $s_{вых}(t)$ по следующему закону:

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t s_{вх}(\xi) d\xi. \quad (2.36)$$

Здесь $T > 0$ — фиксированный параметр.

Определенный интеграл, входящий в (2.36), равен, очевидно, разности двух значений первообразной сигнала $s_{вх}(t)$, одно из которых вычисляется при аргументе t , а другое — при аргументе $t - T$. Используя соотношения (2.28) и (2.35), получаем формулу связи между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$S_{вых}(\omega) = \frac{S_{вх}(\omega)}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (2.37)$$

Сомножитель в скобках ограничен при любых частотах, в то же время модуль знаменателя линейно растет с увеличением частоты. Это свидетельствует о том, что рассматриваемый интегратор действует подобно фильтру нижних частот, ослабляя высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала.

Спектральная плотность произведения сигналов. Как известно, при суммировании сигналов их спектры складываются. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — два сигнала, для которых известны соответствия $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$, $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$. Образует произведение этих сигналов: $s(t) = u(t)v(t)$ и вычислим его спектральную плотность. По общему правилу

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.38)$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $v(t)$ через его спектральную плотность и подставим результат в (2.38):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega - \xi)t} dt \right] d\xi,$$

откуда

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi. \quad (2.39)$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют *сверткой* функций V и U . В дальнейшем будем символически обозначать операцию свертки так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi = V(\omega) * U(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(\omega) * U(\omega). \quad (2.40)$$

Нетрудно убедиться, что операция свертки коммутативна, т. е. допускает изменение порядка следования преобразуемых функций:

$$V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega).$$

Доказанная выше теорема о свертке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения $S(\omega) = S_1(\omega) S_2(\omega)$, причем $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$ и $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$, то сигнал $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ является сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, но уже не в частотной, а во временной области:

$$S(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi) s_2(\xi) d\xi. \quad (2.41)$$

Элементарное доказательство этой формулы читатель может провести самостоятельно.

2.4. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов, широко применяемых в радиотехнике, не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним неприменим. Однако, как указывалось, можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

Обобщенная формула Рэлея. Докажем важное вспомогательное положение, касающееся спектральных свойств сигналов. Пусть два сигнала $u(t)$ и $v(t)$, в общем случае комплекснозначные, определены своими обратными преобразованиями

●
свертка

▲
решите задачи 7
и 8

Дж. В. Стретт, лорд Рэлей (1842—1919) — крупнейший английский физик, известный своими работами в области теории колебаний и волн.

Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение этих сигналов, выразив один из них, например $v(t)$, через его спектральную плотность:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Здесь внутренний интеграл представляет собой, очевидно, спектральную плотность $U(\omega)$ сигнала $u(t)$. Поэтому

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V). \quad (2.42)$$

В математике обобщенную формулу Рэля называют также равенством Парсеваля или теоремой Планшереля

Полученное соотношение представляет собой *обобщенную формулу Рэля*. Легко запоминающаяся трактовка этой формулы такова: *скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей*.

Обобщение понятия спектральной плотности. Будем считать, что сигнал $v(t)$ представляет собой абсолютно интегрируемую функцию. Тогда его преобразование Фурье $V(\omega)$ — обычная классическая функция частоты. Пусть наряду с этим сигнал $u(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и в обычном классическом смысле преобразование Фурье $U(\omega)$ не существует. Однако можно расширить понятие спектральной плотности, допустив, что $U(\omega)$ является обобщенной функцией в том смысле, который был установлен в § 1.2. Для этого в соответствии с обобщенной формулой Рэля достаточно положить, что $U(\omega)$ — функционал, который, действуя на известную функцию $V(\omega)$, дает следующий результат:

$$(U, V) = 2\pi (u, v). \quad (2.43)$$

Приемы вычисления спектров неинтегрируемых сигналов целесообразно рассмотреть на конкретных примерах.

Спектральная плотность постоянного во времени сигнала. Простейший неинтегрируемый сигнал — это постоянная величина $u(t) = A = \text{const}$. Предположим, что $v(t)$ — произвольный вещественный абсолютно интегрируемый сигнал с известной

спектральной плотностью $V(\omega)$. Раскрывая формулу (2.43), имеем

$$(U, V) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt.$$

Но, как легко заметить,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = V(0).$$

Отсюда на основании фильтрующего свойства дельта-функции приходим к выводу, что равенство (2.43) возможно лишь при условии, что

$$U(\omega) = 2\pi A \delta(\omega). \quad (2.44)$$

Физический смысл полученного результата нагляден — неизменный во времени сигнал имеет спектральную составляющую только на нулевой частоте.

Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала. Пусть $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ — комплексный экспоненциальный сигнал с заданной вещественной частотой ω_0 . Этот сигнал не является абсолютно интегрируемым, поскольку при $t \rightarrow \pm\infty$ функция $s(t)$ не стремится ни к какому пределу. Преобразование Фурье $S(\omega)$ этого сигнала, рассматриваемое в обобщенном смысле, должно удовлетворять соотношению

$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega_0 t} dt = 2\pi V(\omega_0).$$

Отсюда искомая спектральная плотность $S(\omega)$ выражается таким образом:

$$S(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.45)$$

Отметим следующее:

1. Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала равна нулю всюду, кроме точки $\omega = \omega_0$, где она имеет дельта-особенность.

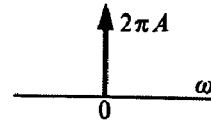
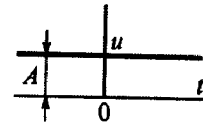
2. Спектр данного сигнала несимметричен относительно точки $\omega = 0$ и сосредоточивается в области либо положительных, либо отрицательных частот.

Спектральная плотность гармонических колебаний. Пусть $s(t) = \cos \omega_0 t$. По формуле Эйлера

$$s(t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2.$$

Найденный выше спектр комплексного экспоненциального сигнала, а также свойство линейности преобразования Фурье позволяют сразу записать выражение спектральной плотности косинусоидального сигнала:

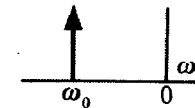
$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.46)$$



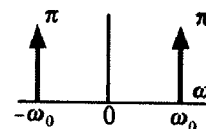
Более того, при любых t имеет место равенство $|s| = 1$



При $\omega_0 > 0$



При $\omega_0 < 0$



Читатель может легко проверить самостоятельно, что для синусоидального сигнала справедливо соотношение

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.47)$$

Следует заметить, что выражение (2.46) представляет собой четную, а выражение (2.47) — нечетную функцию частоты.

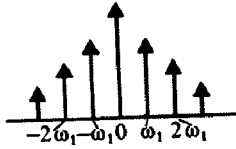
Спектральная плотность произвольного периодического сигнала. Ранее периодические сигналы исследовались методами теории рядов Фурье. Теперь можно расширить представления об их спектральных свойствах, описав периодические сигналы с помощью преобразования Фурье.

Пусть

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

— периодический сигнал, заданный своим рядом Фурье в комплексной форме. На основании формулы (2.45), принимая во внимание свойство линейности преобразования Фурье, сразу получаем выражение спектральной плотности такого сигнала:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1). \quad (2.48)$$



Соответствующий график спектральной плотности своей конфигурацией повторяет обычную спектральную диаграмму периодического сигнала. График образован дельта-импульсами в частотной области, которые располагаются в точках с координатами $\pm n\omega_1$.

Спектральная плотность функции включения. Вычислим спектральную плотность функции включения $\sigma(t)$, которую для простоты определим во всех точках, кроме точки $t = 0$ [ср. с (1.2)]:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Заметим прежде всего, что функция включения получается путем предельного перехода из экспоненциального видеоимпульса:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp(-\alpha t), & t > 0. \end{cases}$$

Поэтому можно попытаться получить спектральную плотность функции включения, выполнив предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в формуле спектральной плотности экспоненциального колебания:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Непосредственный переход к пределу, согласно которому $\sigma(t) \leftrightarrow 1/(j\omega)$, справедлив при всех частотах, кроме значения $\omega = 0$, когда необходимо более тщательное рассмотрение.

Прежде всего выделим в спектральной плотности экспоненциального сигнала вещественную и мнимую части:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Можно убедиться в том, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega).$$

Действительно, предельное значение этой дроби при любых $\omega \neq 0$ обращается в нуль, и в то же время

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi$$

независимо от величины α , откуда и следует сделанное утверждение.

Итак, получено взаимно однозначное соответствие функций включения и ее спектральной плотности:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (2.49)$$

Дельта-особенность при $\omega = 0$ свидетельствует о том, что функция включения имеет постоянную составляющую, равную $1/2$.

Спектральная плотность радиоимпульса. Как известно, радиоимпульс $s_p(t)$ задается в виде произведения некоторого видеопульса $s_b(t)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания: $s_p(t) = s_b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Чтобы найти спектральную плотность радиоимпульса, будем полагать известной функцию $S_b(\omega)$ — спектр его огибающей. Спектр косинусоидального сигнала с произвольной начальной фазой получается путем элементарного обобщения формулы (2.46):

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_0}].$$

Спектр радиоимпульса есть свертка

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_b(\omega - \xi) [\delta(\xi - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0) e^{-j\varphi_0}] d\xi.$$

Приняв во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем важный результат:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_b(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_b(\omega + \omega_0). \quad (2.50)$$

Рис. 2.8 иллюстрирует трансформацию спектра видеопульса при умножении его на высокочастотный гармонический сигнал.

В литературе нно-гда встречается не-точная запись фор-мулы вида (2.49), состоящая лишь из второго слагаемо-го

▲
решите задачу 15

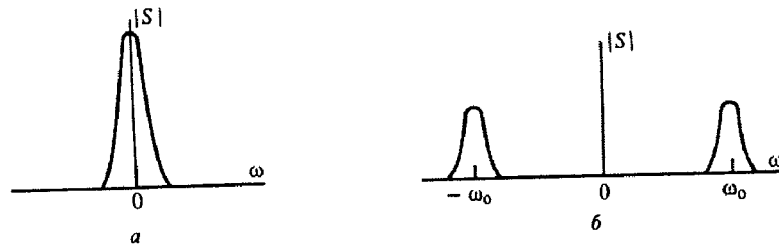


Рис. 2.8. Частотные зависимости модуля спектральной плотности: а – видеоимпульса; б – радиоимпульса

▲
решите задачу 10

Видно, что переход от видеоимпульса к радиоимпульсу при спектральном подходе означает *перенос спектра видеоимпульса в область высоких частот* – вместо единственного максимума спектральной плотности при $\omega = 0$ наблюдаются два максимума при $\omega = \pm \omega_0$; абсолютные значения максимумов сокращаются вдвое.

Отметим, что графики на рис. 2.8 отвечают ситуации, когда частота ω_0 значительно превышает эффективную ширину спектра видеоимпульса (именно такой случай обычно и реализуется на практике). При этом не наблюдается ощутимого «перекрывания» спектров, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Однако может оказаться, что ширина спектра видеоимпульса велика настолько (при коротком импульсе), что выбранное значение частоты ω_0 не устраняет эффект «перекрывания». Как следствие, профили спектров видеоимпульса и радиоимпульса перестают быть подобными.

Пример 2.3. Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса.

Для простоты положим начальную фазу нулевой и запишем математическую модель радиоимпульса в виде

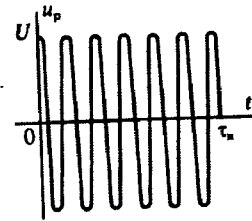
$$s_p(t) = U [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_n)] \cos \omega_0 t.$$

Зная спектр соответствующего видеоимпульса [см. формулу (2.20)], на основании (2.50) находим искомый спектр:

$$S_p(\omega) = \frac{U\tau_n}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau_n}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau_n}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau_n}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)\tau_n}{2}} \right]. \quad (2.51)$$

На рис. 2.9 изображены результаты расчета спектральной плотности по формуле (2.51) для двух характерных случаев.

В первом случае (рис. 2.9, а) импульс огибающей содержит 10 периодов высокочастотного заполнения ($\omega_0\tau_n = 20\pi$); частота ω_0 здесь достаточно высока для того, чтобы избежать «перекрывания». Во втором случае (рис. 2.9, б) радиоимпульс состоит всего лишь из одного периода заполнения ($\omega_0\tau_n = 2\pi$). Наложение составляющих, которые соответствуют областям положительных и отрицательных частот, приводит к характерной асимметрии лепестковой структуры графика спектральной плотности радиоимпульса.



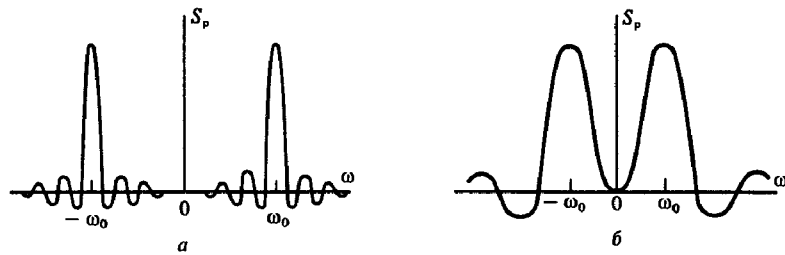


Рис. 2.9. Графики спектральных плотностей радиопульса с прямоугольной огибающей:

a — при $\omega_0 \tau_H = 20\pi$; b — при $\omega_0 \tau_H = 2\pi$

2.5. Преобразование Лапласа

Так называется еще один вид интегральных преобразований, который наряду с преобразованием Фурье широко используется в радиотехнике для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов.

Понятие комплексной частоты. Спектральные методы, как уже известно, основаны на том, что исследуемый сигнал представляется в виде суммы неограниченно большого числа элементарных слагаемых, каждое из которых периодически изменяется во времени по закону $\exp(j\omega t)$.

Естественное обобщение этого принципа заключено в том, что вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимыми показателями вводят в рассмотрение экспоненциальные сигналы вида $\exp(pt)$, где p — комплексное число: $p = \sigma + j\omega$, получившее название *комплексной частоты*.

Из двух таких комплексных сигналов можно составить вещественный сигнал, например, по следующему правилу:

$$s(t) = \frac{1}{2} (e^{pt} + e^{p^*t}), \quad (2.52)$$

где $p^* = \sigma - j\omega$ — комплексно-сопряженная величина.

Действительно, при этом

$$s(t) = e^{\sigma t} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t. \quad (2.53)$$

В зависимости от выбора вещественной и мнимой частей комплексной частоты можно получить разнообразные вещественные сигналы. Так, если $\sigma = 0$, но $\omega \neq 0$, получаются обычные гармонические колебания вида $\cos \omega t$. Если же $\omega = 0$, то в зависимости от знака σ получаются либо нарастающие, либо убывающие во времени экспоненциальные колебания. Более сложную форму такие сигналы приобретают, когда $\omega \neq 0$. Здесь множитель $\exp(\sigma t)$ описывает огибающую, которая экспоненциально изменяется во времени. Некоторые типичные сигналы изображены на рис. 2.10.

Понятие комплексной частоты оказывается весьма полезным прежде всего потому, что это дает возможность, не

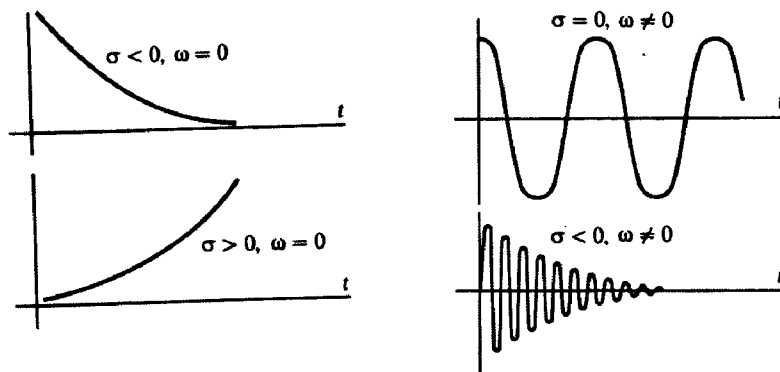


Рис. 2.10. Вещественные сигналы, отвечающие различным значениям комплексной частоты

прибегая к обобщенным функциям, получать спектральные представления сигналов, математические модели которых неинтегрируемы. Существенно и другое соображение: экспоненциальные сигналы вида (2.53) служат «естественным» средством исследования колебаний в разнообразных линейных системах. Эти вопросы будут изучены в гл. 8.

Следует обратить внимание на то, что истинная физическая частота ω служит мнимой частью комплексной частоты. Для вещественной части σ комплексной частоты специального термина не существует.

Основные соотношения. Пусть $f(t)$ — некоторый сигнал, вещественный или комплексный, определенный при $t \geq 0$ и равный нулю при отрицательных значениях времени. Преобразование Лапласа этого сигнала есть функция комплексной переменной p , задаваемая интегралом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.54)$$

Сигнал $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(p)$ — его *изображением по Лапласу* (для краткости, просто *изображением*).

Условие, которое обеспечивает существование интеграла (2.54), заключается в следующем: сигнал $f(t)$ должен иметь не более чем экспоненциальную степень роста при $t > 0$, т. е. должен удовлетворять неравенству $|f(t)| \leq A \exp(at)$, где A, a — положительные числа.

При выполнении этого неравенства функция $F(p)$ существует в том смысле, что интеграл (2.54) абсолютно сходится для всех комплексных чисел p , у которых $\operatorname{Re} p > a$. Число a называют абсциссой абсолютной сходимости.

Переменная p в основной формуле (2.54) может быть отождествлена с комплексной частотой $p = \sigma + j\omega$. Действительно, при чисто мнимой комплексной частоте, когда $\sigma = 0$, формула (2.54) переходит в формулу (2.16), определяющую Фурье-преобразование сигнала, который равен нулю при $t < 0$. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматри-

вать как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот.

Подобно тому как это делается в теории преобразования Фурье, можно, зная изображение, восстановить оригинал. Для этого в формуле обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

следует выполнить *аналитическое продолжение*, перейдя от мнимой переменной $j\omega$ к комплексному аргументу $\sigma + j\omega$. На плоскости комплексной частоты интегрирование проводят вдоль неограниченно протяженной вертикальной оси, расположенной правее абсциссы абсолютной сходимости. Поскольку при $\sigma = \text{const}$ дифференциал $d\omega = (1/j) dp$, формула обратного преобразования Лапласа приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (2.55)$$

В теории функций комплексного переменного доказано, что изображения по Лапласу обладают «хорошими» свойствами с точки зрения гладкости: такие изображения во всех точках комплексной плоскости p , за исключением счетного множества так называемых особых точек, являются аналитическими функциями. Особые точки, как правило, — полюсы, однократные или многократные. Поэтому для вычисления интегралов вида (2.55) можно использовать гибкие методы теории вычетов.

На практике широко применяются таблицы преобразований Лапласа, в которых собраны сведения о соответствии между оригиналами и изображениями. Наличие таблиц сделало метод преобразования Лапласа популярным как в теоретических исследованиях, так и в инженерных расчетах радиотехнических устройств и систем. В Приложениях к [6] имеется такая таблица, позволяющая решать достаточно широкий круг задач.

Примеры вычисления преобразований Лапласа. В способах вычисления изображений есть много общего с тем, что уже изучалось применительно к преобразованию Фурье. Рассмотрим наиболее характерные случаи.

Пример 2.4. Изображение обобщенного экспоненциального импульса.

Пусть $f(t) = \exp(p_0 t) \sigma(t)$, где $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ — фиксированное комплексное число. Наличие σ -функции обуславливает равенство $f(t) = 0$ при $t < 0$. Воспользовавшись формулой (2.54), имеем

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

■
связь между преобразованиями Лапласа и Фурье

Если $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то числитель обратится в нуль при подстановке верхнего предела. В результате получаем соответствие

$$e^{p_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - p_0}. \quad (2.56)$$

Как частный случай формулы (2.56), можно найти изображение вещественного экспоненциального видеопульса:

$$e^{-\alpha t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha} \quad (2.57)$$

и комплексного экспоненциального сигнала:

$$e^{j\omega_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - j\omega_0}. \quad (2.58)$$

Наконец, положив в (2.57) $\alpha = 0$, находим изображение функции Хевисайда:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (2.59)$$

Пример 2.5. Изображение дельта-функции.

Если рассматриваемый импульс возникает в момент времени $t_0 > 0$, то интеграл

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}.$$

Итак,

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0}. \quad (2.60)$$

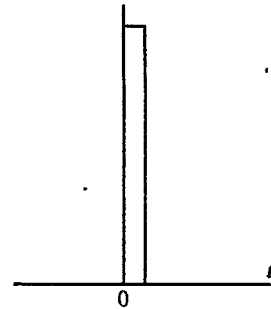
Это изображение определено во всех точках комплексной плоскости p и нигде не имеет особенностей, кроме бесконечно удаленной точки.

Некоторую сложность может представлять вычисление изображения дельта-импульса, сосредоточенного при $t = 0$, поскольку неясно, как надо учитывать вклад от обобщенной функции, сосредоточенной на одном из концов области интегрирования. Дело в том, что в гл. 1 дельта-функция определялась как предел последовательности импульсов, симметричных относительно точки $t = 0$. Если поступать формально, то в пределах области интегрирования окажется лишь половина такого импульса, что приведет к двукратному уменьшению интеграла. Для того чтобы этого не произошло, изображение функции $\delta(t)$ определяется как предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1,$$

не зависящий от параметра ε . При таком подходе функция $\delta(t)$ всегда целиком принадлежит области интегрирования, поэтому

$$\delta(t) \leftrightarrow 1. \quad (2.61)$$



Дельта-импульс принадлежит области $t > 0$

Изображение производных. Чтобы найти изображение первой производной сигнала, следует выполнить интегрирование по частям:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Легко видеть, что изображение первой производной содержит значение сигнала в начальной точке:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (2.62)$$

По индукции доказывается формула для изображения производной n -го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dt^n} &\leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots \\ &\dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Возможность учитывать начальное состояние сигнала при $t = 0$ позволяет применять метод преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с известными начальными условиями.

Основные свойства преобразования Лапласа схожи с описанными свойствами преобразования Фурье [14].

2.6. Вейвлет-анализ

Спектральные методы анализа, основанные на использовании тригонометрических базисных систем, вполне адекватны задачам исследования сигналов, близким по характеру некоторым периодическим колебаниям. Например, отыскивая фурье-представление радиоимпульса, можно заранее утверждать, что частотная зависимость модуля его спектральной плотности будет иметь резко выраженный максимум в окрестности частоты высокочастотного заполнения. Если сигнал не имеет четкого периодического характера, то, хотя алгоритм преобразования Фурье и остается полностью в силе, эффективность этого алгоритма в значительной мере падает; не удастся, в частности, сэкономить объем данных за счет перехода от математической модели сигнала во временной области к соответствующей модели в частотной области.

Для преодоления этой трудности в последние годы был предложен новый подход, на базе которого возникло целое направление в теории и технике сигналов, получившее название *вейвлет-анализа*.

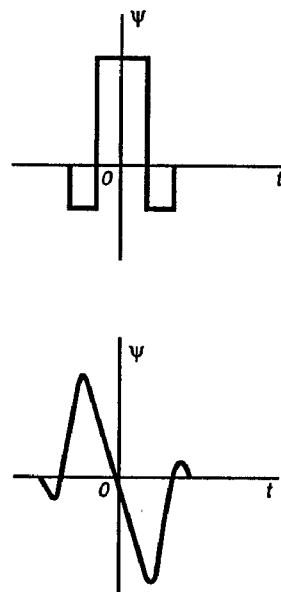
Понятие вейвлета. Английское слово *wavelet* можно формально перевести на русский язык словосочетанием «небольшая волна» или «небольшое колебание». Смысл данного термина — в наглядно-образной форме указать на те требования, которым обязана соответствовать некоторая функция $\psi(t)$ для того, чтобы принадлежать к этому классу:

- график такой функции должен осциллировать вокруг нуля в окрестности некоторой точки на оси t , причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0;$$

- норма функций должна быть конечной:

$$\|\psi\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt \right)^{1/2} < +\infty.$$



Конкретный выбор того или иного вейвлета целиком зависит от характера поставленной задачи и от вида анализируемого сигнала. Ниже будет показано, что вейвлет-анализ дает мощное и весьма гибкое средство для построения ортонормированных базисов в пространстве сигналов.

Дискретный вейвлет-анализ. Так называют представление сигналов в виде обобщенного ряда Фурье по системе базисных функций, возникающих из некоторого исходного (порождающего) вейвлета $\psi(t)$ за счет операций сдвига во времени и изменения временного масштаба.

Если изучаемый сигнал существует на отрезке $[0, T]$ временной оси, то удобно, как это делалось раньше, перейти к безразмерному времени $\theta = t/T$; при такой замене аргумент сигнала будет лежать в пределах отрезка $[0, 1]$.

Для наглядности рассмотрим очень простой случай, когда порождающим элементом базиса служит *вейвлет Хаара*. Это функция существует на отрезке $[0, 1]$ и принимает здесь одно из двух возможных значений:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta \leq 1/2; \\ -1, & 1/2 < \theta \leq 1. \end{cases} \quad (2.64)$$

Создадим систему функций согласно следующему правилу:

$$\psi_{jk}\theta = A\psi(2^j\theta - k), \quad (2.65)$$

где A — некоторая постоянная; j, k — положительные и отрицательные целые числа, включая нуль.

Можно убедиться в том, что функции ψ_{jk} взаимно ортогональны, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\theta) \psi_{mn}(\theta) d\theta = 0, \quad (2.66)$$

если равенства $j=m$ и $k=n$ не выполняются одновременно. Действительно, если $j \neq m$, хотя $k=n$, то один из вейвлетов целиком размещается на том отрезке оси t , где другой вейвлет постоянен. Это непосредственно ведет к обращению в нуль интеграла (2.66). Если $j=m$, но $k \neq n$, то хотя бы один из сомножителей, входящих в подынтегральное выражение (2.66), равен нулю.

Постоянное число A в формуле (2.65) можно подобрать таким образом, чтобы базисная система вейвлетов стала ортонормированной. Для этого следует воспользоваться определением энергии сигнала и потребовать, чтобы

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^j\theta - k) d\theta = A^2 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\xi) d\xi = A^2 2^{-j} = 1.$$

Значит

$$A = 2^{j/2}. \quad (2.67)$$

Построив ортонормированную базисную систему вейвлетов Хаара, можно осуществить представление произвольного сигнала $s(t)$ в виде обобщенного ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{j/2} c_{jk} \psi(2^j \frac{t}{T} - k). \quad (2.68)$$

На основании формулы (1.29) коэффициент c_{jk} являются скалярными произведениями исходного сигнала и соответствующей базисной функции:

$$c_{jk} = \left(s(t), 2^{j/2} \psi \left(2^j \frac{t}{T} - k \right) \right). \quad (2.69)$$

Формально обобщенный ряд Фурье вида (2.68) отличается от изучавшихся ранее тем, что суммирование проводится не по одному, а по двум индексам. Это обстоятельство несущественно, так как и одноиндексная и двухиндексная системы в равной мере принадлежат одному и тому же классу бесконечных счетных, т.е. перечислимых множеств.

Вейвлет-спектр сигнала, принимающего вещественные значения, можно образно представить себе как некоторый «лес» из вертикальных отрезков, размещенных на jk -плоскости в точках с целочисленными координатами. При этом координата j указывает на скорость изменения сигнала, а координата k — на положение вдоль оси времени.

Вейвлет-преобразование. Наряду с разрывными функциями, подобными рассмотренным выше вейвлетам Хаара, можно пользоваться и непрерывными вейвлетами, построив на их основе полные аналоги преобразований Фурье или Лапласа. Примером такой функции может служить хорошо изученный вейвлет

$$\psi(x) = (x^2 - 1) \exp(-x^2/2), \quad (2.70)$$

являющийся второй производной гауссова импульса $\exp(-x^2/2)$. Из-за характерного вида графика этой функции (рис. 2.11) ее в литературе образно называют «сомбреро» (мексиканская шляпа).

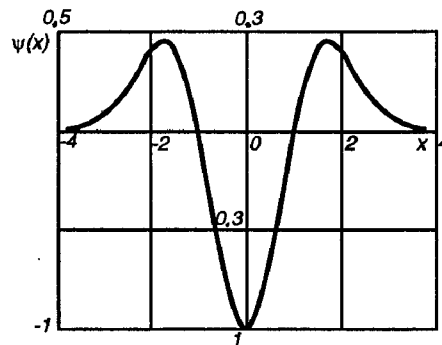


Рис. 2.11. Вейвлет «сомбреро»

Подобно дискретным вейвлетам Хаара, непрерывные вейвлеты можно масштабировать по длительности (т.е. сжимать и растягивать), а также перемещать вдоль оси времени. В результате приходим к вейвлетам, которые зависят от двух числовых параметров a и b :

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right). \quad (2.71)$$

Множитель $1/\sqrt{|a|}$ обеспечивает независимость нормы этих сигналов от выбора масштабирующего числа a .

По определению, вейвлет-преобразованием сигнала $s(t)$ является функция двух переменных

$$W_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (2.72)$$

По своему смыслу вейвлет-преобразование полностью соответствует преобразованию Фурье. Однако здесь ядром интегрального преобразования вместо функции $\exp(-j\omega t)$ служит вейвлет $\psi((t-b)/a)$.

Вейвлет локализован как во временной, так и в частотной областях, что делает рассматриваемый метод весьма подходящим для описания всевозможных импульсных сигналов, которые не обладают четко выраженной периодичностью.

Вейвлет-преобразование $W_s(a, b)$ является функцией двух аргументов, первый из которых аналогичен периоду оцифровки (т.е. обратной частоте), а второй — смещению сигнала вдоль оси времени. Ясно, что если изучаемый сигнал $s(t)$ представляет собой некоторый одиночный импульс, сосредоточенный в окрестности точки $t = t_0$ и имеющий длительность τ_n , то его вейвлет-преобразование будет принимать наибольшее значение в окрестности точки с координатами $a = \tau_n$, $b = t_0$.

Равенство (2.72) при заданной левой части может рассматриваться как *интегральное уравнение* относительного сигнала $s(t)$. Решение этого уравнения дается формулой *обратного вейвлет-преобразования* [46]:

$$s(t) = \frac{1}{\|\psi_{ab}\|} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_s(a, b) \psi_{ab}(t) da db. \quad (2.73)$$

Эта формула окончательно устанавливает сходство непрерывного вейвлет-анализа и метода преобразования Фурье.

В последние годы техника вейвлет-анализа стала с успехом использоваться для решения многих актуальных задач, прежде всего для сжатия и распознавания сигналов. Косвенным подтверждением ценности этого метода является то, что алгоритмы вейвлет-анализа достаточно полно представлены в составе широко распространенного прикладного пакета Matlab.

Результаты

- ◇◇ Спектральное представление сигнала представляет собой разложение его на сумму (конечную или бесконечную) элементарных гармонических сигналов с различными частотами.
- ◇◇ Периодические сигналы представляются в виде рядов Фурье, которые образуются суммированием, вообще говоря, бесконечного числа гармоник с частотами, кратными основной частоте повторения последовательности.
- ◇◇ Спектральное представление непериодических, в частности импульсных, сигналов осуществляется путем разложения их в интеграл Фурье.
- ◇◇ В частотной области непериодический сигнал характеризуется своей спектральной плотностью. Сигнал и его спектральная плотность взаимно связаны парой преобразований Фурье.

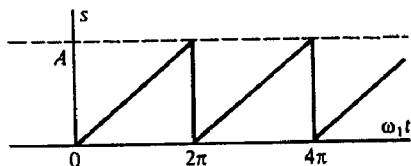
- ◇◇ Для существования спектральной плотности в классическом смысле необходимо, чтобы сигнал был абсолютно интегрируем.
- ◇◇ Спектральная плотность неинтегрируемого сигнала содержит особенность типа дельта-функции.
- ◇◇ Переход к комплексной частоте в преобразовании Фурье приводит к новому виду линейных интегральных преобразований — преобразованию Лапласа. Сигналы, преобразуемые по Лапласу, должны обращаться в нуль при $t < 0$.
- ◇◇ Вейвлет-анализ дает возможность эффективно исследовать сигналы, не обладающие четко выраженной периодичностью.

Вопросы

1. Почему простое гармоническое колебание $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ играет особую важную роль в радиотехнике?
2. Дайте определение понятия периодического сигнала. Назовите несколько физических процессов, для которых модель периодического сигнала является достаточно точным способом описания.
3. Как определяется понятие угла отсечки гармонического колебания?
4. Как возникает понятие отрицательной частоты?
5. В чем заключается эффект когерентного сложения гармонических колебаний?
6. Какими свойствами обладает спектральная плотность вещественного сигнала?
7. Как принято определять длительность импульсных сигналов?
8. В чем состоит характерная особенность спектра дельта-импульса?
9. Как по известным спектральным плотностям двух сигналов вычислить их скалярное произведение?
10. Какова связь между длительностью импульса и шириной его спектра?
11. Как в частотной области отображаются операции дифференцирования и интегрирования сигнала?
12. Как связаны между собой спектральные плотности видеоимпульса и радиоимпульса?
13. Какой эффект оказывает «перекрывание» частотных областей в спектре радиоимпульса?
14. В чем смысл понятия комплексной частоты?
15. К каким сигналам можно применять метод преобразования Лапласа?
16. Какими характерными свойствами должен обладать сигнал для того, чтобы его можно было использовать в качестве вейвлета?
17. Почему суммирование в обобщенном ряде Фурье с использованием вейвлет-базиса проводится не по одному, а по двум индексам?

Задачи

1. Покажите, что ряд Фурье пилообразного колебания



имеет вид

$$s(t) = (A/2) - (A/\pi) [\sin \omega_1 t + (\sin 2\omega_1 t)/2 + (\sin 3\omega_1 t)/3 + \dots]$$

2. Найдите амплитудный коэффициент 25-й гармоники пилообразного сигнала, если $A = 30$ В.

3. Покажите, что если периодическая последовательность образована повторением импульса $s_0(t)$ с известной спектральной плотностью $S_0(\omega)$, то комплексная амплитуда n -го члена ряда Фурье

$$C_n = (2/T) S_0(n\omega_1),$$

где T — период последовательности; ω_1 — основная частота.

4. Дан двусторонний экспоненциальный видеоимпульс

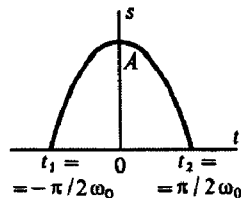
$$s(t) = U_0 \exp(-\alpha |t|).$$

Найдите его спектральную плотность. Определите длительность сигнала и ширину спектра. Оценив их, проверьте соотношение неопределенности.

5. Вычислите спектральную плотность экспоненциального видеоимпульса [см. (2.21)] с амплитудой 20 В и параметром $\alpha = 10^6 \text{ с}^{-1}$ на частоте $\omega_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$.

6. На какой частоте спектральная плотность импульса, рассмотренного в задаче 5, будет иметь фазовый угол -45° ?

7. Убедитесь, что спектральная плотность одиночного косинусоидального импульса

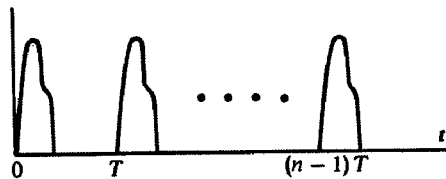


$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ A \cos \omega_0 t, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

выражается формулой

$$S(\omega) = A \left[\frac{\sin \frac{\pi(\omega_0 + \omega)}{2\omega_0}}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin \frac{\pi(\omega_0 - \omega)}{2\omega_0}}{\omega_0 - \omega} \right].$$

8. Имеется группа (пачка), состоящая из n одинаковых видеоимпульсов:



Покажите, что спектральная плотность этой группы

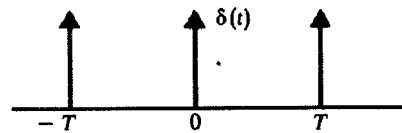
$$S_T(\omega) = S_0(\omega) \frac{1 - e^{-jn\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}},$$

где $S_0(\omega)$ — спектр одиночного импульса.

Указание. Воспользуйтесь формулой суммирования геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

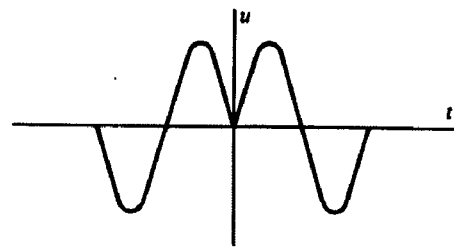
9. Группа образована тремя одинаковыми дельта-импульсами:



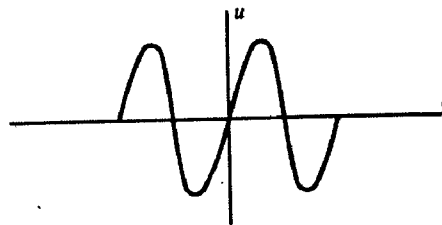
Покажите, что частотная зависимость модуля спектральной плотности группы такова:

$$|S_T(\omega)| = [(1 + \cos \omega T + \cos 2\omega T)^2 + (\sin \omega T + \sin 2\omega T)^2]^{1/2}.$$

10. График импульсного сигнала, образованного отрезками гармонического колебания, приведен на рисунке:



Покажите, что спектральная плотность этого сигнала равна нулю как на нулевой частоте, так и на частоте высокочастотного заполнения. Как изменится спектр этого сигнала, если он приобретет такую форму:



11. Найдите сигнал, изображение которого

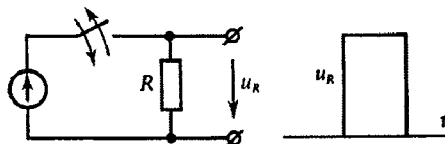
$$F(p) = \frac{U_0}{(p + \alpha)(p + \beta)}.$$

Более сложные задания

12. Пусть периодический сигнал описывается функцией времени, которая содержит скачкообразные изменения уровня (разрывы 1-го рода). Покажите, что коэффициенты ряда Фурье такого сигнала с ростом их номера имеют асимптотику $O(1/n)$ независимо от вида функции.

13. В условиях предыдущей задачи рассмотрите сигнал, у которого разрывы испытывает первая производная, а значение функции непрерывно. Покажите, что в этом случае асимптотика коэффициентов ряда Фурье имеет вид $O(1/n^2)$.

14. Обсудите следующий «парадокс»: если на некоторое время замкнуть коммутатор в цепи



то на нагрузке будет наблюдаться прямоугольный импульс $u_R(t)$. Этот импульс складывается из гармонических составляющих, существующих во все моменты времени, в том числе и до начала импульса. Как это согласуется с предположением, что импульс может и не быть создан, хотя гармонические составляющие уже существуют?

15. Покажите, что спектральная плотность σ -функции, будучи подставленной в обратное преобразование Фурье, обеспечивает при $t = 0$ значение сигнала $\sigma(0)$, равное $1/2$.

У к а з а н и е. Считая частоту ω комплексной переменной, вычислите интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] d\omega$$

методами теории вычетов.

Глава 3

Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа

Представление сигналов посредством их спектральных плотностей позволяет значительно упростить вычисление энергии сигналов, а также создать ряд новых представлений, полезных в самых разнообразных областях радиотехники.

3.1. Взаимная спектральная плотность сигналов. Энергетический спектр

В гл. 1 была введена фундаментальная характеристика системы двух вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ — их скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt, \quad (3.1)$$

пропорциональное взаимной энергии этих сигналов. Если сигналы тождественно совпадают, то скалярное произведение становится равным энергии

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (3.2)$$

Скалярное произведение сигналов $u(t)$ и $v(t)$ можно выразить через их спектральные плотности $U(\omega)$ и $V(\omega)$ с помощью обобщенной формулы Рэлея (2.42):

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega.$$

В равной мере справедливо равенство

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\omega) V(\omega) d\omega,$$

поскольку скалярное произведение вещественных сигналов является вещественным числом.

Назовем *взаимным энергетическим спектром* вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ функцию

$$W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega), \quad (3.3)$$

такую, что

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega) d\omega, \quad (3.4)$$

причем

$$W_{vu}(\omega) = W_{uv}^*(\omega). \quad (3.5)$$

Представив спектральные плотности сигналов $u(t)$ и $v(t)$ в виде суммы вещественных и мнимых частей:

$$U(\omega) = A_u(\omega) + jB_u(\omega), \quad V(\omega) = A_v(\omega) + jB_v(\omega),$$

убеждаемся, что взаимный энергетический спектр W_{uv} — функция, принимающая, в общем случае, комплексные значения:

$$W_{uv}(\omega) = A_u A_v + B_u B_v + j(B_u A_v - A_u B_v) = \\ = \operatorname{Re} W_{uv}(\omega) + j \operatorname{Im} W_{uv}(\omega). \quad (3.6)$$

Нетрудно заметить, что $\operatorname{Re} W_{uv}$ — четная, а $\operatorname{Im} W_{uv}$ — нечетная функция частоты. Вклад в интеграл (3.4) дает только вещественная часть, поэтому

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} W_{uv}(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

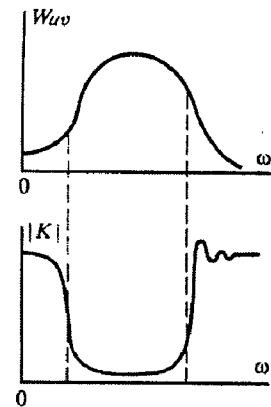
Последняя формула дает возможность проанализировать «тонкую структуру» взаимосвязи сигналов.

Более того, обобщенная формула Рэлея, представленная в виде (3.7), указывает на принципиальный путь, позволяющий уменьшить степень связи между двумя сигналами, добившись в пределе их ортогональности. Для этого один из сигналов необходимо подвергнуть обработке в особой физической системе, называемой *частотным фильтром*. К этому фильтру предъявляется требование: не пропускать на выход спектральные составляющие, находящиеся в пределах частотного интервала, где вещественная часть взаимного энергетического спектра велика. Частотная зависимость коэффициента передачи такого *ортогонализирующего фильтра* будет обладать резко выраженным минимумом в пределах указанной области частот.

Изложенный подход к вычислению скалярного произведения, основанный на понятии взаимного энергетического спектра, имеет прямое отношение к результатам, которые были получены в гл. 1 при вычислении скалярного произведения сигналов, разложенных по элементам ортогонального базиса. Разница, однако, состоит в том, что здесь используется не дискретное, а непрерывное Фурье-представление.

▲
решите задачу 1

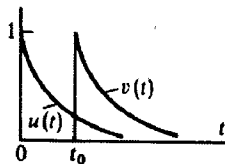
Наибольший вклад во взаимную энергию дают те частотные области, в которых имеется «перекрывание» спектров сигналов



Частотная зависимость коэффициента передачи ортогонализирующего фильтра

Пример 3.1. Взаимный энергетический спектр двух экспоненциальных видеопульсов одинаковой формы, следующих друг за другом с интервалом времени t_0 .

Положив, что оба импульса имеют единичную амплитуду, запишем выражения их спектральных плотностей:



$$u(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t) \leftrightarrow U(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

$$v(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \sigma(t-t_0) \leftrightarrow V(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}.$$

Отсюда находим взаимный энергетический спектр

$$W_{uv}(\omega) = e^{j\omega t_0} / (\alpha^2 + \omega^2), \quad (3.8)$$

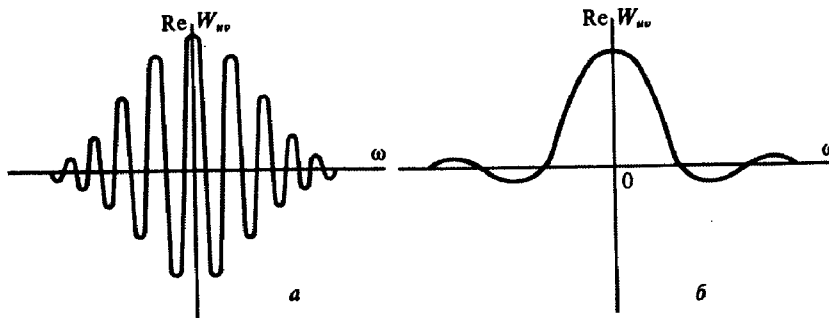


Рис. 3.1. Взаимный энергетический спектр двух экспоненциальных видеоимпульсов:

a — при $\alpha_0 \gg 1$; b — при $\alpha_0 \ll 1$

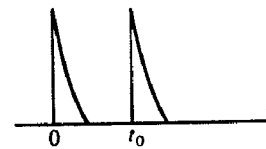
имеющий вещественную часть

$$\operatorname{Re} W_w(\omega) = \cos \omega t_0 / (\alpha^2 + \omega^2).$$

Если зафиксировать параметр α , определяющий форму сигналов, то частотные свойства взаимного энергетического спектра будут целиком зависеть от временного сдвига между сигналами. На рис. 3.1 изображены два характерных графика функции $\operatorname{Re} W_w(\omega)$.

Особый интерес представляет случай, когда произведение αt_0 мало, т. е. импульсы существенно перекрываются во времени. Формула (3.8) и график рис. 3.1, б свидетельствуют о том, что взаимный энергетический спектр имеет при этом выраженный низкочастотный характер. Отсюда следует вывод: для того чтобы уменьшить скалярное произведение таких сигналов и сделать их лучше различимыми, следует воспользоваться фильтром верхних частот (ФВЧ), который подавляет все колебания с частотами, меньшими некоторой граничной частоты.

Быстро изменяющийся фронт импульса образуется за счет сложения высокочастотных составляющих спектра, которые беспрепятственно проходят на выход ФВЧ. В то же время за счет фильтрации низкочастотных составляющих длительность импульса на выходе будет существенно сокращена. Как следствие этого, эффект перекрытия импульсов может быть доведен до приемлемо малой величины, так что импульсы на выходе ФВЧ оказываются близким к ортогональным.



Ортогонализация импульсов

Энергетический спектр сигнала. Спектральное представление энергии сигнала легко получить из обобщенной формулы Рэлея, если в ней сигналы $u(t)$ и $v(t)$ считать одинаковыми. Формула (3.3), выражающая спектральную плотность энергии, приобретает вид

$$W_u(\omega) = U(\omega) U^*(\omega) = |U(\omega)|^2. \quad (3.9)$$

Величина $W_u(\omega)$ носит название *спектральной плотности энергии сигнала* $u(t)$, или, короче, его *энергетического спектра*. Формула (3.2) при этом запишется так:

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega) d\omega. \quad (3.10)$$

●
энергетический
спектр

Соотношение (3.10) известно в различных областях физики как *формула Рэлея* (в узком смысле), которая констатирует следующее: энергия любого сигнала есть результат суммирования вкладов от различных интервалов частотной оси. Каждый малый интервал положительных частот $\Delta\omega$ обеспечивает вклад в общую энергию сигнала, равный

$$\Delta E_u = \frac{1}{\pi} W_u(\omega') \Delta\omega,$$

где ω' — некоторая внутренняя точка данного интервала.

Подход, основанный на спектральном представлении энергии сигнала, выгодно отличается относительной простотой. Действительно, энергии, отвечающие различным областям частотной оси, складываются так же, как *вещественные числа*. В то же время метод преобразования Фурье применительно к самим сигналам основан на том, что комплексные амплитуды, описывающие вклады малых частотных участков, складываются как *комплексные числа*, характеризующиеся модулями и фазами.

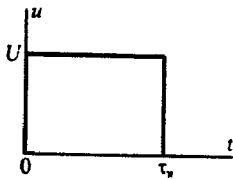
Изучая сигнал с помощью его энергетического спектра, мы неизбежно теряем информацию, которая заключена в фазовом спектре сигнала, поскольку в соответствии с формулой (3.9) энергетический спектр есть квадрат модуля спектральной плотности и не зависит от ее фазы.

Тем не менее понятие энергетического спектра оказывается очень полезным для получения различных инженерных оценок, устанавливающих реальную ширину спектра того или иного сигнала.

●
формула Рэлея

▲
решите задачи 3 и 4

При энергетическом подходе все сигналы, одинаковые по форме, но различающиеся расположением на оси времени, выступают как совершенно неразличимые



Пример 3.2. Энергетический спектр прямоугольного видеоимпульса.

Здесь результат получается путем возведения в квадрат спектральной плотности вида (2.20):

$$W_u(\omega) = U^2 \tau_n^2 \frac{\sin^2(\omega \tau_n / 2)}{(\omega \tau_n / 2)^2}. \quad (3.11)$$

Соответствующий график приведен на рис. 3.2.

Рисунок наглядно показывает, что энергетический спектр данного сигнала имеет наибольшую величину в области низких частот. С ростом частоты вклад от соответствующих спектральных составляющих имеет немонотонный, колеблющийся характер, однако общая тенденция — уменьшение энергетического спектра по закону обратного квадрата:

$$W_u(\omega) = O(1/\omega^2) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty$$

(а не обратно пропорционально первой степени частоты, как для обычной спектральной плотности рассматриваемого сигнала).

Выражение (3.11) позволяет проверить формулу Рэлея прямым вычислением. Прежде всего во временной области без труда находим энергию данного видеоимпульса (см. гл. 1):

$$E_u = U^2 \tau_n. \quad (3.12)$$

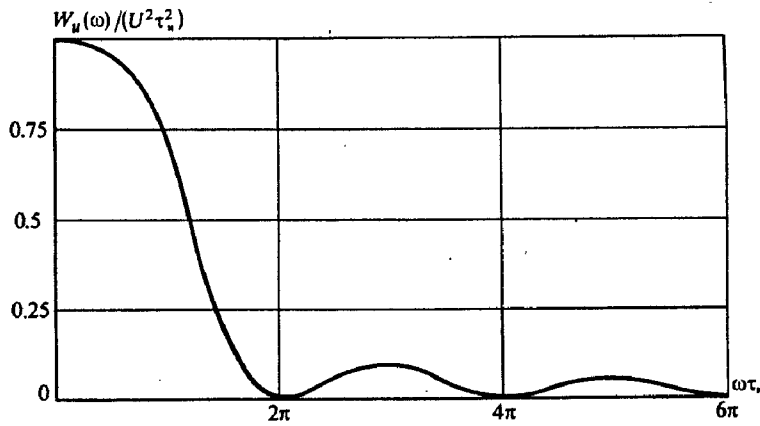


Рис. 3.2. Нормированный энергетический спектр прямоугольного видеопульса как функция безразмерной частотной переменной $\omega\tau_u$

Чтобы определить энергию сигнала в частотной области, необходимо вычислить интеграл

$$E_u = \frac{U^2 \tau_u^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega\tau_u/2)}{(\omega\tau_u/2)^2} d\omega. \quad (3.13) \quad \text{Следует положить } x = \omega\tau_u/2$$

Несложная замена переменной сразу приводит к формуле (3.12).

Распределение энергии в спектре прямоугольного видеопульса. Интересно и для многих прикладных задач важно знать, какая доля общей энергии содержится в пределах одного, двух, трех и т. д. лепестков спектральной диаграммы, изображенной на рис. 3.2. Обозначим $E_{(k)}$ долю энергии прямоугольного видеопульса, которая заключена в k последовательных лепестках. По формуле Рэлея,

$$E_{(k)} = \frac{2}{\pi} U^2 \tau_u^2 \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi. \quad (3.14)$$

Данный интеграл вычисляется аналитически, а также может быть легко найден численно. Ниже приводится таблица, в которую сведены результаты расчета относительной доли энергии в зависимости от числа учитываемых лепестков.

Таблица 3.1

k	1	2	3
$E_{(k)}/E_u$	0,902	0,950	0,967

Итак, если прямоугольный видеопульс подать на идеальный фильтр нижних частот, равномерно и без ослабления

пропускающий все частоты от 0 до $2\pi/\tau_n$ с⁻¹ (граница первого лепестка), то на выходе будет получен сигнал, энергия которого составит 90,2 % от энергии колебания на входе.

Как отмечалось, такой подход к оценке реальной ширины спектра сигнала не раскрывает всей картины явления. Так, неизвестной оказывается степень искажения формы сигнала за счет действия фильтра. Однако если сведения о форме колебания отступают на второй план, а величина энергии приобретает первостепенное значение (изучая статистическую радиотехнику, мы неоднократно встретимся с такой ситуацией), то энергетическая оценка ширины спектра становится особенно целесообразной.

Например, из табл. 3.1 видно, что переход от $k = 1$ к значению $k = 2$, т. е. двукратное расширение полосы частот устройства, через которое проходит видеоимпульс, увеличивает энергию полезного сигнала всего на 4,8 %. Наряду с этим ясно, что помехи (если такие имеются) могут увеличить за счет этого свою энергию, например, вдвое, если их энергетический спектр равномерен в интересующем диапазоне частот.

▲
решите задачу 5

Неоправданное
расширение полосы
пропускания филь-
тра нежелательно

3.2. Корреляционный анализ сигналов

На ранних этапах развития радиотехники вопрос о выборе наилучших сигналов для тех или иных конкретных применений не был очень острым. Это обуславливалось, с одной стороны, относительно простой структурой передаваемых сообщений (телеграфные послылки, радиовещание); с другой, практическая реализация сигналов сложной формы в комплексе с оборудованием для их кодирования, модуляции и обратного преобразования в сообщение оказывалась трудно осуществимой.

В настоящее время ситуация в корне изменилась. В современных радиоэлектронных комплексах выбор сигналов диктуется прежде всего не техническими удобствами их генерирования, преобразования и приема, а возможностью оптимального решения задач, предусмотренных при проектировании системы. Для того чтобы понять, как возникает потребность в сигналах со специально выбранными свойствами, рассмотрим следующий пример.

Сравнение сигналов, сдвинутых во времени. Обратимся к упрощенной идее работы импульсного радиолокатора, предназначенного для измерения дальности до цели. Здесь информация об объекте измерения заложена в величине τ — задержке по времени между зондирующим и принятым сигналами. Формы зондирующего $u(t)$ и принятого $u(t - \tau)$ сигналов одинаковы при любых задержках.

Структурная схема устройства обработки радиолокационных сигналов, предназначенного для измерения дальности, может выглядеть так, как это изображено на рис. 3.3.

Система состоит из набора элементов, осуществляющих задержку «эталонного» передаваемого сигнала на некоторые

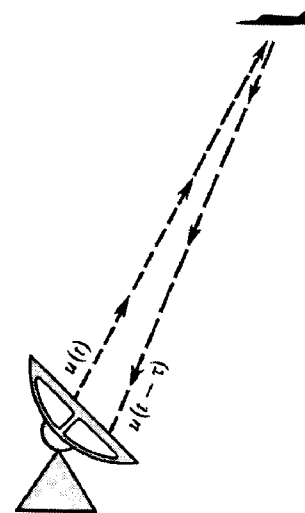




Рис. 3.3. Устройство для измерения времени задержки сигналов

Если отличие невелико, то можно ожидать, например, неоднозначного отсчета, когда сигналы будут появляться одновременно на выходе нескольких соседних устройств сравнения

фиксированные отрезки времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$. Задержанные сигналы вместе с принятым сигналом подаются на устройства сравнения, действующие в соответствии с принципом: сигнал на выходе появляется лишь при условии, что оба входных колебания являются «копиями» друг друга. Зная номер канала, в котором происходит указанное событие, можно измерить задержку, а значит, и дальность до цели.

Подобное устройство будет работать тем точнее, чем в большей степени разнятся друг от друга сигнал и его «копия», смещенная во времени.

Таким образом, мы получили качественное представление о том, какие сигналы можно считать «хорошими» для данного применения.

Перейдем к точной математической формулировке поставленной проблемы и покажем, что этот круг вопросов имеет непосредственное отношение к теории энергетических спектров сигналов.

Автокорреляционная функция сигнала. Для количественного определения степени отличия сигнала $u(t)$ и его смещенной во времени копии $u(t - \tau)$ принято вводить автокорреляционную функцию (АКФ) сигнала $u(t)$, равную скалярному произведению сигнала и копии:

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t - \tau) dt. \quad (3.15)$$

В дальнейшем будем предполагать, что исследуемый сигнал имеет локализованный во времени импульсный характер, так что интеграл вида (3.15) заведомо существует.

Непосредственно видно, что при $\tau = 0$ автокорреляционная функция становится равной энергии сигнала:

$$B_u(0) = E_u. \quad (3.16)$$

■
свойства автокорреляционной функции

К числу простейших свойств АКФ можно отнести ее четность:

$$B_u(\tau) = B_u(-\tau). \quad (3.17)$$

Действительно, если в интеграле (3.15) сделать замену переменных $x = t - \tau$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + \tau) u(x) dx.$$

Наконец, важное свойство автокорреляционной функции состоит в следующем: при любом значении временного сдвига τ модуль АКФ не превосходит энергии сигнала:

$$|B_u(\tau)| \leq B_u(0) = E_u. \quad (3.18)$$

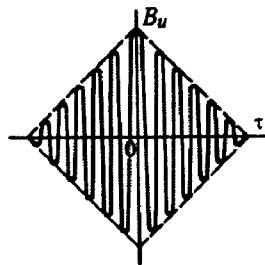
Этот факт непосредственно вытекает из неравенства Коши – Буняковского (см. гл. 1):

$$|(u, u_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|u_\tau\| = E_u. \quad (3.19)$$

Итак, АКФ представляется симметричной кривой с центральным максимумом, который всегда положителен. При этом в зависимости от вида сигнала $u(t)$ автокорреляционная функция может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

Пример 3.3. Найти АКФ прямоугольного видеоимпульса.

На рис. 3.4,а изображен прямоугольный видеоимпульс с амплитудой U и длительностью τ_u . Здесь же представлена его «копия», сдвинутая во времени в сторону запаздывания на τ с. Интеграл (3.15) вычисляется в данном случае элементарно на основании графического построения. Действительно, произведение $u(t)u(t - \tau)$ отлично от нуля лишь в пределах интервала времени, когда наблюдается наложение сигналов. Из рис. 3.4,а видно, что этот временной интервал равен $\tau_u - |\tau|$, если сдвиг не превышает длительности импульса. Таким образом, для рассматриваемого сигнала



$$B_u(\tau) = \begin{cases} U^2 \tau_u \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}\right), & |\tau| \leq \tau_u, \\ 0, & |\tau| > \tau_u. \end{cases} \quad (3.20)$$

График такой функции – треугольник, изображенный на рис. 3.4,б. Ширина основания треугольника в два раза больше длительности импульса.

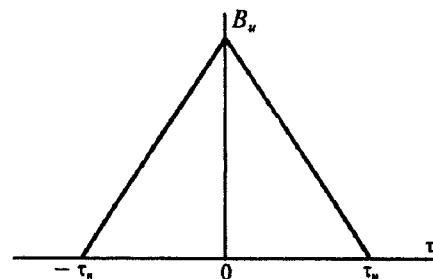
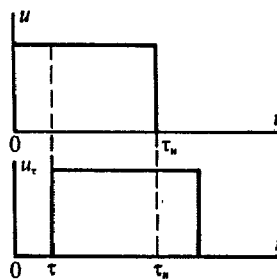


Рис. 3.4. Нахождение АКФ прямоугольного видеоимпульса

Пример 3.4. Найти АКФ прямоугольного радиопульса.

Будем рассматривать радиосигнал вида

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_n/2, \\ U \cos \omega_0 t, & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t > \tau_n/2. \end{cases}$$

Зная заранее, что АКФ четна, вычислим интеграл (3.15), полагая $0 \leq \tau \leq \tau_n$. При этом

$$\begin{aligned} B_u(\tau) &= U^2 \int_{-\tau_n/2 + \tau}^{\tau_n/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau) dt = \\ &= \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot (\tau_n - \tau) + \frac{U^2}{2} \int_{-\tau_n/2 + \tau}^{\tau_n/2} \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt, \end{aligned}$$

откуда легко получаем

$$B_u(\tau) = \frac{U^2}{2} (\tau_n - |\tau|) \left[\cos \omega_0 \tau + \frac{\sin 2\omega_0 (\tau_n - |\tau|)}{2\omega_0 (\tau_n - |\tau|)} \right]. \quad (3.21)$$

Естественно, что при $\tau = 0$ величина $B_u(0)$ становится равной энергии этого импульса (см. пример 1.9). Формула (3.21) описывает АКФ прямоугольного радиопульса при всех сдвигах τ , лежащих в пределах $-\tau_n \leq \tau \leq \tau_n$. Если абсолютное значение сдвига превышает длительность импульса, то автокорреляционная функция будет тождественно обращаться в нуль.

Пример 3.5. Определить АКФ последовательности прямоугольных видеоимпульсов.

В радиолокации широко используются сигналы, представляющие собой пачки из одинаковых по форме импульсов, следующих друг за другом через одинаковый интервал времени. Для обнаружения такой пачки, а также для измерения ее параметров, например положения во времени, создают устройства, которые аппаратным образом реализуют алгоритмы вычисления АКФ.

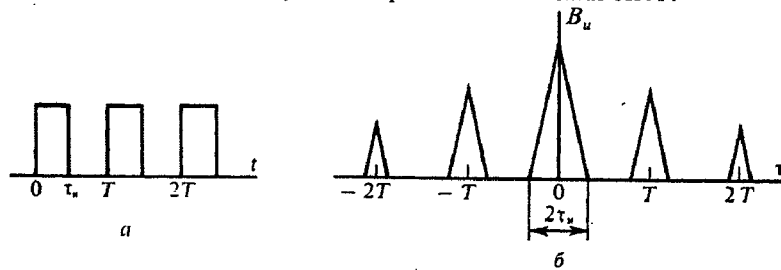


Рис. 3.5. АКФ пачки из трех одинаковых видеоимпульсов: а — пачка импульсов; б — график АКФ

На рис. 3.5, а изображена пачка, состоящая из трех одинаковых видеоимпульсов прямоугольной формы. Здесь же представлена ее автокорреляционная функция, вычисленная по формуле (3.15) (рис. 3.5, б).

Хорошо видно, что максимум АКФ достигается при $\tau = 0$. Однако если задержка τ оказывается кратной периоду последовательности (при $\tau = \pm T, \pm 2T$ в нашем случае), наблюдаются *побочные лепестки* АКФ, сравнимые по высоте с главным лепестком. Поэтому можно говорить об известном несовершенстве корреляционной структуры данного сигнала.

Автокорреляционная функция неограниченно протяженного сигнала. Если требуется рассматривать неограниченно протяженные во времени периодические последовательности, то подход к изучению корреляционных свойств сигналов должен быть несколько видоизменен.

Будем считать, что такая последовательность получается из некоторого локализованного во времени, т. е. импульсного, сигнала, когда длительность τ_n последнего стремится к бесконечности. Для того чтобы избежать расходимости получаемых выражений, определим новую АКФ как среднее значение скалярного произведения сигнала и его копии:

$$\tilde{B}_u(\tau) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} u(t) u(t - \tau) dt. \quad (3.22)$$

При таком подходе автокорреляционная функция $\tilde{B}_u$ становится равной *средней взаимной мощности* этих двух сигналов.

Например, желая найти АКФ для неограниченной во времени косинусоиды $u(t) = U \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$, можно воспользоваться формулой (3.21), полученной для радиоимпульса длительностью τ_n , а затем перейти к пределу при $\tau_n \rightarrow \infty$, учитывая определение (3.22). В результате получим

$$\tilde{B}_u(\tau) = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (3.23)$$

Эта АКФ сама является периодической функцией; ее значение при $\tau = 0$ равно $U^2/2$.

Связь между энергетическим спектром сигнала и его автокорреляционной функцией. При изучении материала настоящей главы читатель может подумать, что методы корреляционного анализа выступают как некоторые особые приемы, не имеющие связи с принципами спектральных разложений. Однако это не так. Легко показать, что существует тесная связь между АКФ и энергетическим спектром сигнала.

Действительно, в соответствии с формулой (3.15) АКФ есть скалярное произведение: $B_u(\tau) = (u, u_\tau)$. Здесь символом u_τ обозначена смещенная во времени копия сигнала $u(t - \tau)$.

Обратившись к обобщенной формуле Рэлея (2.42), можно записать равенство

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) U_\tau^*(\omega) d\omega.$$

Спектральная плотность смещенного во времени сигнала $U_\tau(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega\tau)$, откуда $U_\tau^*(\omega) = U^*(\omega) \exp(j\omega\tau)$.

Таким образом, приходим к результату:

$$B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.24)$$

▲
решите задачу 8

Подобная АКФ имеет физическую размерность мощности

Величина $U^2/2$ есть средняя мощность, которую данный сигнал выделяет на активной нагрузке в 1 Ом

**связь между АКФ
и энергетическим
спектром**

Квадрат модуля спектральной плотности, как известно, представляет собой энергетический спектр сигнала. Итак, энергетический спектр и автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье:

$$B_u(\tau) \leftrightarrow |U(\omega)|^2 = W_u(\omega). \quad (3.25)$$

Ясно, что имеется и обратное соотношение:

$$|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.26)$$

Эти результаты принципиально важны по двум причинам. Во-первых, оказывается возможным оценивать корреляционные свойства сигналов, исходя из распределения их энергии по спектру. Чем шире полоса частот сигнала, тем уже основной лепесток автокорреляционной функции и тем совершеннее сигнал с точки зрения возможности точного измерения момента его начала.

Во-вторых, формулы (3.24) и (3.26) указывают путь экспериментального определения энергетического спектра. Часто удобнее вначале получить автокорреляционную функцию, а затем, используя преобразование Фурье, найти энергетический спектр сигнала. Такой прием получил распространение при исследовании свойств сигналов с помощью быстродействующих ЭВМ в реальном масштабе времени.

Пример 3.6. Найти АКФ сигнала с равномерным и ограниченным по частоте энергетическим спектром.

Пусть сигнал $u(t)$ имеет энергетический спектр вида

$$W_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ W_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b, \end{cases}$$

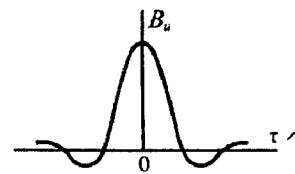
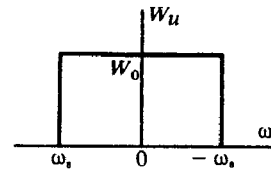
где ω_b — верхняя граничная частота спектра. По формуле (3.24) находим его автокорреляционную функцию

$$B_u(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0\omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b\tau}{\omega_b\tau}. \quad (3.27)$$

Таким образом, данный сигнал имеет АКФ лепесткового вида. Часто вводят удобный числовой параметр — *интервал корреляции* τ_k , представляющий собой оценку ширины основного лепестка автокорреляционной функции. Легко видеть, что в рассматриваемом случае величина τ_k связана с параметром ω_b соотношением $\omega_b\tau_k = \pi$. Отсюда следует, что интервал корреляции

$$\tau_k = \pi/\omega_b = 1/(2f_b) \quad (3.28)$$

оказывается тем меньше, чем выше верхняя граничная частота спектра сигнала.



●
интервал корреляции

▲
решите задачи 6 и 7

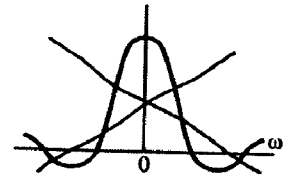
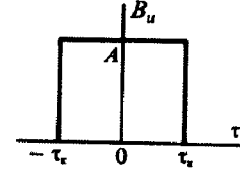
Ограничения, накладываемые на вид автокорреляционной функции сигнала. Найденная связь между автокорреляционной функцией и энергетическим спектром дает возможность установить интересный и на первый взгляд неочевидный критерий существования сигнала с заданными корреляционными свойствами. Дело в том, что энергетический спектр любого сигнала, по определению, должен быть положительным [см. формулу (3.25)]. Данное условие будет выполняться далеко не при любом выборе АКФ. Например, если взять

$$B_u(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_k, \\ A, & -\tau_k \leq \tau \leq \tau_k, \\ 0, & \tau > \tau_k \end{cases}$$

и вычислить соответствующее преобразование Фурье, то

$$|U(\omega)|^2 = 2A \int_0^{\tau_k} \cos \omega \tau d\tau = 2A\tau_k \frac{\sin \omega \tau_k}{\omega \tau_k}.$$

Эта знакопеременная функция не может представлять собой энергетический спектр какого-либо сигнала.



3.3. Автокорреляционная функция дискретного сигнала

Изучая АКФ пачки прямоугольных видеоимпульсов, читатель, безусловно, обратил внимание на то, что соответствующий график имел специфический лепестковый вид. С практической точки зрения, имея в виду использование АКФ для решения задачи обнаружения такого сигнала или измерения его параметров, совершенно несущественно, что отдельные лепестки имеют треугольную форму. Важен лишь их относительный уровень по сравнению с центральным максимумом при $\tau = 0$.

Наша ближайшая задача — изменить определение автокорреляционной функции таким образом, чтобы можно было извлекать из нее полезную информацию, абстрагируясь от второстепенных подробностей. Основой для этого служит идея математической модели дискретного сигнала (см. гл. 1).

Описание сложных сигналов с дискретной структурой. Пачка одинаковых прямоугольных видеоимпульсов — простейший представитель класса сложных сигналов, построенных в соответствии со следующим принципом. Весь интервал времени существования сигнала разделен на целое число $M > 1$ равных промежутков, называемых *позициями*. На каждой из позиций сигнал может находиться в одном из двух состояний, которым отвечают числа $+1$ и -1 .

Рис. 3.6 поясняет некоторые способы формирования многопозиционного сложного сигнала. Для определенности здесь $M = 3$.

Видно, что физический облик дискретного сигнала может быть различным. В случае *a* символу $+1$ соответствует

Выбор чисел ± 1 не имеет принципиального характера и продиктован удобством анализа

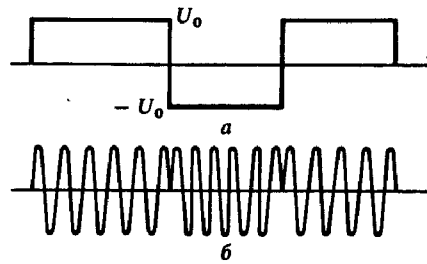


Рис. 3.6. Трехпозиционный сложный сигнал:
а — амплитудное кодирование; б — фазовое кодирование

■ принципы кодиро- вания дискретных сигналов

положительное значение U_0 высоты видеоимпульса, передаваемого на соответствующей позиции; символу -1 отвечает отрицательное значение $-U_0$. Говорят, что при этом реализовано *амплитудное кодирование* сложного сигнала. В случае б происходит *фазовое кодирование*. Для передачи символа $+1$ на соответствующей позиции генерируется отрезок гармонического сигнала с нулевой начальной фазой. Чтобы отобразить символ -1 , используется отрезок синусоиды такой же длительности и с той же частотой, но его фаза получает дополнительный сдвиг на 180° .

Несмотря на различие графиков этих двух сигналов, между ними, в сущности, можно установить полное тождество с точки зрения их математических моделей. Действительно, модель любого такого сигнала — это последовательность чисел $\{u_1, u_2, \dots, u_{M-1}, u_M\}$, в которой каждый символ u_i принимает одно из двух возможных значений ± 1 . Для удобства договоримся в дальнейшем дополнять такую последовательность нулями на «пустых» позициях, где сигнал не определен. При этом, например, развернутая форма записи дискретного сигнала $\{1, 1, -1, 1\}$ будет иметь вид

.... 0 0 0 1 1 -1 1 0 0

Важнейшая операция при обработке дискретных сигналов состоит в сдвиге такого сигнала на некоторое число позиций относительно исходного положения без изменения его формы. В качестве примера ниже представлен некоторый исходный сигнал (первая строка) и его копии (последующие строки), сдвинутые на 1, 2 и 3 позиции в сторону запаздывания:

```
... 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 ...
```

Дискретная автокорреляционная функция. Постараемся так обобщить формулу (3.15), чтобы можно было вычислять дискретный аналог АКФ применительно к многопозиционным сигналам. Ясно, что операцию интегрирования здесь следует заменить суммированием, а вместо переменной τ использовать целое число n (положительное или отрицательное),

указывающее, на сколько позиций сдвинута копия относительно исходного сигнала. Так как в «пустых» позициях математическая модель сигнала содержит нули, запишем дискретную АКФ в виде

$$\hat{B}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}. \quad (3.29)$$

Эта функция целочисленного аргумента n , естественно, обладает многими уже известными свойствами обычной автокорреляционной функции. Так, легко видеть, что дискретная АКФ четна:

$$\hat{B}_u(n) = \hat{B}_u(-n). \quad (3.30)$$

При нулевом сдвиге эта АКФ определяет энергию дискретного сигнала:

$$\hat{B}_u(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^2 = E_u. \quad (3.31)$$

Некоторые примеры. Для иллюстрации сказанного вычислим дискретную АКФ трехпозиционного сигнала с одинаковыми значениями на каждой позиции: $u = \{1, 1, 1\}$. Выпишем этот сигнал вместе с копиями, сдвинутыми на 1, 2 и 3 позиции:

```
... 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 1 1 1 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 1 1 1 0 ...
... 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ...
```

Видно, что уже при $n = 3$ сигнал и копия перестают накладываться друг на друга, так что произведения, входящие в формулу (3.29), становятся равными нулю при $n \geq 3$. Вычисляя суммы, получаем

$$\hat{B}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\hat{B}_u(1) = 1 + 1 = 2,$$

$$\hat{B}_u(2) = 1.$$

Боковые лепестки автокорреляционной функции линейно спадают с ростом номера n , подобно тому, как в случае автокорреляционной функции трех аналоговых видеоимпульсов.

Рассмотрим дискретный сигнал, отличающийся от предыдущего знаком отсчета на второй позиции: $u = \{1, -1, 1\}$.

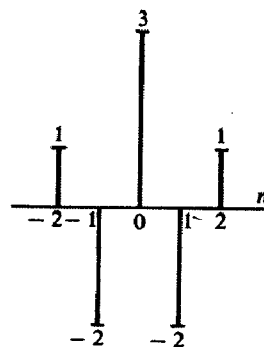
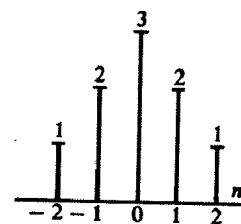
Поступая аналогичным образом, вычислим для этого сигнала значения дискретной автокорреляционной функции:

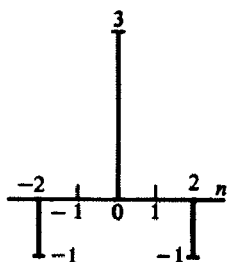
$$\hat{B}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\hat{B}_u(1) = -1 - 1 = -2,$$

$$\hat{B}_u(2) = 1.$$

Данная функция представляет собой скалярное произведение дискретного сигнала и его копии





Можно обнаружить, что первый боковой лепесток изменяет свой знак, оставаясь неизменным по абсолютному значению.

Наконец, рассмотрим трехпозиционный дискретный сигнал с математической моделью вида $u = \{1, 1, -1\}$.

Его автокорреляционная функция такова:

$$\hat{B}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\hat{B}_u(1) = 1 - 1 = 0,$$

$$\hat{B}_u(2) = -1.$$

Из трех изученных здесь дискретных сигналов именно третий наиболее совершенен с точки зрения корреляционных свойств, поскольку при этом реализуется наименьший уровень боковых лепестков автокорреляционной функции.

Сигналы Баркера. Дискретные сигналы с наилучшей структурой автокорреляционной функции явились в 50–60-е годы объектом интенсивных исследований специалистов в области теоретической радиотехники и прикладной математики. Были найдены целые классы сигналов с совершенными корреляционными свойствами. Среди них большую известность получили так называемые *сигналы (коды) Баркера*. Эти сигналы обладают уникальным свойством: независимо от числа позиций M значения их автокорреляционных функций, вычисляемые по формуле (3.29), при всех $n \neq 0$ не превышают единицы. В то же время энергия этих сигналов, т. е. величина $\hat{B}_u(0)$, численно равна M .

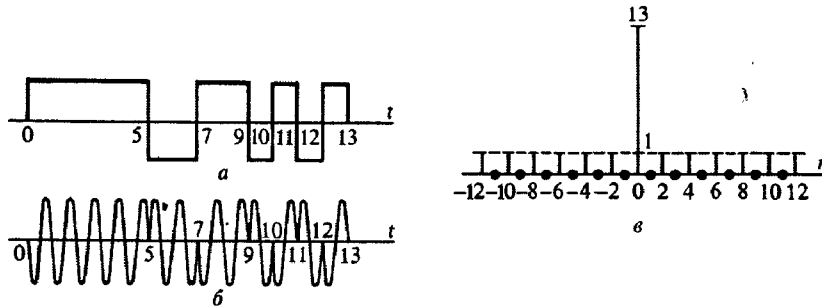
Сигналы Баркера удается реализовать лишь при числе позиций $M = 2, 3, 4, 5, 7, 11$ и 13 . Случай $M = 2$ является тривиальным. Сигнал Баркера при $M = 3$ был исследован нами в конце предыдущего пункта. Математические модели сигналов Баркера и отвечающие им автокорреляционные функции приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2 Модели сигналов Баркера

M	Модель сигнала	АКФ
3	1, 1, -1	3, 0, -1
4	1, 1, 1, -1	4, 1, 0, -1
	1, 1, -1, 1	4, -1, 0, 1
5	1, 1, 1, -1, 1	5, 0, 1, 0, 1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	7, 0, -1, 0, -1, 0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1	11, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1	13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

Для иллюстрации на рис. 3.7 приведен вид наиболее часто используемого 13-позиционного сигнала Баркера при двух способах кодирования, а также графическое представление его АКФ.

Исследования показали, что не существует сигналов Баркера с нечетным числом позиций, большим 13. Однако до сих пор неизвестно, можно ли построить сигнал Баркера с четным $M > 4$

Рис. 3.7. Сигнал Баркера при $M = 13$:

a — амплитудное кодирование; b — фазовое кодирование; c — автокорреляционная функция

Отметим в заключение, что исследование некоторых свойств дискретных сигналов и их автокорреляционных функций, проведенное в данной главе, имеет предварительный, вводный характер. Систематическое изучение этого круга вопросов будет предпринято в гл. 15.

▲
решите задачу 9

3.4. Взаимокорреляционная функция двух сигналов

В ряде теоретических и прикладных разделов радиотехники бывает удобным ввести особую характеристику совокупности двух сигналов — их *взаимокорреляционную функцию* (ВКФ), которая единым образом описывает как различие в форме сигналов, так и их взаимное расположение на оси времени.

Принцип определения взаимокорреляционной функции. Обобщая формулу (3.15), назовем взаимокорреляционной функцией двух вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ скалярное произведение вида

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t - \tau) dt. \quad (3.32)$$

Целесообразность подобной интегральной характеристики сигналов видна из следующего примера. Пусть, например, сигналы $u(t)$ и $v(t)$ в исходном состоянии ортогональны, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt = 0.$$

При прохождении этих сигналов через различные устройства возможно, что сигнал $v(t)$ будет сдвинут относительно сигнала $u(t)$ на некоторое время τ . Ясно, что ВКФ служит мерой «устойчивости» ортогонального состояния при сдвигах сигналов во времени.

Некоторые свойства взаимокорреляционной функции. Если в формуле (3.32) заменить переменную интегрирования, введя

Результаты расчета по формулам (3.32), (3.33) совпадают, поскольку одно и то же взаимное положение сигналов будет достигнуто как при сдвиге $v(t)$ в сторону запаздывания, так и при сдвиге $u(t)$ в сторону опережения

$x = t - \tau$, так что $dt = dx$, то, очевидно, возможна и такая запись:

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + \tau) v(x) dx. \quad (3.33)$$

Поэтому

$$B_{uv}(\tau) = B_{vu}(-\tau). \quad (3.34)$$

В отличие от автокорреляционной функции одиночного сигнала, ВКФ, описывающая свойства системы двух неодинаковых сигналов, не является четной функцией аргумента τ : $B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau)$.

Если рассматриваемые сигналы имеют конечные энергии, то их взаимокорреляционная функция ограничена. Это утверждение следует из неравенства Коши – Буяковского:

$$|B_{uv}(\tau)| = |(u, v_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v_\tau\|,$$

откуда

$$|B_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad (3.35)$$

так как сдвиг сигнала во времени не влияет на значение его нормы.

Следует обратить внимание на то, что при $\tau = 0$ значения ВКФ вовсе не обязаны достигать максимума.

Пример 3.7. Вычислить функцию $B_{uv}(\tau)$ для случая, когда сигнал $u(t)$ – прямоугольный, а $v(t)$ – треугольный видеопульс. Их амплитуды U и длительности T одинаковы; в исходном состоянии (в отсутствие задержки) сигналы существуют на общем отрезке времени $[0, T]$.

При $0 \leq t \leq T$ рассматриваемые сигналы описываются так:

$$u(t) = U, \quad v(t) = Ut/T.$$

Если $\tau > 0$, т. е. сигнал $v(t)$ задержан во времени относительно $u(t)$, то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_{\tau}^T (t - \tau) dt.$$

Определив безразмерный параметр $\eta = \tau/T$ и проведя элементарные выкладки, приходим к результату:

$$B_{uv}(\eta) = (U^2 T/2) (1 - 2\eta + \eta^2). \quad (3.36)$$

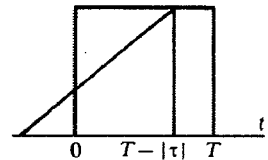
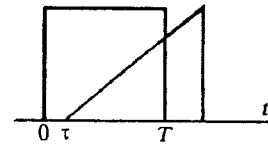
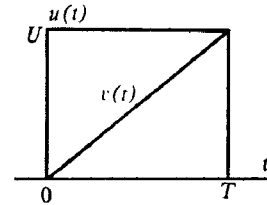
Если же $\tau < 0$, т. е. треугольный импульс опережает прямоугольный, то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_0^{T-|\tau|} (t - |\tau|) dt,$$

откуда

$$B_{uv}(\eta) = (U^2 T/2) (1 - \eta^2). \quad (3.37)$$

Функция, вычисленная по формулам (3.36) и (3.37), изображена на рис. 3.8.



Асимметрия графика вызвана тем, что площадь «перекрывания» данных импульсов изменяется по-разному в зависимости от направления сдвига

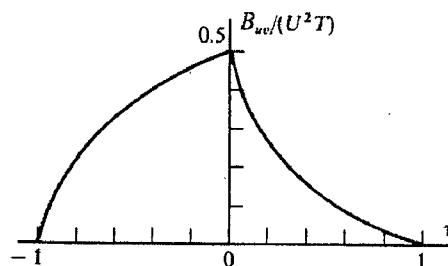


Рис. 3.8. График взаимокорреляционной функции прямоугольного и треугольного видеоимпульсов

Связь ВКФ с взаимной спектральной плотностью. Выразим ВКФ двух сигналов через их спектральные характеристики. Методика рассуждений полностью повторяет ту, которая применялась ранее при спектральном представлении автокорреляционной функции одиночного сигнала. На основании обобщенной формулы Рэлея

$$B_{uv}(\tau) = (u, v_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V_\tau^*(\omega) d\omega$$

и, поскольку спектр смещенного во времени сигнала $V_\tau(\omega) = V(\omega) \exp(-j\omega\tau)$, то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.38)$$

Имея в виду, что величина $W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega)$ есть взаимный энергетический спектр сигналов $u(t)$ и $v(t)$, определенный в бесконечном интервале частот $-\infty < \omega < \infty$, приходим к выводу: *взаимокорреляционная функция и взаимный энергетический спектр двух сигналов связаны парой преобразований Фурье.*

Обобщение на случай дискретных сигналов. Пусть сигналы $u(t)$ и $v(t)$ заданы в дискретной форме как совокупности отсчетов:

$$u = \{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots\},$$

$$v = \{\dots, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\},$$

следующих во времени с одинаковыми интервалами T . По аналогии с автокорреляционной функцией одиночного сигнала определим ВКФ двух дискретных сигналов по формуле

$$\hat{B}_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}, \quad (3.39)$$

где n — целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Продemonстрируем вычисление этой функции на примере двух четырехпозиционных сигналов Баркера: $u = \{1, 1, 1, -1\}$, $v = \{1, 1, -1, 1\}$.

Если $n > 0$, то сигнал v запаздывает относительно сигнала u . Подобно тому как это делалось в предыдущем

●
взаимокорреляционная функция дискретных сигналов

параграфе, составим таблицу, содержащую сигнал u и последовательность сдвинутых копий сигнала v :

...	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	...

▲

решите задачу 10

Вычисляя по формуле (3.39), получаем

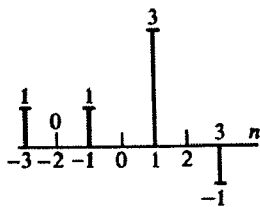
$$\hat{B}_{uv}(0) = 0, \hat{B}_{uv}(1) = 3, \hat{B}_{uv}(2) = 0, \hat{B}_{uv}(3) = -1.$$

Аналогично строим таблицу, отражающую сдвиги сигнала в сторону опережения:

...	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	...
...	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	...
...	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	...
...	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	0	...
...	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	0	...	...

и находим

$$\hat{B}_{uv}(-1) = 1, \hat{B}_{uv}(-2) = 0, \hat{B}_{uv}(-3) = 1.$$



Взаимокорреляционная функция двух сигналов Баркера

Диаграмма, представляющая ВКФ этих двух сигналов, имеет несимметричный вид; максимум функции достигается при сдвиге сигнала v на одну позицию.

Результаты

- ◇◇ Распределение взаимной энергии двух сигналов по частотам описывается их взаимным энергетическим спектром.
- ◇◇ Путем фильтрации соответствующих спектральных составляющих можно добиться приближенной ортогонализации сигналов.
- ◇◇ Распределение энергии сигнала по частотам устанавливает его энергетический спектр, равный квадрату модуля спектральной плотности.
- ◇◇ Степень сходства сигнала и его копии, смещенной во времени, описывается автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала.
- ◇◇ Энергетический спектр сигнала и его автокорреляционная функция взаимно связаны парой преобразований Фурье.
- ◇◇ Понятие автокорреляционной функции обобщается на случай многопозиционных дискретных сигналов.
- ◇◇ Сигнал обладает хорошими корреляционными свойствами, если уровень боковых лепестков АКФ значительно меньше уровня центрального лепестка.
- ◇◇ Преобразованием Фурье от взаимного энергетического спектра двух сигналов является их взаимокорреляционная функция.

Вопросы

1. Каков физический смысл взаимного энергетического спектра двух сигналов?
2. Каким условиям должна удовлетворять функция, описывающая взаимный энергетический спектр двух сигналов, для того, чтобы эти сигналы были ортогональными?

3. Может ли быть реализована ситуация, когда спектральные плотности двух сигналов

перекрываются и тем не менее эти сигналы ортогональны?

4. Играет ли роль фаза спектральной плотности сигнала при определении его энергетического спектра?

5. Какая доля общей энергии прямоугольного видеоимпульса содержится в пределах первого (основного) лепестка спектральной диаграммы?

6. Каковы технические предпосылки введения понятия АКФ сигнала?

7. Каким должен быть энергетический спектр сигнала, обладающего узким основным лепестком АКФ?

8. Какие ограничения можно наложить на вид АКФ сигнала?

9. В чем заключается принцип построения многопозиционного сложного сигнала?

10. Каким образом вводится дискретная АКФ многопозиционного сигнала?

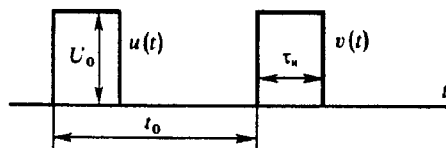
11. Назовите основное свойство сигналов Баркера. В чем заключается преимущество этих сигналов по сравнению с другими возможными многопозиционными сигналами?

12. Можно ли реализовать сигналы Баркера с произвольно большим числом позиций?

Задачи

1. Докажите, что если $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные сигналы, то мнимая часть произведения $U(\omega) V^*(\omega)$ есть нечетная функция частоты.

2. Исследуйте зависимость взаимного энергетического спектра двух одинаковых прямоугольных видеоимпульсов от t_0 :



3. Найдите формулу, описывающую энергетический спектр экспоненциального видеоимпульса вида $u(t) = U_0 \exp(-\alpha t) \sigma(t)$.

4. Видеоимпульс гауссова типа задан функцией $u(t) = U_0 \exp(-6 \cdot 10^{17} t^2)$.

Какая доля общей энергии этого импульса заключена в полосе частот 0 — 1.5 МГц?

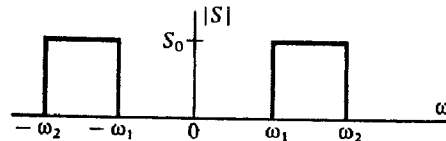
5. Найдите эффективную ширину спектра экспоненциального видеоимпульса (см. задачу 3), определив ее как полосу частот, в пределах которой сосредоточено 90% энергии сигнала.

6. Докажите, что АКФ экспоненциального видеоимпульса (см. задачу 3) описывается

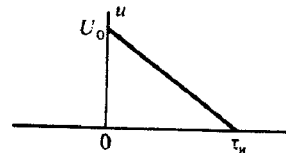
формулой

$$B_u(\tau) = (U_0^2/\alpha) \exp(-\alpha |\tau|).$$

7. Найдите АКФ сигнала $s(t)$, спектральная плотность которого вещественна и сосредоточена в пределах области частот $[\omega_1, \omega_2]$:



8. Вычислите АКФ видеоимпульса треугольной формы:



9. Найдите АКФ дискретного сигнала $\{1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\}$. Сравните полученный результат с автокорреляционной функцией семипозиционного сигнала Баркера.

10. Вычислите ВКФ двух сигналов Баркера со значениями $M = 5$ и $M = 7$.

Более сложные задания

11. Проведите экспериментальное исследование автокорреляционной функции шестипозиционного дискретного сигнала, у которого значения на каждой из позиций являются случайными числами, с равной вероятностью принимающими значения +1 или -1. В качестве «датчика» случайного числа используйте результаты бросания монеты.

Изучите полученную АКФ, сравнивая ее с АКФ сигнала Баркера.

Повторите эксперимент, взяв число позиций достаточно большим (15—20). Сделайте вывод о возможных путях создания сложных сигналов с хорошими корреляционными свойствами при большом числе позиций.

12. Найдите и исследуйте ВКФ двух экспоненциальных сигналов $u(t) = \exp(-\alpha_1 t) \sigma(t)$ и $v(t) = \exp(-\alpha_2 t) \sigma(t)$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Глава 4

Модулированные сигналы

Сигналы, поступающие из источника сообщений (микрофон, передающая телевизионная камера, датчик телеметрической системы), как правило, не могут быть непосредственно переданы по радиоканалу. Дело не только в том, что эти сигналы недостаточно велики по амплитуде. Гораздо существеннее их относительная *низкочастотность*. Чтобы осуществить эффективную передачу сигналов в какой-либо среде, необходимо перенести спектр этих сигналов из низкочастотной области в область достаточно высоких частот. Данная процедура получила в радиотехнике название *модуляции*.

4.1. Сигналы с амплитудной модуляцией

Прежде чем изучать этот простейший вид модулированных сигналов, рассмотрим кратко некоторые вопросы, касающиеся принципов модуляции любого вида.

Понятие несущего колебания. Идея способа, позволяющего переносить спектр сигнала в область высоких частот, заключается в следующем. Прежде всего в передатчике формируется вспомогательный высокочастотный сигнал, называемый *несущим колебанием*. Его математическая модель $u_{\text{нес}}(t) = f(t; a_1, a_2, \dots, a_m)$ такова, что имеется некоторая совокупность параметров $a_1, a_2, \dots, a_m$, определяющих форму этого колебания. Пусть $s(t)$ — низкочастотное сообщение, подлежащее передаче по радиоканалу. Если, по крайней мере, один из указанных параметров изменяется во времени пропорционально передаваемому сообщению, то несущее колебание приобретает новое свойство — оно несет в себе информацию, которая первоначально была заключена в сигнале $s(t)$.

Физический процесс управления параметрами несущего колебания и является модуляцией.

В радиотехнике широкое распространение получили системы модуляции, использующие в качестве несущего простое гармоническое колебание

$$u_{\text{нес}}(t) = U \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.1)$$

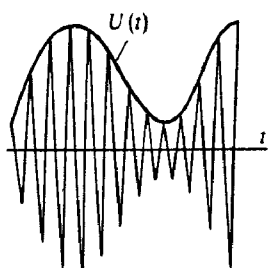
имеющее три свободных параметра U , ω и φ .

Изменяя во времени тот или иной параметр, можно получать различные виды модуляции.

Принцип амплитудной модуляции. Если переменной оказывается амплитуда сигнала $U(t)$, причем остальные два параметра ω и φ неизменны, то имеется *амплитудная модуляция* несущего колебания. Форма записи амплитудно-модулированного, или АМ-сигнала, такова:

$$u_{\text{АМ}}(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.2)$$

●
модуляция



АМ-сигнал и его огибающая

Осциллограмма АМ-сигнала имеет характерный вид (см. рис. 4.1). Обращает на себя внимание симметрия графика относительно оси времени. В соответствии с формулой (4.2) АМ-сигнал есть произведение *огибающей* $U(t)$ и *гармонического заполнения* $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. В большинстве практически интересных случаев огибающая изменяется во времени *гораздо медленнее*, чем высокочастотное заполнение.

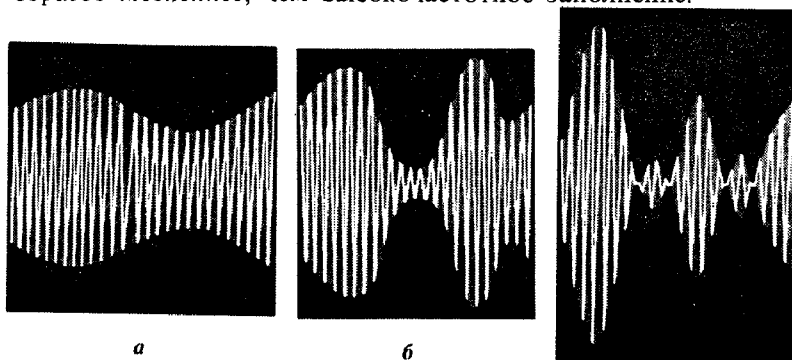


Рис. 4.1. АМ-сигналы при различных глубинах модуляции: а — неглубокая модуляция; б — глубокая модуляция; в — перемодуляция

При амплитудной модуляции связь между огибающей $U(t)$ и модулирующим полезным сигналом $s(t)$ принято определять следующим образом:

$$U(t) = U_m [1 + Ms(t)]. \quad (4.3)$$

Здесь U_m — постоянный коэффициент, равный амплитуде несущего колебания в отсутствие модуляции; M — коэффициент амплитудной модуляции.

Величина M характеризует глубину амплитудной модуляции. Смысл этого термина поясняется осциллограммами АМ-сигналов, изображенными на рис. 4.1, а–в.

При малой глубине модуляции относительное изменение огибающей невелико, т. е. $|Ms(t)| \ll 1$ во все моменты времени независимо от формы сигнала $s(t)$.

Если же в моменты времени, когда сигнал $s(t)$ достигает экстремальных значений, имеются приближенные равенства $Ms_{\max}(t) \approx 1$ или $Ms_{\min}(t) \approx -1$,

то говорят о глубокой амплитудной модуляции. Иногда вводят дополнительно *относительный коэффициент модуляции вверх*

$$M_{\text{в}} = (U_{\max} - U_m)/U_m$$

и *относительный коэффициент модуляции вниз*

$$M_{\text{н}} = (U_m - U_{\min})/U_m.$$

АМ-сигналы с малой глубиной модуляции в радиоканалах нецелесообразны ввиду неполного использования мощности передатчика. В то же время 100%-ная модуляция

огибающая и заполнение

При амплитудной модуляции не удастся обеспечить широкий динамический диапазон передаваемых сигналов

коэффициент амплитудной модуляции

На принципах амплитудной модуляции построено большинство радиовещательных систем

решите задачу 3

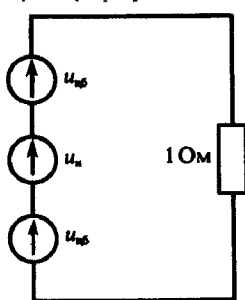
Если амплитуда увеличивается вдвое, то мощность возрастает в четыре раза

●
перемодуляция

Однотональная
модуляция симмет-
рична, т. е. $M_v =$
 $= M_n = M$

Как известно,
 $\cos x \cos y =$
 $= \frac{1}{2} [\cos(x + y) +$
 $+ \cos(x - y)]$

▲
решите задачу 1



вверх ($M_v = 1$) в два раза повышает амплитуду колебаний при пиковых значениях модулирующего сообщения. Дальнейший рост этой амплитуды, как правило, приводит к нежелательным искажениям из-за перегрузки выходных каскадов передатчика.

Не менее опасна слишком глубокая амплитудная модуляция вниз. На рис. 4.1, в изображена так называемая *перемодуляция* ($M_n > 1$). Здесь форма огибающей перестает повторять форму модулирующего сигнала.

Однотональная амплитудная модуляция. Простейший АМ-сигнал может быть получен в случае, когда модулирующим низкочастотным сигналом является гармоническое колебание с частотой Ω . Такой сигнал

$$u_{AM}(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.4)$$

называется *однотональным АМ-сигналом*.

Выясним, можно ли такой сигнал представить как сумму простых гармонических колебаний с различными частотами. Используя известную тригонометрическую формулу произведения косинусов, из выражения (4.4) сразу получаем

$$u_{AM}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \\ + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) устанавливает спектральный состав однотонального АМ-сигнала. Принята следующая терминология: ω_0 — *несущая частота*, $\omega_0 + \Omega$ — *верхняя боковая частота*, $\omega_0 - \Omega$ — *нижняя боковая частота*.

Строя по формуле (4.5) спектральную диаграмму однотонального АМ-сигнала, следует прежде всего обратить внимание на равенство амплитуд верхнего и нижнего боковых колебаний, а также на симметрию расположения этих спектральных составляющих относительно несущего колебания.

Энергетические характеристики АМ-сигнала. Рассмотрим вопрос о соотношении мощностей несущего и боковых колебаний. Источник однотонального АМ-сигнала эквивалентен трем последовательно включенным источникам гармонических колебаний:

$$u_{нec}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$u_{вв}(t) = \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0],$$

$$u_{нб}(t) = \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0].$$

Положим для определенности, что это источники ЭДС, соединенные последовательно и нагруженные на единичный резистор. Тогда мгновенная мощность АМ-сигнала будет численно равна квадрату суммарного напряжения:

$$p_{AM}(t) = u_{AM}^2 = u_{НЕС}^2 + u_{ВВ}^2 + u_{НБ}^2 + 2u_{НЕС}u_{ВВ} + 2u_{НЕС}u_{НБ} + 2u_{ВВ}u_{НБ}. \quad (4.6)$$

Чтобы найти среднюю мощность сигнала, величину $p(t)$ необходимо усреднить по достаточно большому отрезку времени T :

$$\langle p_{AM} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Легко убедиться в том, что при усреднении все взаимные мощности дадут нулевой результат, поэтому средняя мощность АМ-сигнала окажется равной сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$\langle p_{AM} \rangle = \langle p_{НЕС} \rangle + [\langle p_{ВВ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle] = \frac{U_m^2}{2} + \frac{U_m^2 M^2}{4}. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что

$$[\langle p_{ВВ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle] / \langle p_{НЕС} \rangle = M^2 / 2. \quad (4.8)$$

Так, даже при 100 %-ной модуляции ($M = 1$) доля мощности обоих боковых колебаний составляет всего лишь 50 % от мощности немодулированного несущего колебания. Поскольку информация о сообщении заключена в боковых колебаниях, можно отметить неэффективность использования мощности при передаче АМ-сигнала.

Амплитудная модуляция при сложном модулирующем сигнале. На практике однотональные АМ-сигналы используются редко. Гораздо более реален случай, когда модулирующий низкочастотный сигнал имеет сложный спектральный состав. Математической моделью такого сигнала может быть, например, тригонометрическая сумма

$$s(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i). \quad (4.9)$$

Здесь частоты Ω_i образуют упорядоченную возрастающую последовательность $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$, в то время как амплитуды α_i и начальные фазы Φ_i произвольны.

Подставив формулу (4.9) в (4.3), получим

$$u_{AM}(t) = U_m \left[1 + \sum_{i=1}^N M \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.10)$$

Введем совокупность *парциальных (частичных) коэффициентов модуляции*

$$M_i = M \alpha_i \quad (4.11)$$

и запишем аналитическое выражение сложномодулированного (многотонального) АМ-сигнала в форме, которая обобщает выражение (4.4):

$$u_{AM}(t) = U_m \left[1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.12)$$

В выражении (4.6) присутствуют как собственные мощности источников, так и взаимные мощности, пропорциональные попарным произведениям мгновенных напряжений

▲
решите задачу 5

В отличие от ряда Фурье частоты Ω_i не обязаны быть кратными друг другу

●
парциальные коэффициенты модуляции

Спектральное разложение проводится так же, как и для одно-тонального АМ-сигнала:

$$u_{AM}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i]. \quad (4.13)$$

На рис. 4.2, а изображена спектральная диаграмма модулирующего сигнала $s(t)$, построенная в соответствии с формулой (4.9). Рис. 4.2, б воспроизводит спектральную диаграмму многотонального АМ-сигнала, отвечающего этому модулирующему колебанию.

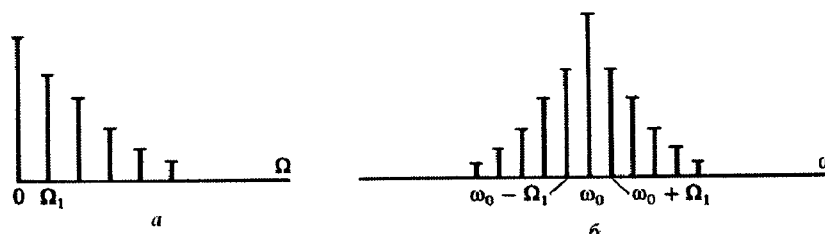


Рис. 4.2. Спектральные диаграммы:

а — модулирующего сигнала; б — АМ-сигнала при многотональной модуляции

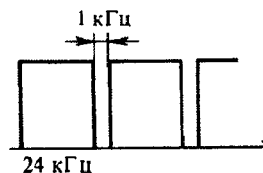
■ структура спектра сигнала с амплитудной модуляцией

Итак, в спектре сложномодулированного АМ-сигнала, помимо несущего колебания, содержатся группы верхних и нижних боковых колебаний. Спектр верхних боковых колебаний является масштабной копией спектра модулирующего сигнала, сдвинутой в область высоких частот на величину ω_0 . Спектр нижних боковых колебаний также повторяет спектральную диаграмму сигнала $s(t)$, но располагается зеркально относительно несущей частоты ω_0 .

Из сказанного следует важный вывод: *ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наивысшей частоты в спектре модулирующего низкочастотного сигнала.*

Пример 4.1. Оценить число вещательных радиоканалов, которые можно разместить в диапазоне частот от 0.5 до 1.5 МГц (примерные границы средневолнового вещательного диапазона).

Для удовлетворительного воспроизведения сигналов радиовещания необходимо воспроизводить звуковые частоты от 100 Гц до 12 кГц. Таким образом, полоса частот, отводимая одному АМ-каналу, равна 24 кГц. Чтобы избежать перекрестных помех между каналами, следует предусмотреть защитный интервал шириной в 1 кГц. Поэтому допустимое число каналов $N = (1.5 - 0.5) \cdot 10^6 / (25 \cdot 10^3) = 40$.



Амплитудно-манипулированные сигналы. Важным классом многотональных АМ-сигналов являются так называемые *манипулированные сигналы*. В простейшем случае это — последовательности радиоимпульсов, отделенных друг от друга паузами. Такие сигналы используются в радиотелеграфии и в системах передачи дискретной информации по радиоканалам.

Если $s(t)$ — функция, в каждый момент времени принимающая значение либо 0, либо 1, то амплитудно-манипулированный сигнал представляется в виде

$$u_{\text{ман}}(t) = U_m s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.14)$$

Пусть, например, функция $s(t)$ отображает периодическую последовательность видеоимпульсов, рассмотренную в примере 2.1 (см. гл. 2). Считая, что амплитуда этих импульсов $A = 1$, на основании (4.14) имеем при $\varphi_0 = 0$:

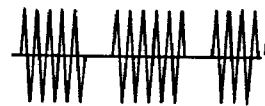
$$u_{\text{ман}}(t) = \frac{U_m}{q} \cos \omega_0 t + \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos(\omega_0 + n\omega_1)t + \\ + \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos(\omega_0 - n\omega_1)t, \quad (4.15)$$

где q — скважность последовательности.

Векторная диаграмма АМ-сигнала. Иногда полезным может оказаться графическое изображение АМ-сигнала посредством суммы векторов, вращающихся в комплексной плоскости.

Для простоты рассмотрим однотоновую модуляцию. Мгновенное значение несущего колебания $u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ есть проекция неподвижного во времени вектора $\dot{U}_{\text{нес}} = U_m \exp(j\varphi_0)$ на ось отсчета углов, которая вращается вокруг начала координат с угловой скоростью ω_0 в направлении часовой стрелки (рис. 4.3).

Верхнее боковое колебание отображается на диаграмме вектором $\dot{U}_{\text{вб}}$ длиной $U_m M/2$, причем его фазовый угол при



Оциллограмма амплитудно-манипулированного сигнала

Амплитудно-манипулированному сигналу присущи все особенности АМ-сигнала со сложной модуляцией. Однако, по крайней мере теоретически, спектр такого сигнала простирается неограниченно широко

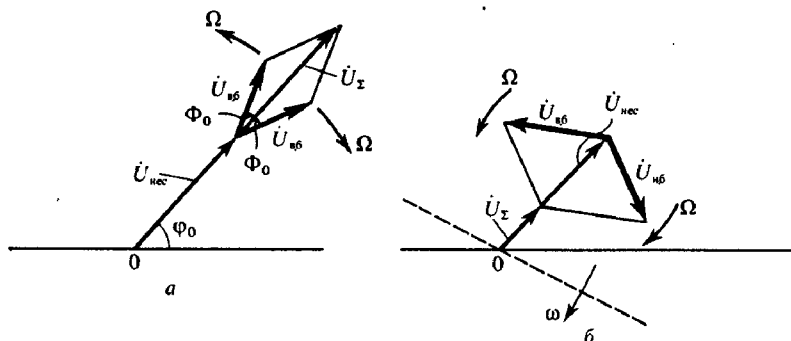
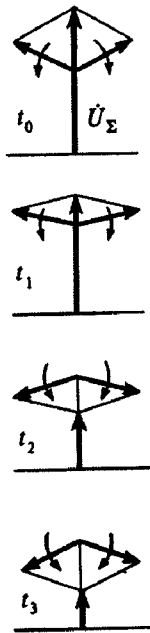


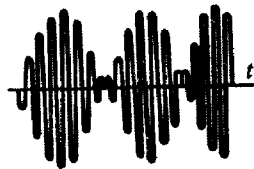
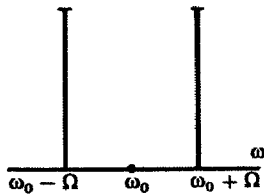
Рис. 4.3. Векторные диаграммы однотонового АМ-сигнала: а — при $t = 0$; б — при $t > 0$



Векторные диаграммы АМ-сигнала в четыре последовательных момента времени



решите задачи 2 и 4



Осциллограмма сигнала с балансной модуляцией



бияния

$t = 0$ равен сумме начальных фаз несущего и модулирующего сигналов [см. формулу (4.5)]. Такой же вектор для нижнего бокового колебания отличается лишь знаком в выражении для его фазового угла. Итак, на комплексной плоскости необходимо построить сумму трех векторов

$$\dot{U}_{\text{нес}} = U_m e^{j\varphi_0}; \quad \dot{U}_{\text{ВБ}} = U_m e^{j(\varphi_0 + \Phi_0)}; \quad \dot{U}_{\text{НБ}} = U_m e^{j(\varphi_0 - \Phi_0)}.$$

Легко видеть, что эта сумма будет ориентирована вдоль вектора $\dot{U}_{\text{нес}}$. Мгновенное значение АМ-сигнала при $t = 0$ окажется равным проекции конца результирующего вектора на горизонтальную ось (рис. 4.3, а).

С течением времени, помимо отмеченного вращения оси отсчета углов, будут наблюдаться следующие трансформации чертежа (рис. 4.3, б): 1) вектор $\dot{U}_{\text{ВБ}}$ будет вращаться вокруг точки своего приложения с угловой скоростью Ω в направлении против часовой стрелки, поскольку фаза верхнего бокового колебания $(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0$ возрастает быстрее фазы несущего сигнала; 2) вектор $\dot{U}_{\text{НБ}}$ будет вращаться также с угловой скоростью Ω , но в противоположном направлении.

Строя суммарный вектор $\dot{U}_{\Sigma}$ и проецируя его на ось отсчета углов, можно найти мгновенные значения $u_{\text{АМ}}(t)$ в любой момент времени.

Балансная амплитудная модуляция. Как было показано, значительная доля мощности обычного АМ-сигнала сосредоточена в несущем колебании. Для более эффективного использования мощности передатчика можно формировать АМ-сигналы с подавленным несущим колебанием, реализуя так называемую балансную амплитудную модуляцию. На основании формулы (4.4) представление однотонового АМ-сигнала с балансной модуляцией таково:

$$\begin{aligned} u_{\text{БМ}}(t) &= U_m M \cos(\Omega t + \Phi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \\ &+ \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Имеет место перемножение двух сигналов — модулирующего и несущего. Колебания вида (4.16) с физической точки зрения являются *биениями* двух гармонических сигналов с одинаковыми амплитудами $U_m M/2$ и частотами, равными верхней и нижней боковым частотам.

При многотональной балансной модуляции аналитическое выражение сигнала принимает вид

$$\begin{aligned} u_{\text{БМ}}(t) &= \frac{1}{2} U_m \sum_{i=1}^N M_i \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] + \\ &+ \frac{1}{2} U_m \sum_{i=1}^N M_i \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Как и при обычной амплитудной модуляции, здесь наблюдаются две симметричные группы верхних и нижних боковых колебаний.

Если рассмотреть осциллограмму биений, может показаться неясным, почему в спектре этого сигнала нет несущей частоты, хотя налицо присутствие высокочастотного заполнения, изменяющегося во времени именно с этой частотой.

Дело в том, что при переходе огибающей биений через нуль фаза высокочастотного заполнения скачком изменяется на 180° , поскольку функция $\cos(\Omega t + \Phi_0)$ имеет разные знаки слева и справа от нуля. Если такой сигнал подать на высокочастотную колебательную систему (например, LC-контур), настроенную на частоту ω_0 , то выходной эффект будет очень мал, стремясь к нулю при возрастании добротности. Колебания в системе, возбужденные одним периодом биений, будут гаситься последующим периодом. Именно так с физических позиций принято рассматривать вопрос о реальном смысле спектрального разложения сигнала. К этой проблеме вернемся вновь в гл. 9.

Однополосная амплитудная модуляция. Еще более интересное усовершенствование принципа обычной амплитудной модуляции заключается в формировании сигнала с подавленной верхней или нижней боковой полосой частот.

Сигналы с одной боковой полосой (ОБП-или SSB-сигналы — от англ. single sideband) по внешним характеристикам напоминают обычные АМ-сигналы. Например, одностональный ОБП-сигнал с подавленной нижней боковой частотой записывается в виде

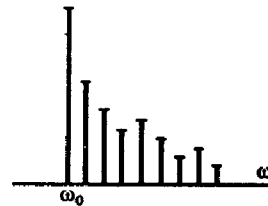
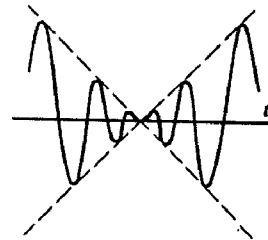
$$u_{\text{ОБП}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0].$$

Проводя тригонометрические преобразования, получаем

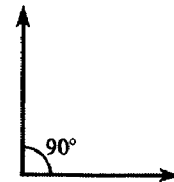
$$\begin{aligned} u_{\text{ОБП}}(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos(\Omega t + \Phi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &\quad - \frac{U_m M}{2} \sin(\Omega t + \Phi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_m \left[1 + \frac{M}{2} \cos(\Omega t + \Phi_0) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &\quad - \frac{U_m M}{2} \sin(\Omega t + \Phi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Два последних слагаемых представляют собой произведение двух функций, одна из которых изменяется во времени медленно, а другая — быстро. Принимая во внимание, что «быстрые» сомножители находятся по отношению друг к другу во временной квадратуре, вычисляем медленно изменяющуюся огибающую ОБП-сигнала:

Балансная амплитудная модуляция, несмотря на свои достоинства, не нашла широкого применения в технике радиовещания и связи

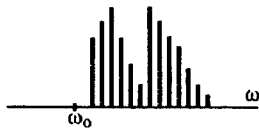


Спектр однопольного сигнала



Векторная диаграмма двух сигналов, находящихся в квадратуре

Основное преимущество ОБП-сигналов — двукратное сокращение полосы занимаемых частот, что оказывается существенным для частотного уплотнения радиоканалов, например, при связи на коротких волнах в условиях предельной загруженности частотного диапазона



Спектр однополосного сигнала с подавленной несущей частотой

●
полная фаза

●
фазовая модуляция

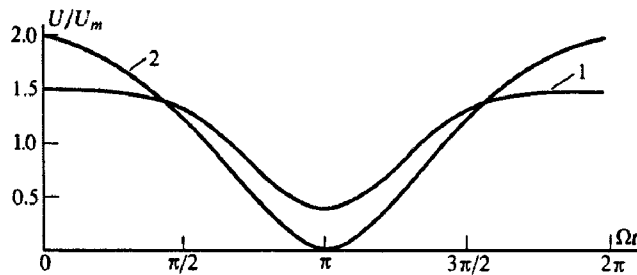


Рис. 4.4. Огибающие однотоновых модулированных сигналов при $M = 1$:

1 — ОБП-сигнала; 2 — обычного АМ-сигнала

$$U(t) = U_m \sqrt{\left[1 + \frac{M}{2} \cos(\Omega t + \Phi_0)\right]^2 + \frac{M^2}{4} \sin^2(\Omega t + \Phi_0)} =$$

$$= U_m \sqrt{1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0) + \frac{M^2}{4}}. \quad (4.18)$$

График огибающей ОБП-сигнала, рассчитанный по формуле (4.18) при $M = 1$, изображен на рис. 4.4. Здесь же для сравнения построена огибающая обычного однотонового АМ-сигнала с тем же коэффициентом модуляции.

Сравнение приведенных кривых показывает, что непосредственная демодуляция ОБП-сигнала по его огибающей будет сопровождаться значительными искажениями.

Дальнейшим усовершенствованием систем ОБП является частичное или полное подавление несущего колебания. При этом мощность передатчика используется еще более эффективно.

4.2. Сигналы с угловой модуляцией

Будем изучать модулированные радиосигналы, которые получаются за счет того, что в несущем гармоническом колебании $u_{\text{НЕС}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ передаваемое сообщение $s(t)$ изменяет либо частоту ω , либо начальную фазу φ ; амплитуда U_m остается неизменной. Поскольку аргумент гармонического колебания $\psi(t) = \omega t + \varphi$, называемый *полной фазой*, определяет текущее значение фазового угла, такие сигналы получили название *сигналов с угловой модуляцией*.

Виды угловой модуляции. Предположим вначале, что полная фаза $\psi(t)$ связана с сигналом $s(t)$ зависимостью

$$\psi(t) = \omega_0 t + ks(t), \quad (4.19)$$

где ω_0 — значение частоты в отсутствие полезного сигнала; k — некоторый коэффициент пропорциональности. Модуляцию, отвечающую соотношению (4.19), называют *фазовой модуляцией* (ФМ):

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + ks(t)]. \quad (4.20)$$

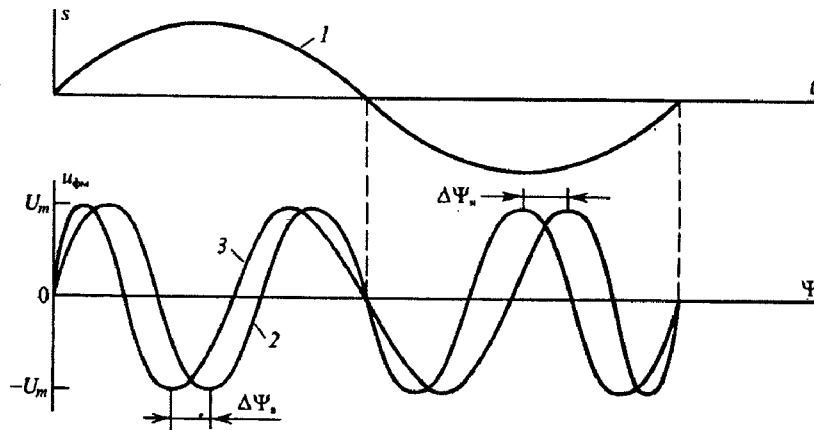


Рис. 4.5. Фазовая модуляция:

1 – модулирующий низкочастотный сигнал; 2 – немодулированное гармоническое колебание; 3 – сигнал с фазовой модуляцией

Если сигнал $s(t) = 0$, то ФМ-колебание является простым гармоническим колебанием. С увеличением значений сигнала $s(t)$ полная фаза $\psi(t)$ растет во времени быстрее, чем по линейному закону. При уменьшении значений модулирующего сигнала происходит спад скорости роста $\psi(t)$ во времени. На рис. 4.5 показано построение графика ФМ-сигнала.

В моменты времени, когда сигнал $s(t)$ достигает экстремальных значений, абсолютный фазовый сдвиг между ФМ-сигналом и немодулированным гармоническим колебанием оказывается наибольшим. Предельное значение этого фазового сдвига называют *девиацией фазы* $\Delta\psi$. В общем случае, когда сигнал $s(t)$ изменяет знак, принято различать *девиацию фазы вверх* $\Delta\psi_v = ks_{\max}$ и *девиацию фазы вниз* $\Delta\psi_n = ks_{\min}$.

На векторной диаграмме изображающий вектор постоянной длины будет совершать вращение с непостоянной угловой скоростью. Мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала с угловой модуляцией определяется как первая производная от полной фазы по времени:

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}, \quad (4.21)$$

так что

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau + \text{const.} \quad (4.22)$$

При частотной модуляции сигнала (ЧМ) между величинами $s(t)$ и $\omega(t)$ имеется связь вида

$$\omega(t) = \omega_0 + ks(t). \quad (4.23)$$

Поэтому

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right]. \quad (4.24)$$

● девиация фазы

● мгновенная частота

● частотная модуляция



Осциллограмма
типичного сигнала
с угловой модуля-
цией

Естественными параметрами ЧМ-сигнала общего вида в соответствии с формулой (4.23) являются *девиация частоты вверх* $\Delta\omega_{\text{в}} = ks_{\text{max}}$ и *девиация частоты вниз* $\Delta\omega_{\text{н}} = ks_{\text{min}}$.

Если $s(t)$ — достаточно гладкая функция, то внешне осциллограммы ФМ- и ЧМ-сигналов не отличаются. Однако имеется принципиальная разница: фазовый сдвиг между ФМ-сигналом и немодулированным колебанием пропорционален $s(t)$, в то время как для ЧМ-сигнала этот сдвиг пропорционален интегралу от передаваемого сообщения.

Однотональные сигналы с угловой модуляцией. Анализ ФМ- и ЧМ-сигналов с математической точки зрения гораздо сложнее, чем исследование АМ-колебаний. Поэтому основное внимание будет уделено простейшим однотональным сигналам.

В случае однотонального ЧМ-сигнала мгновенная частота $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \Phi_0)$,

где $\Delta\omega$ — девиация частоты сигнала. На основании формулы (4.22) полная фаза такого сигнала

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0,$$

где φ_0 — некоторый постоянный фазовый угол.

Отсюда видно, что величина

$$m = \Delta\omega/\Omega, \quad (4.25)$$

●
индекс угловой мо-
дуляции

называемая *индексом* однотональной угловой модуляции, представляет собой девиацию фазы такого сигнала, выраженную в радианах.

Для краткости положим, что неизменные во времени фазовые углы $\varphi_0 = \Phi_0 = 0$, и выразим мгновенное значение ЧМ-сигнала в виде

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t). \quad (4.26)$$

▲
решите задачи 6
и 7

Аналитическая форма записи однотонального ФМ-сигнала будет аналогичной. Однако нужно иметь в виду следующее: ЧМ- и ФМ-сигналы ведут себя по-разному при изменении частоты модуляции и амплитуды модулирующего сигнала.

■
отличие между
ЧМ- и ФМ-сигна-
лами

При частотной модуляции девиация частоты $\Delta\omega$ пропорциональна амплитуде низкочастотного сигнала. В то же время величина $\Delta\omega$ не зависит от частоты модулирующего сигнала. В случае фазовой модуляции ее индекс m оказывается пропорциональным амплитуде низкочастотного сигнала независимо от его частоты. Как следствие этого, девиация частоты при фазовой модуляции в соответствии с формулой (4.25) линейно увеличивается с ростом частоты.

Пример 4.2. Радиостанция, работающая в УКВ-диапазоне с несущей частотой $f_0 = 80$ МГц, излучает ФМ-сигнал, промодулированный частотой $F = 15$ кГц. Индекс модуляции $m = 12$. Найти пределы, в которых изменяется мгновенная частота сигнала.

Математическая модель сигнала имеет вид

$$u(t) = U_m \cos [2\pi \cdot 8 \cdot 10^7 t + 12 \sin(2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^4 t)].$$

Девияция частоты составит $\Delta f = mF = 1.8 \cdot 10^5 = 180$ кГц.

Таким образом, при модуляции мгновенная частота сигнала изменяется в пределах от $f_{\min} = 80 - 0.18 = 79.82$ МГц до $f_{\max} = 80 + 0.18 = 80.18$ МГц.

Спектральное разложение ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции. Задачу о представлении сигналов с угловой модуляцией посредством суммы гармонических колебаний несложно решить в случае, когда $m \ll 1$. Для этого преобразуем формулу (4.26) следующим образом:

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = U_m \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (4.27)$$

Поскольку индекс угловой модуляции мал, воспользуемся приближенными равенствами

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1; \quad \sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t.$$

На основании этого из равенства (4.27) получаем

$$u(t) \approx U_m \cos \omega_0 t + \frac{mU_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{mU_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (4.28)$$

Таким образом, показано, что при $m \ll 1$ в спектре сигнала с угловой модуляцией содержатся несущее колебание и две боковые составляющие (верхняя и нижняя) на частотах $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Индекс m играет здесь такую же роль, как коэффициент амплитудной модуляции M [ср. с формулой (4.5)]. Однако можно обнаружить и существенное различие спектров АМ-сигнала и колебания с угловой модуляцией. Для спектральной диаграммы (рис. 4.6, а), построенной по формуле (4.28), характерно то, что нижнее боковое колебание имеет дополнительный фазовый сдвиг на 180° .

Как следствие этого, сумма векторов, отображающих оба боковых колебания (рис. 4.6, б), всегда перпендикулярна вектору $\dot{U}_{\text{нес}}$. С течением времени вектор $\dot{U}_{\Sigma}$ будет «качаться» вокруг центрального положения. Незначительные изменения длины этого вектора обусловлены приближенным характером анализа, и при очень малых m ими можно пренебречь.

Колебания, характеризующиеся условием $m \ll 1$, принято называть узкополосными ЧМ- или ФМ-сигналами

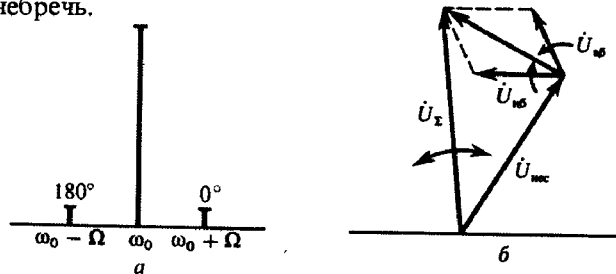
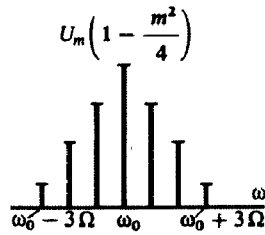
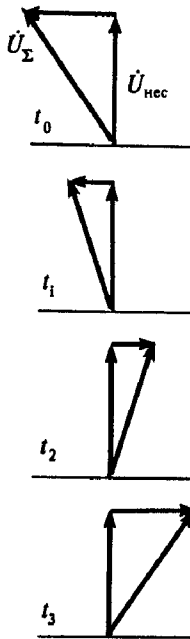


Рис. 4.6. Диаграммы сигнала с угловой модуляцией при $m \ll 1$: а – спектральная; б – векторная



Более точный вид спектральной диаграммы

▲
решите задачу 11



Векторные диаграммы сигнала с угловой модуляцией в четыре последовательные моменты времени

Более точный анализ спектрального состава сигналов с угловой модуляцией. Можно попытаться уточнить полученный результат, воспользовавшись двумя членами ряда в разложении гармонических функций малого аргумента. При этом формула (4.27) будет выглядеть так:

$$u(t) \approx U_m \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \sin^2 \Omega t \right) \cos \omega_0 t - U_m \left(m \sin \Omega t - \frac{1}{6} m^3 \sin^3 \Omega t \right) \sin \omega_0 t.$$

Несложные тригонометрические преобразования приводят к результату:

$$u(t) = U_m \left(1 - \frac{m^2}{4} \right) \cos \omega_0 t + U_m m \left(1 - \frac{m^2}{8} \right) \times \\ \times [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + U_m \left(\frac{m^2}{8} \right) \times \\ \times [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ + U_m \left(\frac{m^3}{48} \right) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t]. \quad (4.29)$$

Эта формула свидетельствует о том, что в спектре сигнала с однотоновой угловой модуляцией, помимо известных составляющих, содержатся также верхние и нижние боковые колебания, соответствующие гармоникам частоты модуляции. Поэтому спектр такого сигнала сложнее спектра аналогичного АМ-сигнала. Отметим также, что возникновение новых спектральных составляющих приводит к перераспределению энергии по спектру. Так, из формулы (4.29) видно, что с ростом m амплитуда боковых составляющих увеличивается, в то время как амплитуда несущего колебания уменьшается пропорционально множителю $(1 - m^2/4)$.

Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса. Для простейшего случая однотонового ЧМ- или ФМ-сигнала можно найти общее выражение спектра, справедливое при любом значении индекса модуляции m .

В разделе курса математики, посвященном специальным функциям, доказывается, что экспонента $\exp(jm \sin x)$ с мнимым показателем специального вида, периодическая на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$, разлагается в комплексный ряд Фурье:

$$e^{jm \sin x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jkx}, \quad (4.30)$$

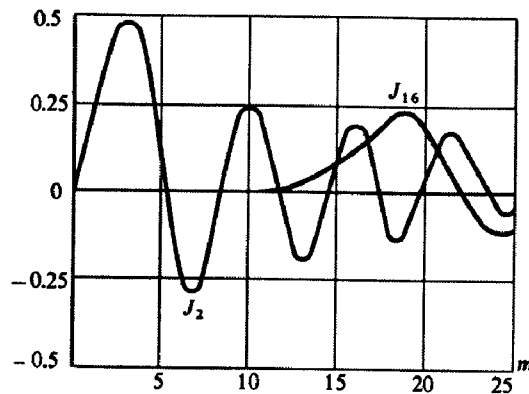
где m — любое вещественное число; $J_k(m)$ — функция Бесселя k -го индекса от аргумента m .

Сравнивая формулы (4.30) и (4.27), а также подставляя $x = \Omega t$, перепишем последнюю из указанных формул так:

$$u(t) = U_m \operatorname{Re}(e^{j\omega_0 t} e^{jm \sin \Omega t}) = U_m \operatorname{Re}(e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jk\Omega t}). \quad (4.31)$$

Отсюда получаем следующую математическую модель ЧМ- или ФМ-сигнала с любым значением индекса модуляции:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \quad (4.32)$$

Рис. 4.7. Графики функций Бесселя $J_2(m)$ и $J_{16}(m)$

Спектр однотонового сигнала с угловой модуляцией в общем случае содержит бесконечное число составляющих, частоты которых равны $\omega_0 \pm k\Omega$; амплитуды этих составляющих пропорциональны значениям $J_k(m)$.

В теории функций Бесселя доказывается, что функции с положительными и отрицательными индексами связаны между собой:

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m).$$

Поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k\Omega$ и $\omega_0 - k\Omega$ совпадают, если k — четное число, и отличаются на 180° , если k — нечетное.

Для детального анализа и построения спектральных диаграмм необходимо знать поведение функций $J_k(m)$ при различных m в зависимости от k . На рис. 4.7 приведены графики двух функций Бесселя, существенно различающихся своими индексами.

Можно заметить следующее: чем больше индекс функции Бесселя, тем протяженнее область аргументов, при которых эта функция очень мала. Этот факт отображает табл. 4.1.

Табл. 4.1 совместно с формулой (4.32) позволяет построить типичные спектральные диаграммы сигнала с однотоновой угловой модуляцией при не слишком больших значениях индекса m (рис. 4.8).

Важно отметить, что с ростом индекса модуляции расширяется полоса частот, занимаемая сигналом. Обычно полагают, что допустимо пренебречь всеми спектральными составляющими с номерами $k > m + 1$. Отсюда следует оценка практической ширины спектра сигнала с угловой модуляцией (с^{-1}):

$$\Pi_{\text{практ}} = 2(m + 1)\Omega. \quad (4.33)$$

Как правило, реальные ЧМ- и ФМ-сигналы характеризуются условием $m \gg 1$. В этом случае

$$\Pi_{\text{практ}} \approx 2m\Omega = 2\Delta\omega.$$

$$(4.34) \quad \blacktriangle \text{ решите задачу 12}$$

■
характер спектра однотонового сигнала с угловой модуляцией

■
практическая ширина спектра ЧМ- и ФМ-сигналов

Таблица 4.1 Значения функций Бесселя $J_k(m)$

$k \backslash m$	1	2	3	4	5
0	0.765	0.224	-0.260	-0.397	-0.178
1	0.440	0.577	0.339	-0.066	-0.328
2	0.115	0.353	0.486	0.364	0.047
3	0.020	0.129	0.309	0.430	0.365
4	0.002	0.034	0.132	0.281	0.391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0.007	0.043	0.132	0.261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0.001	0.011	0.049	0.131
7	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0.003	0.015	0.053

Здесь выделена область, в которой функции Бесселя становятся пренебрежимо малыми

Сигналы с угловой модуляцией часто используются в системах высокочастотного радиовещания УКВ-диапазона

Таким образом, сигнал с угловой модуляцией занимает полосу частот, приблизительно равную удвоенной девиации частоты.

Как было выяснено, для передачи амплитудно-модулированного сигнала требуется полоса частот, равная 2Ω , т.е. в m раз меньшая. Большая широкополосность ЧМ- и ФМ-сигналов обуславливает их применимость для целей радиосвязи лишь на очень высоких частотах, в диапазонах метровых и более коротких волн. Однако именно широкополосность приводит к гораздо большей помехоустойчивости сигналов с угловой модуляцией по сравнению с АМ-сигналами. Сравнительный анализ помехоустойчивости различных видов модуляции будет детально проведен в гл. 16.

Как отмечалось, рост индекса модуляции приводит к перераспределению мощности в спектре модулированного сигнала. В частности, если значение m выбрано таким, что

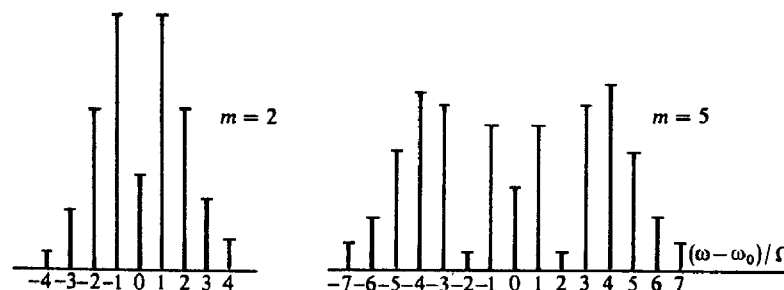


Рис. 4.8. Спектральные диаграммы сигнала с угловой модуляцией при двух значениях индекса m (амплитуды представлены в относительном масштабе)

$J_0(m) = 0$, то несущее колебание на частоте ω_0 в спектре будет отсутствовать. Значения m , являющиеся корнями данного уравнения, образуют бесконечную возрастающую последовательность чисел m_v ($v = 1, 2, \dots$ — номер корня). Приведем для справок табл. 4.2.

Таблица 4.2 Корни уравнения $J_0(m) = 0$

v	1	2	3	4	5	6	7
m_v	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931	18.071	21.212

Пример 4.3. Однотональный ЧМ-сигнал имеет девиацию частоты $\Delta f = 240$ кГц. Найти частоты модуляции F , при которых несущее колебание в спектре сигнала будет отсутствовать.

Индекс модуляции $m = \Delta\omega/\Omega = \Delta f/F$, т. е. частота модуляции $F = \Delta f/m$. Обращаясь к табл. 4.2, находим последовательность частот, удовлетворяющую поставленному условию: $F_1 = 240/2.405 = 99.792$ кГц, $F_2 = 240/5.520 = 43.474$ кГц, $F_3 = 240/8.654 = 27.732$ кГц и т. д.

Угловая модуляция при негармоническом модулирующем сигнале. Интересная особенность колебаний с угловой модуляцией проявляется в случае, когда модулирующий сигнал не является гармоническим. Рассмотрим для простоты сигнал, промодулированный лишь двумя низкими частотами:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) = \\ &= U_m \cos(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \cos \omega_0 t - \\ &\quad - U_m \sin(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Положим, что парциальные индексы модуляции m_1 и m_2 малы настолько, что можно пользоваться приближенными выражениями для косинуса и синуса: $\cos x \approx 1 - x^2/2$; $\sin x \approx x$.

Выполнив несколько громоздкие, но вполне элементарные тригонометрические преобразования, представим исходный сигнал в виде суммы

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m [1 - (m_1^2 + m_2^2)/4] \cos \omega_0 t + 1/2 m_1 U_m [\cos(\omega_0 + \Omega_1)t - \\ &\quad - \cos(\omega_0 - \Omega_1)t] + 1/2 m_2 U_m [\cos(\omega_0 + \Omega_2)t - \\ &\quad - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t] + 1/8 m_1^2 U_m [\cos(\omega_0 + 2\Omega_1)t + \\ &\quad + \cos(\omega_0 - 2\Omega_1)t] + 1/8 m_2^2 U_m [\cos(\omega_0 + 2\Omega_2)t + \\ &\quad + \cos(\omega_0 - 2\Omega_2)t] + 1/2 m_1 m_2 U_m [\cos(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t + \\ &\quad + \cos(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t - \\ &\quad - \cos(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Спектральная диаграмма такого двухтонального сигнала изображена на рис. 4.9.

Следует обратить внимание на то, что в спектре рассматриваемого сигнала, помимо частот $\omega_0 \pm \Omega_1$, $\omega_0 \pm \Omega_2$,

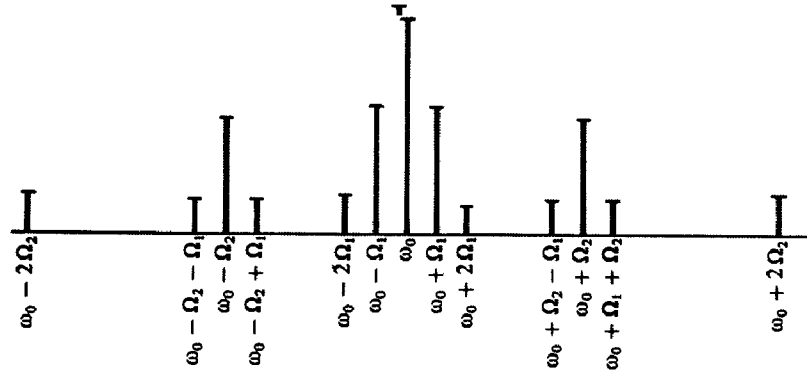


Рис. 4.9. Спектральная диаграмма сигнала с двухтональной угловой модуляцией при малых значениях парциальных индексов модуляции m_1 и m_2

$\omega_0 \pm 2\Omega_1$, $\omega_0 \pm 2\Omega_2$, присутствуют так называемые *комбинационные частоты* $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$ с четырьмя возможными знаками. Амплитуды этих составляющих зависят от произведения парциальных индексов модуляции.

Можно показать, что в общем случае, когда угловая модуляция осуществляется группой низкочастотных колебаний с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и парциальными индексами $m_1, m_2, \dots, m_N$ соответственно, спектральное представление сигнала таково:

$$u(t) = U_m \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} J_{k_1}(m_1) J_{k_2}(m_2) \dots J_{k_N}(m_N) \times \\ \times \cos(\omega_0 + k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \dots + k_N\Omega_N)t. \quad (4.37)$$

▲

решите задачу 17

Не следует смешивать термины «нелинейная модуляция» и «нелинейная электрическая цепь»

Таким образом, при прочих равных условиях спектр колебания со сложной угловой модуляцией гораздо богаче спектра аналогичного АМ-сигнала. Подчеркивая взаимодействие отдельных составляющих модулирующего сигнала, угловую модуляцию, в отличие от амплитудной, иногда называют *модуляцией нелинейного типа*.

4.3. Сигналы с внутриимпульсной частотной модуляцией

В настоящем параграфе будут изучаться спектральные и корреляционные свойства особого класса модулированных сигналов, получивших в последнее время широкое распространение в радиолокации. Эти сигналы отличаются от обычных радиоимпульсов тем, что их высокочастотное заполнение имеет переменную частоту. Чаще всего используется внутриимпульсная частотная модуляция с линейным законом изменения мгновенной частоты во времени.

Принцип линейной частотной модуляции (ЛЧМ). Рассмотрим радиоимпульс с огибающей прямоугольной формы. Будем полагать, что частота заполнения линейно нарастает от начала импульса к его концу. Конкретизируя математическую

модель сигнала, предположим, что его длительность равна τ_n , причем точка $t = 0$ соответствует середине импульса, а мгновенная частота изменяется во времени по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t. \quad (4.38)$$

Здесь ω_0 — несущая частота; μ — параметр с размерностью с^{-2} , равный скорости изменения частоты во времени.

Легко видеть, что за время, равное длительности импульса, девиация частоты

$$\Delta\omega = \mu\tau_n. \quad (4.39)$$

Полная фаза сигнала

$$\psi(t) = \omega_0 t + \mu t^2/2. \quad (4.40)$$

Итак, будем называть *радиоимпульсом с линейной частотной модуляцией*, или *ЛЧМ-импульсом*, сигнал, представляемый следующей математической моделью:

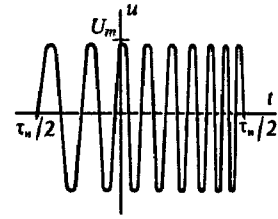
$$u_{\text{ЛЧМ}}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_n/2, \\ U_m \cos(\omega_0 t + \mu t^2/2), & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t > \tau_n/2. \end{cases} \quad (4.41)$$

Замечательное свойство ЛЧМ-сигналов, определяющее их практическую значимость, состоит в следующем. Предположим, что имеется некоторое физическое устройство, осуществляющее задержку сигналов, подаваемых на его вход. Если время задержки зависит от частоты сигнала, причем с ростом частоты это время уменьшается, то при определенных условиях, подавая на вход такого устройства ЛЧМ-импульс большой длительности, можно добиться существенного «сжатия» его во времени. Этот эффект обусловлен тем, что на выходе устройства задержки одновременно будут появляться составляющие как более низкочастотные, относящиеся к началу импульса, так и более высокочастотные, наблюдаемые в его конце.

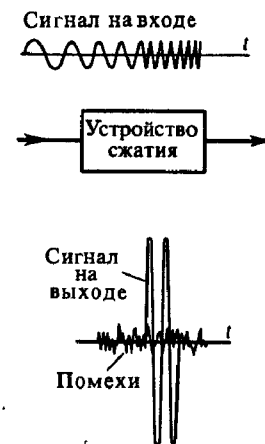
Подробный анализ устройств сжатия, позволяющий оценить количественную сторону явления, а также выяснить, например, форму выходного сигнала, будет проведен в гл. 16 при обсуждении методов оптимального выделения сигналов на фоне помех.

Спектр прямоугольного ЛЧМ-импульса. В § 4.2 при рассмотрении спектральных характеристик ЧМ-сигнала, промодулированного двумя колебаниями низкой частоты, было показано, что спектр такого сигнала имеет сложную структуру из-за перекрестного влияния отдельных спектральных составляющих. Все это в полной мере относится и к спектру ЛЧМ-импульса. При дальнейшем изложении этого вопроса будем придерживаться в основном обозначений, принятых в [28].

На основании модели (4.41) запишем выражение спектральной плотности одиночного ЛЧМ-импульса:



К полной фазе сигнала можно добавить постоянный фазовый сдвиг φ_0 . Однако наличие этого сдвига несущественно



Если потери в устройстве сжатия малы, то амплитуда выходного сигнала может значительно превысить уровень шумов. Это повышает надежность обнаружения радиолокационным приемником слабых отраженных сигналов

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= U_m \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \cos(\omega_0 t + \mu t^2/2) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{U_m}{2} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \exp \left\{ j \left[(\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right] \right\} dt + \\
 &\quad + \frac{U_m}{2} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \exp \left\{ -j \left[(\omega_0 + \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right] \right\} dt. \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Анализ этого соотношения показывает, что первый интеграл описывает часть спектральной плотности с резко выраженным максимумом в области положительных частот, близких к ω_0 . Второй интеграл соответствует части спектральной плотности, сосредоточенной в основном при $\omega < 0$. На практике интересуются исключительно случаем, когда эффект перекрытия спектров, концентрирующихся при положительных и отрицательных частотах, пренебрежимо мал. Это связано с тем, что полная девиация частоты за время длительности импульса очень мала по сравнению с несущей частотой:

$$\Delta\omega = \mu\tau_n \ll \omega_0.$$

Поэтому в формуле (4.42) следует вычислять только первый интеграл, дающий спектральную плотность при $\omega > 0$.

Спектр в области отрицательных частот может быть получен на основании свойств преобразования Фурье для вещественных сигналов (см. гл. 2):
 $U(-\omega) = U^*(\omega)$

С учетом сказанного, дополнив аргумент экспоненциальной функции в формуле (4.42) до полного квадрата, получим

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= \frac{U_m}{2} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \times \\
 &\quad \times \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \exp \left[j \frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right)^2 \right] dt. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Удобно перейти от переменной t к новому аргументу x , выполнив замену переменной:

$$\sqrt{\mu} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right) = \sqrt{\pi} x.$$

Проводя вычисления, находим

$$U(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \int_{-x_1}^{x_2} \exp \left(j \frac{\pi x^2}{2} \right) dx, \quad (4.44)$$

где пределы интегрирования определяются следующим образом:

$$X_1 = \frac{\frac{\mu\tau_n}{2} + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}; \quad X_2 = \frac{\frac{\mu\tau_n}{2} - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}. \quad (4.45)$$

Интеграл в выражении (4.44) сводится к комбинации хорошо изученных специальных функций — интегралов Френеля [16]:

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi\xi^2}{2} d\xi; \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi\xi^2}{2} d\xi.$$

В результате получаем окончательную формулу для спектральной плотности ЛЧМ-сигнала:

$$U(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \times \\ \times \{ C(X_1) + C(X_2) + j[S(X_1) + S(X_2)] \}. \quad (4.46)$$

Представив эту спектральную плотность в показательной форме:

$$U(\omega) = |U(\omega)| \exp [j\Phi(\omega)],$$

можно заметить, что модуль (амплитудный спектр)

$$|U(\omega)| = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \sqrt{[C(X_1) + C(X_2)]^2 + [S(X_1) + S(X_2)]^2}, \quad (4.47)$$

в то время как фазовый спектр состоит из квадратичного слагаемого

$$\Phi_1(\omega) = -(\omega - \omega_0)^2 / (2\mu) \quad (4.48)$$

и так называемого остаточного фазового члена

$$\Phi_2(\omega) = \arctg \frac{S(X_1) + S(X_2)}{C(X_1) + C(X_2)}. \quad (4.49)$$

ЛЧМ-сигналы с большой базой. Численный анализ полученных выражений свидетельствует о том, что характер частотной зависимости модуля и фазы спектральной плотности прямоугольного ЛЧМ-импульса полностью зависит от безразмерного числа

$$B = \Delta f \tau_n = \mu \tau_n^2 / (2\pi), \quad (4.50)$$

равного произведению девиации частоты на длительность импульса и называемого *базой* ЛЧМ-сигнала.

В практически важных случаях выполняется условие $B \gg 1$. Спектр таких ЛЧМ-сигналов с большой базой имеет ряд специфических особенностей. Во-первых, модуль спектральной плотности здесь практически постоянен в пределах полосы частот шириной $\Delta\omega$ с центром в точке ω_0 . Соответствующие графики, рассчитанные по формулам (4.47) и (4.49), представлены на рис. 4.10.

Интегралы Френеля широко используются в физике при решении задач дифракции волн

● **база сигнала**

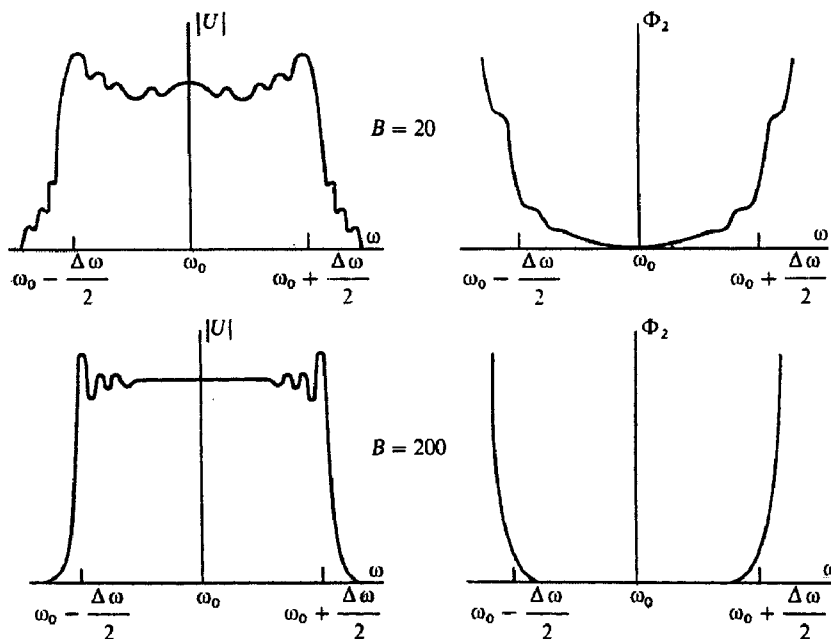


Рис. 4.10. Частотные зависимости модуля и остаточного фазового члена спектральной плотности прямоугольного ЛЧМ-импульса при различных значениях базы сигнала

В теоретической радиотехнике понятие базы применяют по отношению к разнообразным сигналам. При $B \gg 1$ сигнал называют сложным, при $B \approx 1$ — простым



решите задачу 13

Во-вторых, наблюдается постепенное исчезновение осцилляций модуля спектральной плотности с увеличением базы сигнала. Анализируя формулу (4.47), можно убедиться, что на центральной частоте спектра

$$|U(\omega_0)| = U_m \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}. \quad (4.51)$$

Таким образом, модуль спектральной плотности ЛЧМ-сигнала с большой базой

$$|U(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \\ U_m \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, & \omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases} \quad (4.52)$$

Энергетический спектр такого сигнала

$$W_u(\omega) = \pi U_m^2 / (2\mu) \quad (4.53)$$

также постоянен в полосе частот $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$ и обращается в нуль вне этой полосы

Пример 4.4. Прямоугольный ЛЧМ-импульс имеет амплитуду $U_m = 20$ В, несущую частоту $f_0 = 10$ ГГц и длительность $\tau_n = 2$ мкс. Девияция частоты за время импульса $\Delta f = 0.1$ ГГц. Определить основные параметры спектра такого сигнала.

Прежде всего находим базу сигнала $B = 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 200$. Скорость нарастания частоты $\mu = 2\pi\Delta f/\tau_n = 6.28 \cdot 10^8/(2 \cdot 10^{-6}) = 3.14 \times 10^{14} \text{ с}^{-2}$. В соответствии с формулой (4.53) энергетический спектр $W_u = 2 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2 \cdot \text{с}^2$. Поскольку база сигнала велика, его спектр практически заключен в пределах полосы частот от $f_0 - \Delta f/2 = 9.95 \text{ ГГц}$ до $f_0 + \Delta f/2 = 10.05 \text{ ГГц}$.

Автокорреляционная функция ЛЧМ-сигнала. Для нахождения этой характеристики, столь важной при решении задач обнаружения сигнала, целесообразно воспользоваться результатами, полученными в гл. 3, где было показано, что связь между АКФ и энергетическим спектром сигнала устанавливается парой интегральных преобразований Фурье.

Пусть база ЛЧМ-сигнала достаточно велика, так что энергетический спектр этого сигнала равномерен и сосредоточен лишь в полосе частот $\Delta\omega$ вокруг несущей частоты. Тогда автокорреляционная функция ЛЧМ-сигнала [см. формулу (4.53)]:

$$\begin{aligned} B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{U_m^2}{2\mu} \int_{\omega_0 - \mu\tau_n/2}^{\omega_0 + \mu\tau_n/2} \cos \omega\tau d\omega = \\ &= \frac{U_m^2\tau_n}{2} \frac{\sin(\mu\tau_n\tau/2)}{\mu\tau_n\tau/2} \cos \omega_0\tau. \end{aligned} \quad (4.54)$$

График нормированной автокорреляционной функции $r_{\text{ЛЧМ}}(\tau) = B_{\text{ЛЧМ}}(\tau)/B_{\text{ЛЧМ}}(0)$ изображен на рис. 4.11. Здесь же представлена огибающая этой функции, имеющая лепестковую структуру.

Формула (4.54) устанавливает следующее свойство ЛЧМ-сигнала: ширина главного лепестка огибающей АКФ обратно пропорциональна девиации частоты импульса. Действительно, огибающая первый раз обращается в нуль при сдвиге сигнала относительно его копии на интервал времени $\tau = 2\pi/(\mu\tau_n) = 1/\Delta f$. Применяемые в радиолокации ЛЧМ-сигналы характеризуются значительной девиацией частоты, поэтому главный лепесток АКФ получается весьма узким. Например, для сигнала, изученного в примере 4.4, сдвиг, обращающий в нуль

С точки зрения уровня боковых лепестков автокорреляционной функции ЛЧМ-сигнал существенно уступает сигналам Баркера при $M = 13$

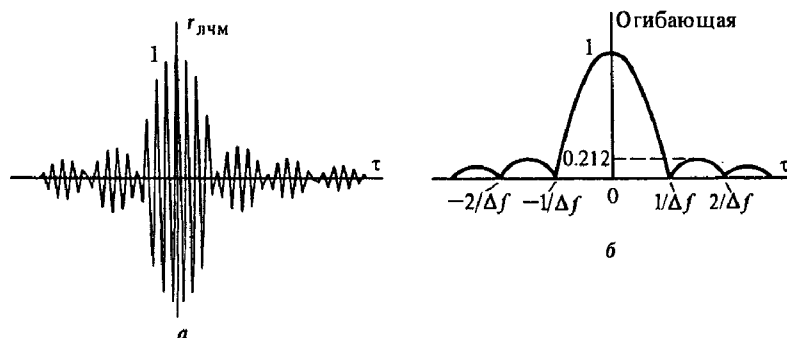


Рис. 4.11. Корреляционные характеристики ЛЧМ-сигнала: а — нормированная АКФ; б — огибающая нормированной АКФ

оггибающую АКФ, составит всего 0.01 мкс, или 0.5 % от длительности импульса.

Однако с точки зрения корреляционных свойств ЛЧМ-сигналам присущ известный недостаток: высота двух первых симметричных боковых лепестков АКФ достаточно велика, составляя 0.212 от высоты центрального лепестка. В неблагоприятных условиях (значительный уровень шумов) это может привести к ошибочному определению временного положения импульса.

4.4. Сигналы для стереофонии

Стереофоническое воспроизведение звука предусматривает раздельное формирование и передачу колебаний от двух микрофонов, левого и правого. Субъективное качество восприятия стереофонической программы значительно выше, чем традиционной монофонической. В принципе, стереофонический радиоканал можно получить, объединив два монофонических канала, по одному из которых передается сигнал $l(t)$ от левого источника звука, а по другому сигнал $r(t)$ от правого источника. Однако при этом не достигается *совместимость* стереофонической системы радиовещания с монофоническими приемниками, которые будут находиться в эксплуатации еще сравнительно долгое время.

Полярная модуляция. Совместимое стереофоническое радиовещание удалось создать, прибегнув к принципиально новому виду модуляции радиосигналов, получившему название полярной модуляции. Типичная осциллограмма сигнала с полярной модуляцией представлена на рис. 4.12. Видно, формы верхней и нижней огибающих здесь неодинаковы. Информация от левого источника звука отображена верхней огибающей, а от правого — нижней огибающей.

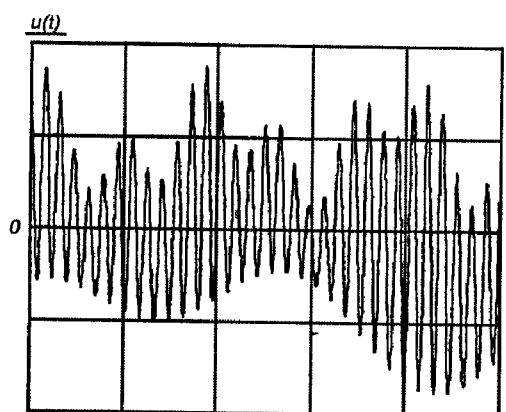


Рис. 4.12. Сигнал с полярной модуляцией

Чтобы сформировать такой сигнал, следует воспользоваться *суммарно-разностным методом*, часто применяемым в радиотехнике. Действительно, нужное нам свойство будет

реализовано, если скомбинировать колебания $l(t)$ и $r(t)$ следующим образом:

$$u_{\text{ПМ}}(t) = U_m \left[M \frac{l+r}{2} + \left(1 + M \frac{l-r}{2} \right) \cos \omega t \right], \quad (4.55)$$

где U_m и ω — амплитуда и частота некоторого высокочастотного колебания, M — коэффициент модуляции, для простоты считаемый одинаковым в обоих каналах.

Легко проверить, что если $\cos \omega t = +1$, то $u_{\text{ПМ}} = U_m(1 + Ml)$, т.е. верхняя огибающая действительно отображает сигнал $l(t)$ левого канала. Если же $\cos \omega t = -1$, то $u_{\text{ПМ}} = -U_m(1 + Mr)$; значит, нижняя огибающая соответствует правому каналу. Если не допускать перемодуляции, то огибающие имеют разные знаки и могут быть без труда разделены в приемнике.

Использование поднесущей частоты. Сигналы с полярной модуляцией не могут непосредственно использоваться при радиопередаче, поскольку содержат низкочастотную (звуковую) составляющую, пропорциональную полусумме колебаний левого и правого каналов. Прибегают к двухступенчатой процедуре. Вначале формируют сигнал с полярной модуляцией, выбрав в качестве частоты ω так называемую *поднесущую частоту* (англ. *subcarrier frequency*), лежащую значительно выше верхней границы звукового диапазона. Затем проводят обычную частотную модуляцию основного несущего колебания, частота которого соответствует ультракоротковолновому диапазону длин волн (УКВ). В качестве модулирующего колебания используют полярно-модулированный сигнал, полученный на первом этапе.

При демодуляции такого колебания в обычном монофоническом приемнике полуразностный сигнал не воспроизводится, так как его спектр расположен в окрестности поднесущей частоты, т.е. за пределом звукового диапазона частот. Полусуммарный сигнал поступает на выход приемника и обеспечивает вполне приемлемое качество прослушивания. Таким образом, требования совместимости оказываются выполненными.

Стандарт радиовещания, первоначально принятый в нашей стране, устанавливает частоту поднесущего колебания равной 31,25 кГц. Чтобы эффективно использовать радиоканал, в передатчике поднесущее колебание ослабляют по амплитуде в 5 раз, а в приемнике за счет специальных схемных элементов восстанавливают этот сигнал до исходного уровня. Такая мера связана с тем, что по стандарту девиация частоты не может превышать 50 кГц. Если чрезмерно использовать этот ресурс для передачи вспомогательного поднесущего колебания, то возможно ухудшение качества воспроизведения звуковых колебаний, прежде всего, снижение их громкости.

Западноевропейский и американский стандарты решают эту же задачу несколько по-иному. Частота поднесущего колебания выбирается здесь равной 38 кГц. Это колебание подавляется в передатчике полностью, а вместо него в состав модулирующего сигнала вводят так называемый *пилот-тон* (англ. *pilot tone*) на частоте 19 кГц. В приемнике частота пилот-тона удваивается, и за счет этого происходит восстановление поднесущего колебания.

Заметим, что оба описанных здесь стандарта стереофонического радиовещания примерно равноценны по своим техническим характеристикам.

Применение поднесущей частоты и использование суммарно-разностного принципа формирования сигнала характерны для многоканальных радиотехнических систем, в частности, для систем цветного телевидения.

Результаты

- ◇◇ Процесс модуляции связан с переносом спектра сигнала из области низких в область высоких частот.
- ◇◇ При амплитудной модуляции (АМ) огибающая сигнала связана с мгновенным значением низкочастотного модулирующего колебания.
- ◇◇ Спектр АМ-сигнала образуется несущим колебанием и двумя симметричными группами боковых колебаний.
- ◇◇ Полоса частот, необходимая для передачи АМ-сигнала, равна удвоенному значению наивысшей частоты в спектре модулирующего колебания.
- ◇◇ Возможна балансная амплитудная модуляция с подавленным несущим колебанием, а также модуляция с одной боковой полосой частот.
- ◇◇ При угловой модуляции передаваемое сообщение определяет изменение во времени фазового угла несущего колебания. Различают частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ) модуляцию.
- ◇◇ Основным параметр модулированных ЧМ- и ФМ-сигналов — индекс угловой модуляции, равный девиации фазы.
- ◇◇ Теоретически ширина спектра сигнала с угловой модуляцией неограниченно велика.
- ◇◇ При малых индексах модуляции ширина спектра ЧМ (ФМ)-сигнала практически равна удвоенной верхней частоте модуляции.
- ◇◇ При больших индексах модуляции полоса частот, занимаемая сигналом, составляет удвоенное значение девиации частоты.
- ◇◇ Сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) имеют практически равномерный спектр в пределах ограниченной полосы частот, если база сигнала достаточно велика.
- ◇◇ Автокорреляционная функция ЛЧМ-сигнала имеет лепестковую структуру; ширина главного лепестка уменьшается с ростом девиации частоты.
- ◇◇ Для передачи сигналов стереофонического радиовещания применяют полярную модуляцию.

Вопросы

1. Какими параметрами принято характеризовать глубину амплитудной модуляции?
2. Какова причина искажений сообщения, наблюдаемых при перемодуляции?
3. От чего зависит распределение мощности в спектре однотонового АМ-сигнала?
4. В каком соотношении обычно находятся между собой частоты несущего и модулирующего колебаний?
5. Каков принцип построения векторной диаграммы однотонового АМ-сигнала?
6. Чем принципиально отличаются осциллограммы сигналов с балансной амплитудной модуляцией и обычных АМ-сигналов?
7. Почему непосредственная демодуляция ОБП-сигнала приводит к искажению передаваемого сообщения?
8. В чем заключаются сходства и различия между сигналами с частотной и фазовой модуляцией?
9. Как связаны между собой частота модуляции, индекс и девиация частоты?

10. Каков спектральный состав ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции?

11. В чем различие между спектрами АМ- и ЧМ-сигналов с малым индексом модуляции?

12. Почему полоса частот, занимаемая сигналом с угловой модуляцией, практически ограничена?

13. Как следует выбирать индекс угловой модуляции, чтобы в спектре сигнала отсутствовало несущее колебание?

14. Чем характеризуются спектры ЧМ- и ФМ-сигналов при негармоническом модулирующем колебании?

15. На каком физическом принципе основано сжатие ЛЧМ-импульса во времени?

16. Каким образом вводится понятие базы ЛЧМ-сигнала?

17. Как выглядит график автокорреляционной функции ЛЧМ-сигнала с прямоугольной формой огибающей?

18. Почему ЛЧМ-сигнал несовершенен с точки зрения структуры его АКФ?

19. Как формулируется принцип совместимости при передаче сигналов стереофонии?

20. Из каких соображений выбирают частоту поднесущего колебания в стереофоническом радиоканале?

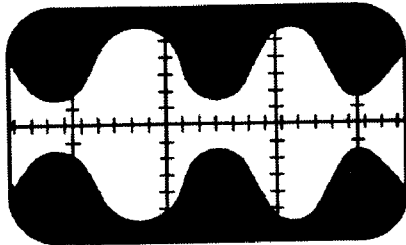
Задачи

1. Амплитудно-модулированное колебание описывается формулой $u(t) = 130[1 + 0.25 \times \cos(10^2 t + 30^\circ) + 0.75 \cos(3 \cdot 10^2 t + 45^\circ)] \times \cos(10^5 t + 60^\circ)$.

Изобразите спектральную диаграмму этого сигнала, вычислив амплитуды и начальные фазы всех спектральных составляющих.

2. Постройте векторную диаграмму сигнала, рассмотренного в задаче 1. Построение выполните для момента времени $t = 0$.

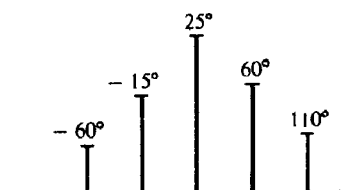
3. На экране осциллографа получено изображение однотонального АМ-сигнала:



Предложите способ экспериментального определения коэффициента модуляции M по осциллограмме.

Указание. Обратите внимание на мгновенные значения амплитуды сигнала в экстремальных точках.

4. По спектральной диаграмме АМ-сигнала



вычислите начальные фазы каждой из составляющих модулирующего колебания.

5. Амплитудно-модулированный ток (А)

$$i(t) = 200(1 + 0.8 \cos(4 \cdot 10^3 t)) \cos 6 \cdot 10^6 t$$

проходит по резистивной нагрузке сопротивлением 75 Ом. Определите: а) пиковую мощность источника; б) среднюю мощность в нагрузке; в) относительную долю мощности, сосредоточенной в несущем колебании.

6. ЧМ-сигнал с амплитудой 2.7 В имеет мгновенную частоту, изменяющуюся во времени по закону

$$\omega(t) = 10^9 (1 + 10^{-4} \cos(2 \cdot 10^3 t)).$$

Найдите индекс модуляции и запишите математическую модель этого сигнала.

7. Определите индекс модуляции ЧМ-сигнала, промодулированного низкой частотой $F = 7$ кГц. Несущая частота $f_0 = 180$ МГц, максимальное значение частоты $f_{\max} = 182.5$ МГц.

8. Изобразите спектральную и векторную диаграммы сигнала с угловой модуляцией, если несущая частота равна 45 МГц, девиация частоты 0.3 кГц, а частота модуляции 4.5 кГц.

9. Однотональный ФМ-сигнал имеет частоту модуляции $\Omega = 10^4$ с⁻¹. При какой девиации частоты в спектре этого сигнала будут отсутствовать составляющие на частотах $\omega_0 \pm \Omega$?

10. Постройте спектральную диаграмму ЧМ-сигнала с амплитудой 35 В и индексом $m = 3$.

11. Амплитуда ЧМ-сигнала передатчика в отсутствие модулирующего колебания равна 250 В. Измерения показали, что при

подаче однотонального модулирующего колебания амплитуда составляющей на несущей частоте становится равной 244 В. Определите индекс частотной модуляции. Можно ли полагать, что в описываемых условиях реализована узкополосная ЧМ?

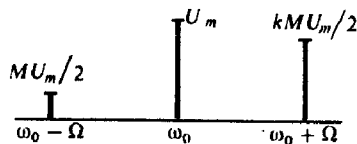
12. Радиовещательная станция с фазовой модуляцией имеет предельное значение индекса модуляции (при наиболее громком передаваемом сигнале), равное 30. Полагая, что спектр низкочастотного модулирующего сигнала ограничен верхней частотой 16 кГц,

определите число радиоканалов, которое можно без перекрестных помех разместить в УКВ-диапазоне (на частотах от 30 до 300 МГц).

13. ЛЧМ-сигнал с огибающей прямоугольной формы имеет амплитуду $U_m = 10$ В, длительность $\tau_n = 15$ мкс и девиацию частоты за время импульса $\Delta f = 40$ МГц. Определите: 1) базу сигнала; 2) величину квадратичного слагаемого фазового спектра на границе полосы частот, занимаемой сигналом; 3) энергетический спектр сигнала.

Более сложные задания

14. Исследуйте эффект влияния неоднородных амплитуд верхнего и нижнего боковых колебаний на характер огибающей АМ-сигнала. Рассмотрите однотональный сигнал со спектральной диаграммой вида



полагая, что коэффициент $k \neq 1$.

15. Проанализируйте, как сказывается на огибающей АМ-сигнала неточное соблюдение условий, накладываемых на частоты верхних и нижних боковых составляющих. Амплитуды обоих боковых колебаний положите равными друг другу. Рассмотрите слу-

чай однотонального сигнала, у которого нижняя боковая частота $\omega_{НБ} = \omega_0 - \Omega$, в то время как верхняя боковая частота $\omega_{ВБ} = \omega_0 + \Omega + \delta$, где $\delta \ll \Omega$.

16. Проведите спектральный анализ огибающей однотонального ОБП-сигнала, представляемой выражением (4.18). Предложите численную оценку степени искажения огибающей такого сигнала.

17. Полная фаза ЧМ-сигнала с двухтональной модуляцией изменяется во времени по закону

$$\psi(t) = 2\pi \cdot 10^8 t + 0.12 \sin(2\pi \cdot 10^4 t) + 0.08 \sin(4\pi \cdot 10^4 t).$$

Амплитуда немодулированной несущей $U_m = 75$ В. На сколько изменится амплитуда несущего колебания после включения модулирующих сигналов?

Глава 5

Сигналы с ограниченным спектром

Как известно (см. гл. 2), для восстановления сигнала по его спектру необходимо учитывать все составляющие с частотами, лежащими в интервале от нуля до бесконечности. Однако с физической точки зрения такая процедура принципиально неосуществима. К тому же вклад спектральных составляющих при $\omega \rightarrow \infty$ пренебрежимо мал в силу ограниченности энергии сигналов. Наконец, любое реальное устройство, предназначенное для передачи и обработки сигналов, имеет конечную ширину полосы пропускания.

Поэтому вполне реалистичной представляется математическая модель сигнала, имеющая такое свойство: спектральная плотность колебания отлична от нуля лишь в пределах некоторой полосы частот конечной протяженности. В радиотехнике подобный сигнал называют *сигналом с ограниченным спектром*.

5.1. Некоторые математические модели сигналов с ограниченным спектром

Пусть R — конечный отрезок оси частот. Спектральная плотность сигнала $s(t)$ с ограниченным спектром удовлетворяет условиям $S(\omega) \neq 0$ при $\omega \in R$, $S(\omega) = 0$ при всех других значениях частоты.

Математическую модель сигнала с ограниченным спектром во временной области можно получить из формулы обратного преобразования Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.1)$$

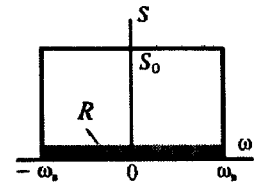
В зависимости от выбора отрезка R и функции $S(\omega)$ возникают самые разнообразные виды сигналов с ограниченным спектром. Изучим некоторые простейшие примеры.

Идеальный низкочастотный сигнал. Рассмотрим колебание с постоянной вещественной спектральной плотностью в пределах отрезка оси частот от нуля до верхней граничной частоты ω_b ; вне этого отрезка спектральная плотность сигнала обращается в нуль:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ S_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (5.2)$$

Мгновенные значения такого сигнала

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}. \quad (5.3)$$



●
идеальный низкочастотный сигнал

Будем называть такое колебание *идеальным низкочастотным сигналом* (ИНС), подчеркивая этим простейший вид его спектра по сравнению со спектрами других возможных сигналов подобного рода.

График ИНС, построенный по формуле (5.3), имеет вид осциллирующей кривой, четной относительно начала отсчета времени. С увеличением верхней граничной частоты спектра возрастают как центральный максимум, так и частота осцилляций.

ИНС более общего вида получается, если в формулу (5.2) ввести фазу спектральной плотности, линейно зависящую от частоты:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (5.4)$$



решите задачу 1

Предполагается, что частотная характеристика ФНЧ достаточно точно аппроксимируется функцией прямоугольной формы с заданным значением верхней граничной частоты

Спектральной плотности (5.4) соответствует низкочастотный сигнал

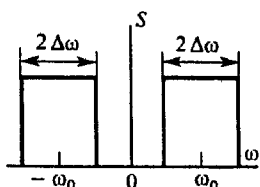
$$s(t) = \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b (t - t_0)}{\omega_b (t - t_0)},$$

смещенный во времени относительно сигнала (5.3) на t_0 секунд.

ИНС является идеализированной выходной реакцией фильтра нижних частот (ФНЧ), возбуждаемого колебанием с равномерной по частоте спектральной плотностью, т. е. дельта-импульсом.

Идеальный полосовой сигнал. Исследуем математическую модель сигнала, спектр которого ограничен полосами частот шириной $2\Delta\omega$ каждая с центрами на частотах $\pm\omega_0$. Если в пределах этих полос спектральная плотность сигнала постоянна:

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_0 + \Delta\omega, \\ & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & \text{вне указанных полос,} \end{cases} \quad (5.5)$$



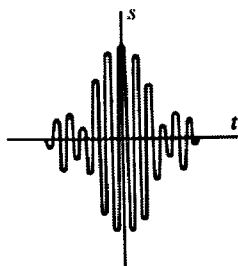
идеальный полосовой сигнал

то по аналогии с предыдущим данный сигнал будем называть *идеальным полосовым сигналом* (ИПС).

Мгновенные значения ИПС найдем, используя обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{2S_0 \Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos \omega_0 t. \quad (5.6)$$

Строя график ИПС, обнаруживаем, что здесь наряду с высокочастотными осцилляциями на частоте ω_0 наблюдается изменение во времени мгновенного значения их амплитуды. Функция $\sin(\Delta\omega t)/(\Delta\omega t)$ с точностью до масштабного коэффициента $2S_0 \Delta\omega/\pi$ играет роль медленной огибающей ИПС.



Теоретически возможный способ получения ИПС очевиден: на вход идеального полосового фильтра, пропускающего лишь колебания с частотами в пределах полосы $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$, должно быть подано широкополосное воздействие вида дельта-импульса.

Ортогональные сигналы с ограниченным спектром. Свойство ограниченности спектра позволяет находить интересные и важные классы ортогональных сигналов. Простейший пример — два ортогональных полосовых сигнала, области существования спектра которых не пересекаются. Равенство нулю скалярного произведения этих сигналов непосредственно следует из обобщенной формулы Рэлея.

Менее очевидный способ ортогонализации сигналов с ограниченным спектром заключается в их временном сдвиге. Рассмотрим два идеальных низкочастотных сигнала $u(t)$ и $v(t)$. Оба эти сигнала имеют одинаковые параметры S_0 и ω_b [см. формулу (5.2)], однако сигнал $v(t)$ запаздывает по отношению к сигналу $u(t)$ на время t_0 , так что его спектральная плотность $V(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega t_0)$.

Скалярное произведение этих сигналов, вычисленное через спектральные плотности,

$$(u, v) = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b t_0}{\omega_b t_0}. \quad (5.7)$$

Скалярное произведение обращается в нуль и два одинаковых по форме ИНС оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию

$$\omega_b t_0 = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при $k = \pm 1$:

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_b} = \pm \frac{1}{2f_b}. \quad (5.8)$$

Принципиально важно, что удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Указан путь построения бесконечного ортогонального базиса, который может служить координатной системой для разложения произвольного сигнала со спектром, ограниченным частотой ω_b .

Графики рассматриваемых сигналов при двух значениях параметра t_0 изображены на рис. 5.1, а, б.

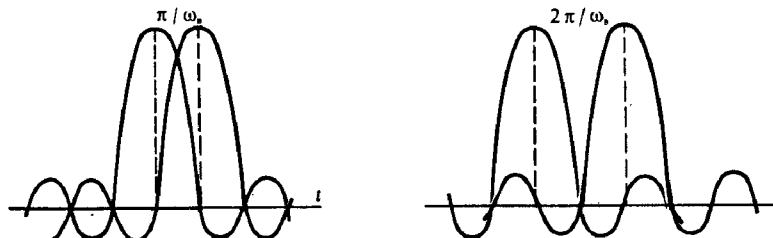
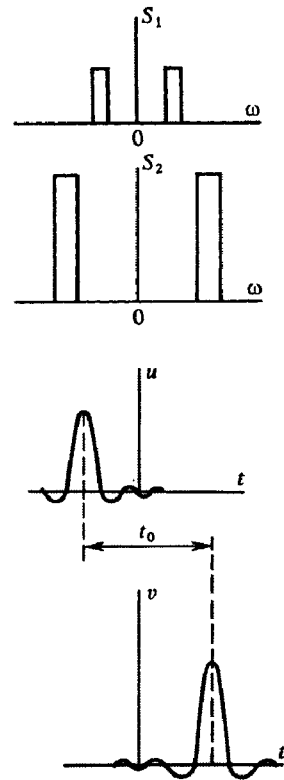


Рис. 5.1. График двух идеальных низкочастотных сигналов: а — при $t_0 = \pi/\omega_b$; б — при $t_0 = 2\pi/\omega_b$

▲
решите задачу 2



В момент времени, когда один из сигналов достигает максимума, другие сигналы из данного семейства проходят через нуль

5.2. Теорема Котельникова

Владимир
Александрович
Котельников —
академик, извест-
ный советский уче-
ный в области ра-
диотехники и ра-
диофизики

В 1933 г. В. А. Котельников доказал теорему, которая является одним из фундаментальных положений теоретической радиотехники. Эта теорема устанавливает возможность сколь угодно точного восстановления мгновенных значений сигнала с ограниченным спектром исходя из отсчетных значений (выборок), взятых через равные промежутки времени.

Построение ортонормированного базиса. Как было показано, любые два сигнала с ограниченным спектром, принадлежащие семейству

$$u_k(t) = A \frac{\sin \omega_b(t - k\pi/\omega_b)}{\omega_b(t - k\pi/\omega_b)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.9)$$

являются ортогональными. Путем соответствующего выбора амплитудного множителя A можно добиться того, чтобы норма каждого из этих сигналов стала единичной. В результате будет построен ортонормированный базис, позволяющий разложить произвольный сигнал с ограниченным спектром в обобщенный ряд Фурье.

Достаточно рассмотреть лишь функцию

$$u_0(t) = A \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}, \quad (5.10)$$

так как норма любого сигнала u_k одинакова независимо от сдвига во времени. Поскольку

$$\|u_0\|^2 = \frac{A^2}{\omega_b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_b t}{t^2} dt = \frac{\pi A^2}{\omega_b}, \quad (5.11)$$

функции u_k будут ортонормированными, если

$$A = \sqrt{\omega_b/\pi}. \quad (5.12)$$

Бесконечная совокупность функций

$$Sc_k(t; \omega_b) = \sqrt{\frac{\omega_b}{\pi}} \frac{\sin \omega_b(t - k\pi/\omega_b)}{\omega_b(t - k\pi/\omega_b)} \quad (5.13)$$

образует *базис Котельникова* в линейном пространстве низкочастотных сигналов со спектрами, ограниченными сверху значением ω_b . Отдельная функция $Sc_k(t; \omega_b)$ называется *k-й отсчетной функцией*.

Ряд Котельникова. Если $s(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$, то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k Sc_k(t; \omega_b). \quad (5.14)$$

Коэффициентами ряда служат, как известно, скалярные произведения разлагаемого сигнала и k -й отсчетной функции:

$$c_k = (s(t), Sc_k(t; \omega_b)). \quad (5.15)$$

●
базис
Котельникова

▲
решите задачу 4

Удобный способ вычисления этих коэффициентов заключается в применении обобщенной формулы Рэлея. Легко проверить, что k -я отсчетная функция в пределах отрезка $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$ имеет спектральную плотность, равную $\sqrt{\pi/\omega_b} \exp(-j\omega k\pi/\omega_b)$. Это видно из сравнения формул (5.3) и (5.13). Тогда, если $S(\omega)$ — спектр изучаемого сигнала $s(t)$, то

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_b}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} S(\omega) \exp[jk\pi\omega/\omega_b] d\omega \right\}. \quad (5.16)$$

Величина в фигурных скобках есть не что иное, как $s_k = s(t_k)$, т. е. мгновенное значение сигнала $s(t)$ в k -й отсчетной точке $t_k = k\pi/\omega_b = k/(2f_b)$.

Таким образом,

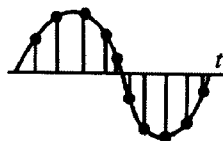
$$c_k = \sqrt{\pi/\omega_b} s_k, \quad (5.17)$$

откуда следует выражение ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin \omega_b (t - k\pi/\omega_b)}{\omega_b (t - k\pi/\omega_b)}. \quad (5.18)$$

Теорему Котельникова на основании последнего равенства принято формулировать так: *произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_b , Гц, может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/(2f_b)$ с.*

■
формулировка
теоремы
Котельникова



Однозначное восстановление сигнала возможно

Пример 5.1. Дан сигнал $s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Выбрав некоторый фиксированный интервал между отсчетами t_0 , получаем возможность однозначно восстановить по отсчетам любой сигнал, спектр которого не содержит составляющих на частотах выше граничной частоты $\omega_b = \pi/t_0$.

Если $\omega_0 < \omega_b$, то к рассматриваемому гармоническому сигналу применима теорема Котельникова; отсчетные значения (выборки) данного сигнала

$$s_k = \cos(k\pi\omega_0/\omega_b + \varphi_0).$$

В предельном случае, когда частота ω_0 стремится к ω_b слева, т. е.

$$\omega_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\omega_b - \epsilon),$$

на каждый период гармонического сигнала должно приходиться ровно две выборки.

Если же условия теоремы Котельникова нарушаются и отсчеты во времени берутся недостаточно часто, то однозначное восстановление исходного сигнала принципиально невозможно. Через отсчетные точки можно провести бесчисленное множество кривых, спектральные плотности которых отличны от нуля вне полосы $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$.

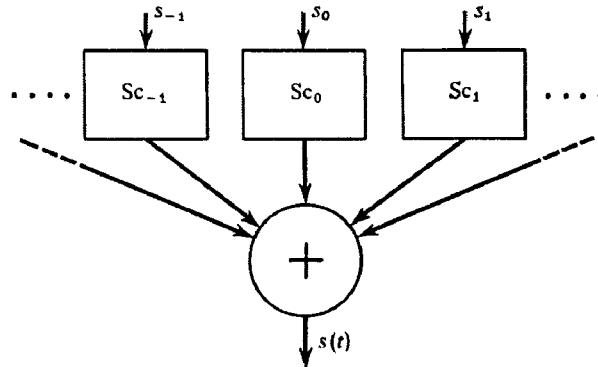
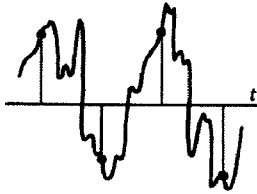


Рис. 5.2. Аппаратурная реализация синтеза сигнала по ряду Котельникова



Однозначное восстановление сигнала невозможно

▲
решите задачу 5

Аппаратурная реализация синтеза сигнала, представленного рядом Котельникова. Важная особенность теоремы Котельникова состоит в ее конструктивном характере: она не только указывает на возможность разложения сигнала в соответствующий ряд, но и определяет способ восстановления непрерывного сигнала, заданного своими отсчетными значениями (рис. 5.2).

Пусть имеется совокупность генераторов, создающих на выходных зажимах отсчетные функции $Sc_k(t; \omega_b)$. Генераторы являются управляемыми — амплитуда их сигналов пропорциональна отсчетным значениям s_k . Если объединить колебания на выходах, подав их на сумматор, то с выхода сумматора в соответствии с формулой (5.18) можно будет снимать мгновенные значения синтезируемого сигнала $s(t)$.

Пример 5.2. Прямоугольный видеопульс с единичной амплитудой и длительностью τ_n не принадлежит к числу сигналов с ограниченным спектром. Тем не менее модуль его спектральной плотности достаточно быстро (по закону $1/\omega$) уменьшается с ростом частоты.

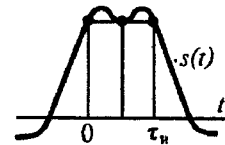
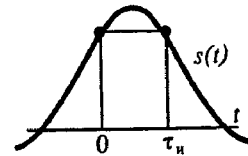
Описание такого сигнала двумя отсчетами в начале и в конце импульса будет означать замену исходного колебания сигналом со спектром, ограниченным сверху частотой $\omega_b = \pi/\tau_n$. Математическая модель этого сигнала такова:

$$s(t) = \frac{\sinh(\pi t/\tau_n)}{\pi t/\tau_n} + \frac{\sin[\pi(t - \tau_n)/\tau_n]}{\pi(t - \tau_n)/\tau_n}. \quad (5.19)$$

Если же описать импульс тремя равноотстоящими отсчетами, то приходим к аппроксимирующему сигналу, содержащему частоты вплоть до $\omega_b = 2\pi/\tau_n$:

$$s(t) = \frac{\sin \frac{2\pi t}{\tau_n}}{\frac{2\pi t}{\tau_n}} + \frac{\sin \frac{2\pi(t - \tau_n/2)}{\tau_n}}{\frac{2\pi(t - \tau_n/2)}{\tau_n}} + \frac{\sin \frac{2\pi(t - \tau_n)}{\tau_n}}{\frac{2\pi(t - \tau_n)}{\tau_n}}. \quad (5.20)$$

Естественно, что с ростом числа учитываемых членов, т. е. с уменьшением временного интервала между выборками, точность аппроксимации будет повышаться.



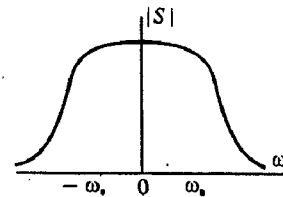
Оценка ошибки, возникающей при аппроксимации произвольного сигнала рядом Котельникова. Если $s(t)$ — произвольный сигнал, то его можно представить суммой $s(t) = s_{\text{ос}}(t; \omega_b) + s_{\text{ош}}(t)$, в которую входит сигнал $s_{\text{ос}}(t; \omega_b)$ со спектром, ограниченным значением ω_b , а также сигнал ошибки аппроксимации $s_{\text{ош}}(t)$ со спектром, занимающим в общем случае бесконечную полосу частот $\omega > \omega_b$.

Спектры указанных сигналов не перекрываются, поэтому сигналы $s_{\text{ос}}$ и $s_{\text{ош}}$ ортогональны, а их энергии, т. е. квадраты норм, складываются:

$$\|s\|^2 = \|s_{\text{ос}}\|^2 + \|s_{\text{ош}}\|^2.$$

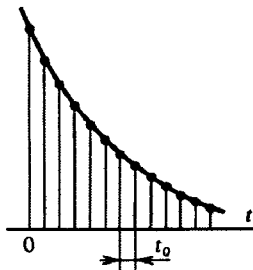
В качестве меры ошибки аппроксимации можно принять расстояние, равное норме сигнала ошибки. Если $W_s(\omega)$ — энергетический спектр сигнала $s(t)$, то по теореме Рэлея

$$\|s_{\text{ош}}\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\omega_b}^{\infty} W_s(\omega) d\omega \right)^{1/2}. \quad (5.21)$$



Пример 5.3. Дан экспоненциальный видеопульс $s(t) = \exp(-\alpha t) \sigma(t)$, характеризующийся энергетическим спектром $W_s(\omega) = 1/(\alpha^2 + \omega^2)$ и нормой

$$\|s\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\alpha^2 + \omega^2)^{-1} d\omega \right)^{1/2} = 0.7071/\sqrt{\alpha}.$$



Эффективная длительность этого импульса (см. гл. 2) $\tau_n = 2.3026/\alpha$.

Спектр рассматриваемого сигнала неограничен. Поэтому следует предварительно подвергнуть сигнал низкочастотной фильтрации, пропустив его через фильтр нижних частот (ФНЧ). Значение верхней частоты ω_b полосы пропускания фильтра следует выбирать в зависимости от того, сколь часто берутся отсчеты сигнала на выходе ФНЧ. Предположим, что за время τ_n измеряются 10 отсчетов с интервалом $t_0 = \tau_n/9 = 0.2558/\alpha$ с. Согласно теореме Котельникова, это означает, что $\omega_b = \pi/t_0 = 12.279\alpha$.

Сигнал с выхода ФНЧ восстанавливается по своим отсчетным значениям точно. Однако по отношению к исходному видеопульсу неизбежна ошибка. В данном случае норма сигнала ошибки

$$\begin{aligned} \|s_{\text{ош}}\| &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{\omega_b}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1}{\alpha\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_b}{\alpha} \right) \right]^{1/2} = \frac{0.1608}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Относительная ошибка аппроксимации

$$\|s_{\text{ош}}\|/\|s\| = 0.1608/0.7071 = 0.2274.$$

Видно, что выбранная в примере частота ω_b недостаточно высока для достижения удовлетворительной точности воспроизведения исходного сигнала.

▲

решите задачу 6

Это положение в математике доказывается строго и в общем виде

● размерность пространства сигналов

В теории информации размерность пространства сигналов служит для оценки объема сообщений

Размерность пространства сигналов, ограниченных по спектру и по длительности. Примеры вычисления спектральных плотностей импульсных сигналов, приведенные в гл. 2, показывают, что любой сигнал конечной длительности теоретически имеет спектр, неограниченно протяженный по оси частот.

Однако часто бывает удобным рассматривать идеализированные модели сигналов, ограниченных как по длительности, так и по протяженности спектра. Подобные модели могут достаточно точно описывать сигналы, применяемые в реальных каналах связи.

Пусть T — длительность такого сигнала, а f_b — граничная частота его спектра, выраженная в герцах. Тогда база сигнала (см. гл. 4) $B = Tf_b$. Для полного описания сигнала нужно иметь в распоряжении $N = T/t_0 = 2Tf_b$ независимых отсчетов.

Говорят, что число

$$N = 2Tf_b = 2B \quad (5.22)$$

является *размерностью пространства сигналов*, ограниченных по длительности и по частоте.

Число N , как правило, достаточно велико. Например, для описания сигнала в канале радиовещания с граничной частотой 12 кГц на протяжении 1 мин потребуется $2 \cdot 60 \cdot 12 \cdot 10^4 = 1.44 \cdot 10^6$ независимых чисел.

В свое время К. Шеннон предложил интерпретировать любой сигнал с конечными длительностью и полосой как точку в многомерном евклидовом пространстве с числом измерений $2Tf_b$. Отсчетное значение s_k служит при этом проекцией отображающей точки на k -ю координатную ось. Поскольку метрика пространства евклидова и координатные оси взаимно ортогональны, длина вектора сигнала

$$r_s = \left(\sum_{k=1}^{2Tf_b} s_k^2 \right)^{1/2}. \quad (5.23)$$

Величину r_s можно выразить через энергию сигнала E_s следующим образом. Так как

$$E_s = \sum_{k=1}^{2Tf_b} c_k^2 = \frac{1}{2f_b} \sum_{k=1}^{2Tf_b} s_k^2,$$

то

$$r_s = \sqrt{2E_s f_b} = \sqrt{2Tf_b P_{cp}}, \quad (5.24)$$

где P_{cp} — средняя мощность сигнала. Отсюда вытекает, что любые сигналы с фиксированными параметрами T , f_b и со средними мощностями, не превышающими уровня P_0 , отображаются точками, лежащими внутри многомерной сферы радиусом

$$\rho(P_0) = \sqrt{2Tf_b P_0}.$$

5.3. Узкополосные сигналы

В этом параграфе изучается особый класс радиотехнических сигналов с ограниченным спектром, которые возникают на выходе частотно-избирательных цепей и устройств. По определению, сигнал называется *узкополосным*, если его спектральная плотность отлична от нуля лишь в пределах частотных интервалов шириной Π , образующих окрестности точек $\pm \omega_0$, причем должно выполняться условие $\Pi/\omega_0 \ll 1$.

Как правило, можно считать что частота ω_0 , называемая *опорной частотой сигнала*, совпадает с центральной частотой спектра. Однако в общем случае выбор ее достаточно произволен.

Математическая модель узкополосного сигнала. Прямой путь к формированию математической модели узкополосного сигнала состоит в следующем. Известно (см. гл. 2), что если $f_1(t)$ — низкочастотный сигнал, спектр которого сосредоточен в окрестности нулевой частоты, то колебание $s_1(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$ при достаточно большом значении ω_0 будет обладать всеми необходимыми признаками узкополосного сигнала, поскольку его спектр окажется сконцентрированным в малых окрестностях точек $\pm \omega_0$. Узкополосным будет и сигнал $s_2(t) = f_2(t) \sin \omega_0 t$, отличающийся фазой «быстрого» сомножителя. Наиболее общую математическую модель узкополосного сигнала можно получить, составив линейную комбинацию вида

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (5.25)$$

Обе входящие сюда функции времени $A_s(t)$ и $B_s(t)$ являются низкочастотными в том смысле, что их относительные изменения за период высокочастотных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ достаточно малы. Функцию $A_s(t)$ принято называть *синфазной амплитудой* узкополосного сигнала $s(t)$ при заданном значении опорной частоты ω_0 , а функцию $B_s(t)$ — его *квадратурной амплитудой*.

Синфазную и квадратурную амплитуды можно выделить аппаратным способом. Действительно, пусть имеется перемножающее устройство, на один из входов которого подан узкополосный сигнал $s(t)$, а на другой — вспомогательное колебание, изменяющееся во времени по закону $\cos \omega_0 t$. На выходе перемножителя будет получен сигнал

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= A_s(t) \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} A_s(t) + \frac{1}{2} A_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t. \end{aligned} \quad (5.26)$$

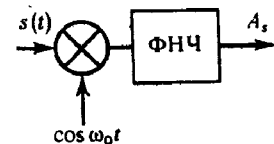
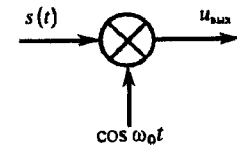
Пропустим выходной сигнал перемножителя через фильтр нижних частот (ФНЧ), подавляющий составляющие с частотами порядка $2\omega_0$. Ясно, что с выхода фильтра будет поступать низкочастотное колебание, пропорциональное синфазной амплитуде $A_s(t)$.

Если на один из входов перемножителя подать вспомогательное колебание $\sin \omega_0 t$, то такая система будет выделять

Предполагается,
что $\omega_0 \neq 0$

опорная частота

синфазная и квадратурная амплитуды



из узкополосного сигнала $s(t)$ его квадратурную амплитуду $B_s(t)$.

Комплексное представление узкополосных сигналов. В теории линейных электрических цепей широко применяется метод комплексных амплитуд, согласно которому гармоническое колебание выражается как вещественная или мнимая часть комплексных функций:

$$U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}),$$

$$U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Im}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}).$$

Не зависящее от времени число $\tilde{U} = U_m e^{j\varphi_0}$ называют комплексной амплитудой гармонического колебания.

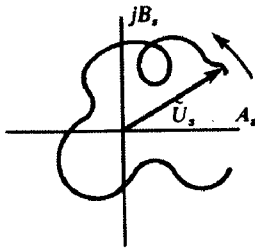
Приставка «квази» означает «почти», «похожие»

С физической точки зрения узкополосные сигналы представляют собой *квазигармонические колебания*. Следует попытаться так обобщить метод комплексных амплитуд, чтобы иметь возможность в рамках этого метода описывать сигналы вида (5.25).

Введем комплексную низкочастотную функцию

$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t), \quad (5.27)$$

● комплексная огибающая



называемую *комплексной огибающей* узкополосного сигнала. Легко непосредственно проверить, что

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re}[\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}]. \quad (5.28)$$

Таким образом, комплексная огибающая применительно к узкополосному сигналу играет ту же роль, что и комплексная амплитуда по отношению к простому гармоническому колебанию. Однако комплексная огибающая в общем случае зависит от времени — вектор $\tilde{U}_s(t)$ совершает на комплексной плоскости некоторое движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению.

Пример 5.4. Узкополосный сигнал $s(t)$ при $t < 0$ и при $t > 0$ является гармоническим колебанием; в момент времени $t = 0$ частота сигнала изменяется скачком:

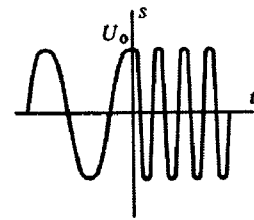
$$s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ U_0 \cos \omega_1 t, & t > 0. \end{cases}$$

Взяв в качестве опорной частоты ω_0 , получим следующее выражение для комплексной огибающей данного сигнала:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}, & t > 0. \end{cases}$$

Подчеркнем, что выбор опорной частоты обычно диктуется удобством расчета. Так, например, комплексная огибающая рассматриваемого сигнала относительно опорной частоты $(\omega_0 + \omega_1)/2$ имеет более сложный вид:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0 \exp \left[j \frac{(\omega_0 - \omega_1)t}{2} \right], & t < 0, \\ U_0 \exp \left[j \frac{(\omega_1 - \omega_0)t}{2} \right], & t > 0. \end{cases}$$



Физическая огибающая, полная фаза и мгновенная частота.
Формулу (5.27), определяющую комплексную огибающую, можно представить также в показательной форме:

$$\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp[j\varphi_s(t)]. \quad (5.29)$$

Здесь $U_s(t)$ — вещественная неотрицательная функция времени, называемая *физической огибающей* (часто, для краткости, просто *огибающей*), $\varphi_s(t)$ — медленно изменяющаяся во времени начальная фаза узкополосного сигнала.

Величины U_s , φ_s связаны с синфазной и квадратурной амплитудами соотношениями

$$\begin{aligned} A_s(t) &= U_s(t) \cos \varphi_s(t), \\ B_s(t) &= U_s(t) \sin \varphi_s(t), \end{aligned} \quad (5.30)$$

откуда вытекает еще одна полезная форма записи математической модели узкополосного сигнала:

$$s(t) = U_s(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)]. \quad (5.31)$$

Подобно тому как это делалось ранее при изучении радиосигналов с угловой модуляцией, введем *полную фазу* узкополосного колебания $\psi_s(t) = \omega_0 t + \varphi_s(t)$ и определим *мгновенную частоту* сигнала, равную производной по времени от полной фазы:

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi_s}{dt}. \quad (5.32)$$

В соответствии с формулой (5.31) узкополосный сигнал общего вида представляет собой сложное колебание, получающееся при одновременной модуляции несущего гармонического сигнала как по амплитуде, так и по фазовому углу.

Свойства физической огибающей узкополосного сигнала.
Используя равенства (5.30), выразим физическую огибающую $U_s(t)$ через синфазную и квадратурную амплитуды:

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}. \quad (5.33)$$

Как отмечалось, комплексная огибающая узкополосного сигнала определяется неоднозначно. Если вместо частоты ω_0 , входящей в формулу (5.28), взять некоторую частоту $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega$, то сигнал $s(t)$ должен быть представлен в виде

$$s(t) = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t} e^{j\omega'_0 t}]$$

и новое значение комплексной огибающей

$$\tilde{U}'_s(t) = \tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t}. \quad (5.34)$$

Однако при этом физическая огибающая, являющаяся модулем комплексной огибающей, *останется неизменной*, поскольку выражение $\exp(-j\Delta\omega t)$ имеет единичный модуль.

Другое свойство физической огибающей состоит в том, что в каждый момент времени $|s(t)| \leq U_s(t)$. Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из формулы (5.31). Знак равенства здесь соответствует моментам времени, когда $\cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)] = 1$. Но при этом производные

Ранее, при изучении модулированных сигналов использовалось именно это понятие огибающей

▲ решите задачи 7—10

Берется арифметическое значение корня



сигналы и его огибающей совпадают:

$$s'(t) = U'_s(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_s(t)] - [\omega_0 + \varphi'_s(t)] U_s(t) \sin [\omega_0 t + \varphi_s(t)].$$

Важность понятия огибающей обусловлена тем, что в радиотехнике широко используются специальные устройства — амплитудные детекторы (демодуляторы), способные точно воспроизводить огибающую узкополосного сигнала.

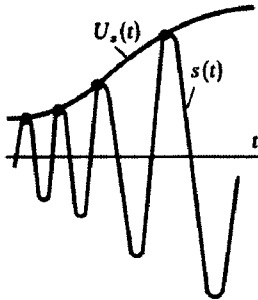
Свойства мгновенной частоты узкополосного сигнала. Если комплексная огибающая сигнала представляется вектором, который вращается на комплексной плоскости с неизменной угловой скоростью Ω , т. е. $\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp(\pm j\Omega t)$, то в соответствии с выражением (5.32) мгновенная частота узкополосного сигнала постоянна во времени: $\omega_s = \omega_0 \pm \Omega$.

Можно утверждать, что подобный сигнал представляет собой квазигармоническое колебание, промодулированное *только по амплитуде*, но не по фазовому углу. В частности, если одна из амплитуд A_s или B_s тождественно обращается в нуль, то в любой момент времени мгновенная частота $\omega_s = \omega_0$.

В общем же случае мгновенная частота изменяется во времени по закону

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{B_s}{A_s} = \omega_0 + \frac{B'_s A_s - A'_s B_s}{A_s^2 + B_s^2}. \quad (5.35)$$

Связь между спектрами сигнала и его комплексной огибающей. Пусть $G_s(\omega)$ — спектральная плотность комплексной огибающей узкополосного сигнала $s(t)$, который, в свою очередь, имеет спектральную плотность $S(\omega)$. Нетрудно видеть, что

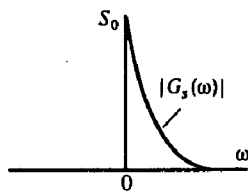
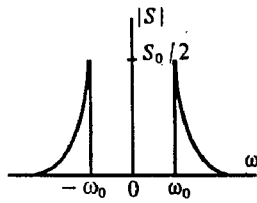


$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s^*(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} G_s(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G_s^*(-\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (5.36)$$

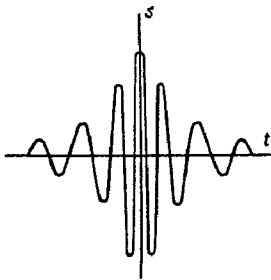
Физическая огибающая действительно «огibt» узкополосный сигнал и имеет смысл мгновенной амплитуды такого колебания

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала может быть найдена путем переноса спектра комплексной огибающей из окрестности нулевой частоты в окрестности точек $\pm \omega_0$. Амплитуды всех спектральных составляющих сокращаются вдвое; для получения спектра в области отрицательных частот используется операция комплексного сопряжения.

Формула (5.36) полезна тем, что по известному спектру узкополосного сигнала позволяет найти спектр его комплексной огибающей, которая, в свою очередь, определяет физическую огибающую и мгновенную частоту сигнала.



▲
решите задачу 11



Пример 5.5. Узкополосный вещественный сигнал $s(t)$ имеет при $\omega > 0$ спектральную плотность, несимметричную относительно частоты ω_0 :

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0, \\ 1/2 S_0 e^{-b(\omega - \omega_0)}, & \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

На основании формулы (5.36) спектральная плотность комплексной огибающей

$$G_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ S_0 e^{-b\omega}, & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Используя обратное преобразование Фурье, находим комплексную огибающую

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-b+jt)\omega} d\omega = \frac{S_0}{2\pi(b-jt)}.$$

Синфазную и квадратурную амплитуды исследуемого сигнала найдем, выделив вещественную и мнимую части:

$$A_s(t) = \frac{bS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}; \quad B_s(t) = \frac{tS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}.$$

Физическая огибающая рассматриваемого сигнала

$$U_s(t) = |\tilde{U}_s(t)| = \frac{S_0}{2\pi\sqrt{b^2 + t^2}}.$$

Мгновенная частота

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \arctg\left(\frac{t}{b}\right) = \omega_0 + b/(b^2 + t^2)$$

имеет наибольшее значение, равное $\omega_0 + 1/b$, в момент времени $t = 0$.

Осциллограмма колебания $s(t)$ представляет собой симметричный радиоимпульс с не постоянной во времени частотой заполнения.

5.4. Аналитический сигнал и преобразование Гильберта

Ниже будет описан еще один способ комплексного представления сигналов, часто применяемый в теоретических исследованиях. Замечательная особенность данного способа состоит в том, что он позволяет вводить понятия огибающей и мгновенной частоты сигнала без той степени неопределенности, которая свойственна методу комплексной огибающей.

Аналитический сигнал. Формула Эйлера

$$\cos \omega t = 1/2 (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$$

представляющая гармоническое колебание в виде суммы двух комплексно-сопряженных функций, наводит на мысль о том, что произвольный сигнал $s(t)$ с известной спектральной плотностью $S(\omega)$ можно записать как сумму двух составляющих,

Иногда говорят, что формула (5.37) осуществляет процедуру разделения частот

каждая из которых содержит или только положительные, или только отрицательные частоты:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.37)$$

Назовем функцию

$$z_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.38)$$

аналитическим сигналом, отвечающим вещественному колебанию $s(t)$.

Первый из интегралов в правой части формулы (5.37) путем замены переменной $\xi = -\omega$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi = z_s^*(t)/2. \end{aligned}$$

Поэтому формула (5.37) устанавливает связь между сигналами $s(t)$ и $z_s(t)$: $s(t) = 1/2 [z_s(t) + z_s^*(t)]$, или

$$s(t) = \operatorname{Re} z_s(t). \quad (5.39)$$

Мнимая часть аналитического сигнала

$$\hat{s}(t) = \operatorname{Im} z_s(t) \quad (5.40)$$

называется сопряженным сигналом по отношению к исходному колебанию $s(t)$. Итак, аналитический сигнал

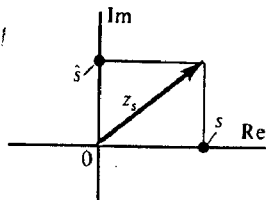
$$z_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (5.41)$$

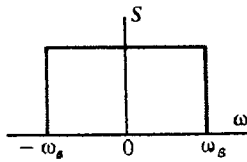
на комплексной плоскости отображается вектором, модуль и фазовый угол которого изменяются во времени. Проекция аналитического сигнала на вещественную ось в любой момент времени равна исходному сигналу $s(t)$.

Введение аналитического и сопряженного сигналов, безусловно, не позволяет получить каких-либо новых сведений, которые не содержались бы в математической модели сигнала $s(t)$. Однако эти новые понятия открывают прямой путь к созданию систематических методов исследования узкополосных колебаний.

На конкретном примере покажем способ вычисления аналитического сигнала по известному спектру исходного сигнала.

●
сопряженный сигнал





Пример 5.6. Пусть $s(t)$ — идеальный низкочастотный сигнал с известными параметрами S_0 и ω_b (см. § 5.1).

В этом случае аналитический сигнал

$$z_s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{j\pi t} (e^{j\omega_b t} - 1).$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \sin(\omega_b t) / (\omega_b t) \quad (\text{результат, известный ранее}),$$

$$\hat{s}(t) = \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \sin^2\left(\frac{\omega_b t}{2}\right) / \left(\frac{\omega_b t}{2}\right).$$

Графики этих двух сигналов приведены на рис. 5.3.

Отметим, что сопряженный сигнал обращается в нуль в точке, где исходный сигнал достигает максимума

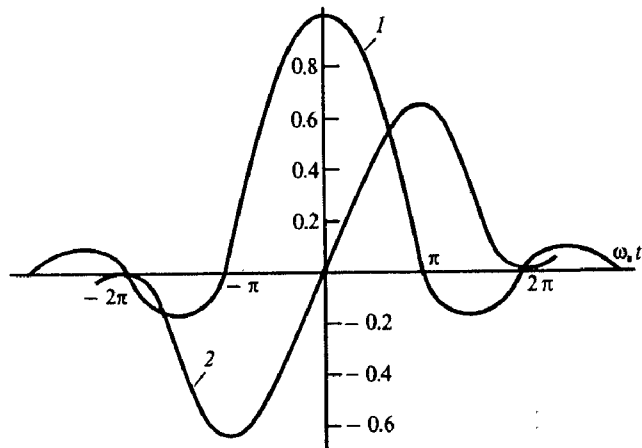


Рис. 5.3. Исходный и сопряженный сигналы:

1 — идеальный низкочастотный сигнал; 2 — сопряженный с ним сигнал

Спектральная плотность аналитического сигнала. Исследуем спектральную плотность аналитического сигнала, т. е. функцию $Z_s(\omega)$, связанную с $z_s(t)$ -преобразованием Фурье:

$$Z_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z_s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

На основании формулы (5.38) можно утверждать, что эта функция отлична от нуля лишь в области положительных частот:

$$Z_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ 2S(\omega), & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

Если $\hat{S}(\omega)$ — спектральная плотность сопряженного сигнала, то в силу линейности преобразования Фурье

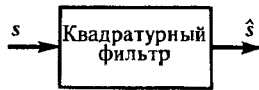
$$Z_s(\omega) = S(\omega) + j\hat{S}(\omega). \quad (5.43)$$

▲
решите задачи 12
и 13

Поэтому равенство (5.42) будет выполняться только в случае, когда спектральные плотности исходного и сопряженного сигналов связаны между собой следующим образом:

$$\hat{S}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega) = \begin{cases} jS(\omega), & \omega < 0, \\ -jS(\omega), & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (5.44)$$

Абстрактно можно представить себе такой способ получения сопряженного сигнала: исходное колебание $s(t)$ подается на вход некоторой системы, которая осуществляет поворот фаз всех спектральных составляющих на угол -90° в области положительных частот и на угол 90° в области отрицательных частот, не изменяя их по амплитуде. Систему, обладающую подобными свойствами, называют *квадратурным фильтром*.



Преобразование Гильберта. Формула (5.44) показывает, что спектральная плотность сопряженного сигнала есть произведение спектра $S(\omega)$ исходного сигнала и функции $-j \operatorname{sgn}(\omega)$. Поэтому сопряженный сигнал представляет собой свертку двух функций: $s(t)$ и $f(t)$, которая является обратным преобразованием Фурье по отношению к функции $-j \operatorname{sgn}(\omega)$.

Для удобства вычислений представим эту функцию в виде предела:

$$-j \operatorname{sgn}(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-j \operatorname{sgn}(\omega) \exp(-\varepsilon |\omega|)].$$

Тогда

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(\varepsilon + jt)\omega} d\omega - \frac{j}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon + jt)\omega} d\omega \right] = 1/(\pi t).$$

Таким образом, сопряженный сигнал связан с исходным сигналом соотношением

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{t - \tau}. \quad (5.45)$$

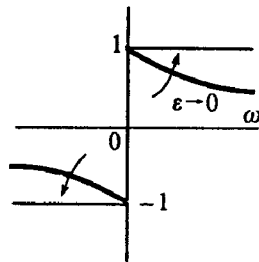
Можно поступить и по-иному, выразив сигнал $s(t)$ через $\hat{s}(t)$, который полагается известным. Для этого достаточно заметить, что из (5.44) вытекает следующая связь между спектральными плотностями:

$$S(\omega) = j \operatorname{sgn}(\omega) \hat{S}(\omega).$$

Поэтому соответствующая формула будет отличаться от (5.45) лишь знаком:

$$s(t) = -\hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\tau) d\tau}{\tau - t}. \quad (5.46)$$

Формулы (5.45) и (5.46) известны в математике под названием *прямого и обратного преобразований Гильберта*. Симво-



Умножением на экспоненциальный множитель обеспечиваем абсолютную интегрируемость функции и существование обратного преобразования Фурье

лическая запись их такова:

$$\hat{s}(t) = H[s(t)]; \quad s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \quad (5.47)$$

Поскольку функция $1/(t - \tau)$, называемая *ядром* этих преобразований, имеет разрыв при $\tau = t$, интегралы (5.45) и (5.46) следует понимать в смысле *главного значения*. Например:

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{s(\tau) d\tau}{t - \tau} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{t - \tau} \right].$$

Некоторые свойства преобразований Гильберта. Простейшее свойство этих интегральных преобразований — их линейность:

$$H[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)] = a_1 H[s_1(t)] + a_2 H[s_2(t)]$$

при любых постоянных a_1 и a_2 , в чем можно убедиться непосредственно.

Ядро преобразования Гильберта есть нечетная функция аргумента τ относительно точки $\tau = t$, а, значит, сигнал, сопряженный к константе, тождественно равен нулю:

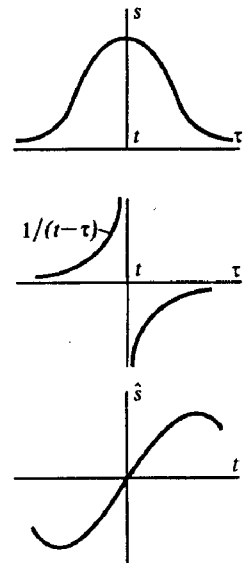
$$H[\text{const}] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{const}}{t - \tau} d\tau = 0.$$

Важное свойство преобразования Гильберта состоит в следующем: если при каком-либо t исходный сигнал $s(t)$ достигает экстремума (максимума или минимума), то в окрестности этой точки сопряженный сигнал проходит через нуль. Чтобы убедиться в этом, нужно на одном чертеже совместить графики $s(\tau)$ и ядра $1/(t - \tau)$. Пусть значение t близко к тому τ , при котором функция $s(\tau)$ экстремальна. Поскольку сигнал является здесь четной функцией, а ядро нечетной, будет наблюдаться компенсация площадей фигур, ограниченных горизонтальной осью и кривой, которая описывает подынтегральную функцию преобразования Гильберта. Образно говоря, если исходный сигнал изменяется во времени «подобно косинусу», то сопряженный с ним сигнал будет изменяться «подобно синусу».

Отметим, что преобразования Гильберта имеют *нелокальный характер*: подведение сопряженного сигнала в окрестности какой-либо точки зависит от свойств исходного сигнала на всей оси времени, хотя наибольший вклад дает, конечно, достаточно близкая окрестность рассматриваемой точки.

Преобразования Гильберта для гармонических сигналов. Вычислим сигналы, сопряженные с гармоническими колебаниями $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Результаты можно получить непосредственно из формулы (5.45). Однако проще поступить таким образом. Пусть некоторый произвольный сигнал $s(t)$ задан своим Фурье-представлением:

▲ решите задачи 14 и 15



■ **нелокальный характер преобразований Гильберта**

Здесь функция $\exp(j\omega t)$ представлена по формуле Эйлера

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega. \quad (5.48)$$

На основании соотношения (5.44) находим аналогичное представление сопряженного сигнала:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -j \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega) [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega) [\sin \omega t - j \cos \omega t] d\omega. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Рассматривая формулы (5.48) и (5.49) совместно, находим следующие законы преобразования Гильберта:

$$\begin{aligned} H[\cos \omega t] &= \operatorname{sgn}(\omega) \sin \omega t; \\ H[\sin \omega t] &= -\operatorname{sgn}(\omega) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Преобразование Гильберта для узкополосного сигнала. Пусть известна функция $G_s(\omega)$ — спектральная плотность комплексной огибающей узкополосного сигнала $s(t)$ с опорной частотой ω_0 . Согласно формуле (5.36), спектр данного сигнала

$$S(\omega) = \frac{1}{2} G_s(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G_s^*(-\omega - \omega_0). \quad (5.51)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует области частот $\omega > 0$, второе $-\omega < 0$. Тогда на основании формулы (5.44) спектр сопряженного сигнала

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2} G_s(\omega - \omega_0) e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2} G_s^*(-\omega - \omega_0) e^{j\pi/2}, \quad (5.52)$$

откуда видно, что спектральная плотность комплексной огибающей сопряженного сигнала

$$G_{\hat{s}}(\omega) = G_s(\omega) e^{-j\pi/2}. \quad (5.53)$$

▲

решите задачу 16

Итак, сопряженный сигнал в данном случае также является узкополосным. Если комплексная огибающая исходного сигнала

$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

то в соответствии с равенством (5.53) комплексная огибающая сопряженного сигнала

$$\tilde{U}_{\hat{s}}(t) = -j\tilde{U}_s(t) = B_s(t) - jA_s(t)$$

отличается от комплексной огибающей исходного колебания лишь наличием постоянного фазового сдвига на 90° в сторону запаздывания.

Отсюда следует, что узкополосному сигналу

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t \quad (5.54)$$

соответствует сопряженный по Гильберту сигнал

$$\hat{s}(t) = B_s(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (5.55)$$

Вычисление огибающей, полной фазы и мгновенной частоты. В рамках метода преобразований Гильберта огибающая $U_s(t)$ произвольного сигнала $s(t)$ определяется как модуль соответствующего аналитического сигнала:

$$U_s(t) = |z_s(t)| = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)}. \quad (5.56)$$

Целесообразность такого определения можно проверить на примере узкополосного сигнала. Используя формулы (5.54) и (5.55), находим, что огибающая такого сигнала

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}.$$

В § 5.3 данная формула была получена из других соображений.

По определению, полная фаза любого сигнала $s(t)$ равна аргументу аналитического сигнала $z_s(t)$:

$$\psi_s(t) = \arg z_s(t) = \arctg \frac{\hat{s}(t)}{s(t)}. \quad (5.57)$$

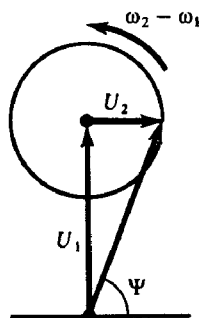
Наконец, мгновенная частота $\omega_s(t)$ сигнала есть производная полной фазы по времени:

$$\omega_s(t) = \frac{d}{dt} \arctg \frac{\hat{s}(t)}{s(t)} = \frac{\hat{s}'(t)s(t) - s'(t)\hat{s}(t)}{\hat{s}^2(t) + s^2(t)}. \quad (5.58)$$

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие вычисление указанных характеристик узкополосных сигналов.

Согласно методу преобразований Гильберта, огибающая и мгновенная частота сигнала жестко связаны друг с другом и их нельзя выбирать произвольно

Однако в случае произвольного сигнала нельзя требовать, чтобы огибающая и мгновенная частота обладали наглядным физическим смыслом



Скорость изменения фазы мала

Пример 5.7. Дано простое гармоническое колебание $s(t) = U_0 \cos \omega_0 t$.

В этом случае сопряженный сигнал $\hat{s}(t) = U_0 \sin \omega_0 t$. Огибающая исходного сигнала

$$U_s = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)} = U_0,$$

естественно, не зависит от времени и равна его амплитуде.

Полная фаза $\psi_s(t) = \omega_0 t$ и, наконец, мгновенная частота $\omega_s = \omega_0$.

Данный пример показывает, что определение огибающей, полной фазы и мгновенной частоты через преобразование Гильберта приводит к результатам, согласующимся с обычными представлениями о свойствах гармонических колебаний.

Пример 5.8. Колебание $s(t)$ является суммой двух гармонических составляющих с различными амплитудами и частотами: $s(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$.

Поскольку

$$\hat{s}(t) = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t,$$

огибающая такого сигнала изменяется во времени по закону

$$U_s = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

Полная фаза сигнала

$$\psi_s(t) = \arctg \frac{U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t}{U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t}.$$

Для вычисления мгновенной частоты следует воспользоваться формулой (5.58), которая приводит к следующему результату:

$$\omega_s(t) = \frac{\omega_1 U_1^2 + \omega_2 U_2^2 + U_1 U_2 (\omega_1 + \omega_2) \cos(\omega_2 - \omega_1)t}{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

Мгновенная частота изменяется во времени. Это связано с тем, что в данном случае фаза результирующего вектора, отображающего сумму двух гармонических колебаний, изменяется с различной скоростью в зависимости от того, как ориентированы по отношению друг к другу векторы слагаемых.

Пример 5.9. Рассмотрим идеальный полосовой сигнал $s(t)$, спектр которого при $\omega > 0$ отличен от нуля лишь на отрезке $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

Соответствующий аналитический сигнал

$$\begin{aligned} z_s(t) &= \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{S_0}{\pi t} [(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) - j(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)]. \end{aligned}$$

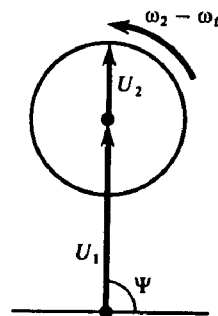
Огибающая исходного полосового сигнала

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \frac{S_0}{\pi t} \sqrt{(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t)^2 + (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)^2} = \\ &= \frac{S_0(\omega_2 - \omega_1)}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t} \right|. \end{aligned}$$

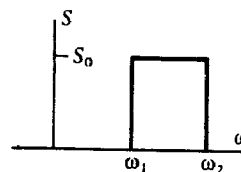
Наконец, мгновенная частота сигнала

$$\omega_s(t) = \frac{d}{dt} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t}{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t} \right].$$

Выполнив несложные преобразования, находим, что в данном случае $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2$ не зависит от времени и равна центральной частоте интервала, в котором сосредоточен спектр.



Скорость изменения фазы максимальна



Денеш Габор (1900–1979) — венгерский физик, создатель оптической голографии. Лауреат Нобелевской премии 1971 г.

Итак, зная аналитический сигнал, можно однозначно определять огибающую и мгновенную частоту узкополосного колебания, не применяя несколько искусственное понятие опорной частоты. Более того, формулы (5.56)–(5.58) сохраняют смысл применительно к сигналам произвольного вида, не обязательно удовлетворяющим условиям квазигармоничности (узкополосности).

Заключительные замечания. Теория аналитического сигнала применительно к задачам теории колебаний и волн была развита в 40-х годах в работах Габора [30]. Однако преобразования Гильберта появились в математике еще в начале XX в. в связи с так называемой краевой задачей теории аналитических функций [10]. Сущность этой задачи состоит в следующем.

Пусть $\zeta = \xi + j\eta$ — комплексная переменная, $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости, т. е. при $\eta > 0$. На вещественной оси, являющейся границей области аналитичности, функция $f(\xi)$ имеет как вещественную, так и мнимую

части: $f(\xi) = f_1(\xi) + jf_2(\xi)$. Требуется найти закон, связывающий между собой функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$.

Решение задачи дается преобразованиями Гильберта:

$$f_2(\xi) = H[f_1(\xi)], f_1(\xi) = H^{-1}[f_2(\xi)].$$

Можно показать [13], что аналитический сигнал $z_s(t)$ как раз обладает свойством аналитичности в верхней полуплоскости, если его рассматривать как функцию комплексной переменной $t = t' + jt''$.

В последнее время методы, основанные на понятиях аналитического сигнала и преобразований Гильберта, прочно вошли в арсенал теоретической радиотехники. Некоторые интересные проблемы в этой области описаны в [26].

Это свойство и определяет происхождение термина «аналитический сигнал»

Результаты

- ◇◇ Сигналы с ограниченным спектром бесконечно протяженны во времени.
- ◇◇ Простейшие сигналы этого класса — идеальный низкочастотный и идеальный полосовой — наблюдаются на выходах соответствующих идеальных фильтров, возбуждаемых дельта-импульсами.
- ◇◇ Два идеальных низкочастотных сигнала становятся ортогональными при соответствующем выборе сдвига во времени.
- ◇◇ Ряд Котельникова представляет собой частный случай обобщенного ряда Фурье. Базисными функциями здесь являются идеальные низкочастотные сигналы, сдвинутые во времени относительно друг друга на интервалы, кратные величине π/ω_b .
- ◇◇ Коэффициентами ряда Котельникова служат отсчеты разлагаемого сигнала, взятые через равные промежутки времени.
- ◇◇ Если в спектре сигнала отсутствуют составляющие с частотами выше f_b , то ряд Котельникова дает точное (в среднеквадратическом смысле) представление сигнала.
- ◇◇ Ширина спектра узкополосного сигнала значительно меньше центральной частоты. Узкополосные сигналы являются квазигармоническими — их амплитуда и частота в общем случае медленно изменяются во времени.
- ◇◇ Понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексной амплитуды на случай узкополосных сигналов.
- ◇◇ Физическая огибающая равна модулю комплексной огибающей. Ее вид не зависит от выбора опорной частоты сигнала.
- ◇◇ Мгновенная частота узкополосного сигнала есть сумма опорной частоты и производной по времени от аргумента комплексной огибающей.
- ◇◇ Спектр узкополосного сигнала получается путем переноса спектра его комплексной огибающей на отрезок, численно равный значению опорной частоты.
- ◇◇ Каждому вещественному сигналу может быть сопоставлен комплексный аналитический сигнал, имеющий спектральные составляющие лишь в области положительных частот.
- ◇◇ Вещественная часть аналитического сигнала равна исходному сигналу. Мнимая часть его называется сопряженным сигналом.
- ◇◇ Связь между исходным и сопряженным сигналами устанавливается парой интегральных преобразований Гильберта.
- ◇◇ Огибающая произвольного сигнала равна модулю соответствующего аналитического сигнала. Мгновенная частота определяется как производная от аргумента аналитического сигнала.

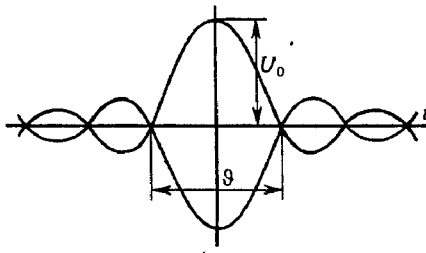
Вопросы

1. Почему сигналы с ограниченным спектром являются подходящими математическими моделями для описания реальных колебаний в радиотехнических устройствах?
2. Каковы примерные осциллограммы идеального низкочастотного и идеального полосового сигналов?
3. Каковы основные свойства функций, образующих базис Котельникова?
4. Как формулируется теорема Котельникова?
5. Каков наглядный смысл размерности пространства сигналов, ограниченных по спектру и по длительности? Оцените типичную величину размерности.

6. Как выглядит характерная осциллограмма узкополосного сигнала?
7. В чем состоит способ аппаратурного нахождения синфазной и квадратурной амплитуд узкополосного сигнала?
8. Каковы свойства физической огибающей узкополосного сигнала?
9. Как связаны между собой спектральные плотности исходного и сопряженного сигналов?
10. Как вычисляют преобразование Гильберта для узкополосного сигнала?
11. Почему метод аналитического сигнала обладает большей общностью по сравнению с методом комплексной огибающей?

Задачи

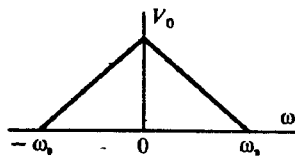
1. Идеальный низкочастотный сигнал имеет модуль спектральной плотности, равный $5,5 \cdot 10^{-4}$ В·с в полосе частот от 0 до 25 кГц. Определите максимальное мгновенное значение такого сигнала.
2. Измерения показали, что идеальный полосовой сигнал



характеризуется следующими параметрами: $T = 20$ мкс, $U_0 = 15$ В. Найдите ширину полосы частот этого сигнала и модуль его спектральной плотности в пределах этой полосы.

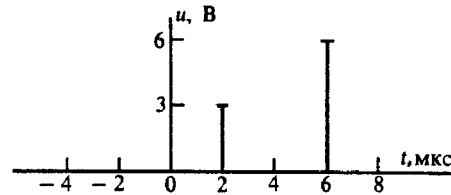
3. Автоматическая метеостанция передает данные о состоянии атмосферы каждые два часа. Какова наивысшая частота в спектре передаваемого сообщения?

4. Сигнал с ограниченным спектром $v(t)$ имеет график спектральной плотности $V(\omega)$ треугольной формы:



Определите коэффициенты ряда Котельникова для этого сигнала, полагая, что отсчеты взяты через интервалы времени π/ω_0 .

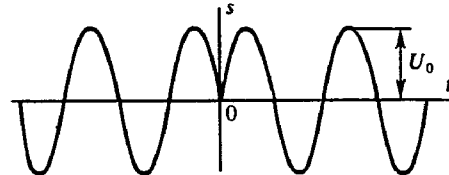
5. Сигнал с ограниченным спектром точно описывается двумя отличными от нуля отсчетами:



Чему равна верхняя частота в спектре этого сигнала? Найдите мгновенное значение сигнала в момент времени $t = 17$ мкс.

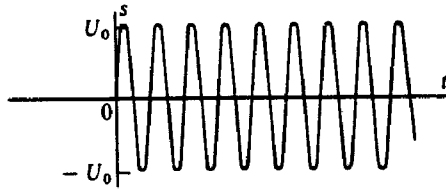
6. Как изменится ошибка аппроксимации сигнала, рассмотренного в примере 5.3, если темп выдачи отсчетов увеличить в 10 раз?

7. Сигнал $s(t)$ как при $t < 0$, так и при $t > 0$ представляет собой гармоническое колебание; в момент времени $t = 0$ фаза сигнала изменяется скачком на 180° :



Напишите выражение комплексной огибающей этого сигнала.

8. Найдите комплексную огибающую импульса включения гармонической ЭДС:



Обратите внимание на величину начальной фазы сигнала.

9. Определите комплексную огибающую сигнала с однотоновой угловой модуляцией:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t).$$

10. Напишите выражение комплексной огибающей прямоугольного ЛЧМ-импульса (см. гл. 4).

11. Узкополосный сигнал в окрестности опорной частоты ω_0 имеет спектральную плотность гауссова вида:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} S_0 \exp[-b(\omega - \omega_0)^2].$$

Определите спектр комплексной огибающей этого сигнала. Найдите закон изменения во

времени физической огибающей. Вычислите мгновенную частоту, сравнив результат с тем, который получен в примере 5.5. Чем объясняется их принципиальное различие?

12. Найдите аналитические сигналы, соответствующие гармоническим колебаниям $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$.

13. Вычислите аналитический сигнал, соответствующий радиоимпульсу $u(t) = U_0 [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_n)] \cos \omega_0 t$ с прямоугольной огибающей.

14. Вычислите сигнал, сопряженный с гармоническим колебанием $\cos \omega_0 t$ непосредственно, используя преобразование Гильберта вида (5.45).

15. Решите задачу, аналогичную предыдущей, применительно к сигналу $s(t) = \sin \omega_0 t / (\omega_0 t)$.

16. Покажите, что синфазная и квадратурная амплитуды узкополосного сигнала $s(t)$ связаны с компонентами аналитического сигнала следующим образом:

$$A_s(t) = s(t) \cos \omega_0 t + \hat{s}(t) \sin \omega_0 t,$$

$$B_s(t) = \hat{s}(t) \cos \omega_0 t - s(t) \sin \omega_0 t.$$

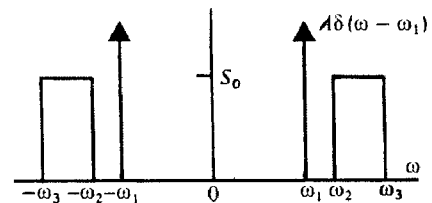
Более сложные задания

17. Докажите теорему Котельникова в частотном представлении, которая формулируется так: если сигнал $s(t)$ тождественно равен нулю вне интервала времени $t_1 < t < t_2$, то спектральная плотность $S(f)$ однозначно задается последовательностью ее значений в точках на оси частот, отстоящих на $1/(t_2 - t_1)$ Гц друг от друга.

18. Обобщите теорему Котельникова на случай полосовых сигналов, спектр которых при $\omega > 0$ отличен от нуля лишь в области $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Найдите аналитические выражения базисных функций таких сигналов.

19. Узкополосный сигнал представлен в виде $s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t$. Найдите условия, которым должны удовлетворять функции $A_s(t)$ и $B_s(t)$ для того, чтобы мгновенная частота сигнала оказалась постоянной во времени.

20. Найдите аналитический сигнал, соответствующий колебанию, у которого спектральная плотность



помимо регулярной части имеет составляющую с дельта-особенностью.

21. Методами теории аналитического сигнала изучите огибающую и мгновенную частоты однотонового ОБП-сигнала (см. гл. 4).

22. Используя обобщенную формулу Рэлея, докажите, что сигнал $s(t)$ с конечной энергией и сопряженный по Гильберту сигнал $\hat{s}(t)$ ортогональны.

23. Докажите, что сигналы $s(t)$ и $\hat{s}(t)$ имеют равные энергии и одинаковые автокорреляционные функции.

Глава 6

Основы теории случайных сигналов

В последние десятилетия широкое развитие получила научная область, называемая *статистической радиотехникой*. Эта дисциплина изучает явления при передаче сообщений в условиях, когда детерминированное описание сигналов принципиально невозможно и на смену ему приходит вероятностное (статистическое) описание.

Как указывалось в гл. 1, отличительная черта случайного сигнала состоит в том, что его мгновенные значения заранее не предсказуемы. Однако, изучая такой сигнал более пристально, можно заметить, что ряд характеристик весьма точно описывается в вероятностном смысле. Например, напряжение на зажимах нагретого резистора представляет собой последовательность малых, быстро изменяющихся во времени случайных отклонений, называемых *флуктуациями*. Примечательно, что чаще всего наблюдаются относительно небольшие отклонения от среднего уровня; чем больше отклонения по абсолютному значению, тем реже они наблюдаются. Уже в этом проявляется некоторая статистическая закономерность. Располагая сведениями о вероятностях флуктуаций различной величины, удастся создать математическую модель случайного колебания, вполне приемлемую как в научном, так и в прикладном смысле.

Вероятные законы возникают всегда, если физическая система, порождающая случайный сигнал, представляет собой объединение очень большого числа более мелких подсистем, совершающих некоторые индивидуальные движения, в большей или меньшей степени не зависящие друг от друга.

В радиотехнике случайные сигналы часто имеют вид *шумов*. Это хаотически изменяющиеся во времени электромагнитные колебания, наблюдаемые в разнообразных физических системах, где носители заряда, например электроны, совершают беспорядочные движения.

К математической модели случайного сигнала прибегают также в теории информации для вероятностного описания закономерностей, присущих осмысленным сообщениям.

Наконец, статистическую природу имеют сигналы в лазерных линиях связи. Ввиду сравнительно большой энергии кванта электромагнитного поля (фотона) здесь принципиально необходимо учитывать специфический квантовый шум.

6.1. Случайные величины и их характеристики

В настоящем параграфе приведены основные понятия теории вероятностей применительно к задачам статистической радиотехники. Более полное изложение этих вопросов можно найти в [11], [22].

●
флуктуации



Большие отклонения редки

Вероятность. Современная теория вероятностей представляет собой аксиоматизированную ветвь математики, обобщившую обширный эмпирический материал, накопленный наукой при изучении разнообразных случайных явлений.

В основе теории вероятностей лежит понятие полного множества «элементарных исходов» или случайных событий $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$. Символы A_i означают всевозможные исходы некоторого случайного эксперимента. Каждому событию $A_i \in \Omega$ сопоставлено вещественное число $P(A_i)$, которое называется *вероятностью* этого события.

Принимаются следующие аксиомы:

1) вероятность неотрицательна и не превышает единицы:

$$0 \leq P(A_i) \leq 1;$$

2) если A_i и A_j — несовместимые события, то

$$P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j);$$

3) сумма всех событий, содержащихся в Ω , есть достоверное событие:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots = 1.$$

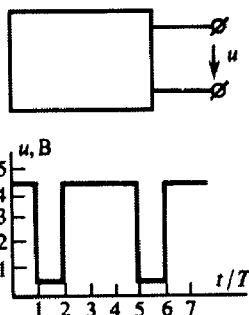
Измерение вероятностей. Математическое понятие вероятности случайного события является абстрактной характеристикой, присущей не самим интересующим нас объектам материального мира, а их теоретико-множественным моделям. Требуется некоторое дополнительное соглашение для того, чтобы можно было извлекать сведения о вероятностях из экспериментальных данных.

Общепринято оценивать вероятность события относительной частотой благоприятных исходов. Если проведено N независимых испытаний, причем в n из них наблюдалось событие A , то эмпирическая (выборочная) оценка вероятности $P(A)$, которую можно получить из этой серии, такова:

$$P_{\text{эмп}}(A) = n/N. \quad (6.1)$$

Аксиомы теории вероятностей были сформулированы в 30-х годах академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903—1987)

Обычно полагают, что $P_{\text{эмп}} \rightarrow P$, если число испытаний $N \rightarrow \infty$



▲
решите задачу 1

Пример 6.1. Сигнал u на выходе некоторого электронного устройства может принимать лишь два значения: $u_1 = 4.5$ В («высокий потенциал», событие A_1) и $u_2 = 0.5$ В («низкий потенциал», событие A_2). Через равные промежутки времени T случайным образом может происходить смена состояний системы. Эксперимент состоит в многократном измерении мгновенного значения сигнала на выходе. Моменты измерений произвольны, однако интервал времени между ними значительно превосходит T .

Предположим, что, проведя 100 независимых опытов, мы 43 раза наблюдали событие A_1 и 57 раз — событие A_2 . В соответствии с (6.1) эмпирические оценки вероятностей $P_{\text{эмп}}(A_1) = 0.43$ и $P_{\text{эмп}}(A_2) = 0.57$. Из данных опыта не следует, что именно такими должны быть и теоретические вероятности этих событий. Скорее всего, экспериментатор выскажет гипотезу о том, что эти события равновероятны: $P(A_1) = P(A_2) = 0.5$. Однако если такие же эмпирические оценки получаются в серии из 100 000 опытов, то эта гипотеза, по-видимому, должна быть отвергнута.

●
случайная величина

Функция распределения и плотность вероятности. Пусть X — случайная величина, т. е. совокупность всевозможных вещественных чисел x , принимающих случайные значения. Исчерпывающее описание статистических свойств X можно получить, располагая неслучайной функцией $F(x)$ вещественного аргумента x , которая равна вероятности того, что случайное число из X примет значение, равное или меньшее конкретного x :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

●
функция распределения

Функция $F(x)$ называется *функцией распределения* случайной величины X . Если X может принимать любые значения, то $F(x)$ является гладкой неубывающей функцией, значения которой лежат на отрезке $0 \leq F(x) \leq 1$. Имеют место следующие предельные равенства: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

●
плотность вероятности

Производная от функции распределения $p(x) = dF/dx$ есть *плотность распределения вероятности* (или, короче, *плотность вероятности*) данной случайной величины. Очевидно, что $p(x)dx = P(x < X \leq x + dx)$,

т. е. величина $p(x)dx$ есть вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $(x, x + dx]$.

Для непрерывной случайной величины X плотность вероятности $p(x)$ представляет собой гладкую функцию. Если же X — дискретная случайная величина, принимающая фиксированные значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ с вероятностями $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ соответственно, то для нее плотность вероятности выражается как сумма дельта-функций:

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i).$$

▲
решите задачу 2

В обоих случаях плотность вероятности должна быть неотрицательной: $p(x) \geq 0$ и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Усреднение. Моменты случайной величины. Результатами экспериментов над случайными величинами, как правило, служат средние значения тех или иных функций от этих величин. Если $\phi(x)$ — известная функция от x (исхода случайного испытания), то, по определению, ее среднее значение

Черта сверху означает операцию усреднения по множеству исходов случайных испытаний

$$\overline{\phi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p(x) dx. \quad (6.2)$$

Следует заметить следующее: наибольший вклад в среднее значение дают те участки оси x , где одновременно велики как усредняемая функция $\phi(x)$, так и плотность вероятности $p(x)$.

В статистической радиотехнике широко применяются особые числовые характеристики случайных величин, называемые их *моментами*. Момент n -го порядка случайной ве-

личины X есть среднее значение n -й степени случайной переменной:

$$m_n = \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx. \quad (6.3)$$

Простейшим является момент первого порядка, так называемое *математическое ожидание*

$$m_1 = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx, \quad (6.4)$$

которое служит теоретической оценкой среднего значения случайной величины, получаемого в достаточно обширных сериях испытаний.

Момент второго порядка

$$m_2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (6.5)$$

является средним квадратом случайной величины.

Используются также *центральные моменты* случайных величин, задаваемые следующей общей формулой:

$$\mu_n = \overline{(x - \bar{x})^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n p(x) dx. \quad (6.6)$$

Важнейший центральный момент — так называемая *дисперсия*

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = \overline{(x - \bar{x})^2}. \quad (6.7)$$

Очевидно, что

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \quad (6.8)$$

Величина σ_x , т. е. квадратный корень из дисперсии, называется *средним квадратическим отклонением*, которое служит для количественного описания меры разброса результатов отдельных случайных испытаний относительно математического ожидания.

Равномерное распределение. Пусть некоторая случайная величина X может принимать значения, принадлежащие лишь отрезку $x_1 \leq x \leq x_2$, причем вероятности попадания в любые внутренние интервалы одинаковой ширины Δx равны. Тогда плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1/(x_2 - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

Функцию распределения находят путем интегрирования:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases}$$

●
момент случайной
величины

Математическое
ожидание обобщает
в вероятностном
смысле понятие
среднего арифме-
тического

●
дисперсия

●
среднеквадратиче-
ское отклонение

▲
решите задачи 3
и 4

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

естественно, совпадает с центром отрезка $[x_1, x_2]$.

Как легко проверить, дисперсия случайной величины, имеющей равномерное распределение вероятности,

$$\sigma_x^2 = (x_2 - x_1)^2/12.$$

Гауссово (нормальное) распределение. В теории случайных сигналов фундаментальное значение имеет *гауссова плотность вероятности*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6.9)$$

содержащая два числовых параметра m и σ . График данной функции представляет собой колоколообразную кривую с единственным максимумом в точке $x = m$ (рис. 6.1).

Непосредственным вычислением можно убедиться, что параметры гауссова распределения имеют смысл соответственно математического ожидания и дисперсии: $\bar{x} = m$; $\sigma_x^2 = \sigma^2$.

Функция распределения гауссовой случайной величины

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right] d\xi.$$

Замена переменной $t = (\xi - m)/\sigma$ дает

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp(-t^2/2) dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \quad (6.10)$$

Здесь Φ — хорошо изученная неэлементарная функция, так называемый интеграл вероятностей [15]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

Следует обратить внимание на то, что при уменьшении σ график все более локализуется в окрестности точки $x = m$

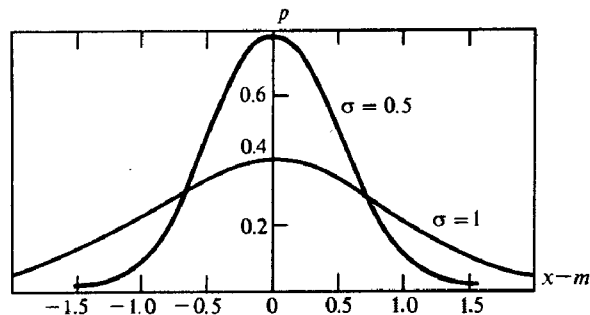


Рис. 6.1. График гауссовой плотности вероятности при различных значениях параметра σ

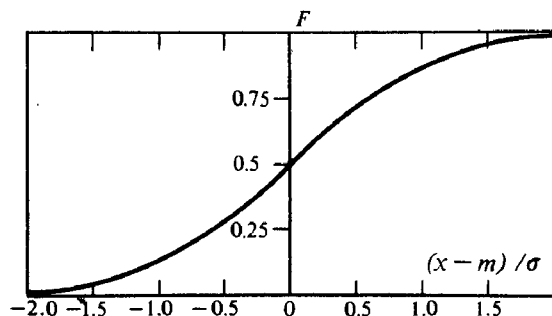


Рис. 6.2. График функции распределения гауссовской случайной величины

График функции $F(x)$ (рис. 6.2) имеет вид монотонной кривой, изменяющейся от нуля до единицы.

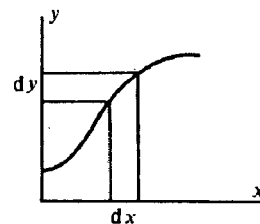
Плотность вероятности функции от случайной величины. Пусть Y — случайная величина, связанная с X однозначной функциональной зависимостью вида $y = f(x)$. Попадание случайной точки x в интервал шириной dx и попадание случайной точки y в отвечающий ему интервал шириной $|dy| = |f'(x)| dx$ являются эквивалентными событиями, поэтому вероятности их совпадают: $p_x(x) dx = p_y(y) |dy|$. Отсюда

$$p_y(y) = p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = p_x[g(y)] \left| \frac{dg}{dy} \right|, \quad (6.11)$$

где $x = g(y)$ — функция, обратная по отношению к $y = f(x)$.

Если функциональная связь между X и Y неоднозначна, так что имеется несколько обратных функций $x_1 = g_1(y)$, $x_2 = g_2(y)$, ..., $x_N = g_N(y)$, то формула (6.11) обобщается следующим образом:

$$p_y(y) = \sum_{i=1}^N p_i(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right|. \quad (6.12)$$



Используется то, что вероятности несовместимых событий складываются

Пример 6.2. Линейное преобразование гауссовской случайной величины.

Пусть $Y = aX + b$, причем плотность вероятности

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Так как $|dx/dy| = 1/|a|$, то на основании (6.11)

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} \exp\left[-\frac{(y-b-ma)^2}{2a^2\sigma^2}\right].$$

▲

решите задачу 6

Итак, гауссов характер случайной величины при линейном преобразовании сохраняется. Величина, полученная в результате такого преобразования, имеет математическое ожидание $\bar{y} = b + ma$ и дисперсию $\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$.

Характеристическая функция. В теории вероятностей большую роль играет статистическое среднее вида

$$\Theta(v) = \overline{\exp(jvx)} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jvx} dx, \quad (6.13)$$

называемое *характеристической функцией* случайной величины X . С точностью до коэффициента функции $\Theta(v)$ есть преобразование Фурье от плотности вероятности, поэтому

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v) e^{-jvx} dv. \quad (6.14)$$

Опуская элементарные выкладки, приведем некоторые результаты:

для случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $0 \leq x \leq a$,

$$\Theta(v) = [\exp(jav) - 1]/(jav); \quad (6.15)$$

для гауссовой случайной величины с заданными параметрами m , σ

$$\Theta(v) = \exp(jmv - \sigma^2 v^2/2). \quad (6.16)$$

Располагая характеристической функцией, легко найти моменты случайной величины. Действительно, так как

$$\frac{d^n \Theta}{dv^n} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) e^{jvx} dx,$$

то, полагая здесь $v = 0$ и сравнивая результат с (6.3), находим

$$m_n = j^{-n} \Theta^{(n)}(0). \quad (6.17)$$

С помощью характеристической функции удобно также находить плотность вероятности случайной величины, подвергнутой функциональному преобразованию. Так, если $y = f(x)$, то $\Theta_y(v) = \overline{\exp(jvy)} = \overline{\exp[jvf(x)]}$. Если удастся вычислить преобразование Фурье вида (6.14), то поставленная задача будет решена.

▲
решите задачу 7

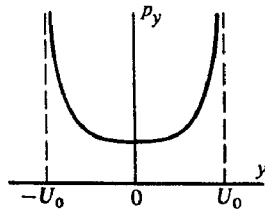
Пример 6.3. Пусть $y = U_0 \cos x$, где $U_0 = \text{const}$, в то время как x — значение случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$.

Так как $p_x(x) = 1/(2\pi)$, то

$$\Theta_y(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(jvU_0 \cos x) dx = J_0(vU_0),$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода с нулевым индексом.

Используя табличный интеграл [15], получаем



$$p_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(vU_0) e^{jvy} dv = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - y^2}}, & |y| \leq U_0, \\ 0, & |y| > U_0. \end{cases}$$

Вид графика плотности вероятности связан с тем, что если выполнить большую серию опытов, каждый раз случайным образом выбирая значения x из указанной области, то величина $U_0 \cos x$ чаще будет принимать значения, близкие к $\pm U_0$, нежели близкие к нулю.

6.2. Статистические характеристики систем случайных величин

Свойства случайных сигналов принято описывать, рассматривая не просто те величины, которые наблюдаются в какой-нибудь момент времени, а изучая совокупности этих величин, относящихся к различным фиксированным моментам времени. Займемся теорией подобных многомерных случайных величин.

Функция распределения и плотность вероятности. Пусть даны случайные величины $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, образующие n -мерный случайный вектор $\vec{X}$. По аналогии, с одномерным случаем функция распределения этого вектора

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

Отвечающая ей n -мерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет соотношению

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = P\{x_1 < X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n < X_n \leq x_n + dx_n\}.$$

Очевидно, функция распределения может быть найдена путем интегрирования плотности вероятности:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Любая многомерная плотность обладает свойствами, обычными для плотности вероятности:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

Зная n -мерную плотность, всегда можно найти m -мерную плотность при $m < n$, интегрируя по «лишним» координатам:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n.$$

▲
решите задачу 8

Вычисление моментов. Располагая соответствующей многомерной плотностью вероятности, можно находить средние значения любых комбинаций из рассматриваемых случайных величин и, в частности, вычислять их моменты. Так, ограничиваясь наиболее важным для дальнейшего случаем двумерной случайной величины, по аналогии с (6.4), (6.7) находим математические ожидания

$$\bar{x}_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.18)$$

$$\bar{x}_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

и дисперсии

$$\sigma_1^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.19)$$

$$\sigma_2^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \bar{x}_2)^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Новой по сравнению с одномерным случаем является возможность образования смешанного момента второго порядка

$$K_{12} = \overline{x_1 x_2} = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.20)$$

называемого *ковариационным моментом* системы двух случайных величин.

Корреляция. Предположим, что проведена серия опытов, в результате которых каждый раз наблюдалась двумерная случайная величина $\{X_1, X_2\}$. Условимся исход каждого опыта изображать точкой на декартовой плоскости.

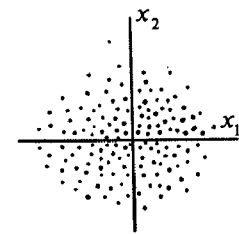
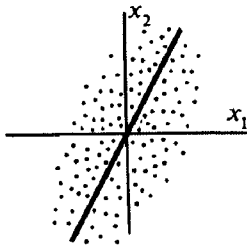
Может оказаться, что изображающие точки в среднем располагаются вдоль некоторой прямой, так что в каждом отдельном испытании величины x_1 и x_2 имеют чаще всего одинаковый знак. Это наводит на мысль о том, что между x_1 и x_2 есть статистическая связь, называемая *корреляцией*.

Однако возможен случай хаотического расположения точек на плоскости. Говорят, что при этом рассматриваемые величины *некоррелированы*, т. е. между ними нет устойчивой связи в вероятностном смысле.

Количественной характеристикой степени статистической связи двух случайных величин служит их ковариационный момент K_{12} или, что часто удобнее, *корреляционный момент* R_{12} , определяемый как среднее значение произведения $(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)$:

$$R_{12} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = K_{12} - \bar{x}_1 \bar{x}_2. \quad (6.21)$$

●
ковариационный
момент



●
корреляционный
момент

Вводят также безразмерный коэффициент корреляции

$$r_{12} = R_{12}/(\sigma_1\sigma_2). \quad (6.22)$$

● коэффициент корреляции

Для совпадающих случайных величин, когда $x_1 = x_2$, имеют место равенства

$$R_{11} = R_{22} = \sigma^2, \quad r_{11} = r_{22} = 1.$$

Если размерность случайного вектора больше двух, то можно построить всевозможные перекрестные корреляционные моменты

$$R_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и коэффициенты корреляции $r_{ij} = R_{ij}/(\sigma_i\sigma_j)$, которые объединяются в соответствующие матрицы

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \dots R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} \dots R_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ R_{n1} & R_{n2} \dots R_{nn} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \dots r_{1n} \\ r_{21} & 1 \dots r_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ r_{n1} & r_{n2} \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что всегда $|r_{ij}| \leq 1$, причем равенство возможно лишь при условии $x_i = \pm x_j$ (полностью коррелированные величины).

Статистическая независимость случайных величин. По определению, случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ статистически независимы, если их многомерная плотность вероятности может быть представлена в виде произведения соответствующих одномерных плотностей:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2) \dots p_n(x_n). \quad (6.23)$$

■ принцип статистической независимости

Статистически независимые случайные величины некоррелированы между собой. Действительно, для них

$$R_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i) p_i(x_i) dx_i \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \bar{x}_j) p_j(x_j) dx_j = 0$$

при $i \neq j$. Обратное утверждение в общем случае неверно: из некоррелированности не вытекает автоматически статистическая независимость случайных величин.

Функциональные преобразования многомерных случайных величин. Предположим, что составляющие двух случайных векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ связаны однозначной зависимостью

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

причем известны обратные функции

$$x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

...

$$x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Исходная плотность вероятности $p_{исх}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана. Для того чтобы обобщить формулу (6.11) на многомерный случай и вычислить плотность вероятности $p_{пр}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ преобразованного вектора, следует найти якобиан преобразования

Якобиан служит коэффициентом пропорциональности между элементарными объемами при функциональном преобразовании

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \quad (6.24)$$

Тогда искомая плотность вероятности

$$p_{пр}(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_{исх}(g_1, g_2, \dots, g_n) |D|. \quad (6.25)$$

Пример 6.4. Пусть x_1 и x_2 — случайные координаты конца вектора на плоскости.

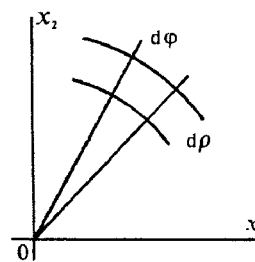
Перейдем к полярным координатам (ρ, φ) :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < \infty, \\ x_2 = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Якобиан такого преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Поэтому если задана плотность вероятности $p_{исх}(x_1, x_2)$, то $p_{пр}(\rho, \varphi) = \rho p_{исх}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.



▲ решите задачу 14

Многомерное гауссово распределение. Предположим, что для n -мерной случайной величины $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ известны совокупности средних значений $m_1, m_2, \dots, m_n$ и дисперсий $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, а также матрица коэффициентов корреляции $\mathbf{r}$.

В общем случае этих сведений недостаточно для построения n -мерной плотности вероятности. Исключением является случай, когда $\vec{X}$ — многомерная гауссова величина. Тогда, по определению,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2} |\mathbf{r}|^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2|\mathbf{r}|} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - m_j)}{\sigma_j} \right], \quad (6.26)$$

где $|\mathbf{r}|$ — определитель матрицы $\mathbf{r}$; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента r_{ij} определителя $|\mathbf{r}|$.

Важное свойство гауссова распределения заключается в следующем. Пусть вектор $\vec{X}$ образован некоррелированными случайными величинами, так что в матрице r отличны от нуля лишь элементы на главной диагонали: $r_{ij} = \delta_{ij}$. При этом $|r| = 1$, алгебраические дополнения $A_{ij} = \delta_{ij}$. Представим эти величины в (6.26), получим

Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right] = \\ = p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n),$$

где каждое из одномерных гауссовых распределений обладает параметрами m_i, σ_i .

Итак, если гауссова совокупность образована некоррелированными случайными величинами, то все они статистически независимы.

В дальнейшем часто используется двумерная гауссова плотность вероятности

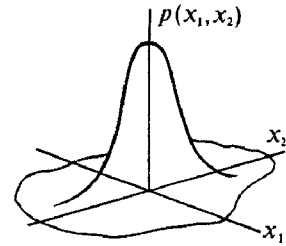
$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2r \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (6.27)$$

где $r = r_{12} = r_{21}$ — коэффициент корреляции составляющих x_1 и x_2 .

Эта формула упрощается, если $m_1 = m_2 = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma^2} (x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2) \right]. \quad (6.28)$$

Подобная плотность вероятности отображается гладкой поверхностью, построенной над координатной плоскостью (x_1, x_2) . Величина $p(x_1, x_2)$ достигает максимума в начале координат. Конфигурация поверхности зависит от коэффициента корреляции r .



Многомерная характеристическая функция. Обобщением понятий характеристической функции на многомерный случай служит n -мерное преобразование Фурье от соответствующей плотности вероятности:

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \overline{\exp[j(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n)]} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)] p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (6.29)$$

Многомерная характеристическая функция описывает систему случайных величин с той же степенью полноты, как и отвечающая ей плотность вероятности, выражаемая обрат-

ным преобразованием Фурье:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v_1, \dots, v_n) \exp[-j(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)] dv_1 \dots dv_n. \quad (6.30)$$

Если $\{X_1, \dots, X_n\}$ — совокупность статистически независимых величин, то на основании (6.29) многомерная характеристическая функция распадается на произведение одномерных характеристических функций отдельных случайных величин:

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n \Theta_i(v_i). \quad (6.31)$$

Можно показать, что многомерной гауссовой случайной величине $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ отвечает характеристическая функция

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \exp \left[j \sum_{k=1}^n m_k v_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sigma_k \sigma_l r_{kl} v_k v_l \right], \quad (6.32)$$

где m_k и σ_k^2 — среднее значение и дисперсия случайной величины X_k , r_{kl} — элемент корреляционной матрицы.

Плотность вероятности суммы случайных величин. Если в формуле (6.29) положить $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$, то многомерная характеристическая функция переходит в одномерную характеристическую функцию суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_n$:

$$\Theta_{\Sigma}(v) = \exp jv(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

●
свойство характеристической функции

Отсюда, выполнив обратное преобразование Фурье, можно найти плотность вероятности этой суммы. Например, если $\{X_1, \dots, X_n\}$ — гауссовы некоррелированные (а значит, и независимые) случайные величины с параметрами m_k , σ_k каждая, то из (6.32) следует, что

$$\Theta_{\Sigma}(v) = \exp \left[jv \sum_{k=1}^n m_k - \frac{1}{2} v^2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \right]. \quad (6.33)$$

Сравнивая этот результат с формулой (6.16), убеждаемся, что сумма нормальных случайных величин распределена также нормально, причем математические ожидания и дисперсии слагаемых суммируются:

$$m_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n m_k, \quad \sigma_{\Sigma}^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2. \quad (6.34)$$

●
центральная предельная теорема

В теории вероятностей доказывается гораздо более сильное утверждение, составляющее сущность центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова [21]. Согласно этой теореме, распределение суммы независимых случайных величин, диспер-

сии которых конечны, а распределения вероятности произвольны, при некоторых ограничениях, как правило, выполняемых в физических задачах, стремится к гауссову с ростом числа слагаемых.

6.3. Случайные процессы

Теория случайных величин изучает вероятностные явления «в статике», рассматривая их как некоторые зафиксированные результаты экспериментов. Для описания сигналов, которые отображают развивающиеся во времени случайные явления, методы классической теории вероятностей оказываются недостаточными. Подобные задачи изучает особая ветвь математики, получившая название *теории случайных процессов*.

По определению, *случайный процесс* $X(t)$ — это особого вида функция, характеризующаяся тем, что в любой момент времени t принимаемые ею значения являются случайными величинами.

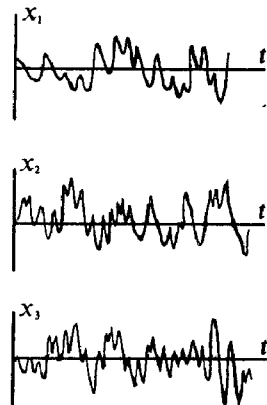
Ансамбли реализаций. Имея дело с детерминированными сигналами, мы отображаем их функциональными зависимостями или осциллограммами. Если же речь идет о случайных процессах, то ситуация оказывается сложнее. Фиксируя на определенном промежутке времени мгновенные значения случайного сигнала, получаем лишь единственную *реализацию* случайного процесса. Случайный процесс представляет собой бесконечную совокупность таких реализаций, образующих *статистический ансамбль*. Например, ансамблем является набор сигналов $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$, которые можно одновременно наблюдать на выходах совершенно одинаковых генераторов шумового напряжения.

Совсем необязательно, чтобы реализации случайного процесса представлялись функциями со сложным, нерегулярным во времени поведением. Часто приходится рассматривать случайные процессы, образованные, например, всевозможными гармоническими сигналами $U \cos(\omega t + \varphi)$, у которых один из трех параметров U , ω , φ — случайная величина, принимающая определенное значение в каждой реализации. Случайный характер такого сигнала заключен в невозможности заранее, до опыта знать значение этого параметра.

Случайные процессы, образованные реализациями, зависящими от конечного числа параметров, принято называть *квазидетерминированными случайными процессами*.

Плотности вероятности случайных процессов. Пусть $X(t)$ — случайный процесс, заданный ансамблем реализаций, а t_1 — некоторый произвольный момент времени. Фиксируя величины $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$, получаемые в отдельных реализациях, осуществляем *одномерное сечение* данного случайного процесса и наблюдаем случайную величину $X(t_1)$. Ее плотность вероятности $p(x, t_1)$ называют *одномерной плотностью вероятности* процесса $X(t)$ в момент времени t_1 . Согласно определению, величина $dP = p(x, t_1) dx$ есть вероятность того,

■
определение понятия случайного процесса



●
Ансамбль реализаций

●
одномерная плотность вероятности

что реализации случайного процесса в момент времени t_1 примут значения, лежащие в интервале $(x, x + dx)$.

Информация, которую можно извлечь из одномерной плотности, недостаточна для того, чтобы судить о характере развития реализаций случайного процесса во времени. Гораздо больше сведений можно получить, располагая двумя сечениями случайного процесса в несовпадающие моменты времени t_1 и t_2 . Возникающая при таком мысленном эксперименте двумерная случайная величина $\{X(t_1), X(t_2)\}$ описывается двумерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$. Эта характеристика случайного процесса позволяет вычислить вероятность события, заключающегося в том, что реализация случайного процесса при $t = t_1$ проходит в малой окрестности точки x_1 , а при $t = t_2$ — в малой окрестности точки x_2 .

Естественным обобщением является n -мерное сечение случайного процесса ($n > 2$), приводящее к n -мерной плотности вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Многомерная плотность вероятности случайного процесса должна удовлетворять обычным условиям, налагаемым на плотность вероятности совокупности случайных величин (см. § 6.2). Помимо этого, величина $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ не должна зависеть от того, в каком порядке располагаются ее аргументы (условие симметрии).

Иногда вместо n -мерной плотности вероятности удобно пользоваться n -мерной характеристической функцией, которая связана с соответствующей плотностью преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \Theta(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \exp[j(v_1 x_1 + \\ &+ v_2 x_2 + \dots + v_n x_n)] dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Описание свойств случайных процессов с помощью многомерных плотностей вероятности высокой размерности может быть весьма подробным. Однако на этом пути часто встречаются серьезные математические трудности.

Моментные функции случайных процессов. Менее детальные, но, как правило, вполне удовлетворительные в практическом смысле характеристики случайных процессов можно получить, вычисляя моменты тех случайных величин, которые наблюдаются в сечениях этих процессов. Поскольку в общем случае эти моменты зависят от временных аргументов, они получили название *моментных функций*.

Для статистической радиотехники наибольшее значение имеют три моментные функции низших порядков, называемые математическим ожиданием, дисперсией и функцией корреляции.

Математическое ожидание

$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) dx \quad (6.36)$$

●
многомерные плотности вероятности

●
математическое ожидание случайного процесса

есть среднее значение процесса $X(t)$ в текущий момент времени t ; усреднение проводится по всему ансамблю реализаций процесса.

Дисперсия

$$\sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x, t) dx \quad (6.37)$$

дисперсия случайного процесса

позволяет судить о степени разброса мгновенных значений, принимаемых отдельными реализациями в фиксированном сечении t , относительно среднего значения.

Двумерный центральный момент

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

функция корреляции

называется *функцией корреляции* случайного процесса $X(t)$. Эта моментная функция характеризует степень статистической связи тех случайных величин, которые наблюдаются при $t = t_1$ и $t = t_2$. Сравнивая формулы (6.37), (6.38), заметим, что при совмещении сечений функция корреляции численно равна дисперсии:

$$R(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t} = \sigma^2(t). \quad (6.39)$$

Стационарные случайные процессы. Так принято называть случайные процессы, статистические характеристики которых одинаковы во всех сечениях.

Говорят, что случайный процесс *стационарен в узком смысле*, если любая его n -мерная плотность вероятности инвариантна относительно временного сдвига τ :

$$p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (6.40)$$

Если же ограничить требования тем, чтобы математическое ожидание m и дисперсия σ^2 процесса не зависели от времени, а функция корреляции зависела лишь от разности $\tau = |t_2 - t_1|$, т. е. $R(t_1, t_2) = R(\tau)$, то подобный случайный процесс будет *стационарен в широком смысле*. Понятно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Как следует из определения, функция корреляции стационарного случайного процесса является четной:

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

Кроме того, абсолютные значения этой функции при любых τ не превышают ее значения при $\tau = 0$:

$$|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2. \quad (6.41)$$

Метод доказательства таков: из очевидного неравенства

$$[(x(t) - m) - (x(t + \tau) - m)]^2 \geq 0$$

Случайные сигналы, являющиеся типичными реализациями стационарных случайных процессов, составляют широко распространенный класс случайных колебаний, важный для радиотехники

стационарность в широком и узком смыслах

следует, что

$$\overline{[x(t) - m]^2} - 2\overline{[x(t) - m][x(t + \tau) - m]} + \overline{[x(t + \tau) - m]^2} = 2\sigma^2 - 2R(\tau) \geq 0,$$

откуда непосредственно вытекает неравенство (6.41).

Часто удобно использовать нормированную функцию корреляции

$$r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2, \quad (6.42)$$

для которой $r(0) = 1$.

Чтобы проиллюстрировать понятие стационарного случайного процесса, рассмотрим два примера.

●
нормированная
функция корреля-
ции

Пример 6.5. Случайный процесс $U(t)$ образован реализациями вида $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где U_m и ω_0 известны заранее, в то время как фазовый угол φ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Так как плотность вероятности фазового угла $p_\varphi = 1/(2\pi)$, то математическое ожидание процесса

$$\bar{u} = \overline{U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

Аналогично можно найти дисперсию:

$$\sigma^2 = \overline{[u - \bar{u}]^2} = \overline{U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = U_m^2/2.$$

Наконец, функция корреляции

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{U_m^2 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2} U_m^2 \{ \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi] + \cos \omega_0(t_2 - t_1) \} = \\ &= \frac{1}{2} U_m^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Итак, данный случайный процесс удовлетворяет всем условиям, которые необходимы для того, чтобы обеспечить стационарность в широком смысле.

Пример 6.6. Случайный процесс $U(t)$ имеет реализации вида $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, причем ω_0 и φ — заданные числа, U_m — случайная величина с произвольным законом распределения.

Математическое ожидание

$$\bar{u} = \overline{U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

будет не зависимым от времени лишь при $\overline{U_m} = 0$. Поэтому в общем случае рассматриваемый случайный процесс будет нестационарным.

▲
решите задачу 9

Большинство слу-
чайных процессов в
радиотехнике яв-
ляются эргодиче-
скими

Свойство эргодичности. Стационарный случайный процесс называют эргодическим, если при нахождении его моментных функций усреднение по статистическому ансамблю можно заменить усреднением по времени. Операция усреднения выполняется над единственной реализацией $x(t)$, длительность T которой теоретически может быть сколь угодно велика. Обозначая усреднение по времени угловыми скобками, запи-

шем математическое ожидание эргодического случайного процесса:

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (6.43)$$

которое равно постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия подобного процесса

$$\sigma^2 = \langle [x(t) - m]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m]^2 dt = \langle x^2(t) \rangle - m^2. \quad (6.44)$$

Поскольку величина $\langle x^2 \rangle$ представляет собой среднюю мощность реализации, а величина m^2 — мощность постоянной составляющей, дисперсия имеет наглядный смысл *мощности флуктуационной составляющей эргодического процесса*.

Аналогично находят функцию корреляции:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle [x(t) - m][x(t + \tau) - m] \rangle = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - m^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt - m^2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Достаточным условием эргодичности случайного процесса, стационарного в широком смысле, является стремление к нулю функции корреляции при неограниченном росте временного сдвига τ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0. \quad (6.46)$$

В математике показано, что это требование можно несколько ослабить. Оказывается, что случайный процесс эргодичен, если выполнено условие Слущкого [21]:

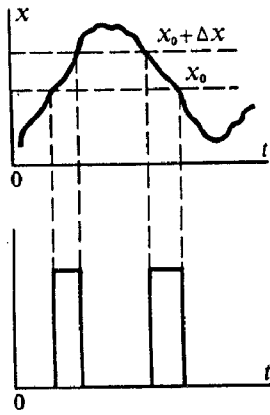
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau = 0. \quad (6.47)$$

Так, равенство (6.47) справедливо применительно к гармоническому процессу со случайной начальной фазой (см. пример 6.5).

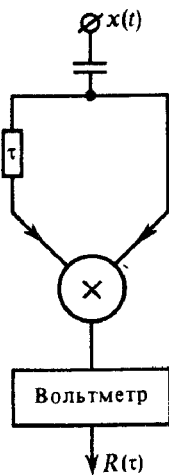
Измерение характеристик случайных процессов. Если случайный процесс является эргодическим, то его реализация достаточной длины есть «типичный» представитель статистического ансамбля. Изучая эту реализацию экспериментально, можно получить много сведений, характеризующих данный случайный процесс.

■
физический смысл
дисперсии случай-
ного процесса

■
условия эргодич-
ности случайного
процесса



Измерение плотности вероятности



Коррелометр

▲
решите задачу 14

●
стационарно связанные случайные процессы

Прибор для измерения одномерной плотности вероятности случайного процесса может быть выполнен следующим образом. Одномерная плотность вероятности эргодического случайного процесса есть величина, пропорциональная отношению времени пребывания его реализации на уровне между x и $x + \Delta x$. Предположим, что имеется устройство с двумя входами, на один из которых подается исследуемая реализация $x(t)$, а на другой — опорное постоянное напряжение, уровень которого можно регулировать. На выходе устройства возникают прямоугольные видеоимпульсы постоянной амплитуды, начало и конец которых определяются моментами времени, когда текущие значения случайного сигнала совпадают либо с уровнем x_0 , либо с уровнем $x_0 + \Delta x$. Если теперь измерить, скажем, с помощью обычного стрелочного прибора среднее значение тока, создаваемого последовательностью видеоимпульсов, то показания этого прибора будут пропорциональны плотности вероятности $p(x_0)$.

Любой достаточно инерционный стрелочный прибор может быть использован для измерения математического ожидания случайного процесса [см. формулу (6.43)].

Прибор, измеряющий дисперсию случайного процесса, как это следует из (6.44), должен иметь на входе конденсатор, отделяющий постоянную составляющую. Дальнейшие этапы процесса измерения — возведение в квадрат и усреднение по времени — выполняются инерционным квадратичным вольтметром.

Принцип работы измерителя функции корреляции (коррелометра) вытекает из формулы (6.45). Здесь мгновенные значения случайного сигнала после фильтрации постоянной составляющей, разделяясь на два канала, поступают на перемножитель, причем в одном из каналов сигнал задерживается на время τ . Для получения значения функции корреляции сигнал с выхода перемножителя обрабатывается инерционным звеном, которое осуществляет усреднение.

Взаимная функция корреляции двух случайных процессов. Во многих случаях представляет интерес вопрос о том, какова статистическая связь между двумя стационарными случайными процессами $X(t)$ и $Y(t)$. Принято вводить *взаимные функции корреляции* этих процессов по формулам

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= [x(t_1) - m_x][y(t_2) - m_y], \\ R_{yx}(t_1, t_2) &= [y(t_1) - m_y][x(t_2) - m_x]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Случайные процессы называют *стационарно связанными*, если функции $R_{xy}(t_1, t_2)$, $R_{yx}(t_1, t_2)$ зависят не от самих аргументов t_1 и t_2 , а лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае, очевидно,

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau). \quad (6.49)$$

Предположим, что случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически независимы в том смысле, что для мгновен-

ных значений $x = x(t)$ и $y_t = y(t + \tau)$ независимо от величины τ двумерная совместная плотность вероятности $p(x, y_t) = p_1(x)p_2(y_t)$. Тогда

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) p_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y_t - m_y) p_2(y_t) dy_t = 0,$$

т. е. из статистической независимости случайных процессов вытекает их некоррелированность. Однако в общем случае обратное утверждение не справедливо.

Стационарные гауссовы случайные процессы. Эти математические модели случайных сигналов широко используются в радиотехнике для описания статистических явлений, обусловленных большим числом независимых слагаемых, т. е. в условиях применимости центральной предельной теоремы. По определению, n -мерная плотность вероятности стационарного гауссова процесса следующим образом зависит от $n - 1$ временных аргументов $\tau_i = t_i - t_1$, $i = 2, 3, \dots, n$:

$$p(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2} |\mathbf{r}|^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2|\mathbf{r}|\sigma^2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_i - m)(x_j - m) \right]. \quad (6.50)$$

Современная радиотехника все шире применяет цифровые измерители параметров случайных процессов, работа которых основана на дискретизации случайного сигнала и последующих операциях над числами-выборками

▲ решите задачу 10

Здесь приняты те же обозначения, что и в формуле (6.26). Элементы корреляционной матрицы этого случайного процесса определяются нормированной функцией корреляции: $r_{ij} = r(\tau_i - \tau_j)$.

В дальнейшем часто будет использоваться двумерная гауссова плотность

$$p(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - r^2(\tau)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m)^2 - 2r(\tau)(x_1 - m)(x_2 - m) + (x_2 - m)^2}{2\sigma^2 [1 - r^2(\tau)]} \right\}. \quad (6.51)$$

Наибольшее число теоретических результатов в статистической радиотехнике получено именно применительно к стационарным гауссовым процессам

Стационарный гауссов процесс занимает исключительное место среди прочих случайных процессов — любая его многомерная плотность вероятности определяется двумя характеристиками: математическим ожиданием и функцией корреляции.

Результаты

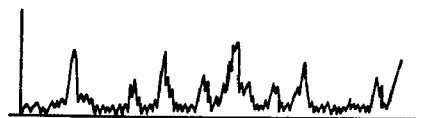
- ◇◇ Вероятностные закономерности проявляются в физических системах, образованных из большого числа более мелких подсистем.
- ◇◇ Основными характеристиками случайной величины являются ее функция распределения и плотность вероятности.
- ◇◇ Числовыми параметрами, описывающими случайную величину, служат моменты, такие, например, как математическое ожидание и дисперсия.

- ◇◇ Статистические связи между отдельными составляющими многомерной случайной величины принято описывать смешанными моментами второго порядка, называемыми коэффициентами корреляции.
- ◇◇ Некоррелированные гауссовы величины статистически независимы.
- ◇◇ Согласно центральной предельной теореме, сумма большого числа независимых случайных величин в пределе, с ростом числа слагаемых, распределена по нормальному закону.
- ◇◇ Случайный процесс задается бесконечным ансамблем своих реализаций.
- ◇◇ Важнейшими моментными функциями случайного процесса являются математическое ожидание, дисперсия и функция корреляции.
- ◇◇ Если статистические характеристики случайного процесса неизменны во времени, то такой процесс называется стационарным.
- ◇◇ Характеристики стационарных эргодических случайных процессов можно изучать экспериментально, анализируя единственную реализацию достаточно большой длины.
- ◇◇ Любую многомерную плотность вероятности стационарного гауссова случайного процесса можно вычислить, зная математическое ожидание и функцию корреляции.

Вопросы

1. Как формулируются аксиомы теории вероятностей?
2. В чём разница между понятиями математической и эмпирической (выборочной) вероятностей?
3. Каковы основные свойства плотности вероятности случайной величины?
4. Как следует находить плотность вероятности функции от случайной величины при однозначной и неоднозначной связях?
5. Как связаны между собой плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины?
6. Каков смысл понятия корреляции двух случайных величин?
7. Что является более жестким требованием — некоррелированность или статистическая независимость случайных величин?
8. Каковы отличительные свойства многомерной гауссовой случайной величины?
9. Как формулируется центральная предельная теорема?
10. В чем разница между двумя понятиями — «случайный процесс» и «случайная реализация»?

11. Экспериментально получена следующая реализация случайного сигнала:



Может ли она в принципе принадлежать ансамблю реализаций гауссова случайного процесса? Правдоподобно ли такое утверждение?

12. Дайте определение понятия случайного процесса, стационарного в широком и в узком смыслах?
13. В чем заключается отличительное свойство эргодического случайного процесса?
14. Каков физический смысл дисперсии эргодического случайного процесса?
15. Как определяется понятие взаимной функции корреляции двух случайных процессов?

Задачи

1. При передаче текста по некоторому каналу связи в среднем 0.5% символов воспринимаются с ошибкой. Передан текст длиной 120 символов. Какова вероятность правильного воспроизведения данного сообщения?

2. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = a \exp(-b|x|).$$

Найдите связь между числами a и b , вытекающую из условия нормировки.

3. Случайная величина X равномерно распределена во внутренних точках отрезка $[0, 5]$; вероятности обнаружить эту величину на концах отрезка одинаковы и равны 0.3. Постройте графики функции распределения и плотности вероятности для данной случайной величины.

4. Вычислите среднее значение и дисперсию случайной величины, рассмотренной в задаче 3.

5. Найдите среднее значение и дисперсию случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(x) = \frac{1}{2}\alpha \exp(-\alpha|x|)$ при $\alpha > 0$.

6. Найдите связь между плотностью вероятности $p_1(x)$ случайной величины X и плотностью вероятности $p_2(y)$ случайной величины Y , которая получена путем функционального преобразования $y = \exp(-x^2)$.

7. Характеристическая функция $\Theta(v)$ случайной величины X имеет вид $\Theta(v) = 1/(1+v^2)$. Найдите плотность вероятности $p(x)$ данной случайной величины.

8. Совместная плотность вероятности $p(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины имеет вид

$$p(x_1, x_2) = (a^2/\pi) \exp[-a^2(x_1^2 + x_2^2)].$$

Определите плотности вероятности случайных величин x_1, x_2 , а также их математические ожидания и дисперсии.

9. Докажите, что для стационарности в широком смысле случайного процесса $X(t)$ с реализациями $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ необходимо и достаточно, чтобы случайные величины A и B обладали следующими свойствами:

а) $\bar{A} = \bar{B} = 0$, б) $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, в) $\overline{AB} = 0$.

10. Случайный процесс $Z(t)$ является суммой двух независимых гауссовых случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, имеющих постоянные во времени математические ожидания m_x, m_y и дисперсии σ_x^2, σ_y^2 соответственно. Найдите одномерную плотность вероятности суммарного процесса.

Более сложные задания

11. Сигнал представляет собой сумму гармонических колебаний одной и той же частоты. Амплитуды слагаемых одинаковы и равны 5 В, начальные фазы могут независимо принимать лишь два значения: 0 и 180° . Число слагаемых равно 30. Вычислите вероятность того, что результирующая амплитуда сигнала окажется больше 50 В.

12. Докажите, что если случайная величина Z является суммой независимых случайных величин X и Y , то ее плотность вероятности есть свертка плотностей, отвечающих каждому из слагаемых:

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_y(\zeta) p_x(z - \zeta) d\zeta.$$

13. Координаты x, y случайной точки на плоскости являются независимыми гауссовыми случайными величинами с параметрами $m_x = m_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. Найдите плотность вероятности длины случайного радиуса-вектора этой точки.

14. Предложите структурную схему прибора для измерения двумерной плотности вероятности эргодического случайного процесса.

Корреляционная теория случайных процессов

● корреляционная теория

Наряду с полным описанием свойств случайных сигналов с помощью многомерных плотностей вероятности возможен упрощенный подход, когда случайные процессы характеризуются своими моментными функциями. Теория случайных процессов, основанная на использовании моментных функций не выше второго порядка, получила название *корреляционной теории*. В данной главе будет показано, что между корреляционными и спектральными свойствами случайных сигналов существует глубокая и тесная связь.

7.1. Спектральные представления стационарных случайных процессов

В гл. 2 была развита спектральная теория детерминированных сигналов. Из-за вероятностного характера отдельных реализаций прямой перенос методов спектрального анализа в теорию случайных процессов невозможен. Однако удастся получить ряд важных спектральных характеристик случайных колебаний, преобразуя по Фурье некоторые функции, получаемые путем усреднения реализаций.

Спектральные плотности реализаций. Рассмотрим стационарный случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием: $\bar{x} = 0$. Отдельно взятая реализация этого процесса есть детерминированная функция, которую можно представить в виде обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.1)$$

В общем случае реализации случайного процесса не являются абсолютно интегрируемыми на всей оси времени. Поэтому к их спектральным плотностям следует относиться как к обобщенным функциям (см. гл. 2)

с некоторой детерминированной спектральной плотностью $S_x(\omega)$.

Для того чтобы описать весь ансамбль реализаций, образующий процесс $X(t)$, естественно допустить, что спектральные плотности $S_x(\omega)$ сами являются случайными функциями частоты. Таким образом, случайный процесс во временной области порождает другой случайный процесс в частотной области. Если реализация случайного процесса представлена в форме (7.1), то говорят, что осуществлено *спектральное представление* этого процесса.

Ключевую роль в спектральной теории случайных процессов играет ответ на следующий вопрос: *какими свойствами должны обладать случайные функции $S_x(\omega)$ для того, чтобы процесс $X(t)$ был стационарным в широком смысле?*

Свойства случайной спектральной плотности. Для ответа на поставленный вопрос прежде всего усредним мгновенные

значения сигналов $x(t)$ по ансамблю реализаций:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = 0.$$

Это равенство будет выполняться тождественно при любом значении t , если потребовать выполнения условия $\overline{S_x(\omega)} = 0$. Итак, случайная спектральная плотность отдельных реализаций стационарного случайного процесса должна иметь нулевое математическое ожидание на всех частотах.

Теперь нужно определить, при каких условиях функция корреляции $R_x(\tau)$ зависит лишь от сдвига τ между сечениями. Воспользуемся тем, что сигнал $x(t)$ вещественный, так что наряду с (7.1) справедливо равенство

$$x(t) = x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (7.2)$$

Запишем выражение функции корреляции процесса $X(t)$, используя спектральные разложения случайных реализаций:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \overline{x(t) x(t+\tau)} = \overline{x^*(t) x(t+\tau)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} e^{j\omega\tau} e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} e^{j(\omega-\omega')t} d\omega'. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь во внутреннем подынтегральном выражении содержится множитель $\overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')}$, имеющий смысл функции корреляции случайной спектральной плотности. Для того чтобы функция $R_x(\tau)$ не зависела от времени t , необходимо, как это видно из выражения (7.3), потребовать выполнения следующей пропорциональности:

$$\overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} \sim \delta(\omega - \omega'). \quad (7.4)$$

Таким образом, случайная спектральная плотность $S_x(\omega)$ стационарного процесса имеет специфическую структуру: ее значения, отвечающие любым двум несовпадающим частотам, некоррелированы между собой. В то же время средний квадрат (дисперсия) случайной спектральной плотности неограниченно велик при любых частотах. Такой вид корреляционной связи, с которым мы часто будем сталкиваться в дальнейшем, называется *дельта-коррелированностью*.

Спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса. Введем в формулу (7.4) множитель пропорциональности, зависящий от частоты, и запишем это равенство таким образом:

$$\overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} = 2\pi W_x(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (7.5)$$

● дельта-коррелированность

● спектральная плотность мощности

Функция $W_x(\omega)$, играющая фундаментальную роль в теории стационарных случайных процессов, называется *спектральной плотностью мощности* процесса $X(t)$. В дальнейшем для краткости эту функцию будем называть также *спектром*.

Подставив (7.5) в (7.3), приходим к важному результату:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.6)$$

Здесь и в дальнейшем отсутствие индексов при функциях показывает, что результаты справедливы по отношению к любым случайным процессам

Итак, функции корреляции и спектр мощности стационарного случайного процесса *связаны между собой преобразованием Фурье*. Поэтому

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.7)$$

Формулы (7.6) и (7.7) составляют содержание теоремы, доказанной в 1934 г. известным советским математиком А. Я. Хинчиным и независимо от него американским ученым Н. Винером. Данная теорема в теории случайных процессов получила название *теоремы Винера — Хинчина*.

Для того чтобы выяснить физический смысл понятия энергетического спектра, положим в (7.6) $\tau = 0$. Тогда, поскольку $R(0) = \sigma^2$, получаем

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (7.8)$$

Дисперсия σ^2 , равная средней мощности флуктуаций стационарного случайного процесса, есть, таким образом, сумма вкладов от всех участков частотной оси.

Если случайный сигнал является напряжением, то его спектр мощности имеет размерность $B^2 \cdot c/рад$, т. е. размерность удельной мощности, выделяемой на единичном резисторе

Следует подчеркнуть различие между энергетическим спектром $W_u(\omega)$ детерминированного импульсного сигнала $u(t)$ (см. гл. 3) и спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Функция $W_u(\omega)$ характеризует меру *энергии*, приходящуюся на единичную полосу частот. В отличие от этого функция $W_x(\omega)$ характеризует удельную меру *мощности*. Этот факт находит отражение и в разных физических размерностях данных функций.

По своему физическому смыслу спектр мощности веществен и неотрицателен: $W(\omega) \geq 0$. Данное свойство накладывает весьма жесткие ограничения на вид допустимых функций корреляции (с этим мы уже сталкивались в гл. 3, изучая корреляционные свойства детерминированных сигналов).

▲
решите задачи 1 и 2

Необходимо указать также на следующее обстоятельство. Спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса, будучи всегда вещественной, не содержит никакой информации о фазовых соотношениях между отдельными спектральными составляющими. Поэтому по спектру мощ-

ности принципиально невозможно восстановить какую-либо отдельно взятую реализацию случайного процесса.

Односторонний спектр мощности. Поскольку $R(\tau)$ — четная функция аргумента τ , то соответствующий спектр мощности $W(\omega)$ представляет собой четную функцию частоты ω . Отсюда следует, что пару преобразований Фурье (7.6), (7.7) можно записать, используя лишь интегралы в полубесконечных пределах:

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (7.9)$$

$$W(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (7.10)$$

Целесообразно ввести так называемый *односторонний спектр мощности* $F(\omega)$ случайного процесса, определив его следующим образом:

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ W(\omega)/\pi, & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Функция $F(\omega)$ позволяет вычислить дисперсию стационарного случайного процесса путем интегрирования по положительным (физическим) частотам:

$$\sigma^2 = R(0) = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (7.12)$$

В технических расчетах часто вводят односторонний спектр мощности $N(f)$, представляющий собой среднюю мощность случайного процесса, приходящуюся на интервал частот шириной в 1 Гц:

$$N(f) = \begin{cases} 0, & f < 0, \\ 2W(2\pi f), & f \geq 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

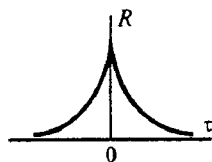
При этом, как легко видеть,

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} N(f) df. \quad (7.14)$$

Теорема Винера — Хинчина является важнейшим инструментом прикладной теории случайных процессов.

▲
решите задачу 3

Если реализации случайного процесса имеют размерность напряжения (В), то односторонний спектр мощности N имеет размерность В²/Гц



Пример 7.1. Спектр мощности случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции.

Пусть процесс $X(t)$ имеет функцию корреляции вида

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|)$$

с некоторым положительным параметром α . На основании (7.10) его спектральная плотность мощности

$$W_x(\omega) = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Односторонний спектр мощности

$$F_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha \sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

График данной функции указывает на то, что спектр мощности рассматриваемого процесса имеет выраженный низкочастотный характер — его максимум наблюдается на нулевой частоте.

Пример 7.2. Функция корреляции стационарного случайного процесса со спектром мощности гауссова вида.

Здесь

$$W_x(\omega) = W_0 \exp(-\beta \omega^2).$$

Для нахождения функции корреляции применим формулу (7.9):

$$R_x(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta \omega^2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}} \exp[-\tau^2/(4\beta)].$$

Итак, гауссов характер спектра мощности приводит к функции корреляции также гауссова вида. Дисперсия данного случайного процесса

$$\sigma_x^2 = W_0/(2\sqrt{\pi\beta}).$$

Пример 7.3. Функция корреляции стационарного случайного процесса с ограниченным спектром мощности низкочастотного вида.

Пусть процесс $X(t)$ характеризуется спектром мощности

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0 & \text{при } -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0 & \text{вне полосы } [-\omega_b, \omega_b]. \end{cases}$$

По формуле (7.9) находим функцию корреляции:

$$R_x(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau}.$$

Дисперсия этого случайного процесса

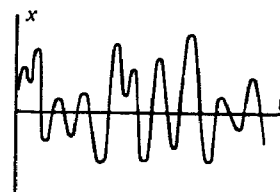
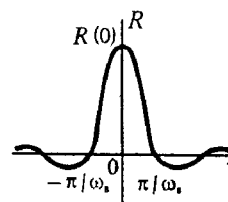
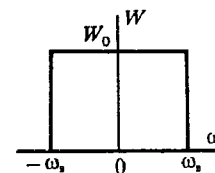
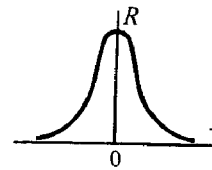
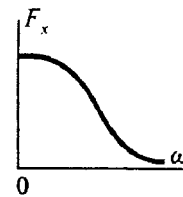
$$\sigma_x^2 = R(0) = W_0 \omega_b / \pi.$$

Если воспользоваться односторонним спектром мощности

$$F_x(\omega) = \begin{cases} F_0 = W_0/\pi & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0 & \text{вне полосы } [0, \omega_b], \end{cases}$$

то формула для дисперсии приобретает легко запоминающийся вид произведения спектра мощности на полосу частот, занимаемую сигналом: $\sigma_x^2 = F_0 \omega_b$.

Интересно и важно отметить, что функция корреляции данного случайного процесса *знакопеременна*, причем знак изменяется при сдвигах τ , кратных величине π/ω_b . Среднее значение произведения $x(t)x(t+\tau)$ будет вначале положительным, затем с увеличением τ отрицательным, вновь положительным и т. д. Такое свойство функции корреляции говорит о *квазипериодичности* любой реализации этого случайного процесса, понимаемой, конечно, не в абсолютном, а в вероятностном смысле.



Квазипериодическая реализация

Интервал корреляции. Случайные процессы, изучаемые статистической радиотехникой, как правило, обладают следующим свойством: их функция корреляции стремится к нулю с увеличением временного сдвига τ . Чем быстрее убывает функция $R(\tau)$, тем меньшей оказывается статистическая связь между мгновенными значениями случайного сигнала в два несовпадающих момента времени.

Числовой характеристикой, служащей для оценки «скорости изменения» реализаций случайного процесса, является интервал корреляции τ_k , определяемый выражением

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau. \quad (7.15)$$

Если известна информация о поведении какой-либо реализации «в прошлом», то возможен вероятностный прогноз случайного процесса на время порядка τ_k . Однако попытка прогнозирования на время, существенно превышающее интервал корреляции, окажется безрезультатной — мгновенные значения, столь далеко отстоящие во времени, практически некоррелированы, т. е. среднее значение произведения $x(t)x(t+\tau)$ стремится к нулю.

Эффективная ширина спектра. Пусть исследуемый случайный процесс характеризуется функцией $F(\omega)$ — односторонним спектром мощности, причем $F_{\max}$ — экстремальное значение этой функции. Заменим мысленно данный случайный процесс другим процессом, у которого спектральная плотность мощности постоянна и равна $F_{\max}$ в пределах эффективной полосы частот $\Delta\omega_{\text{эф}}$, выбираемой из условия равенства средних мощностей обоих процессов:

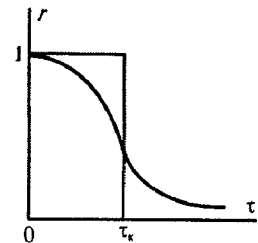
$$F_{\max} \Delta\omega_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega.$$

Отсюда получается формула для эффективной ширины спектра:

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{F_{\max}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (7.16)$$

Этой числовой характеристикой часто пользуются для инженерного расчета дисперсии шумового сигнала: $\sigma^2 = F_{\max} \Delta\omega_{\text{эф}}$. Например, если известно, что $F_{\max} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $\Delta\omega_{\text{эф}} = 3 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, то $\sigma^2 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2$, откуда среднеквадратическое значение напряжения шума $\sigma = 39 \text{ мВ}$.

Эффективную ширину спектра случайного процесса можно определить множеством способов, например, исходя из условия уменьшения значений спектра мощности на границе этого частотного интервала до уровня $0.1F_{\max}$. В любом случае величины τ_k и $\Delta\omega_{\text{эф}}$ должны быть связаны соотношением



Площади обеих фигур равновелики

▲ решите задачу 4

Вне пределов указанной полосы, спектральная плотность мощности случайного процесса считается равной нулю

▲ решите задачу 5

Чем шире спектр случайного сигнала, тем хаотичнее изменяются во времени его реализации

●
белый шум

неопределенности $\Delta\omega_{\text{эф}}\tau_k = O(1)$, вытекающим из свойств преобразования Фурье (см. гл. 2).

Белый шум. В радиотехнике так принято называть стационарный случайный процесс с постоянной на всех частотах спектральной плотностью мощности:

$$W(\omega) = W_0 = \text{const.} \quad (7.17)$$

Термин «белый шум» образно подчеркивает аналогию с «белым» (естественным) светом, у которого в пределах видимого диапазона интенсивность всех спектральных составляющих приблизительно одинакова.

По теореме Винера – Хинчина функция корреляции белого шума

$$R(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau)$$

равна нулю всюду, кроме точки $\tau = 0$. Средняя мощность (дисперсия) белого шума неограничено велика.

Белый шум является дельта-коррелированным случайным процессом. Некоррелированность мгновенных значений такого случайного сигнала означает бесконечно большую скорость изменения их во времени – как бы мал ни был интервал τ , сигнал за это время может измениться на любую наперед заданную величину.

Белый шум является абстрактной математической моделью и отвечающий ему физический процесс в природе, безусловно, не существует. Однако это не мешает приближенно заменять реальные достаточно широкополосные случайные процессы белым шумом в тех случаях, когда полоса пропускания цепи, на которую воздействует случайный сигнал, оказывается существенно уже эффективной ширины спектра шума.

Часто вводят также односторонний спектр мощности белого шума N_0 , такой, что $W_0 = N_0/2$ [см. формулу (7.13)]

7.2. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов

В этом параграфе изучаются свойства реализаций случайных процессов, подвергнутых операциям дифференцирования и интегрирования. Показано, что дифференциальные свойства случайного процесса определяются видом его функции корреляции.

Вероятностная трактовка сходимости и непрерывности. В теории случайных процессов приходится несколько расширить обычное понятие сходимости последовательности чисел к своему пределу. Так, если $\{x_n\}$ – случайная последовательность, пронумерованная числами натурального ряда, то для ее сходимости не обязательно, чтобы при $m, n \rightarrow \infty$ величина $|x_m - x_n|$ всегда была меньше любого наперед заданного малого числа.

Говорят, что случайная последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому числу x в *среднеквадратическом смысле*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(x_n - x)^2} = 0. \quad (7.18)$$

Требование сходимости в среднеквадратическом смысле является менее жестким по сравнению с классическим критерием сходимости детерминированных последовательностей.

Подобным же образом определяют понятие непрерывности случайного процесса. Считают, что случайный процесс $X(t)$ *непрерывен* в точке $t = t_0$, если справедливо предельное равенство

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \overline{[x(t_1) - x(t_0)]^2} = 0. \quad (7.19)$$

Производная от случайного процесса. Предположим, что реализация $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ подается на дифференцирующее устройство, создающее на выходе новую реализацию $y(t) = dx/dt$. Совокупность реализаций $y(t)$ образует случайный процесс $Y(t)$, называемый *производной* процесса $X(t)$. Символически этот факт обозначается равенством

$$Y(t) = dX/dt.$$

Положим, что $X(t)$ — стационарный случайный процесс с известным математическим ожиданием $\bar{x} = m_x$. Чтобы найти математическое ожидание производной, проведем усреднение по ансамблю реализаций:

$$m_y = \bar{y} = \overline{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt} m_x = 0. \quad (7.20)$$

Итак, при дифференцировании стационарного случайного процесса возникает новый случайный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Решим несколько более сложную задачу нахождения функции корреляции производной. Без ограничения общности положим, что математическое ожидание исходного процесса $m_x = 0$ (если это не так, всегда можно перейти к новому процессу $Z(t)$, реализации которого $z(t) = x(t) - m_x$). Воспользуемся тем, что

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

и представим функцию корреляции производной таким образом:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t) y(t + \tau)} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \frac{x(t + \tau + \Delta t) - x(t + \tau)}{\Delta t}} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} [\overline{x(t + \Delta t) x(t + \tau + \Delta t)} - \\ &\quad - \overline{x(t + \Delta t) x(t + \tau)} - \overline{x(t) x(t + \tau + \Delta t)} + \overline{x(t) x(t + \tau)}]. \end{aligned}$$

● **сходимость в среднеквадратическом смысле**

Заметим, что средние значения произведений зависят только от модуля разности аргументов сомножителей, поскольку процесс стационарен

▲
решите задачу 7

Все четыре слагаемых в квадратных скобках представляют собой функции корреляции исходного процесса, вычисленные при различных величинах задержки. Легко видеть, что

$$R_y(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} [2R_x(\tau) - R_x(\tau - \Delta t) - R_x(\tau + \Delta t)].$$

Можно заметить, что правая часть последнего равенства представляет собой вторую производную функции $R_x(\tau)$, взятую с обратным знаком. Таким образом, приходим к формуле

$$R_y(\tau) = -R_x''(\tau) = -\sigma_x^2 r''(\tau). \quad (7.21)$$

■
условие дифференцируемости случайного процесса

Дифференцируемые и недифференцируемые случайные процессы. По определению, случайный процесс $X(t)$ является дифференцируемым, если его производная имеет конечную дисперсию. В соответствии с (7.21) дисперсия производной $\sigma_y^2 = -R_x''(0) = -\sigma_x^2 r''(0)$. Поэтому для дифференцируемости случайного процесса необходимо, чтобы вторая производная его функции корреляции в нуле была конечной величиной, а значит, первая производная этой функции в нуле — непрерывной.

Недифференцируемым является случайный процесс с функцией корреляции вида $\sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$, рассмотренный в примере 7.1. Дифференцируя эту функцию один раз, убеждаемся, что производная в нуле изменяется скачком на величину $-2\sigma^2\alpha$.

В радиотехнике часто рассматривают случайные процессы с функциями корреляции вида

$$R(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|). \quad (7.22)$$

Простое вычисление показывает, что первая производная этой функции

$$R'(\tau) = \begin{cases} -\alpha^2 \sigma^2 \tau \exp(-\alpha\tau), & \tau > 0, \\ -\alpha^2 \sigma^2 \tau \exp(\alpha\tau), & \tau < 0 \end{cases}$$

в нуле непрерывна, поэтому функция корреляции (7.22) отвечает дифференцируемому процессу.

▲
решите задачу 8

Подобным свойством обладают реализации так называемых непрерывных марковских процессов

Несомненно, что реализации любых случайных сигналов, с которыми приходится встречаться в технике, всегда достаточно «гладкие» для того, чтобы быть дифференцируемыми. Однако в теоретических исследованиях часто возникают математические модели, соответствующие недифференцируемым процессам. Как правило, это имеет место тогда, когда реализации случайного процесса образуются из очень большого числа малых независимых слагаемых. Несмотря на то что вклад одного такого слагаемого (например, импульса тока от движения отдельно взятого электрона) ничтожен, именно эти слагаемые определяют «тонкую структуру» реализации. Как следствие, реализации такого процесса могут приобрести вид функции, всюду непрерывной, однако ни в одной точке не дифференцируемой.

Спектральная плотность мощности производной. Найдем связь между спектрами мощности исходного процесса и его производной. Пусть задано соответствие $X(t) \leftrightarrow W_x(\omega)$. По теореме Винера – Хинчина функция корреляции исходного процесса

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega.$$

На основании формулы (7.21) функция корреляции производной

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega,$$

откуда получается искомая формула связи

$$W_y(\omega) = \omega^2 W_x(\omega). \quad (7.23)$$

Примечательно, что в спектре мощности производной наблюдается уменьшение низкочастотных и увеличение высокочастотных составляющих. Формула (7.23) позволяет судить о дифференцируемости процесса $X(t)$, исходя из свойств его спектра мощности: указанный случайный процесс дифференцируем, если

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega) d\omega < \infty.$$

Так, для случайного процесса со спектром мощности низкочастотного вида (см. пример 7.3) дисперсия производной

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \omega^2 d\omega = W_0 \omega_B^3 / (3\pi),$$

поэтому такой процесс дифференцируем.

Корреляционная связь между случайным процессом и его производной. Во многих задачах статистической радиотехники существен вопрос вероятностной связи между мгновенными значениями случайного сигнала и его производной. Для ответа на него вычислим функцию взаимной корреляции $R_{xy}(\tau)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = dX/dt$, проводя усреднение:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t) y(t + \tau)} = \overline{x(t) \frac{d}{dt} x(t + \tau)} = \frac{d}{dt} \overline{x(t) x(t + \tau)},$$

откуда

$$R_{xy}(\tau) = R'_x(\tau). \quad (7.24)$$

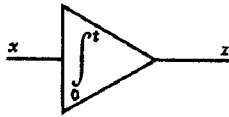
Здесь принято во внимание, что оба рассматриваемых случайных процесса стационарны и имеют нулевые средние значения

■
некоррелирован-
ность случайного
процесса и его про-
изводной

Как известно, функция $R_x(\tau)$ всегда является четной. Если же процесс дифференцируем, то при $\tau = 0$ производная $R'_x(\tau)$ обращается в нуль. На основании (7.24) отсюда следует, что мгновенные значения такого случайного сигнала и его производной, взятые в один и тот же момент времени, являются *некоррелированными*. Еще более сильное утверждение справедливо применительно к гауссовым случайным процессам: здесь случайный сигнал и его производная *статистически независимы*.

Интеграл от случайного процесса. Будем называть случайный процесс $Z(t)$ определенным интегралом с переменным верхним пределом от случайного процесса $X(t)$, если между реализациями $z(t)$ и $x(t)$ имеется соответствие вида

$$z(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi. \quad (7.25)$$

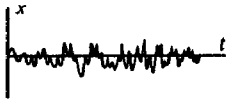


Физически это означает, что сигналы $z(t)$ наблюдаются на выходе идеального интегратора, причем входные сигналы $x(t)$ начинают поступать в нулевой момент времени.

Если процесс $X(t)$ стационарен и имеет постоянное среднее значение m_x , то математическое ожидание сигнала на выходе интегратора

$$m_z(t) = \int_0^t \bar{x}(\xi) d\xi = m_x t. \quad (7.26)$$

Случайный сигнал
на входе

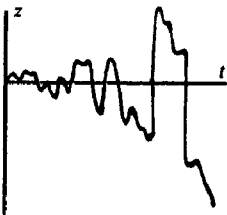


Таким образом, условие $m_x \neq 0$ сразу приводит к нестационарности случайного процесса $Z(t)$.

Однако даже при нулевом математическом ожидании входного процесса сигнал на выходе интегратора будет представлять собой реализацию нестационарного случайного процесса. Чтобы убедиться в этом, вычислим функцию корреляции интеграла:

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= \overline{\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} x(\xi) x(\eta) d\xi d\eta} = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \overline{x(\xi) x(\eta)} d\xi d\eta = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

и на выходе ин-
тегратора



Если процесс $X(t)$ стационарен, то аргумент функции корреляции, стоящей под знаком интеграла в последней формуле, будет представлять собой разность $\eta - \xi$, поэтому

$$R_z(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\eta - \xi) d\xi d\eta. \quad (7.27)$$

Поскольку правая часть формулы (7.27) зависит непосредственно от t_1 и t_2 , а не от их разности, случайный процесс на выходе интегратора является нестационарным.

Нестационарность интеграла от случайного процесса имеет глубокий физический смысл, свидетельствуя о безграничном

нарастании флуктуаций на выходе идеального интегратора, что связано с эффектом их накопления.

Сходные задачи часто встречаются в различных областях физики. В качестве примера можно привести известную проблему одномерного случайного блуждания точки (броуновского движения) [21]. Здесь материальная точка, выходя из начала координат и получая равновероятные толчки в двух противоположных направлениях, в среднем остается на месте, однако величина ее отклонения от среднего положения неограниченно нарастает во времени.

Задача о выбросах случайных процессов. В статистической радиотехнике большой интерес представляет следующая проблема, тесно связанная с дифференциальными свойствами случайных процессов. Предположим, что реализациями случайного процесса $X(t)$ служат достаточно «гладкие» функции времени. Требуется определить, сколь часто эти реализации пересекают некоторый фиксированный уровень x_0 . Такая проблема естественно возникает, например, при анализе помехоустойчивости радиотехнических устройств, находящихся под воздействием случайных флуктуационных или импульсных помех.

Событие, состоящее в том, что реализация $x(t)$ пересекает заданный уровень x_0 «снизу вверх», называют *положительным выбросом* процесса $X(t)$ на уровне x_0 .

Решим простейшую задачу — найдем среднее число положительных выбросов, происходящих в единицу времени. Для этого мысленно выделим на временной оси t малый интервал длительностью Δt . Считая, что процесс $X(t)$ стационарен и непрерывен, всегда можно указать столь малое время Δt , что в пределах этого интервала либо не будет ни одного положительного выброса, либо он будет единственным.

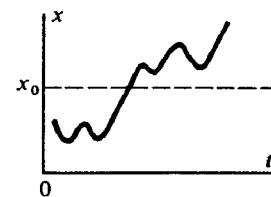
Найдем вначале вероятность элементарного события, заключающегося в том, что за время Δt происходит один положительный выброс. Для этого заметим, что единственный положительный выброс возникает в том случае, если: а) $x(t) < x_0$; б) $x(t + \Delta t) > x_0$. Но, поскольку $x(t + \Delta t) \approx x(t) + x'\Delta t$, условие б) означает, что $x_0 - x'\Delta t < x(t)$. Таким образом, единственный положительный выброс в пределах интервала времени Δt произойдет, если реализация случайного процесса будет иметь здесь положительную производную ($x' \geq 0$), удовлетворяя неравенству $x_0 - x'\Delta t < x(t) < x_0$.

Вероятность P этого события легко вычислить, зная совместную двумерную плотность вероятности $p(x, x')$ процесса и его производной, относящуюся к одному и тому же моменту времени:

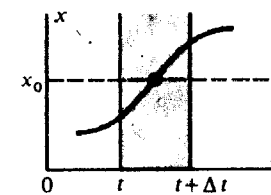
$$P = \int_0^{\infty} dx' \int_{x_0 - x'\Delta t}^{x_0} p(x, x') dx = \Delta t \int_0^{\infty} p(x_0, x') x' dx'. \quad (7.28)$$

То, что эта вероятность пропорциональна длительности интервала Δt , указывает на следующее: величина $n(x_0)$ — среднее число положительных выбросов на уровне x_0 , проис-

Нестационарный случайный процесс, получаемый путем интегрирования белого шума, принято называть случайным процессом Винера



Положительный выброс



ходящих в 1 с, выражается формулой

$$n(x_0) = \int_0^{\infty} p(x_0, x') x' dx'. \quad (7.29)$$

Выбросы гауссовых процессов. Вычисления по формуле (7.29) значительно упрощаются, если процесс $X(t)$ является гауссовым. При этом мгновенные значения реализации и ее производной в совпадающие моменты времени статистически независимы, поэтому

$$p(x_0, x') = p_1(x_0) p_2(x'). \quad (7.30)$$

Объединив формулы (7.29) и (7.30), находим

$$n(x_0) = p_1(x_0) \int_0^{\infty} p_2(x') x' dx'. \quad (7.31)$$

Будем полагать, что функция корреляции исходного процесса $R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$ известна. Тогда дисперсия производной $\sigma_{x'}^2 = -\sigma_x^2 r_x''(0)$, откуда следует формула для плотности вероятности производной:

$$p_2(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{x'} \sqrt{-r_x''(0)}} \exp \left[-\frac{(x')^2}{2\sigma_{x'}^2 (-r_x''(0))} \right]. \quad (7.32)$$

Элементарные выкладки приводят к результату

$$\int_0^{\infty} p_2(x') x' dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_{x'} \sqrt{-r_x''(0)},$$

подстановка которого в (7.31) дает окончательную формулу для вычисления среднего числа положительных выбросов стационарного гауссова процесса:

$$n(x_0) = \frac{\sqrt{-r_x''(0)}}{2\pi} \exp \left[-\frac{x_0^2}{2\sigma_{x'}^2} \right]. \quad (7.33)$$

Квазичастота стационарного случайного процесса. В § 7.1 отмечалось, что реализации некоторых случайных процессов изменяются во времени квазипериодически. Числовой характеристикой, отражающей темп колебаний, может служить *квазичастота*, определяемая как среднее число пересечений нулевого уровня. Согласно (7.33), квазичастота гауссова процесса

$$n(0) = \frac{\sqrt{-r_x''(0)}}{2\pi} \quad (7.34)$$

Квазичастота может быть определена только для дифференцируемого случайного процесса

целиком определяется поведением функции корреляции в нуле. Поскольку $-r_x''(0) = \sigma_{x'}^2 / \sigma_x^2$, а дисперсия производной выражается через односторонний спектр мощности процесса $X(t)$:

$$\sigma_{x'}^2 = \int_0^{\infty} \omega^2 F_x(\omega) d\omega,$$

Производная, получаемая путем линейных операций над исходным процессом, также нормальна

●
квазичастота

формула для квазичастоты может быть записана в виде, эквивалентном (7.34):

$$n(0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x} \left[\int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega) d\omega \right]^{1/2}. \quad (7.35)$$

▲
решите задачу 9

Пример 7.4. Квазичастота стационарного гауссова процесса с ограниченным низкочастотным спектром (см. пример 7.3).

Здесь

$$\int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega) d\omega = F_0 \omega_b^3 / 3, \quad \sigma_x = \sqrt{F_0 \omega_b}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.35), получаем

$$n(0) = \frac{\omega_b}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{f_b}{\sqrt{3}}.$$

Этот интересный результат нельзя усмотреть непосредственно.

§ 7.3. Узкополосные случайные процессы

В радиотехнических приложениях исключительную роль играет особый класс случайных процессов, спектральная плотность мощности которых имеет резко выраженный максимум вблизи некоторой частоты ω_0 , отличной от нуля. Ниже исследуются статистические свойства подобных узкополосных случайных процессов. Рассмотрение ограничено случаем гауссовых процессов, часто встречающихся на практике. К тому же именно для гауссовых процессов удастся получить ряд важных результатов, не выходя за рамки корреляционной теории.

Функция корреляции узкополосного случайного процесса. Рассмотрим стационарный случайный процесс $X(t)$, односторонний спектр мощности которого $F(\omega)$ концентрируется в окрестности некоторой частоты $\omega_0 > 0$.

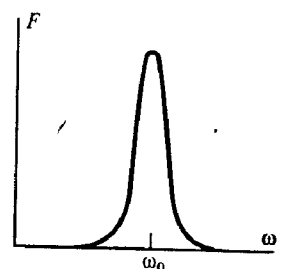
По теореме Винера — Хинчина функция корреляции данного процесса

$$R(\tau) = \int_0^\infty F(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (7.36)$$

Мысленно сместим спектр процесса из окрестности частоты ω_0 в окрестность нулевой частоты, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$. Тогда формула (7.36) приобретает вид

$$R(\tau) = \int_{-\omega_0}^\infty F(\omega_0 + \Omega) \cos [(\omega_0 + \Omega) \tau] d\Omega. \quad (7.37)$$

В соответствии с исходным предположением об узкополосности процесса $X(t)$ его спектр мощности $F(\omega)$ исчезаю-



Спектр мощности узкополосного случайного процесса

Заметим, что функция $a(\tau)$ четна, а функция $b(\tau)$ нечетна

еще мал на частотах, близких к нулю. Поэтому в выражении (7.37) можно заменить нижний предел интегрирования на $-\infty$, не внося ощутимой погрешности, и записать функцию корреляции в виде

$$R(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau - b(\tau) \sin \omega_0 \tau, \quad (7.38)$$

где

$$a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega,$$

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega \tau d\Omega$$

— медленно меняющиеся функции аргумента τ .

Особенно простой функция корреляции узкополосного случайного процесса получается в случае, когда спектр мощности $F(\omega)$ симметричен относительно центральной частоты ω_0 . При этом $b(\tau) = 0$, так что

$$R(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (7.39)$$

Здесь коэффициент $a(\tau)$ играет роль огибающей, которая изменяется медленно по сравнению с множителем $\cos \omega_0 \tau$. Часто бывает удобным ввести нормированную огибающую $\rho(\tau)$ функции корреляции узкополосного случайного процесса, определив ее с помощью равенства $a(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau)$.

Тогда

$$R(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (7.40)$$

Огибающая и начальная фаза. Характерный вид функции корреляции (7.40) свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания:

$$x(t) = U(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (7.41)$$

у которых как огибающая $U(t)$, так и начальная фаза $\varphi(t)$ являются случайными функциями, медленно (в масштабе ω_0) изменяющимися во времени.

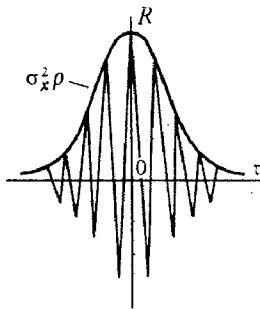
Представим реализацию (7.41) как сумму синфазной и квадратурной составляющих (см. гл. 5):

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t. \quad (7.42)$$

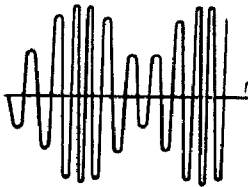
Обе амплитуды $A(t)$ и $B(t)$ являются низкочастотными сигналами, тем более медленными, чем меньше эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ по сравнению с центральной частотой ω_0 .

Введем в рассмотрение случайный процесс $Y(t)$, сопряженный с исходным процессом $X(t)$. Его реализацией является преобразование Гильберта:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau}.$$



Типичная функция корреляции узкополосного случайного процесса



Типичная реализация узкополосного случайного процесса

Предположение о медленности синфазной $A(t)$ и квадратурной $B(t)$ амплитуд позволяет весьма просто записать выражение для реализации сопряженного процесса, вынеся медленные множители за знак преобразования Гильберта:

$$y(t) = A(t) \sin \omega_0 t + B(t) \cos \omega_0 t. \quad (7.43)$$

Отсюда получаем формулы для мгновенных значений реализации огибающей

$$U(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} \quad (7.44)$$

и начальной фазы

$$\varphi(t) = \arg [A(t) + jB(t)]. \quad (7.45)$$

Статистические свойства сопряженного процесса. Для дальнейшего анализа свойств огибающей и начальной фазы узкополосного случайного процесса необходимо изучить связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Прежде всего отметим, что если $\bar{x} = 0$, то $\bar{y}$ также равно нулю. Далее, поскольку процесс $X(t)$ гауссов, а преобразование Гильберта есть линейное интегральное преобразование, то гауссовым будет и сопряженный процесс $Y(t)$.

Как известно, если $S_x(\omega)$ — спектральная плотность конкретной реализации $x(t)$, то спектр сопряженной реализации $S_y(\omega) = -jS_x(\omega) \operatorname{sgn}(\omega)$.

Модули спектральных плотностей $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ совпадают, поэтому спектры мощности процессов $X(t)$ и $Y(t)$ одинаковы: $W_x(\omega) = W_y(\omega)$. Отсюда следует вывод о тождественности функций корреляции:

$$R_x(\tau) = R_y(\tau) = \int_0^{\infty} F_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

и о стационарности процесса $Y(t)$.

Вычислим, наконец, функцию взаимной корреляции:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \overline{x(t)y(t+\tau)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{x(t)x(\xi)}}{t+\tau-\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(\xi-t)}{\tau-(\xi-t)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(\eta)}{\tau-\eta} d\eta, \end{aligned}$$

которая оказывается равной преобразованию Гильберта от функции корреляции процесса $X(t)$. Аналогично можно доказать (вывод представляется читателю в качестве упражнения), что

$$R_{yx}(\tau) = -R_{xy}(\tau).$$

Свойство нормальности сохраняется при любом линейном преобразовании случайного процесса

Итак,

$$R_{xy}(\tau) = H[R_x(\tau)] = \int_0^{\infty} F_x(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (7.46)$$

Интересно заметить, что функция $R_{xy}(\tau)$ нечетна и обращается в нуль при $\tau = 0$. Поэтому процессы $X(t)$ и $Y(t)$ в совпадающие моменты времени статистически независимы. Формуле (7.46) можно придать удобный вид, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\omega_0}^{\infty} F_x(\omega_0 + \Omega) \sin(\omega_0 + \Omega)\tau d\Omega = \\ &= a(\tau) \sin \omega_0 \tau + b(\tau) \cos \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ определяются в соответствии с формулой (7.38).

Корреляционные свойства синфазной и квадратурной амплитуд. Наша конечная цель — найти и изучить статистические характеристики огибающей $U(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$. Для этого удобно перейти от реализаций $x(t)$, $y(t)$ к медленно меняющимся во времени реализациям $A(t)$, $B(t)$, которые на основании (7.42) и (7.43) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t) &= x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t, \\ B(t) &= -x(t) \sin \omega_0 t + y(t) \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Возьмем первую формулу из системы (7.48) и вычислим функцию корреляции процесса $A(t)$. Выполнив элементарные тригонометрические преобразования, находим

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= \overline{[x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t] \times} \\ &\quad \times \overline{[x(t + \tau) \cos \omega_0(t + \tau) + y(t + \tau) \sin \omega_0(t + \tau)]} = \\ &= R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{xy}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Подставив сюда выражения функций $R_x(\tau)$ и $R_{xy}(\tau)$ из (7.38) и (7.47), приходим к очень простому результату:

$$R_A(\tau) = a(\tau). \quad (7.50)$$

Аналогично доказывается, что

$$R_B(\tau) = a(\tau) \quad (7.51)$$

и

$$R_{AB}(\tau) = b(\tau). \quad (7.52)$$

Положив в (7.50) и (7.51) $\tau = 0$, имеем

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2. \quad (7.53)$$

Таким образом, дисперсии синфазной и квадратурной амплитуд оказываются равными дисперсии исходного узкополосного процесса.

Процессы $A(t)$, $B(t)$ линейно связаны с гауссовыми процессами $X(t)$, $Y(t)$. Поэтому они также являются гауссовыми и, если $\bar{x} = \bar{y} = 0$, то $\bar{A} = \bar{B} = 0$

▲
решите задачу 10

Совместная плотность вероятности огибающей и начальной фазы. Достоинства метода, основанного на переходе от узкополосного случайного процесса к его синфазной и квадратурной составляющим, становятся очевидными, когда требуется вычислить двумерную плотность вероятности $p(U, \varphi)$. Эта характеристика, в свою очередь, дает возможность найти одномерную плотность вероятности огибающей

$$p(U) = \int_0^{2\pi} p(U, \varphi) d\varphi \quad (7.54)$$

и плотность вероятности начальной фазы

$$p(\varphi) = \int_0^{\infty} p(U, \varphi) dU. \quad (7.55)$$

Мгновенные значения амплитуд $A(t)$ и $B(t)$ образуют двумерный гауссов вектор, обе составляющие которого независимы и имеют одинаковые дисперсии σ_x^2 . Поэтому двумерная плотность вероятности

$$p(A, B) = p(A)p(B) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (7.56)$$

Теперь, чтобы получить искомую плотность вероятности $p(U, \varphi)$, следует выполнить функциональное преобразование, переводящее случайный вектор $\{A, B\}$ в новую случайную совокупность $\{U, \varphi\}$:

$$A = U \cos \varphi, \quad B = U \sin \varphi. \quad (7.57)$$

Якобиан такого преобразования [см. формулу (6.24)]

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -U \sin \varphi \\ \sin \varphi & U \cos \varphi \end{vmatrix} = U. \quad (7.58)$$

Поскольку в новых переменных $A^2 + B^2 = U^2$, искомая двумерная плотность вероятности

$$p(U, \varphi) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (7.59)$$

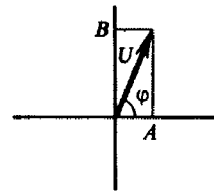
Одномерная плотность вероятности начальной фазы. Воспользовавшись формулами (7.55) и (7.59), найдем плотность вероятности начальной фазы:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}\right] dU.$$

Замена переменной $z = U/\sigma_x$ приводит к следующему результату:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} z \exp(-z^2/2) dz = \frac{1}{2\pi}. \quad (7.60)$$

Используется предположение о том, что спектр мощности симметричен и функция $b(\tau)$ обращается в нуль



Физически равномерное распределение означает отсутствие какого-либо преимущественного значения начальной фазы у отдельно взятых реализаций

Подчеркнем, что здесь и в дальнейшем $p(\varphi)$ и $p(U)$ — разные функции

Таким образом, начальная фаза узкополосного случайного процесса распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$.

Одномерная плотность вероятности огибающей. Поскольку функция $p(U, \varphi)$ не зависит от угла φ , на основании выражений (7.54) и (7.59) плотность вероятности огибающей

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp \left[-\frac{U^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (7.61)$$

Здесь также целесообразно перейти к безразмерной переменной $z = U/\sigma_x$, относительно которой

$$p(z) = z \exp(-z^2/2). \quad (7.62)$$

●
закон Рэлея

Плотность вероятности мгновенных значений огибающей узкополосного случайного процесса, устанавливаемая выражением (7.61) или (7.62), известна под названием закона Рэлея. Соответствующий график (рис. 7.1) наглядно показывает, что наиболее вероятны некоторые средние (порядка σ_x) значения огибающей. В то же время маловероятно, чтобы огибающая принимала значения как близкие к нулю, так и значительно превосходящие среднеквадратичный уровень σ_x узкополосного процесса.

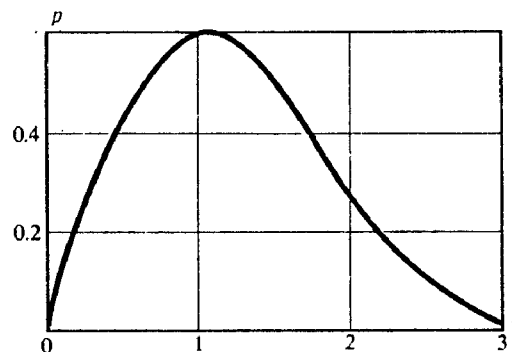


Рис. 7.1. График плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону Рэлея (по оси абсцисс отложен безразмерный аргумент $z = U/\sigma_x$)

Проводя усреднение с помощью плотности вероятности (7.61), находим среднее значение огибающей

$$m_U = \bar{U} = \sqrt{\pi/2} \sigma_x = 1.253 \sigma_x \quad (7.63)$$

▲
решите задачу 11

и ее дисперсию

$$\sigma_U^2 = \bar{U^2} - (\bar{U})^2 = (2 - \pi/2) \sigma_x^2 = 0.429 \sigma_x^2. \quad (7.64)$$

Располагая одномерной плотностью вероятности огибающей, можно решить ряд задач теории узкополосных случайных процессов, в частности, найти вероятность превышения огибающей некоторого заданного уровня.



Событие, рассматриваемое в этом примере, является достаточно редким

Пример 7.5. Узкополосный нормальный процесс имеет постоянное значение спектра мощности $F_0 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$ в пределах полосы частот от $\omega_{\min} = 10^5 \text{ с}^{-1}$ до $\omega_{\max} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Найти вероятность того, что огибающая этого процесса превосходит уровень $U_0 = 5 \text{ В}$.

По условию задачи, эффективная ширина спектра процесса $\Delta\omega_{\text{эф}} = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$. Поэтому дисперсия $\sigma_x^2 = F_0 \Delta\omega_{\text{эф}} = 3 \text{ В}^2$. Согласно определению понятия плотности вероятности, искомая величина

$$P(U \geq U_0) = \int_{U_0}^{\infty} p(U) dU = \exp\left[-\frac{U_0^2}{2\sigma_x^2}\right] = \exp(-25/6) = 0.0155.$$

Случайные величины, распределенные по закону Рэлея, встречаются во многих физических и радиотехнических задачах. Изящный вывод формулы (7.61), полученный Рэлеем из совсем иных предпосылок, читатель может найти в классической книге [25].

Двумерная плотность вероятности огибающей. Для того чтобы исследовать динамику изменения огибающей во времени, необходимо располагать более подробной информацией по сравнению с той, которая может быть почерпнута из закона Рэлея. Так, для вычисления функции корреляции огибающей требуется знать двумерную плотность вероятности $p(U, U_\tau)$.

Воспользуемся тем, что синфазные и квадратурные амплитуды узкополосного нормального случайного процесса являются низкочастотными гауссовыми процессами с одинаковыми функциями корреляции

$$R_A(\tau) = R_B(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau)$$

и двумерными плотностями вероятности [см. формулу (6.28)]:

$$p(A, A_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{A^2 + A_\tau^2 - 2\rho AA_\tau}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right],$$

$$p(B, B_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{B^2 + B_\tau^2 - 2\rho BB_\tau}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right].$$

Если спектральная плотность мощности процесса симметрична относительно центральной частоты ω_0 , то процессы $A(t)$, $B(t)$ статистически независимы, так что совместная четырехмерная плотность вероятности

$$p(A, A_\tau, B, B_\tau) = p(A, A_\tau) p(B, B_\tau). \quad (7.65)$$

Перейдем от синфазной и квадратурной амплитуд к огибающей и начальной фазе, вычисленным в различные моменты времени:

$$\begin{aligned} A &= U \cos \varphi, & A_\tau &= U_\tau \cos \varphi_\tau, \\ B &= U \sin \varphi, & B_\tau &= U_\tau \sin \varphi_\tau. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Здесь и далее принято сокращенное обозначение $U_\tau = U(t + \tau)$

Якобиан данного преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi_\tau & 0 & \sin \varphi_\tau \\ -U \sin \varphi & 0 & U \cos \varphi & 0 \\ 0 & -U_\tau \sin \varphi_\tau & 0 & U_\tau \cos \varphi_\tau \end{vmatrix} = UU_\tau. \quad (7.67)$$

Используя этот результат, запишем плотность вероятности (7.65) в новых переменных:

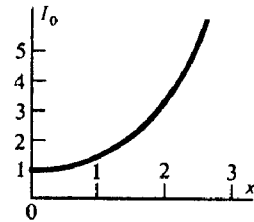
$$p(U, U_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{UU_\tau}{4\pi^2\sigma_x^4(1-\rho^2)} \exp \left[-\frac{U^2 + U_\tau^2 - 2\rho UU_\tau \cos(\varphi - \varphi_\tau)}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)} \right]. \quad (7.68)$$

Теперь, чтобы получить искомую двумерную плотность вероятности огибающей, следует дважды проинтегрировать правую часть формы (7.68) по угловым координатам:

$$p(U, U_\tau) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} p(U, U_\tau, \varphi, \varphi_\tau) d\varphi_\tau. \quad (7.69)$$

Применяя известную в математике формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \varphi} d\varphi = I_0(x),$$



Функция $I_0(x)$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого индекса, из (7.68) и (7.69) получаем окончательно:

$$p(U, U_\tau) = \frac{UU_\tau}{\sigma_x^4(1-\rho^2)} \exp \left[-\frac{U^2 + U_\tau^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)} \right] \times I_0 \left[\frac{\rho UU_\tau}{\sigma_x^2(1-\rho^2)} \right]. \quad (7.70)$$

двумерный закон Рэлея

Плотность вероятности, определяемую формулой (7.70), иногда называют *двумерным законом Рэлея*. Отметим, что если сдвиг τ значительно превышает интервал корреляции τ_c , свойственный функции $\rho(\tau)$, то $\rho \rightarrow 0$. Отсюда, поскольку $I_0(0) = 1$, получаем

$$p(U, U_\tau) \approx \frac{U}{\sigma_x^2} \exp \left[-\frac{U^2}{2\sigma_x^2} \right] \frac{U_\tau}{\sigma_x^2} \exp \left[-\frac{U_\tau^2}{2\sigma_x^2} \right], \quad (7.71)$$

т. е. функция $p(U, U_\tau)$ приближенно равна произведению двух одномерных рэлеевских плотностей.

Функция корреляции огибающей. По определению, функция корреляции огибающей

$$R_U(\tau) = \overline{UU_\tau} - (\bar{U})^2. \quad (7.72)$$

Квадрат среднего значения огибающей находим на основании равенства (7.63): $(\bar{U})^2 = (\pi/2)\sigma_x^2$. Теперь необходимо вычислить среднее значение произведения

$$\overline{UU_\tau} = \int_0^\infty \int_0^\infty UU_\tau p(U, U_\tau) dU dU_\tau. \quad (7.73)$$

Нахождение интеграла (7.73) сопряжено с весьма громоздкими вычислениями, основанными на том, что двумерную плотность вероятности (7.70) разлагают в бесконечный ряд по многочленам Лагерра [22]. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$R_U(\tau) = \frac{\pi}{2} \sigma_x^2 \left[\frac{\rho^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n} [n!]^2} \rho^{2n} \right]. \quad (7.74)$$

Представляя функцию корреляции в виде $R_U(\tau) = \sigma_U^2 r_U(\tau)$, из (7.74) находим выражение для нормированной функции корреляции огибающей:

$$r_U(\tau) = 0.915 \rho^2(\tau) + 0.058 \rho^4(\tau) + \dots \quad (7.75)$$

▲
решите задачу 12

Можно приближенно считать, что коэффициент корреляции огибающей просто равен квадрату огибающей нормированной функции корреляции узкополосного сигнала

Пример 7.6. Известно, что функция корреляции некоторого случайного процесса (B^2)

$$R_x(\tau) = 0.5 \exp(-10^4 |\tau|) \cos(2\pi \cdot 10^6 \tau).$$

Здесь высокочастотный сомножитель имеет период 10^{-6} с, амплитудный сомножитель изменяется за это время лишь в $\exp(-10^{-2}) = 0.99$ раза. Поэтому рассматриваемый случайный процесс можно считать узкополосным с центральной частотой $f_0 = 1$ МГц. Ограничиваясь первым членом ряда в формуле (7.75) и заменяя приближенно коэффициент 0.915 на единицу, находим нормированную функцию корреляции огибающей:

$$r_U(\tau) \approx \exp(-2 \cdot 10^4 |\tau|).$$

Дисперсия огибающей $\sigma_U^2 = 0.429 \sigma_x^2 = 0.2145 B^2$, откуда функция корреляции

$$R_U(\tau) \approx 0.21 \exp(-2 \cdot 10^4 |\tau|).$$

Интервал корреляции огибающей

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |r_U(\tau)| d\tau = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

составляет 50 периодов гармонического колебания с частотой f_0 .

Наконец, односторонний спектр мощности огибающей (см. пример 7.1)

$$F_U(\omega) = \frac{2.73 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^8 + \omega^2}$$

имеет низкочастотный характер.

Огибающая суммы гармонического сигнала и узкополосного нормального шума. В радиотехнике часто интересуются статистическими свойствами сигнала, наблюдаемого на выходе некоторого частотно-избирательного устройства, например, резонансного усилителя. Будем считать, что помимо флуктуационного гауссова шума с центральной частотой ω_0 , равной резонансной частоте усилителя, на выходе присутствует

также детерминированный гармонический сигнал $U_m \cos \omega_0 t$ с известной амплитудой U_m .

Простейшей задачей является нахождение одномерной плотности вероятности огибающей суммарного колебания. Считая, что полезный сигнал $s(t) = U_m \cos \omega_0 t$, в то время как шум $n(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$, запишем выражение реализации суммарного процесса $X(t)$:

$$x(t) = s(t) + n(t) = [U_m + A(t)] \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t.$$

Данный случайный процесс узкополосен, поэтому его реализация может быть выражена посредством медленно меняющихся огибающей $U(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$:

$$x(t) = U(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Очевидно, между парами $\{A, B\}$, $\{U, \varphi\}$ имеется связь:

$$A(t) = U(t) \cos \varphi(t) - U_m,$$

$$B(t) = U(t) \sin \varphi(t). \quad (7.76)$$

Легко проверить, что якобиан D этого преобразования равен U . Тогда, поскольку двумерная плотность вероятности

$$p(A, B) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp \left[-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2} \right],$$

в новых переменных имеем

$$p(U, \varphi) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} \exp \left[-\frac{U^2 + U_m^2 - 2UU_m \cos \varphi}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (7.77)$$

Теперь, чтобы получить одномерную плотность вероятности огибающей, следует проинтегрировать правую часть формулы (7.77) по угловой координате:

$$p(U) = \int_0^{2\pi} p(U, \varphi) d\varphi,$$

в результате чего находим

$$p(U) = (U/\sigma_x^2) \exp \left[-(U^2 + U_m^2)/(2\sigma_x^2) \right] I_0(UU_m/\sigma_x^2). \quad (7.78)$$

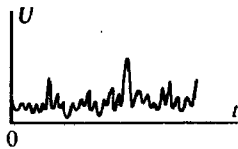
Данная формула выражает закон, получивший в радиотехнике название *закона Райса*. Отметим, что при $U_m = 0$, т. е. в отсутствие детерминированного сигнала, закон Райса переходит в закон Рэлея.

На рис. 7.2 представлены графики плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону Райса при различных отношениях $\alpha = U_m/\sigma_x$.

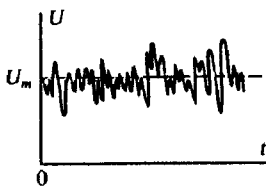
Отметим, что если амплитуда детерминированного сигнала значительно превышает среднеквадратический уровень шума, т. е. $U_m/\sigma_x \gg 1$, то при $U \approx U_m$ можно воспользоваться асимптотическим представлением модифицированных функций Бесселя с большим аргументом:

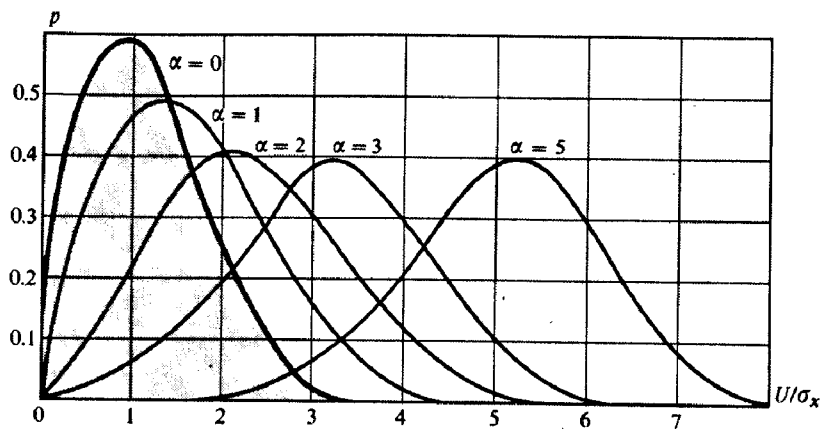
$$I_0 \left[\frac{UU_m}{\sigma_x^2} \right] \approx \frac{\exp [UU_m/\sigma_x^2]}{\sqrt{2\pi UU_m/\sigma_x^2}} \approx \frac{\sigma_x \exp [UU_m/\sigma_x^2]}{\sqrt{2\pi} U}.$$

Типичная реализация огибающей узкополосного шума



и огибающей процесса вида «гармонический сигнал + узкополосный шум»





Тоном выделена кривая, отвечающая закону Рэлея

Рис. 7.2. Графики плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону Райса

Подставив это выражение в (7.78), имеем

$$p(U) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(U - U_m)^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad (7.79)$$

т. е. огибающая результирующего сигнала распределена в этом случае приближенно нормально с дисперсией σ_x^2 и математическим ожиданием U_m .

Практически считают, что уже при $U_m/\sigma_x = 3$ огибающая результирующего сигнала нормализуется. Полезно вспомнить, что огибающая чистого шума, распределенная по закону Рэлея, имеет дисперсию, равную $0.429\sigma_x^2$. Таким образом, наложение достаточно большого гармонического сигнала приводит более чем к двукратному росту дисперсии огибающей. Тем не менее относительные флуктуации огибающей при этом падают. Действительно, для чистого шума величина $\sigma_U/\bar{U}$, которую удобно принять в качестве числовой оценки флуктуаций, равна 0.523. При большом детерминированном сигнале величина $\sigma_U/\bar{U} = \sigma_x/U_m$, стремясь к нулю с ростом амплитуды U_m .

Следует обратить внимание на изменение среднего значения и дисперсии под влиянием гармонического сигнала

Результаты

- ◇◇ Случайная спектральная плотность отдельных реализаций стационарного случайного процесса дельта-коррелирована и имеет на всех частотах нулевое математическое ожидание.
- ◇◇ Преобразование Фурье от функции корреляции называется спектральной плотностью мощности стационарного случайного процесса. Чем шире этот спектр, тем хаотичнее реализации случайного процесса.
- ◇◇ Для того чтобы случайный процесс был дифференцируемым, необходимо существование второй производной функции корреляции при нулевом значении аргумента.
- ◇◇ Мгновенные значения реализации случайного процесса и его производной в совпадающие моменты времени некоррелированы.

- ◇◇ Реализации случайного сигнала на выходе идеального интегратора образуют нестационарный случайный процесс даже в том случае, если входной случайный процесс стационарен.
- ◇◇ Реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания, случайно модулированные по амплитуде и по фазовому углу.
- ◇◇ Функция корреляции узкополосного случайного процесса представляется в виде произведения быстрого и медленного сомножителей.
- ◇◇ Узкополосный случайный процесс и его преобразование Гильберта в совпадающие моменты времени некоррелированы между собой.
- ◇◇ Огибающая узкополосного нормального случайного процесса распределена по закону Рэлея; начальная фаза этого процесса имеет равномерное распределение.
- ◇◇ Нормированная функция корреляции огибающей узкополосного случайного процесса приблизительно равна квадрату огибающей нормированной функции корреляции самого процесса.
- ◇◇ Огибающая суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссова шума, центральная частота спектра мощности которого совпадает с частотой сигнала, распределена по закону Райса. При больших отношениях сигнал/шум плотность вероятности огибающей близка к нормальной.

Вопросы

1. Некоторый случайный процесс изучают в рамках корреляционной теории. Какой смысл вкладывается в это высказывание?
2. Как формулируется теорема Винера — Хинчина?
3. Каковы основные свойства спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса?
4. Как определяется понятие одностороннего спектра мощности? Как, зная спектр мощности, вычислить дисперсию стационарного случайного процесса?
5. Почему случайный процесс типа белого шума называют дельта-коррелированным случайным процессом? Каковы основные свойства белого шума? В каких случаях реальный случайный процесс можно приближенно заменить белым шумом?
6. Как в теории случайных процессов определяют понятия сходимости и непрерывности?
7. Каковы отличительные свойства недифференцируемых случайных процессов?
8. Как вычисляются дисперсия, функция корреляции и спектр мощности для производной от стационарного случайного процесса?
9. Как определяется понятие положительного выброса случайного процесса?
10. Что такое квазичастота стационарного случайного процесса?
11. Каков примерный вид реализаций узкополосного случайного процесса?
12. Как выглядит характерная огибающая случайного сигнала с рэлеевской плотностью вероятности мгновенных значений?

Задачи

1. Вычислите спектр мощности стационарного случайного процесса, описываемого функцией корреляции

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|/t_0), & |\tau| \leq t_0, \\ 0, & |\tau| > t_0. \end{cases}$$

2. Найдите функцию корреляции стационарного случайного процесса, имеющего

спектральную плотность мощности

$$W(\omega) = W_0 \exp(-b\omega^2).$$

3. Односторонний спектр мощности стационарного случайного процесса $X(t)$ задан формулой

$$N_x(f) = A(f/f_0) \exp(-f/f_0),$$

где A, f_0 — постоянные величины. Определите функцию корреляции процесса.

4. Найдите интервал корреляции стационарного случайного процесса с функцией корреляции $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$.

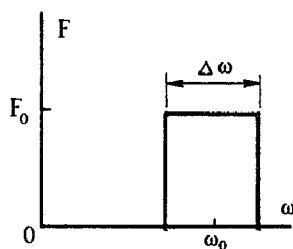
5. Стационарный случайный процесс имеет эффективную ширину спектра, равную 1.5 МГц. Максимальное значение одностороннего спектра мощности составляет $3 \cdot 10^{-13}$ В²/Гц. Определите дисперсию данного процесса.

6. Полагая, что в течение месяца температура воздуха является реализацией стационарного случайного процесса, предложите оценку для его интервала корреляции.

7. Найдите дисперсию производной случайного процесса с функцией корреляции вида

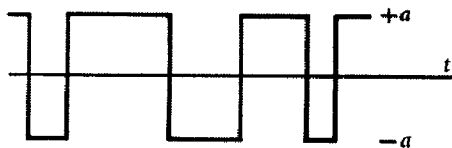
$$R(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|).$$

8. Стационарный случайный процесс имеет спектр мощности, представляемый графиком:



Более сложные задания

13. Исследуйте функцию корреляции процесса вида «случайного телеграфного сигнала». Его реализации являются разрывными функциями, принимающими с равной вероятностью лишь два значения: $+a$ и $-a$:



В случайные моменты времени знак реализации изменяется скачком. Вероятность того, что за время T произойдет n перемен знака, описывается законом Пуассона:

$$P_T(n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T},$$

Докажите, что этот случайный процесс дифференцируем и найдите дисперсию его производной.

9. Квазичастота случайного процесса с дисперсией 8 В^2 равна 0.5 МГц. Определите дисперсию производной данного случайного процесса.

10. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет односторонний спектр мощности

$$F_x(\omega) = \begin{cases} F_0 & \text{при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Реализации процесса представлены в виде $x(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$, где $\omega_0 = (\omega_2 - \omega_1)/2$.

Найдите функции корреляции $R_A(\tau)$ и $R_B(\tau)$, а также взаимную функцию корреляции $R_{AB}(\tau)$.

11. Найдите среднее значение и дисперсию огибающей узкополосного нормального случайного процесса с функцией корреляции

$$R(\tau) = 25 \exp(-4 \cdot 10^6 \tau^2) \cos 10^9 \tau.$$

12. Узкополосный нормальный случайный процесс $X(t)$ имеет функцию корреляции

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta \tau^2/2) \cos \omega_0 \tau.$$

Найдите функцию корреляции и спектр мощности огибающей этого процесса.

где λ — параметр, определяющий скорость изменения процесса во времени.

14. Узкополосный нормальный случайный процесс имеет функцию корреляции

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Докажите, что квадрат огибающей этого процесса имеет функцию корреляции $R(\tau) = 4\sigma_x^2 \rho^2(\tau)$.

15. Узкополосный нормальный случайный процесс характеризуется функцией корреляции, приведенной в задаче 14. Найдите одномерную плотность вероятности мгновенной частоты данного процесса.

2. Радио/ технические цепи, устройства и системы

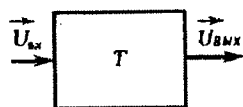
Глава 8

Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы

Системы, применяемые для обработки, преобразования и передачи сигналов, весьма разнообразны по принципам внутреннего устройства и внешним характеристикам. Для того чтобы их можно было сравнивать и классифицировать, сформулируем исходные понятия.

8.1. Физические системы и их математические модели

●
система



Система как
«черный ящик»

Радиотехническое устройство независимо от своего назначения и уровня сложности представляет собой *систему*, т. е. совокупность физических объектов, между которыми существуют определенные взаимодействия. В структуре системы можно выделить *вход*, на который подается исходный сигнал, и *выход*, откуда снимается преобразованный сигнал. Если интересуются лишь связью между сигналами на входе и выходе и не описывают внутренние процессы в системе, то говорят, что система представляет собой «черный ящик».

Системные операторы. В наиболее простом случае как входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, так и выходной сигнал $u_{\text{вых}}(t)$, называемый также *откликом* или *выходной реакцией* системы, описываются одиночными функциями времени. В более общем случае входной сигнал представляется в виде m -мерного вектора

$$\vec{U}_{\text{вх}}(t) = \{u_{\text{вх}1}(t), u_{\text{вх}2}(t), \dots, u_{\text{вх}m}(t)\},$$

а выходной сигнал — в виде n -мерного вектора

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \{u_{\text{вых}1}(t), u_{\text{вых}2}(t), \dots, u_{\text{вых}n}(t)\}.$$

Закон связи между сигналами $\vec{U}_{\text{вх}}(t)$ и $\vec{U}_{\text{вых}}(t)$ задают системным оператором T , результатом воздействия которого на сигнал $\vec{U}_{\text{вх}}$ служит сигнал $\vec{U}_{\text{вых}}$:

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = T\vec{U}_{\text{вх}}(t). \quad (8.1)$$

системный оператор

Пример 8.1. Предположим, что некоторая система преобразует одномерный входной сигнал по закону

$$u_{\text{вых}}(t) = 15 \, du_{\text{вх}}(t)/dt.$$

В данном случае системный оператор может быть записан так:

$$T \equiv 15 \frac{d}{dt}.$$

Из этого выражения непосредственно вытекает структурная схема системы, образованная каскадным соединением масштабного звена (идеального усилителя) и дифференциатора.

Чтобы полностью определить задачу, следует указать также область $D_{\text{вх}}$ некоторого функционального пространства, которая называется *областью допустимых входных воздействий*. Задание этой области описывает характер входных сигналов, которые могут быть непрерывными или дискретными, детерминированными или случайными. Подобным же образом должна быть указана область $D_{\text{вых}}$ *допустимых выходных сигналов*.

В настоящей главе рассматриваются только системы, на которые воздействуют аналоговые сигналы. Преобразование дискретных и цифровых сигналов линейными системами изучается в гл. 15.

Математической моделью системы называют совокупность системного оператора T и двух областей допустимых сигналов $D_{\text{вх}}$, $D_{\text{вых}}$.

Классификацию систем проводят на основании существенных свойств их математических моделей.

Стационарные и нестационарные системы. Принято говорить, что система *стационарна*, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Если T — оператор стационарной системы, то из равенства

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = T\vec{U}_{\text{вх}}(t) \quad (8.2)$$

следует, что

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t \pm t_0) = T\vec{U}_{\text{вх}}(t \pm t_0) \quad (8.3)$$

при любом значении t_0 . Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами.

Если же свойства системы не инвариантны относительно выбора начала отсчета времени, то такую систему называют *нестационарной* (системой с переменными во времени параметрами или параметрической системой).

Теоретическое изучение нестационарных систем, как правило, представляет гораздо более сложную задачу, чем исследование стационарных систем

Оба указанных класса систем широко применяются в радиотехнике и будут изучаться в данном курсе.

Линейные и нелинейные системы. Важнейший принцип классификации систем основан на том, что различные системы по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов. Если оператор системы таков, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} T(\vec{U}_{\text{вх1}} + \vec{U}_{\text{вх2}}) &= T\vec{U}_{\text{вх1}} + T\vec{U}_{\text{вх2}}, \\ T(\alpha \vec{U}_{\text{вх}}) &= \alpha T\vec{U}_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где α — произвольное число, то данная система называется *линейной*. Условия (8.4) выражают фундаментальный принцип суперпозиции.

Если эти условия не выполняются, то говорят, что система является *нелинейной*.

■
принцип суперпозиции

Пример 8.2. Некоторая система производит обработку входного сигнала по закону

$$u_{\text{вых}}(t) = \left[\frac{d}{dt} + \alpha \right] u_{\text{вх}}(t).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия (8.4) выполняются. Таким образом, данная система линейна.

Пример 8.3. Некоторая система работает как идеальный квадрат в соответствии с алгоритмом $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}^2(t)$.

Подав на вход сумму двух сигналов $u_{\text{вх1}} + u_{\text{вх2}}$, на выходе получим

$$u_{\text{вых}} = u_{\text{вх1}}^2 + 2u_{\text{вх1}}u_{\text{вх2}} + u_{\text{вх2}}^2.$$

Наличие перекрестного слагаемого $2u_{\text{вх1}}u_{\text{вх2}}$ указывает на то, что данная система нелинейна.

Как будет показано в дальнейшем, линейные системы замечательны тем, что, по крайней мере теоретически, можно решить любую задачу о преобразовании входного сигнала такой системой

Строго говоря, все физические системы, с которыми имеет дело радиотехника, в той или иной степени нелинейны. Однако существует много систем, которые весьма точно описываются линейными моделями. Так, практически всегда можно пренебречь нелинейностью обычных резисторов, конденсаторов и некоторых индуктивных элементов.

Нелинейные радиотехнические устройства содержат в себе обычно такие элементы, как полупроводниковые диоды и транзисторы, имеющие вольт-амперные характеристики сложного вида.

Теория нелинейных систем оказывается, как правило, довольно сложной. Далеко не все результаты могут быть получены здесь аналитическим путем. Однако именно с помощью нелинейных элементов осуществляются важнейшие преобразования радиотехнических сигналов. Методы анализа и расчета некоторых нелинейных радиотехнических устройств рассмотрены в гл. 11.

Сосредоточенные и распределенные системы. Другой критерий классификации радиотехнических систем основан на со-

поставлении физических размеров системы и рабочей длины волны. Если характерный размер системы (например, наибольшая длина соединительных проводников цепи) оказывается гораздо меньше длины волны, то получается *сосредоточенная система*.

В сосредоточенной электрической цепи всегда можно выделить физические области с преимущественной локализацией энергии электрического поля (конденсаторы) и магнитного поля (индуктивные элементы). Свойства сосредоточенных цепей слабо зависят от конфигурации соединительных проводников, поэтому для описания таких цепей принято использовать их абстрактные модели, называемые *принципиальными схемами*.

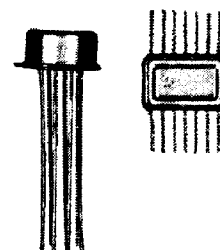
В радиотехнике сосредоточенные системы широко применяют вплоть до рабочих частот в несколько сотен мегагерц. Анализ и расчет сосредоточенных радиотехнических систем проводят с помощью известных законов Кирхгофа.

На частотах в несколько тысяч мегагерц, в так называемом сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне, физические размеры большинства устройств оказываются сравнимыми с длиной волны передаваемых колебаний, так что становится необходимым учет конечного времени распространения сигнала. Обычные электрические цепи в столь высокочастотном диапазоне уже не могут использоваться и на смену им приходят *системы с распределенными параметрами* (распределенные или волновые системы). Так, вместо соединительных проводников применяются отрезки металлических труб — волноводы, вместо колебательных LC-контуров — их распределенные аналоги, называемые объемными резонаторами. Теория, методы анализа и проектирования распределенных систем достаточно сложны и составляют содержание отдельных радиотехнических дисциплин.

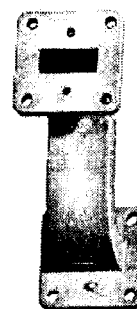
Закончив краткий обзор принципов классификации систем, сконцентрируем внимание на простейшем их виде — линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами.

8.2. Импульсные, переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем

Замечательная особенность линейных систем — справедливость принципа суперпозиции — открывает прямой путь к систематическому решению задач о прохождении разнообразных сигналов через такие системы. Способ динамического представления (см. гл. 1) позволяет представлять сигналы в виде сумм элементарных импульсов. Если удастся тем или иным способом найти реакцию на выходе, возникающую под воздействием элементарного импульса на входе, то окончательным этапом решения задачи явится суммирование таких реакций.



Интегральные микросхемы — пример сосредоточенных систем



Волновод — пример распределенной системы

Намеченный путь анализа основан на временном представлении свойств сигналов и систем. В равной мере применим, а порой и гораздо более удобен анализ в частотной области, когда сигналы задаются рядами или интегралами Фурье. Свойства систем при этом описываются их частотными характеристиками, которые указывают закон преобразования элементарных гармонических сигналов.

Импульсная характеристика. Пусть некоторая линейная стационарная система описывается оператором T . Для простоты будем полагать, что входной и выходной сигналы одномерны. По определению, *импульсной характеристикой* системы называется функция $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал $\delta(t)$. Это означает, что функция $h(t)$ удовлетворяет уравнению

$$h(t) = T\delta(t). \quad (8.5)$$

Поскольку система стационарна, аналогичное уравнение будет и в случае, если входное воздействие смещено во времени на произвольную величину t_0 :

$$h(t - t_0) = T\delta(t - t_0). \quad (8.6)$$

Следует ясно представить себе, что импульсная характеристика, так же как и порождающая ее дельта-функция, есть результат разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приблизительно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временным масштабом системы, например периодом ее собственных колебаний.

Интеграл Дюамеля. Зная импульсную характеристику линейной стационарной системы, можно формально решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через такую систему. Действительно, в гл. 1 было показано, что входной сигнал всегда допускает представление вида

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Отвечающая ему выходная реакция

$$u_{\text{вых}}(t) = Tu_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (8.7)$$

Теперь примем во внимание, что интеграл есть предельное значение суммы, поэтому линейный оператор T на основании принципа суперпозиции может быть внесен под знак интеграла. Далее, оператор T «действует» лишь на величины, зависящие от текущего времени t , но не от переменной интегрирования τ . Поэтому из выражения (8.7) следует, что

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) T\delta(t - \tau) d\tau,$$

В математике импульсную характеристику называют функцией Грина рассматриваемого оператора

■
физический смысл импульсной характеристики

Мгновенное значение выходного сигнала является функционалом от входного сигнала. Поэтому импульсную характеристику следует рассматривать, строго говоря, как обобщенную функцию (см. гл. 1)

или окончательно

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (8.8)$$

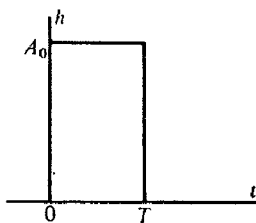
▲
решите задачу 1

Эта формула, имеющая фундаментальное значение в теории линейных систем, называется *интегралом Дюамеля*. Соотношение (8.8) свидетельствует о том, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой свертку двух функций — входного сигнала и импульсной характеристики системы. Очевидно, формула (8.8) может быть записана также в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (8.9)$$

Если интегралы (8.8) и (8.9) не удается найти аналитически, всегда возможен численный анализ

Итак, если импульсная характеристика $h(t)$ известна, то дальнейшие этапы решения сводятся к полностью формализованным операциям.



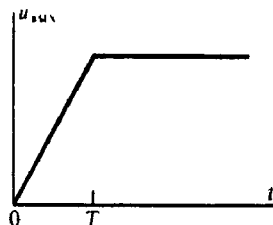
Пример 8.4. Некоторая линейная стационарная система, внутреннее устройство которой несущественно, имеет импульсную характеристику, представляющую собой прямоугольный видеоимпульс длительностью T . Импульс возникает при $t=0$ и обладает амплитудой A_0 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Определить выходную реакцию данной системы при подаче на вход ступенчатого сигнала $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \sigma(t)$.

Применяя формулу интеграла Дюамеля (8.8), следует обратить внимание на то, что выходной сигнал будет выглядеть по-разному в зависимости от того, превышает или нет текущее значение t длительность импульсной характеристики. При $0 \leq t \leq T$ имеем

$$u_{\text{вых}}(t) = A_0 U_0 \int_0^t d\tau = A_0 U_0 t.$$



Если же $t > T$, то при $\tau > T$ функция $h(t - \tau)$ обращается в нуль, поэтому

$$u_{\text{вых}}(t) = A_0 U_0 \int_0^T d\tau = A_0 U_0 T.$$

Найденная выходная реакция отображается кусочно-линейным графиком.

Обобщение на многомерный случай. До сих пор предполагалось, что как входной, так и выходной сигналы одномерны. В более общем случае системы с m входами и n выходами следует ввести парциальные импульсные характеристики $h_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, каждая из которых

отображает сигнал на i -м выходе при подаче на j -й вход дельта-функции. Совокупность функций $h_{ij}(t)$ образует матрицу импульсных характеристик

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nm} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Формула интеграла Дюамеля в многомерном случае приобретает вид

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t - \tau) \vec{U}_{\text{вх}}(\tau) d\tau, \quad (8.11)$$

где $\vec{U}_{\text{вых}}$ — n -мерный вектор; $\vec{U}_{\text{вх}}$ — m -мерный вектор.

Условие физической реализуемости. Каков бы ни был конкретный вид импульсной характеристики физической осуществимой системы, всегда должен выполняться важнейший принцип: выходной сигнал, отвечающий импульсному входному воздействию, не может возникнуть до момента появления импульса на входе.

Отсюда вытекает очень простое ограничение на вид допустимых импульсных характеристик:

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (8.12)$$

Такому условию удовлетворяет, например, импульсная характеристика системы, рассмотренной в примере 8.4.

Легко видеть, что для физической реализуемой системы верхний предел в формуле интеграла Дюамеля может быть заменен на текущее значение времени:

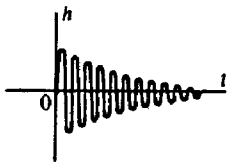
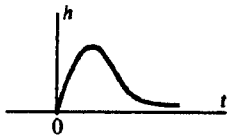
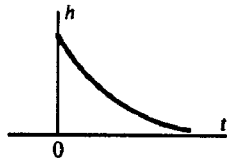
$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (8.13)$$

Формула (8.13) имеет ясный физический смысл: линейная стационарная система, выполняя обработку поступающего на вход сигнала, проводит операцию взвешенного суммирования всех его мгновенных значений, существовавших «в прошлом» при $-\infty < \tau < t$. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика системы. Принципиально важно, что физически реализуемая система ни при каких обстоятельствах не способна оперировать «будущими» значениями входного сигнала.

Физически реализуемая система должна быть, кроме того, *устойчивой*. Это означает, что ее импульсная характеристика должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (8.14)$$

Переходная характеристика. Пусть на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый



Примеры импульсных характеристик реализуемых систем

функцией Хевисайда $\sigma(t)$. Выходную реакцию

$$g(t) = T\sigma(t) \quad (8.15)$$

принято называть *переходной характеристикой* системы. Поскольку система стационарна, переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига:

$$g(t - t_0) = T\sigma(t - t_0).$$

Высказанные ранее соображения о физической реализуемости системы полностью переносятся на случай, когда система возбуждается не дельта-функцией, а единичным скачком. Поэтому переходная характеристика физической реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t \geq 0$, в то время как $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь. Действительно, так как $\delta(t) = d\sigma/dt$, то на основании (8.5)

$$h(t) = T \left[\frac{d}{dt} \sigma(t) \right].$$

Оператор дифференцирования d/dt и линейный стационарный оператор T могут меняться местами, поэтому

$$h(t) = \frac{d}{dt} [T\sigma(t)] = \frac{dg}{dt}, \quad (8.16)$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\xi) d\xi. \quad (8.17)$$

Воспользовавшись формулой динамического представления (1.4) и поступая так же, как и при выводе соотношения (8.8), получаем еще одну форму интеграла Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_{\text{вх}}}{d\tau} g(t - \tau) d\tau. \quad (8.18)$$

Частотный коэффициент передачи. При математическом исследовании систем особый интерес представляют такие входные сигналы, которые, будучи преобразованы системой, остаются неизменными по форме. Если имеется равенство

$$u_{\text{вых}}(t) = Tu_{\text{вх}}(t) = \lambda u_{\text{вх}}(t), \quad (8.19)$$

то $u_{\text{вх}}(t)$ является *собственной функцией* системного оператора T , а число λ , в общем случае комплексное, — его *собственным значением*.

Покажем, что комплексный сигнал $u_{\text{вх}}(t) = \exp(j\omega t)$ при любом значении частоты ω есть собственная функция линейного стационарного оператора. Для этого воспользуемся интегралом Дюамеля вида (8.9) и вычислим

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \exp(j\omega t). \quad (8.20)$$

●
собственные функции и собственные значения

Отсюда видно, что собственным значением системного оператора является комплексное число

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (8.21)$$

называемое *частотным коэффициентом передачи* системы.

Формула (8.21) устанавливает принципиально важный факт — *частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье*. Поэтому всегда, зная функцию $K(j\omega)$, можно определить импульсную характеристику

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.22)$$

Мы подошли к важнейшему положению теории линейных стационарных систем — любую такую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной или переходной характеристик, либо в частотной области, задавая частотный коэффициент передачи. Оба подхода равноценны и выбор одного из них диктуется удобствами получения исходных данных о системе и простой вычислений.

В заключение отметим, что частотные свойства линейной системы, имеющей m входов и n выходов, можно описать матрицей частотных коэффициентов передачи

$$K(j\omega) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nm} \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Между матрицами $h(t)$ и $K(j\omega)$ существует закон связи, аналогичный тому, который задан формулами (8.21), (8.22).

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики. Функция $K(j\omega)$ имеет простую интерпретацию: если на вход системы поступает гармонический сигнал с известной частотой ω и комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$, то комплексная амплитуда выходного сигнала

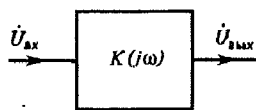
$$\dot{U}_{вых} = K(j\omega) \dot{U}_{вх}. \quad (8.24)$$

Часто пользуются представлением частотного коэффициента передачи в показательной форме:

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| \exp[j\varphi_K(\omega)]. \quad (8.25)$$

Обе входящие сюда вещественные функции носят специальные названия: $|K(j\omega)|$ — *амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ), $\varphi_K(\omega)$ — *фазочастотная характеристика* (ФЧХ) системы.

Здесь $K_{ij}(j\omega)$ — частотный коэффициент передачи между j -м входом и i -м выходом



Имеются приборы, позволяющие экспериментально измерять АЧХ и ФЧХ радиотехнических устройств в самых различных диапазонах частот

Ограничения, накладываемые на частотный коэффициент передачи. Далеко не каждая функция $K(j\omega)$ может являться частотным коэффициентом передачи физически реализуемой системы. Простейшее ограничение связано с тем, что импульсная характеристика $h(t)$ такой системы обязана быть вещественной. В силу свойств преобразования Фурье (см. гл. 2) это означает, что

$$K(j\omega) = K^*(-j\omega). \quad (8.26)$$

В соответствии с формулой (8.26) модуль частотного коэффициента передачи (АЧХ) есть четная, а фазовый угол (ФЧХ) — нечетная функция частоты.

Гораздо сложнее ответить на вопрос о том, каким должен быть частотный коэффициент передачи для того, чтобы выполнялись условия физической реализуемости (8.12) и (8.14). Приведем без доказательства окончательный результат, известный под названием *критерия Пэли — Винера*: частотный коэффициент передачи физически реализуемой системы должен быть таким, чтобы существовал интеграл

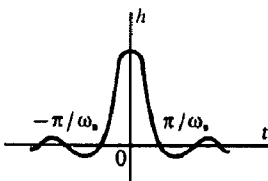
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |K(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (8.27)$$

Рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий свойства частотного коэффициента передачи линейной системы,

● свойства
н ФЧХ

АЧХ

● критерий Пэли —
Винера



Данная функция
отлична от нуля
при $t < 0$

Пример 8.5. Некоторая линейная стационарная система имеет свойства идеального ФНЧ, т. е. ее частотный коэффициент передачи задается системой равенств:

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_0, \\ K_0, & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

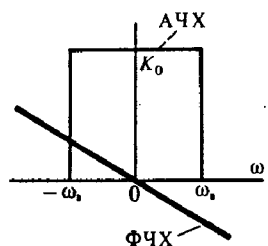
На основании выражения (8.20) импульсная характеристика такого фильтра

$$h(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0 \omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}. \quad (8.28)$$

Симметрия графика этой функции относительно точки $t = 0$ свидетельствует о нереализуемости идеального фильтра нижних частот. Впрочем, этот вывод непосредственно вытекает из критерия Пэли — Винера. Действительно, интеграл (8.27) расходится для любой АЧХ, которая обращается в нуль на некотором конечном отрезке оси частот.

Несмотря на нереализуемость идеального ФНЧ, эту модель с успехом используют для приближенного описания свойств частотных фильтров, полагая, что функция $K(j\omega)$ содержит фазовый множитель, линейно зависящий от частоты:

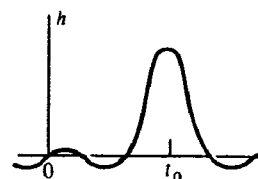
$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_0, \\ K_0 \exp(-j\omega t_0), & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$



Как нетрудно проверить, здесь импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{K_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B(t - t_0)}{\omega_B(t - t_0)}. \quad (8.29)$$

Параметр t_0 , равный по модулю коэффициенту наклона ФЧХ, определяет задержку во времени максимума функции $h(t)$. Ясно, что данная модель тем точнее отображает свойства реализуемой системы, чем больше значение t_0 .



8.3. Линейные динамические системы

Линейными динамическими системами принято называть устройства, характеризующиеся следующим свойством: их выходной сигнал определяется не только величиной входного сигнала в рассматриваемый момент времени, но и «предысторией» этого сигнала. Иначе говоря, динамическая система обладает некоторой конечной или бесконечной «памятью», от характера которой зависят особенности преобразования входного сигнала.

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Среди всевозможных динамических систем большое значение для теоретической радиотехники имеют те, которые описываются дифференциальными операторами. В общем случае речь идет о системах, для которых связь между одномерными входным и выходным сигналами устанавливается с помощью следующего дифференциального уравнения:

Именно такой оказывается динамическая связь между мгновенными значениями входного и выходного сигналов в электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Если цепь линейна и стационарна, то все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $b_0, b_1, \dots, b_m$ — постоянные вещественные числа

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + a_0 u_{\text{вых}} = \\ = b_m \frac{d^m u_{\text{вх}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{вх}}}{dt} + b_0 u_{\text{вх}}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Предположим, что входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ задан. Тогда правая часть уравнения (8.30), которую можно условно обозначить $f(t)$, является известной функцией. Анализ поведения системы сводится при этом к хорошо изученной в математике проблеме решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n \frac{d^n u_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + a_0 u_{\text{вых}} = f(t). \quad (8.31)$$

Порядок динамической системы

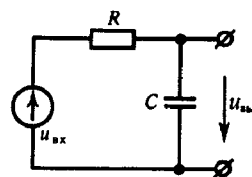
Порядок n этого уравнения принято называть *порядком динамической системы*.

Рассмотрим несколько примеров динамических систем и соответствующих им дифференциальных уравнений.

Пример 8.6. Дана RC-цепь вида Г-образного четырехполюсника, возбуждаемая со стороны входа источником ЭДС $u_{\text{вх}}(t)$. Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе.

Поскольку ток в цепи $i(t) = C du_{\text{вых}}/dt$, используя второй закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

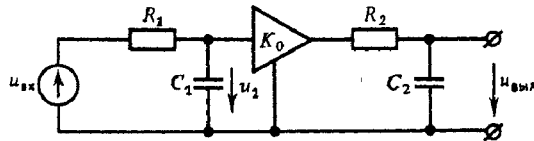
$$RC \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}}. \quad (8.32)$$



Системы первого порядка называют также инерционными звеньями

Итак, RC -цепь служит примером динамической системы 1-го порядка. Важнейший параметр этой цепи — *постоянная времени* $\tau = RC$, определяющая характерный временной масштаб протекания процессов в системе.

Пример 8.7. Дана более сложная система, образованная двумя RC -цепями, которые разделены идеальным усилителем с коэффициентом усиления K_0 . Входное сопротивление усилителя неограниченно велико, а выходное сопротивление бесконечно мало, поэтому усилитель является идеальным элементом развязки между цепями.



Вводя две постоянные времени $\tau_1 = R_1 C_1$ и $\tau_2 = R_2 C_2$, по аналогии с предыдущим примером имеем следующие дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$\tau_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = K_0 u_1,$$

$$\tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = u_{\text{вх}}(t).$$

Исключив отсюда вспомогательную величину u_1 , получаем дифференциальное уравнение цепи:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = K_0 u_{\text{вх}}. \quad (8.33)$$

Рассмотренная здесь более сложная RC -цепь оказывается уже системой 2-го порядка.

Пример 8.8. Найти дифференциальное уравнение параллельного колебательного контура с потерями, считая, что входным сигналом служит ток $i(t)$, а выходным сигналом является напряжение $u(t)$ на контуре.

Суммируя токи

$$i_C = C \frac{du}{dt}, \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi, \quad i_R = \frac{u}{R},$$

получаем уравнение

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi + \frac{u}{R} = i,$$

которое путем однократного дифференцирования по времени приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}, \quad (8.34)$$

где $\alpha = 1/(2RC)$ — коэффициент затухания контура, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — частота собственных колебаний в контуре без потерь.

▲
решите задачу 4

Собственные колебания динамических систем. Чтобы полностью определить поведение динамической системы, описываемой уравнением (8.31), требуется учесть начальные условия, которые характеризуют внутреннее состояние системы в некоторый фиксированный момент времени. Обычно принято задавать искомую функцию и ее $n - 1$ производную при $t = 0$: $u_{\text{вых}}(0), u'_{\text{вых}}(0), \dots, u^{(n-1)}_{\text{вых}}(0)$.

Из теории дифференциальных уравнений известно [9], что решением уравнения (8.31), удовлетворяющим любым начальным условиям, является сумма некоторого частного решения неоднородного уравнения, у которого правая часть $f(t)$ отлична от нуля, и общего решения однородного уравнения

$$a_n \frac{d^n u_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + a_0 u_{\text{вых}} = 0. \quad (8.35)$$

Проблема решения однородного дифференциального уравнения связана с нахождением корней характеристического уравнения системы

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0. \quad (8.36)$$

■
свойство корней
характеристического уравнения

Данное уравнение имеет ровно n корней. Поскольку коэффициенты уравнения вещественны, корни $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ могут быть либо вещественными, либо комплексно-сопряженными. Если все корни различны, то общее решение однородного уравнения (8.35), которое описывает *собственные колебания* системы, имеет вид

$$u_{\text{вых}}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t}, \quad (8.37)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — постоянные числа, определяемые из начальных условий.

Данный термин
возник в астрономии

Если же некоторые из корней оказываются кратными, то составляющие общего решения однородного уравнения несколько усложняются за счет появления *секулярных (вековых) множителей*. Так, если γ_i представляет собой k -кратный корень, то ему отвечает совокупность собственных колебаний вида $\exp(\gamma_i t), t \exp(\gamma_i t), \dots, t^{k-1} \exp(\gamma_i t)$.

Рассмотрим примеры собственных колебаний в линейных стационарных цепях.

Пример 8.9. Аperiodическая разрядка конденсатора емкостью C , предварительно заряженного до напряжения U_0 и в момент времени $t = 0$ замыкаемого на резистор сопротивлением R .

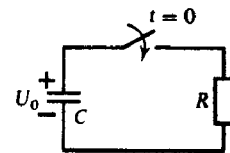
Цепь описывается следующим дифференциальным уравнением относительно переменной u_C — напряжения на конденсаторе:

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

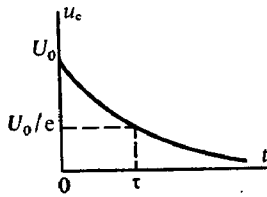
при единственном начальном условии $u_C(0) \doteq U_0$.

Характеристическое уравнение $\tau \gamma + 1 = 0$ имеет корень $\gamma = -1/\tau$. Отсюда находим общее решение уравнения свободных колебаний:

$$u_C(t) = A \exp(-t/\tau).$$



Постоянная времени $\tau = RC$



Для того чтобы удовлетворить начальному условию, следует положить $A = U_0$. Окончательно имеем

$$u_C(t) = U_0 \exp(-t/\tau).$$

Итак, отрицательному вещественному корню характеристического уравнения отвечает собственное колебание, экспоненциально убывающее во времени.

Постоянная времени τ данной цепи есть промежуток времени, в течение которого свободный процесс затухает в $e = 2.71828...$ раз.

Пример 8.10. Колебательная разрядка конденсатора.

Пусть предыдущий пример усложнен тем, что в цепи имеется также индуктивный элемент L . Дифференциальное уравнение цепи относительно тока $i(t)$, составленное на основании второго закона Кирхгофа, имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \quad (8.38)$$

где $\alpha = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Первое начальное условие $i(0) = 0$ обусловлено наличием в контуре индуктивного элемента.

В начальный момент времени напряжение на конденсаторе уравнивается ЭДС самоиндукции:

$$U_0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

откуда следует второе начальное условие:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -U_0/L.$$

Характеристическое уравнение данной цепи

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c,$$

где ω_c — частота собственных колебаний системы. Если потери в контуре достаточно малы, то $\omega_0 \gg \alpha$, поэтому $\omega_c \approx \omega_0$.

Общее решение однородного уравнения

$$i(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad (8.39)$$

содержит коэффициенты C_1 и C_2 , удовлетворяющие системе алгебраических уравнений (см. начальные условия):

$$C_1 + C_2 = 0,$$

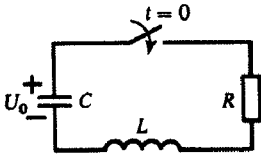
$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = -U_0/L,$$

откуда

$$C_1 = \frac{-U_0}{j2\omega_c L}, \quad C_2 = \frac{U_0}{j2\omega_c L}.$$

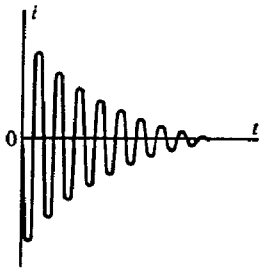
Подставив эти коэффициенты в выражение (8.39), получим окончательно

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \quad (8.40)$$



В контуре с индуктивным элементом ток не может измениться скачком

Напряжение на резисторе в начальный момент времени равно нулю в силу первого условия



Частотный коэффициент передачи. Если на вход линейной динамической системы поступает сигнал, имеющий комплексную математическую модель вида $u_{\text{вх}}(t) = \exp(j\omega t)$, то сигнал на выходе $u_{\text{вых}}(t) = K(j\omega) \exp(j\omega t)$. Подставляя эти выражения в (8.30), после сокращения на общий множитель находим частотный коэффициент передачи системы:

$$K(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}. \quad (8.41)$$

Частотный коэффициент передачи распределенной системы свободен от этого ограничения и может описываться более сложными функциями

Итак, частотный коэффициент передачи любой динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, представляет собой дробно-рациональную функцию переменной $j\omega$; коэффициенты этой функции совпадают с коэффициентами дифференциального уравнения.

В инженерных расчетах частотный коэффициент передачи линейных систем часто находят методами теории цепей на основании принципиальных схем, не прибегая к составлению дифференциальных уравнений. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 8.11. Частотный коэффициент передачи напряжения RC-цепи, схема которой приведена в примере 8.7. Здесь

$$K(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

где $\tau = RC$ -постоянная времени.

Уравнение АЧХ принимает вид

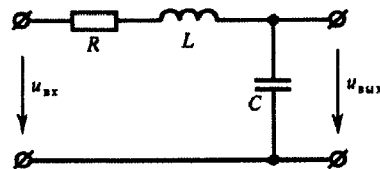
$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

ФЧХ определяется следующим образом:

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau).$$

Вид АЧХ указывает на то, что такая цепь может использоваться в качестве фильтра нижних частот (ФНЧ).

Пример 8.12. Частотный коэффициент передачи напряжения Г-образного четырехполюсника, собранного из элементов L , C , R :

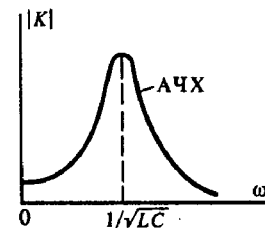
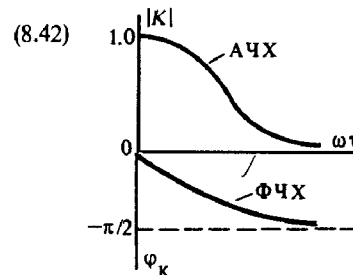


Здесь

$$K(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC},$$

откуда следует уравнение АЧХ

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$



▲ решите задачу 5

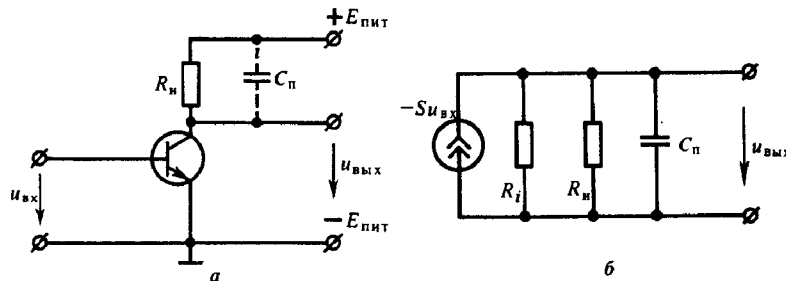
и уравнение ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg} [\omega RC / (1 - \omega^2 LC)].$$

Если сопротивление потерь R достаточно мало, так что добротность системы $Q = \sqrt{L/C}/R \gg 1$, то данная цепь может с успехом выполнять роль полосового фильтра.

Усилитель малых сигналов с апериодической нагрузкой. Типичным примером линейной динамической системы является электронный усилитель напряжения (рис. 8.1, а, б).

Для определенности в качестве управляемого элемента здесь взят биполярный транзистор типа $n-p-n$, включенный по схеме с общим эмиттером.



Паразитная емкость включает в себя выходную емкость электронного прибора, а также емкость соединительных проводников

Рис. 8.1. Усилитель напряжения:

а — упрощенная принципиальная схема; б — эквивалентная схема (R_n — резистор нагрузки, C_n — паразитная емкость)

Чтобы любые такие устройства можно было анализировать единообразно, принято использовать схемы замещения электронных приборов. Метод эквивалентных схем применим тогда, когда амплитуды переменных напряжений малы настолько, что можно пренебречь нелинейностью внешних характеристик электронных приборов. Например, биполярный транзистор достаточно точно описывается линейной схемой замещения, если амплитуда переменной составляющей входного напряжения мала по сравнению с так называемым температурным потенциалом $p-n$ -перехода $u_T = kT/e$, где k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура перехода; e — заряд электрона.

Как известно из теории цепей, схема замещения активного электронного прибора (рис. 8.1, б) содержит управляемый источник тока, создающий в выходной цепи ток $-Su_{вх}$ (S — крутизна характеристики прибора в рабочей точке), а также выходное (внутреннее) сопротивление прибора R_i , включенное параллельно источнику тока.

Нагрузкой усилителя является параллельное соединение сопротивления R_n и емкости C_n ; такую нагрузку принято называть *апериодической* в отличие от колебательной нагрузки (LC -контура).

В усилителях применяются также разнообразные полевые транзисторы и электронные лампы

При $T = 300$ К (стандартная температура) температурный потенциал перехода равен 26 мВ

Полная проводимость, включенная параллельно источнику тока,

$$Y_{\Sigma} = \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_i} + j\omega C_p.$$

Если на вход усилителя подан гармонический сигнал с частотой ω и комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$, то комплексная амплитуда выходного напряжения

$$\dot{U}_{вых} = -S\dot{U}_{вх}/Y_{\Sigma},$$

откуда частотный коэффициент передачи напряжения

$$K(j\omega) = -\frac{S}{Y_{\Sigma}} = -\frac{SR_{эк}}{1 + j\omega R_{эк}C_p}, \quad (8.43)$$

где $R_{эк} = R_n R_i / (R_n + R_i) = R_n \parallel R_i$.

Таким образом, рассмотренный усилитель напряжения с резистивно-емкостной нагрузкой имеет частотный коэффициент передачи такого же вида, как и RC-цепь.

На нулевой частоте значение АЧХ максимально; модуль коэффициента усиления $K_0 = SR_{эк}$. С ростом частоты усиление падает из-за шунтирующего действия паразитной емкости. Полосу пропускания усилителя принято оценивать *граничной частотой* $\omega_{гр}$, на которой значения АЧХ уменьшаются в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с уровнем K_0 . Из (8.43) видно, что так как

$$|K(j\omega)| = \frac{SR_{эк}}{\sqrt{1 + \omega^2 R_{эк}^2 C_p^2}},$$

то

$$\omega_{гр} = 1/(R_{эк}C_p).$$

Отрицательный знак указывает на то, что при увеличении напряжения на базе коллекторный ток возрастает и выходное напряжение уменьшается

●
граничная частота усиления

Пример 8.13. Усилитель, собранный по схеме рис. 8.1, имеет следующие параметры: $R_n = 1.6$ кОм, $S = 20$ мА/В, $C_p = 30$ пФ, $R_i = 15$ кОм. Вычислить коэффициент усиления на нулевой частоте и полосу пропускания усилителя.

Прежде всего находим эквивалентное сопротивление нагрузки $R_{эк} = 1.6 \cdot 15 / (1.6 + 15) = 1.45$ кОм.

Модуль коэффициента усиления на нулевой частоте $K_0 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1.45 \cdot 10^3 = 29$.

Граничная частота усилителя $\omega_{гр} = 1/(1.45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-11}) = 2.3 \cdot 10^7$ с⁻¹
или $f_{гр} = 3.66$ МГц.

▲
решите задачу 10

■
устойчивость динамической системы

Устойчивость динамических систем. По определению, линейная динамическая система называется устойчивой, если все ее собственные колебания затухают во времени. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения (8.36).

Эти корни не должны быть также и чисто мнимыми. Хотя при этом собственные колебания есть гармонические функции вида

$$u_{\cos}(t) = \frac{\sin}{\cos}(\omega_0 t),$$

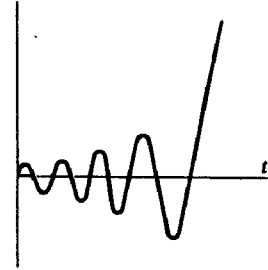
небольшие случайные изменения параметров системы могут привести к переходу ее в неустойчивый режим, когда

$$u_{\cos}(t) = \exp(\alpha t) \frac{\sin}{\cos}(\omega_0 t)$$

представляют собой экспоненциально нарастающие по амплитуде колебания.

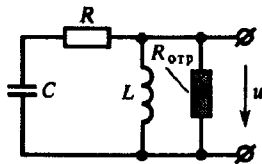
Если порядок динамической системы достаточно высок, то прямая проверка устойчивости, основанная на поиске корней характеристического уравнения, может оказаться весьма затруднительной. Поэтому были разработаны специальные критерии устойчивости, позволяющие определять наличие корней с положительными вещественными частями непосредственно по виду коэффициентов, минуя само решение характеристического уравнения (см. гл. 14).

Возникновение нарастающих собственных колебаний в электрических цепях возможно лишь тогда, когда в составе цепи, помимо пассивных элементов L , C , R , содержатся активные элементы, передающие в цепь часть энергии от внешних источников. Распространенной моделью такого активного элемента служит резистор с отрицательным сопротивлением.



Колебание в неустойчивой системе

Рассматриваемая система будет самопроизвольно возбуждаться, если имеющееся в ней отрицательное сопротивление $R_{\text{отр}} > R_{\text{отр.кр}}$



Пример 8.14. Колебательный контур с параметрами $C = 80$ пФ, $L = 2.5$ мкГн, $R = 12$ Ом содержит резистор с отрицательным сопротивлением $R_{\text{отр}}$, включенный параллельно индуктивному элементу. Определить критическое значение этого сопротивления, при котором возникает неустойчивость цепи.

Дифференциальное уравнение данной цепи, составленное относительно напряжения u на индуктивном элементе, имеет вид

$$\left(1 + \frac{R}{R_{\text{отр}}}\right) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_{\text{отр}} C}\right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0. \quad (8.44)$$

Корни γ_1 и γ_2 характеристического уравнения имеют вещественные части

$$\text{Re } \gamma_{1,2} = - \frac{(R/L) + 1/(R_{\text{отр}} C)}{2(1 + R/R_{\text{отр}})}.$$

Система переходит в неустойчивый режим, когда величина $\text{Re } \gamma_{1,2}$ обращается в нуль. Отсюда находим критическое значение отрицательного сопротивления:

$$R_{\text{отр.кр}} = -L/(RC) = -2.6 \text{ кОм}.$$

8.4. Спектральный метод

Говоря о спектральном методе анализа прохождения радиотехнических сигналов через линейные стационарные системы, обычно имеют в виду целый комплекс математических приемов, в основе которых лежит использование свойств частотного коэффициента передачи системы. Ниже на конкретных примерах показано применение спектрального подхода как к задаче нахождения реакции системы, так и к проблеме числовой оценки выходного сигнала.

Основная формула. Пусть на входе некоторой линейной стационарной системы действует детерминированный сигнал $u_{вх}(t)$, заданный обратным преобразованием Фурье:

$$u_{вх}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Будем полагать, что известен частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ системы. Как было доказано, комплексный сигнал вида $\exp(j\omega t)$, являясь собственной функцией системного оператора, создает на выходе элементарную реакцию $K(j\omega) \exp(j\omega t)$. Суммируя эти реакции, находим представление выходного сигнала:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) U_{вх}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.48)$$

Получена основная формула спектрального метода, свидетельствующая о том, что частотный коэффициент передачи системы служит множителем пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$U_{вых}(\omega) = K(j\omega) U_{вх}(\omega). \quad (8.49)$$

Итак, анализ систем в частотной области отличается замечательной чертой — эффект преобразования сигнала в системе отображается просто алгебраической операцией умножения.

Следует иметь в виду, что спектральный и временной подходы полностью эквивалентны друг другу. Действительно, интеграл Дюамеля (8.8) есть свертка функции $u_{вх}(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$ во временной области: $u_{вых}(t) = u_{вх}(t) * h(t)$. Значит, спектральная плотность выходного сигнала есть произведение спектральных плотностей функций $u_{вх}(t)$ и $h(t)$. Отсюда непосредственно следует формула (8.49).

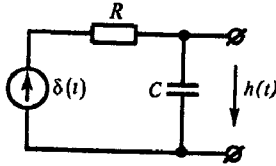
Практическая ценность спектрального метода нахождения выходной реакции в каждом конкретном случае зависит от того, удастся ли провести интегрирование в формуле (8.48).

Вычисление импульсных характеристик. Как правило, нахождение частотных коэффициентов передачи линейных систем

■ принцип спектрального метода

не вызывает принципиальных затруднений. Поэтому если требуется вычислить импульсную характеристику $h(t)$ системы, то целесообразно воспользоваться спектральным методом, согласно которому

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$



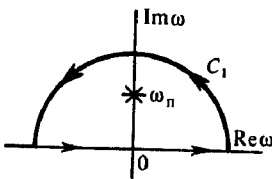
В качестве примера найдем импульсную характеристику RC -цепи, для которой выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе. Здесь

$$K(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC),$$

поэтому импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} d\omega. \quad (8.50)$$

Случай $t > 0$



Внутри замкнутого контура подынтегральная функция имеет единственный простой полюс

Применим метод вычетов [14] и будем считать, что ω — комплексная переменная. Контур интегрирования в (8.50) образован всей вещественной осью $\text{Im } \omega = 0$ и дугой C_1 достаточно большого радиуса, которая может замыкаться как в верхней, так и в нижней полуплоскостях.

Подынтегральная функция в (8.50) имеет единственный простой полюс в точке с координатой $\omega_n = j/(RC)$. Вычет подынтегральной функции в этой точке

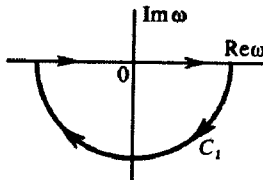
$$\text{res} \left(\frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} \right) \Big|_{\omega = \omega_n} = \frac{e^{-t/(RC)}}{jRC}.$$

Найдем функцию $h(t)$ при $t > 0$. Для этого расположим дугу C_1 в верхней полуплоскости, поскольку именно в этом случае функция $\exp(j\omega t)$ будет экспоненциально стремиться к нулю с ростом радиуса дуги. В пределе контурный интеграл будет равен интегралу, вычисленному лишь вдоль вещественной оси в соответствии с формулой (8.50).

По теореме Коши, контурный интеграл от функции комплексной переменной равен числу $2\pi j$, умноженному на сумму вычетов подынтегральной функции во всех полюсах, которые лежат внутри контура интегрирования. Таким образом,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} \text{ при } t > 0. \quad (8.51)$$

Случай $t < 0$



Внутри замкнутого контура подынтегральная функция является аналитической

Если же требуется найти импульсную характеристику при $t < 0$, то контур интегрирования следует замкнуть в нижней полуплоскости, где подынтегральная функция вообще не имеет полюсов и поэтому

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (8.52)$$

График импульсной характеристики RC -цепи, построенный по формулам (8.51) и (8.52), представляет собой кривую, разрывную при $t = 0$ (рис. 8.2).

Представление разрывных функций с помощью контурных интегралов является математическим приемом, широко используемым в теоретических исследованиях.

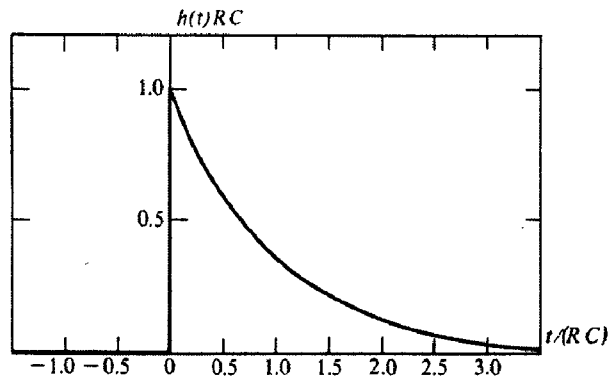


Рис. 8.2. График импульсной характеристики RC -цепи

Вычисление сигнала на выходе системы. Как пример использования спектрального метода решим задачу о прохождении экспоненциального видеопульса напряжения $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \exp(-\alpha t) \sigma(t)$ через RC -цепь, рассмотренную выше. В данном случае спектральная плотность входного сигнала $U_{\text{вх}}(\omega) = U_0/(\alpha + j\omega)$ и задача сводится к вычислению интеграла, входящего в выражение

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{U_0}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t) d\omega}{(1 + j\omega/\alpha)(1 + j\omega RC)}.$$

Разлагая алгебраическую часть подынтегральной функции на элементарные дроби, имеем

$$\frac{1}{(1 + j\omega/\alpha)(1 + j\omega RC)} = \frac{1}{1 - \alpha RC} \left(\frac{1}{1 + j\omega/\alpha} - \frac{\alpha RC}{1 + j\omega RC} \right).$$

Структура слагаемых, стоящих в квадратных скобках, позволяет непосредственно использовать результат, полученный при вычислении импульсной характеристики RC -цепи, и записать решение при $t > 0$:

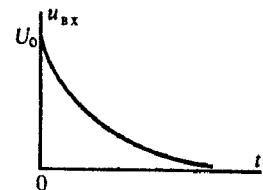
$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{U_0}{1 - \alpha RC} [\exp(-\alpha t) - \exp(-t/(RC))]. \quad (8.53)$$

Естественно, что при $t < 0$

$$u_{\text{вых}}(t) = 0. \quad (8.54)$$

Соответствующий график приведен на рис. 8.3.

Коэффициент передачи многозвенной системы. В радиотехнике часто используют сложные системы, отдельные звенья



▲
решите задачи 6
и 7

▲
решите задачу 8

Следует обратить внимание на то, что RC -цепь сглаживает входной сигнал

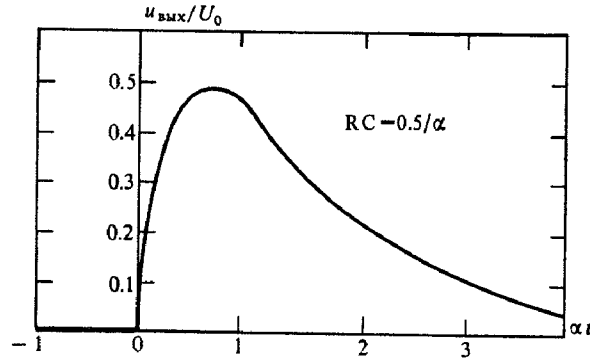


Рис. 8.3. Отклик RC -цепи на экспоненциальный видеоимпульс

которых включены *каскадно*, т. е. выходной сигнал предыдущего звена служит входным сигналом для последующего звена. Примером такой системы может служить многозвенный усилитель.

Положим, что известны частотные коэффициенты передачи отдельных звеньев $K_n(j\omega)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Возбуждая первое звено сигналом $u_{вх}(t) = \exp(j\omega t)$, получим на выходе сигнал $u_{вых}(t) = K_1(j\omega)K_2(j\omega) \cdots K_N(j\omega) \exp(j\omega t)$,

откуда результирующий коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \prod_{n=1}^N K_n(j\omega). \quad (8.55)$$

В инженерных расчетах АЧХ систем часто выражают в логарифмических единицах — *децибелах*. Если на некоторой частоте ω известен модуль частотного коэффициента передачи, то *усиление* системы, выраженное в децибелах (дБ),

$$\Delta = 20 \lg |K(j\omega)|. \quad (8.56)$$

Если $|K(j\omega)| < 1$, то система ослабляет сигнал и усиление оказывается отрицательным.

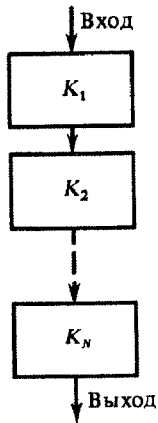
Легко видеть, что при каскадном соединении звеньев их усиления суммируются алгебраически:

$$\Delta = \sum_{n=1}^N \Delta_n. \quad (8.57)$$

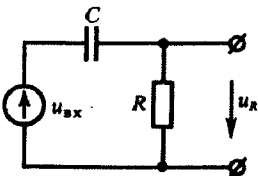
Дифференцирующие и интегрирующие цепи. Линейные цепи широко применяют для преобразования формы импульсных радиотехнических колебаний.

Рассмотрим RC -цепь, возбуждаемую источником ЭДС; выходным сигналом является напряжение на резисторе. Дифференциальное уравнение данной цепи имеет вид

$$\tau \frac{du_R}{dt} + u_R = \tau \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (8.58)$$



●
усиление системы



Если постоянная времени τ мала настолько, что в любой момент времени

$$\tau \left| \frac{du_R}{dt} \right| \ll |u_R|, \quad (8.59)$$

то первым слагаемым в левой части уравнения (8.58) можно пренебречь по сравнению со вторым и записать

$$u_R(t) \approx \tau \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (8.60)$$

Такая RC -цепь выполняет операцию *приближенного дифференцирования* сигнала. Схемотехническое применение дифференцирующих цепей — создание обострителей импульсных сигналов.

Выполнение неравенства (8.59) зависит не только от параметров цепи, но и от характеристик входного сигнала. Для оценок здесь проще всего воспользоваться анализом в частотной области. Частотный коэффициент передачи рассматриваемой цепи $K(j\omega) = j\omega\tau/(1 + j\omega\tau)$ будет достаточно близок к частотному коэффициенту передачи идеального дифференциатора: $K(j\omega) \approx j\omega\tau$, если произведение $\omega\tau$ пренебрежимо мало по сравнению с единицей в области частот, где сосредоточена основная доля энергии сигнала. Например, пусть входной сигнал — прямоугольный видеоимпульс длительностью τ_n . Используя грубую оценку верхней граничной частоты в спектре такого импульса: $\omega_b = 2\pi/\tau_n$, получаем условие, обеспечивающее пригодность RC -цепи для приближенного дифференцирования данного сигнала:

$$RC \ll \tau_n/(2\pi). \quad (8.61)$$

Диаметрально противоположными свойствами может обладать RC -цепь, у которой выходной сигнал, снимаемый с конденсатора, удовлетворяет уравнению

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_{вх}.$$

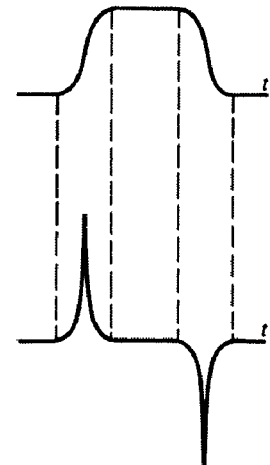
Если параметры цепи и входного сигнала таковы, что

$$\tau \left| \frac{du_C}{dt} \right| \gg |u_C|, \text{ то}$$

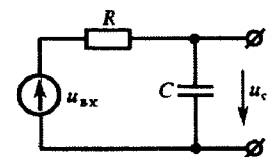
$$u_C(t) \approx \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t u_{вх}(\xi) d\xi. \quad (8.62)$$

RC -цепь с такими свойствами называется *интегрирующей цепью*. Приближенное интегрирование выполняется тем точнее, чем больше относительная доля высокочастотных составляющих в спектре входного сигнала. Действительно, поскольку здесь $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$, приближенное равенство $K(j\omega) \approx 1/(j\omega\tau)$, обеспечивающее интегрирующие свойства цепи,

Сигнал на входе

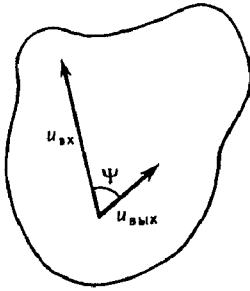


и на выходе дифференцирующей цепи



▲
решите задачу 9

■ применение интегрирующих цепей



Как правило, функциональное пространство сигналов можно считать гильбертовым

будет справедливо при $\omega_n \tau \gg 1$, где ω_n — нижняя граничная частота спектра.

Интегрирующие цепи дают возможность подавлять высокочастотные составляющие спектра входного сигнала и поэтому часто используются как сглаживающие фильтры. Кроме того, они могут преобразовывать скачкообразные перепады входного сигнала в линейно нарастающие импульсы на выходе.

Геометрическая интерпретация процесса преобразования сигнала в линейной системе. Спектральный метод позволяет наглядно интерпретировать преобразования сигналов, которые происходят при их прохождении через линейные стационарные системы. С геометрических позиций, развитых в гл. 1, системный оператор T — это правило перехода от вектора $u_{vx}(t)$ некоторого линейного пространства к новому вектору $u_{vyx}(t)$. В самом общем случае можно утверждать, что оператор T изменяет норму вектора $u_{vx}(t)$, т. е. $\|u_{vx}\| \neq \|Tu_{vx}\|$. Кроме того, между векторами $u_{vx}(t)$ и $u_{vyx}(t)$ возникает некоторый угол ψ .

По формуле Рэлея (см. гл. 3), энергия выходного сигнала

$$E_{vyx} = \|u_{vyx}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{vyx}(\omega) U_{vyx}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 W_{vx}(\omega) d\omega, \quad (8.63)$$

где $W_{vx}(\omega)$ — энергетический спектр сигнала на входе.

В соответствии с формулой (8.63), выходной энергетический спектр $W_{vyx}(\omega) = |K(j\omega)|^2 W_{vx}(\omega)$.

Величину

$$K_p(\omega) = |K(j\omega)|^2 \quad (8.64)$$

● частотный коэффициент передачи мощности

называют *частотным коэффициентом передачи мощности* системы на заданной частоте ω . Поскольку этот коэффициент вещественный, вычисление энергии выходного сигнала оказывается гораздо более простой задачей по сравнению с поиском самой формы выходного сигнала.

Пример 8.15. На входе RC-цепи с частотным коэффициентом передачи $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$ действует идеальный низкочастотный сигнал, энергетический спектр которого отличен от нуля и равен W_0 лишь в пределах интервала частот $0 < \omega < \omega_b$. Найти отношение энергий сигналов на входе и выходе.

В данном случае $K_p = 1/(1 + \omega^2\tau^2)$. По формуле (8.63) энергия выходного сигнала

$$E_{vyx} = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} \frac{d\omega}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{W_0}{\pi\tau} \operatorname{arctg} \omega_b\tau.$$

Заметим, что $K_p(\omega) = K(j\omega) \times K(-j\omega)$

Энергия входного сигнала $E_{вх} = W_0 \omega_b / \pi$.

Видно, что отношение этих энергий

$$E_{вых} / E_{вх} = \operatorname{arctg} \omega_b \tau / (\omega_b \tau) \quad (8.65)$$

стремится к нулю с ростом как постоянной времени τ , так и верхней граничной частоты спектра.

Угол между векторами входного и выходного сигналов.

В гл. 1 обсуждался способ сравнения двух сигналов, основанный на вычислении угла ψ , образованного векторами данных сигналов в гильбертовом пространстве. Эту же идею можно использовать для сопоставления сигналов на входе и выходе линейной стационарной системы.

Обобщенная формула Рэлея позволяет выразить скалярное произведение этих сигналов через их спектральные плотности:

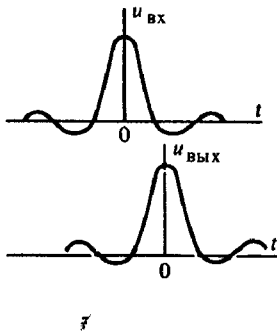
$$\begin{aligned} (u_{вх}, u_{вых}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\omega) U_{вых}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{вх}(\omega) K^*(j\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Поскольку мнимая часть коэффициента передачи есть нечетная функция частоты, последняя формула упрощается:

$$(u_{вх}, u_{вых}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{вх}(\omega) \operatorname{Re} K(j\omega) d\omega. \quad (8.66)$$

Угол ψ между векторами входного и выходного сигналов можно найти из соотношения

$$\cos \psi = \frac{(u_{вх}, u_{вых})}{\|u_{вх}\| \cdot \|u_{вых}\|}. \quad (8.67)$$



Пример 8.16. Вычислить угол ψ между сигналами на входе и выходе RC-цепи в соответствии с условиями примера 8.15.

Поскольку здесь $\operatorname{Re} K(j\omega) = 1/(1 + \omega^2 \tau^2)$, в данном частном случае интеграл (8.66) численно равен квадрату нормы выходного сигнала. Отсюда следует, что

$$\cos \psi = \left(\frac{E_{вых}}{E_{вх}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\operatorname{arctg} \omega_b \tau}{\omega_b \tau} \right)^{1/2}. \quad (8.68)$$

Если произведение $\omega_b \tau \gg 1$, то $\cos \psi \rightarrow 0$. Это означает, что RC-цепь создает на выходе сигнал, почти ортогональный по отношению к сигналу на входе. Природу этого эффекта можно понять из качественных рассуждений, приняв во внимание, что благодаря инерционным свойствам цепи выходной сигнал задерживается во времени.

Во многих случаях достаточно знать лишь изменение энергии сигнала, прошедшего через линейную систему

▲
решите задачу 14

Автокорреляционная характеристика системы. Заканчивая обзор спектральных методов в теории линейных стационарных систем, упомянем еще об одной полезной функции — так называемой *автокорреляционной характеристике* системы $b(\tau)$. Ее принято определять как преобразование Фурье от частотного коэффициента передачи мощности:

$$b(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (8.69)$$

Наряду с частотным представлением (8.69) возможно и временное представление этой функции. Чтобы осуществить его, заметим, что $K_P(\omega) = K(j\omega)K^*(j\omega)$. Поэтому между функциями $K_P(\omega)$ и $b(\tau)$ должна существовать такая же связь, которая была найдена в гл. 3 между энергетическим спектром и АКФ произвольного сигнала:

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt. \quad (8.70)$$

Данная формула раскрывает смысл введенного здесь термина.

8.5. Операторный метод

К рассмотренному спектральному методу тесно примыкает широко распространенный операторный метод, базирующийся на представлении входных и выходных сигналов их преобразованиями Лапласа.

Решение дифференциальных уравнений операторным методом. Преобразование Лапласа является исключительно гибким и мощным методом, позволяющим путем стандартных процедур находить решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Именно это свойство обусловило его широкое использование в научных исследованиях и инженерных расчетах.

Пусть дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + a_0 u_{\text{вых}} = \\ = b_m \frac{d^m u_{\text{вх}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{вх}}}{dt} + b_0 u_{\text{вх}} \end{aligned} \quad (8.71)$$

устанавливает закон соответствия между сигналами на входе и выходе некоторой линейной стационарной системы. Наложим некоторые ограничения. Сделаем допущение, что входной сигнал $u_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$. Кроме того, исходя из специфики работы радиотехнических устройств, начальные условия выберем нулевыми: $u_{\text{вых}}(0) = u'_{\text{вых}}(0) = \dots = u_{\text{вых}}^{(n-1)}(0) = 0$. Наконец, примем, что область допустимых входных сигналов не содержит в себе функций, столь

быстро нарастающих во времени, что для них не существует преобразования Лапласа.

Обозначим закон соответствия между оригиналами и изображениями следующим образом: $u_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вх}}(p)$, $u_{\text{вых}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вых}}(p)$. Вычислив преобразования Лапласа от обеих частей уравнения (8.71), получим

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) U_{\text{вых}}(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U_{\text{вх}}(p). \quad (8.72)$$

Важнейшей характеристикой, на которой основан операторный метод, является отношение изображений выходного и входного сигналов:

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}, \quad (8.73)$$

называемое *передаточной функцией* или *операторным коэффициентом передачи* рассматриваемой системы.

В соответствии с формулой (8.72)

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (8.74)$$

Если эта функция известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

1. $u_{\text{вх}}(t) \rightarrow U_{\text{вх}}(p)$,
2. $U_{\text{вых}}(p) = K(p) U_{\text{вх}}(p)$,
3. $U_{\text{вых}}(p) \rightarrow u_{\text{вых}}(t)$.

Термин «операторный метод» исторически восходит к известным работам Хевисайда, который еще в конце прошлого века предложил символический способ решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в линейных электрических цепях. Метод Хевисайда основан на символической замене оператора дифференцирования d/dt комплексным числом p .

Свойства передаточной функции. Сравнивая формулы (8.74) и (8.41), можно убедиться, что функция $K(p)$ есть результат аналитического продолжения частотного коэффициента передачи $K(j\omega)$ с мнимой оси $j\omega$ на всю плоскость комплексных частот $p = \sigma + j\omega$. Функция $K(p)$ аналитична на всей плоскости p , за исключением конечного числа точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, являющихся корнями знаменателя в формуле (8.74). Данные точки, т. е. корни уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0,$$

называют *полюсами* передаточной функции $K(p)$.

Математически нулевые начальные условия означают, что до момента возникновения входного сигнала система не содержит запасенной энергии

■ передаточная функция системы

В рамках операторного метода передаточная функция является полной математической моделью системы

О связи метода Хевисайда с теорией преобразования Лапласа см. [14]

● аналитическое продолжение

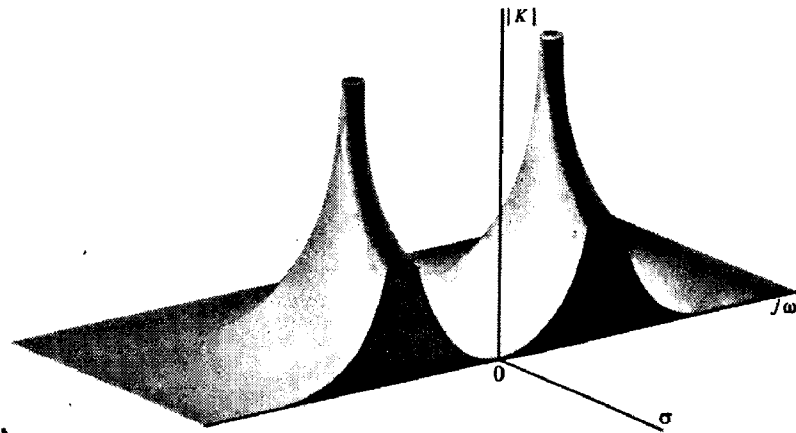


Рис. 8.4. Характер поверхности $|K(p)|$ для передаточной функции, имеющей два комплексно-сопряженных полюса $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ и один нуль $z = 0$

Точки $z_1, z_2, \dots, z_m$, представляющие собой корни уравнения $b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0 = 0$,

называют нулями данной передаточной функции.

Вынося общий множитель K_0 , возникающий при делении в (8.74) числителя на знаменатель, получаем так называемое нуль-полюсное представление передаточной функции:

$$K(p) = K_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (8.75)$$

Вещественность коэффициентов дифференциального уравнения (8.72) обуславливает следующее свойство нулей и полюсов: все эти числа либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

Часто используют наглядный прием отображения передаточной функции с помощью карты нулей и полюсов, на которой некоторыми условными значками нанесены указанные точки. Саму функцию $K(p)$, принимающую комплексные значения, нельзя непосредственно представить графически. Поэтому поступают так: над плоскостью с декартовой системой координат изображают трехмерную поверхность функции $|K(p)|$ (рис. 8.4).

Поверхность имеет характерный вид «горного ландшафта»; бесконечно высокие вершины соответствуют полюсам, а впадины — нулям передаточной функции. Выполнив сечение этой поверхности с помощью плоскости, содержащей как вертикальную ось, так и ось $j\omega$, получим профиль АЧХ системы.

Полюсы передаточной функции линейной системы являются корнями характеристического уравнения (8.36). Поэтому для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы эти полюсы располагались строго в левой полуплоскости комплексной переменной p . Нули передаточной функции

●
нули и полюсы

В дальнейшем принята такая система обозначений: ○ — нуль, * — полюс

в общем случае могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях.

Формула обращения. Заключительным этапом решения задачи о прохождении сигнала через линейную стационарную систему с помощью операторного метода является поиск оригинала, которому отвечает изображение $U_{\text{вых}}(p) = K(p)U_{\text{вх}}(p)$.

Рассмотрим частный случай, когда функция $U_{\text{вых}}(p)$ представляет собой отношение двух многочленов по степеням комплексной частоты:

$$U_{\text{вых}}(p) = M(p)/N(p),$$

причем будем считать, что степень числителя m не превосходит степени знаменателя n и, кроме того, корни знаменателя p_i , $i = 1, 2, \dots, n$ — простые.

Способ нахождения оригинала, отвечающего такому изображению, основывается на представлении функции $U_{\text{вых}}(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p - p_i}.$$

Коэффициенты C_i являются вычетами функции $U_{\text{вых}}(p)$ в точках полюсов, поэтому [14]

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p - p_i)}.$$

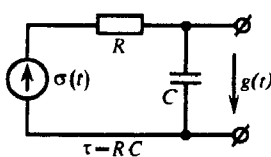
Как известно, изображению $1/(p - p_i)$ соответствует оригинал $\exp(p_i t)$. Таким образом, приходим к известной формуле обращения:

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} \exp(p_i t). \quad (8.76)$$

Примеры нахождения выходных сигналов операторным методом. При практическом использовании операторного метода большую часть формальных вычислений можно исключить, обращаясь к широко распространенным таблицам преобразований Лапласа.

▲ решите задачу 11

● формула обращения



Пример 8.17. Найти переходную характеристику RC-цепи.

Здесь $\sigma(t) \leftrightarrow 1/p$, $K(p) = 1/(1 + p\tau)$, поэтому $U_{\text{вых}}(p) = 1/[p(1 + p\tau)]$. Разлагая эту функцию на элементарные дроби, имеем

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}.$$

Оригиналы, соответствующие обоим слагаемым в правой части последней формулы, хорошо известны (см. [5, 6, 36]). Искомый

результат имеет вид

$$g(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \sigma(t).$$

Пример 8.18. На входе RC-цепи действует прямоугольный видеопульс ЭДС с заданными длительностью T и амплитудой U_0 . Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе цепи. Найти функцию, описывающую изменение во времени напряжения $u_C(t)$.

Входной сигнал имеет изображение

$$U_{\text{вх}}(p) = \frac{U_0}{p}(1 - e^{-pT}).$$

Множитель $\exp(-pT)$ свидетельствует о сдвиге во времени на величину T . Поэтому, используя результат, полученный в примере 8.17, можно записать

$$u_C(t) = U_0 [1 - e^{-t/\tau}] \sigma(t) - U_0 [1 - e^{-(t-T)/\tau}] \sigma(t - T).$$

Для наглядности последнюю формулу целесообразно представить так:

$$u_C(t) = \begin{cases} U_0(1 - e^{-t/\tau}) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ U_0 e^{-t/\tau} (e^{T/\tau} - 1) & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Если выходной сигнал снимается с резистора, то при тех же параметрах R и C напряжение на резисторе $u_R = u_{\text{вх}} - u_C$.

Пример 8.19. Импульсная характеристика параллельного колебательного контура.

Параллельный колебательный контур с потерями возбуждается дельта-импульсом тока в неразветвленной части цепи. Выходным сигналом служит напряжение на контуре. Равенство $U(p) = Z(p)I(p)$ указывает на то, что передаточной функцией в данном случае служит операторное сопротивление контура

$$Z(p) = \frac{p/C}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}, \quad (8.77)$$

где $\alpha = 1/(2RC)$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Формулу (8.77) удобно представить в виде

$$Z(p) = \frac{p/C}{(p + \alpha)^2 + \omega_c^2}, \quad (8.78)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота собственных колебаний в контуре с потерями.

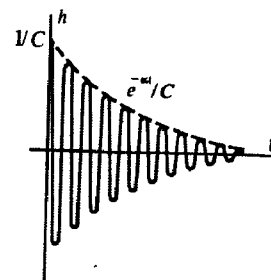
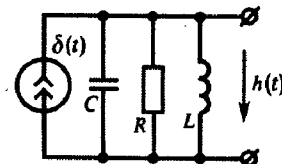
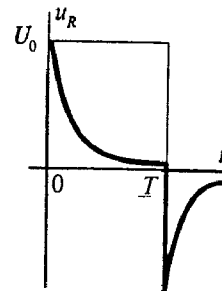
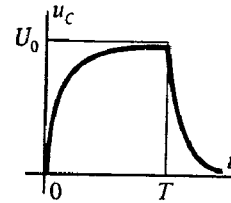
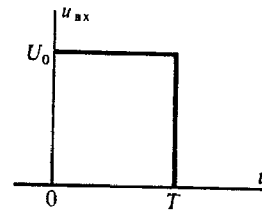
Изображением дельта-импульса тока служит единица, поэтому импульсная характеристика данной системы — это оригинал, соответствующий изображению (8.78). По таблицам преобразований Лапласа находим

$$h(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{C} \left(\cos \omega_c t - \frac{\alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t \right). \quad (8.79)$$

Если контур высокодобротный ($\alpha \ll \omega_0$), то формула (8.79) несколько упрощается:

$$h(t) \approx \frac{e^{-\alpha t}}{C} \cos \omega_0 t. \quad (8.80)$$

Необходимо помнить, что формулы (8.79) и (8.80) соответствуют возбуждению контура бесконечно коротким импульсом тока,



Импульсная характеристика колебательного контура имеет характерный вид гармонического колебания с экспоненциально убывающей во времени огибающей

площадь которого тем не менее составляет 1 А·с. В реальном масштабе — это очень большая величина: прямоугольный импульс длительностью 1 мкс должен иметь гигантскую амплитуду 10^6 А! Неудивительно, что при $C = 1000$ пФ такой импульс вызовет в начальный момент времени напряжение 10^9 В. Реальный импульс тока с амплитудой 0.01 А и длительностью 1 мкс имеет площадь 10^{-8} А·с; при $C = 1000$ пФ начальное напряжение на контуре составит лишь 10 В.

Итак, при $t > 0$ напряжение на параллельном контуре, который возбуждается коротким импульсом тока произвольной формы с площадью $\Pi_{\text{имп}}$ имеет вид

$$u(t) = \frac{\Pi_{\text{имп}} e^{-\alpha t}}{C} \left(\cos \omega_c t - \frac{\alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t \right). \quad (8.81)$$

Этот ряд примеров можно было бы продолжить и рассмотреть, например, более сложную задачу о включении в колебательный контур источника гармонической ЭДС. Однако получающиеся при этом точные решения довольно громоздки. Гораздо удобнее использовать приближенный метод анализа нестационарных явлений в колебательных цепях, изложенный в гл. 9.

▲
решите задачу 12

Результаты

- ◇◇ Закон, связывающий входной и выходной сигналы в системе, называется системным оператором.
- ◇◇ Классификация систем основана на свойствах системных операторов. Различают линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные, сосредоточенные и распределенные системы.
- ◇◇ Реакция линейной системы на дельта-импульс называется импульсной характеристикой.
- ◇◇ Сигнал на выходе есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики.
- ◇◇ Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика связаны парой преобразований Фурье.
- ◇◇ Собственные колебания динамических систем определяются корнями характеристического уравнения.
- ◇◇ Динамическая система абсолютно устойчива, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.
- ◇◇ Частотный коэффициент передачи линейной стационарной системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, есть дробно-рациональная функция частоты.
- ◇◇ Спектральная плотность выходного сигнала является произведением частотного коэффициента передачи и спектральной плотности колебания на входе.

Вопросы

1. Приведите несколько примеров линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных систем.

2. При каких условиях реакцию линейной системы на короткий входной импульс можно представить импульсной характеристикой системы?

3. Сформулируйте условие физической реализуемости системы.

4. Что такое переходная характеристика системы? Как связаны между собой переходная и импульсная характеристики?

5. Как определяется частотный коэффициент передачи линейной системы?

6. Приведите формулировку критерия Пэли – Винера.

7. В чем заключено отличительное свойство динамических систем?

8. Напишите формулу, определяющую частотный коэффициент передачи усилителя малых сигналов с апериодической нагрузкой. Чем определяется граничная частота усиления?

9. В чем состоит сущность спектрального метода анализа прохождения сигналов через линейные системы?

10. В каких логарифмических единицах измеряется усиление сигнала в системе?

11. Начертите схемы дифференцирующих и интегрирующих цепей.

12. Как преобразуется вектор входного сигнала, являющийся элементом гильбертова пространства, при прохождении через линейную цепь?

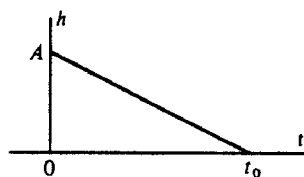
13. Что такое частотный коэффициент передачи мощности?

14. Приведите определение понятия передаточной функции линейной системы.

15. В какой области комплексной плоскости должны располагаться полюсы передаточной функции устойчивой линейной системы?

Задачи

1. Характеристика $h(t)$ линейной стационарной системы представляет собой импульс треугольной формы:



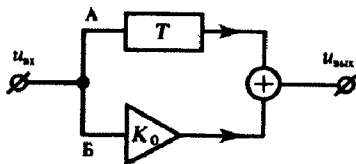
На вход системы подается сигнал $u_{вх}(t) = a\sigma(t)$.

Найдите выходную реакцию системы.

2. Вычислите импульсную характеристику идеального интегратора, для которого

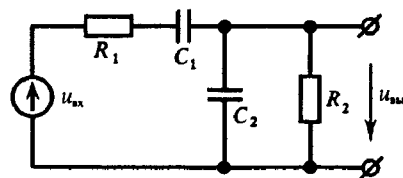
$$u_{вых}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u_{вх}(\xi) d\xi.$$

3. Структурная схема системы имеет вид



В ветвях A и B помещены идеальный элемент задержки на T секунд и масштабный усилитель с коэффициентом усиления K_0 . Найдите импульсную характеристику системы.

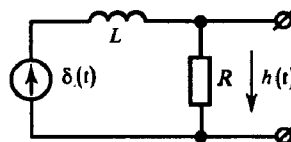
4. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее цепь:



Уравнение должно быть записано относительно неизвестной функции $u_{вых}(t)$.

5. Найдите частотные коэффициенты передачи систем, рассмотренных в задачах 3 и 4.

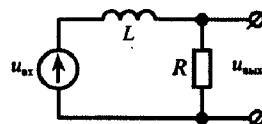
6. Вычислите импульсную характеристику RL-цепи, схема которой имеет вид



7. Вычислите импульсную характеристику цепи, рассмотренной в задаче 4.

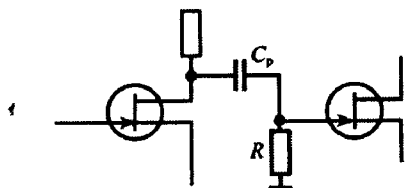
8. Проведите анализ формулы (8.53) для случая, когда $\alpha = 1/(RC)$.

9. Исследуйте условия, при которых цепь вида



может осуществлять приближенное интегрирование входного сигнала.

10. В многозвенном усилителе на полевых транзисторах применен разделительный конденсатор C_p .



Его назначение — препятствовать попаданию высокого постоянного потенциала со стока предыдущего звена на затвор последующего.

Усилитель предназначен для усиления прямоугольных видеоимпульсов длительностью $\tau_n = 1$ мс. Считая, что сопротивление резистора $R = 0.5$ МОм, а полевой транзистор имеет бесконечное входное сопротивление,

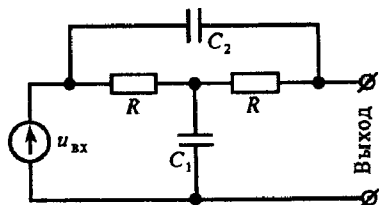
определите емкость C_p , при которой за время длительности импульса напряжение на затворе (см. схему) падает не более чем на 5 % от максимального уровня.

11. Найдите передаточную функцию усилителя с двумя одинаковыми резистивно-емкостными ступенями. Параметры одной ступени: $S = 10$ мА/В, $R_n = 0.3$ кОм, $R_i = 7$ кОм, $C_n = 120$ пФ. Емкость разделительного конденсатора (см. задачу 10) столь велика, что ее влиянием на характеристики усилителя можно пренебречь.

12. В последовательный колебательный контур с параметрами L , C и R включен источник ЭДС $u_{вх}(t) = a\sigma(t)$. Получите формулу, определяющую закон изменения напряжения на конденсаторе.

Более сложные задания

13. Вычислите частотный коэффициент передачи и найдите импульсную характеристику следующей цепи:



14. На входе RC-цепи действует источник импульсной ЭДС

$$u_{вх}(t) = U_0 \exp(-\alpha t) \sigma(t).$$

Выходной сигнал снимается с конденсатора. Определите угол между векторами входного

и выходного сигналов в гильбертовом пространстве.

15. Исследуйте переходную характеристику колебательного контура с помощью физической модели — грузика, подвешенного на нити. Входное воздействие на систему — скачкообразное перемещение точки подвеса маятника в горизонтальном направлении. Экспериментально подберите такое входное воздействие, которое переводило бы систему из одного состояния покоя в другое за конечное время. Сделайте вывод о предельно достижимом быстродействии колебательных систем (данная задача является частной иллюстрацией к одному из интенсивно развиваемых направлений современной кибернетики — теории оптимального управления [12]).

Глава 9

Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы

В радиотехнике с первых шагов ее становления получил широкое применение способ выделения полезных сигналов с помощью частотно-избирательных линейных цепей. Такие цепи пропускают на выход лишь колебания с частотами, которые лежат в относительно узкой полосе вокруг некоторой центральной частоты. Частотная фильтрация полезного сигнала особенно эффективна в том случае, если обрабатываемый сигнал в достаточной степени узкополосен. Примерами узкополосных сигналов служат различные модулированные колебания, изученные в гл. 4.

Линейные частотно-избирательные цепи или, как их часто называют, линейные полосовые фильтры, обладают рядом специфических свойств. Для анализа прохождения сигналов через такие цепи в радиотехнике созданы методы, с которыми мы познакомимся в этой главе.

9.1. Некоторые модели частотно-избирательных цепей

Простейшим полосовым фильтром является колебательный контур, образованный элементами L , C и R . В теории цепей подробно изучаются последовательные и параллельные контуры [3]. Не приводя подробных выкладок, напомним основные положения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Частотные характеристики параллельного колебательного контура. В окрестности резонансной частоты $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ данная колебательная система может быть описана эквивалентной схемой, которая состоит из параллельного соединения элементов L , C и активного резонансного сопротивления

$$R_{\text{рез}} = \rho Q, \quad (9.1)$$

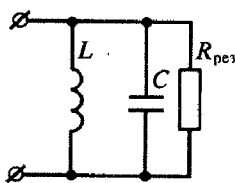
где $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура; Q — добротность колебательной системы.

Свойства контура определяются зависимостью его входного сопротивления от частоты. В качестве аргумента удобно использовать безразмерную *обобщенную расстройку*

$$\xi = Q(\omega/\omega_{\text{рез}} - \omega_{\text{рез}}/\omega). \quad (9.2)$$

При этом входное сопротивление

$$Z(j\xi) = R_{\text{рез}}/(1 + j\xi). \quad (9.3)$$



Эквивалентная
схема параллель-
ного колебатель-
ного контура

Если $Q \gg 1$, то в узкой полосе вблизи резонансной частоты для расчета обобщенной расстройки следует пользоваться приближенной формулой

$$\xi \approx 2Q(\omega - \omega_{\text{рез}})/\omega_{\text{рез}}. \quad (9.4)$$

АЧХ параллельного колебательного контура отображается так называемой *резонансной кривой*. Если добротность достаточно высока, то резонансная кривая практически симметрична относительно частоты $\omega_{\text{рез}}$. Уравнение резонансной кривой

$$|Z(j\omega)| = \frac{R_{\text{рез}}}{\sqrt{1 + 4Q^2(\omega - \omega_{\text{рез}})^2/\omega_{\text{рез}}^2}}. \quad (9.5)$$

▲
решите задачи 1 и 2

Интервал на оси частот (Гц) между точками, в которых $|Z|$ уменьшается от значения $R_{\text{рез}}$ до $R_{\text{рез}}/\sqrt{2} = 0.707R_{\text{рез}}$, называют *полосой пропускания контура*:

$$\Pi_{0.707} = f_{\text{рез}}/Q. \quad (9.6)$$

Резкое снижение модуля сопротивления параллельного контура при расстройке относительно резонансной частоты позволяет использовать эту цепь для частотной фильтрации сигналов.

Пример 9.1. Параллельный колебательный контур с параметрами $Q = 125$, $L = 6$ мкГн настроен на частоту $f_{\text{рез}} = 8$ МГц. Контур возбуждается источником гармонического тока; выходным сигналом является напряжение на контуре. Определить, во сколько раз будет ослаблен сигнал на частоте 8.1 МГц по сравнению с сигналом на резонансной частоте.

Для настройки на требуемую резонансную частоту необходимо использовать конденсатор емкостью $C = 1/(4\pi^2 L f_{\text{рез}}^2) = 66$ пФ. Резонансное сопротивление контура $R_{\text{рез}} = \sqrt{L/C} Q = 37.69 \approx 38$ кОм.

По формуле (9.4) обобщенная расстройка на частоте 8.1 МГц $\xi = 2Q \Delta f / f_{\text{рез}} = 3.125$.

Рассмотренный колебательный контур является узкополосной частотно-избирательной системой, поскольку отношение полосы пропускания к резонансной частоте $\Pi_{0.707}/f_{\text{рез}} = 1/Q \ll 1$

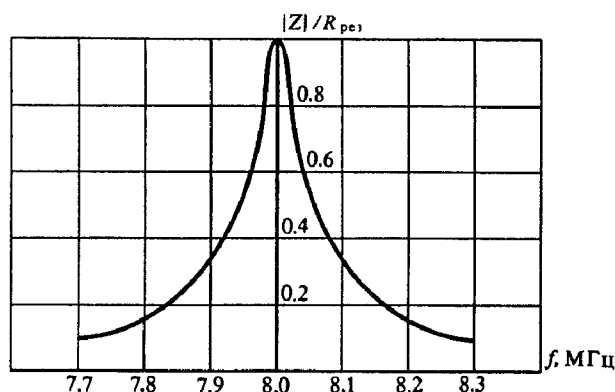


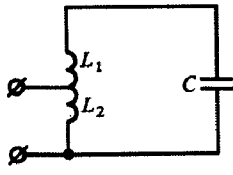
Рис. 9.1. АЧХ параллельного колебательного контура с параметрами $Q = 125$, $L = 6$ мкГн, $C = 66$ пФ

Амплитуда выходного сигнала в рассматриваемой цепи пропорциональна модулю входного сопротивления контура. Поскольку

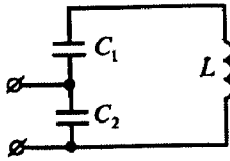
$$|Z|/R_{\text{рез}} = 1/\sqrt{1 + \xi^2},$$

подставляя сюда найденное значение ξ , убеждаемся, что амплитуда этого сигнала на частоте 8.1 МГц составляет 0.305 от амплитуды сигнала на резонансной частоте. Этой цифре соответствует отрицательное усиление (ослабление) $\Delta = 20 \lg 0.305 = -10.3$ дБ.

Амплитудно-частотная характеристика данной системы изображена на рис. 9.1.



$$k_{\text{вкл}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$



$$k_{\text{вкл}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Часто используют параллельные колебательные контуры с неполным включением. Внешние цепи могут подключаться либо к отводу в индуктивном элементе, либо к средней точке емкостного делителя. Входное сопротивление такого контура вычисляют по формуле (9.3), в которую следует подставить величину резонансного сопротивления

$$R_{\text{рез}} = k_{\text{вкл}}^2 \rho Q,$$

где $k_{\text{вкл}}$ — коэффициент включения контура.

Нуль-полосное представление характеристик колебательного контура. В рамках операторного метода динамические свойства параллельного колебательного контура с потерями можно описать, задав его входную проводимость

$$Y(p) = 1/R_{\text{рез}} + pC + 1/(pL)$$

или входное сопротивление

$$Z(p) = 1/Y(p) = \frac{p/C}{p^2 + p/(R_{\text{рез}}C) + 1/(LC)}. \quad (9.7)$$

Заметив, что $1/\sqrt{LC} = \omega_{\text{рез}0}$ есть резонансная частота контура без потерь и $1/(R_{\text{рез}}C) = 1/(\rho QC) = \omega_{\text{рез}0}/Q$, перепишем выражение (9.7) следующим образом:

$$Z(p) = \frac{p/C}{p^2 + (\omega_{\text{рез}0}/Q)p + \omega_{\text{рез}0}^2}.$$

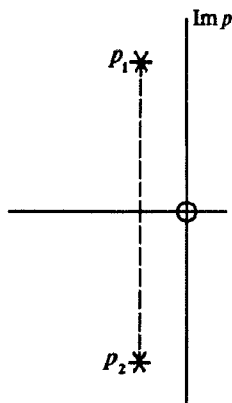
Данное операторное сопротивление имеет единственный нуль при $p = 0$ и два комплексно-сопряженных полюса в точках с координатами

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_{\text{рез}0}}{2Q} \pm j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega_{\text{рез}0}. \quad (9.8)$$

Полюсы расположены в левой полуплоскости (система устойчива) и тем ближе к мнимой оси, чем выше добротность контура. Последнее свойство является общим для любых частотно-избирательных систем.

Резонансный усилитель малых колебаний. Данная узкополосная система совмещает в себе функции усилителя и линейного частотного фильтра (рис. 9.2).

Отличие от усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой (см. гл. 8) состоит в том, что здесь нагрузкой электронного



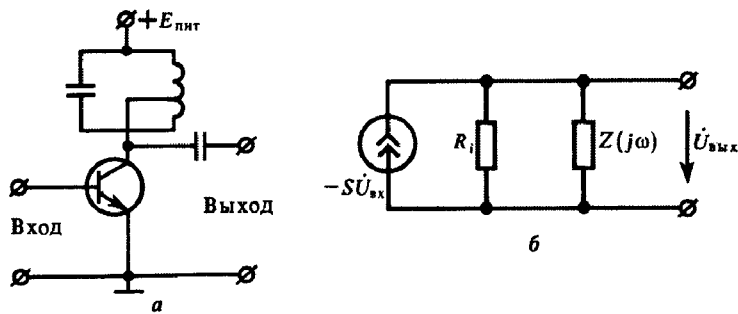


Рис. 9.2. Резонансный усилитель малых колебаний:
а — принципиальная схема; б — схема замещения

прибора служит параллельный колебательный контур; включение контура в общем случае может быть неполным.

Обращаясь к эквивалентной схеме замещения, видим, что ток с комплексной амплитудой $-S\dot{U}_{вх}$, поступающий от управляемого источника, протекает по сопротивлению

$$Z_{эк}(j\omega) = Z(j\omega) R_i / [Z(j\omega) + R_i]$$

и создает на нем падение напряжения, являющееся выходным сигналом усилителя. Несложные преобразования показывают [см. формулу (9.3)], что

$$Z_{эк}(j\xi) = \frac{R_{рез,эк}}{1 + j\xi_{эк}}. \quad (9.9)$$

Здесь

$$R_{рез,эк} = \frac{R_{рез}}{1 + R_{рез}/R_i} \quad (9.10)$$

— эквивалентное сопротивление контура усилителя при резонансе с учетом внутреннего сопротивления источника; эквивалентная обобщенная расстройка

$$\xi_{эк} = \frac{\xi}{1 + R_{рез}/R_i}.$$

Можно считать, что влияние внутреннего сопротивления состоит в том, что добротность колебательной системы уменьшается и становится равной эквивалентной добротности

$$Q_{эк} = \frac{Q}{1 + R_{рез}/R_i}. \quad (9.11)$$

Поскольку комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе усилителя $\dot{U}_{вых} = -SZ_{эк}\dot{U}_{вх}$, частотный коэффициент передачи данного устройства

$$K(j\xi_{эк}) = \frac{-SR_{рез,эк}}{1 + j\xi_{эк}}. \quad (9.12)$$

Согласно формуле (9.11), для ослабления шунтирующего действия электронного прибора на колебательную систему без расширения полосы пропускания усилителя следует уменьшать резонансное сопротивление $R_{рез}$, применяя неполное включение контура

▲
решите задачу 5

Отсюда следуют соответственно уравнения АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя:

$$|K(j\omega)| = \frac{SR_{\text{рез.эк}}}{\sqrt{1 + 4Q_{\text{эк}}^2(\omega - \omega_{\text{рез}})^2/\omega_{\text{рез}}^2}}, \quad (9.13)$$

$$\varphi_K(\omega) = \pi - \operatorname{arctg} [2Q_{\text{эк}}(\omega - \omega_{\text{рез}})/\omega_{\text{рез}}]. \quad (9.14)$$

Пример 9.2. Усилитель, собранный по схеме рис. 9.2, имеет следующие параметры: $f_{\text{рез}} = 28$ МГц, $Q = 95$, $\rho = 430$ Ом, $k_{\text{вкл}} = 0.6$, $S = 20$ мА/В, $R_i = 15$ кОм. Определить модуль коэффициента усиления на резонансной частоте и полосу пропускания усилителя.

Резонансное сопротивление колебательной системы

$$R_{\text{рез}} = k_{\text{вкл}}^2 \rho Q = 0.36 \cdot 0.43 \cdot 95 = 14.71 \text{ кОм.}$$

Эквивалентное сопротивление контура при резонансе с учетом шунтирующего действия транзистора

$$R_{\text{рез.эк}} = 14.71 / (1 + 14.71/15) = 7.43 \text{ кОм.}$$

При настройке усилителя в резонанс $\xi_{\text{эк}} = 0$, поэтому из (9.12) следует, что резонансный коэффициент усиления

$$K_{\text{рез}} = SR_{\text{рез.эк}} = 20 \cdot 7.43 = 148.6,$$

или в логарифмических единицах

$$\Delta_{\text{рез}} = 20 \lg K_{\text{рез}} = 43 \text{ дБ.}$$

Полосу пропускания усилителя на уровне 0.707 определяем по формуле (9.6):

$$B_{0.707} = f_{\text{рез}} (1 + R_{\text{рез}}/R_i)/Q = 0.58 \text{ МГц.}$$

Многоконтурные частотно-избирательные системы. Рассмотренные выше одноконтурные узкополосные цепи обладают существенным недостатком — невысокой частотной избирательностью. Это свойство проявляется в том, что за границами полосы пропускания значения АЧХ таких цепей стремятся к нулю недостаточно быстро. Поэтому выходное колебание содержит не только полезный сигнал, спектр которого располагается вблизи максимума АЧХ, но и некоторую, порой значительную долю мешающих сигналов, шумов и т. д. со спектрами, лежащими на достаточном удалении от той частоты, на которую настроен фильтр.

Стремясь повысить частотную избирательность фильтров, прибегают к многоконтурным устройствам, в которых удастся получить форму АЧХ, близкую к идеальной (прямоугольной).

Простейшим многоконтурным частотно-избирательным фильтром является система двух связанных колебательных контуров. Принцип работы такого устройства изучается в теории цепей. На рис. 9.3, а изображена принципиальная схема резонансного усилителя, нагрузкой которого является система двух одинаковых индуктивно связанных контуров.

Параметрами этой системы являются коэффициент связи $k_c = M/L$ и так называемый фактор связи $A = k_c Q$. Модуль

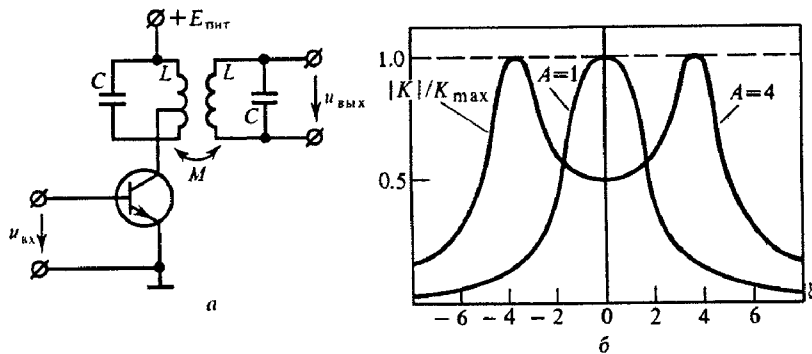


Рис. 9.3. Резонансный усилитель со связанными контурами:
 а — принципиальная схема; б — графики АЧХ при различных факторах связи

частотного коэффициента передачи данного усилителя вычисляют по формуле

$$|K(j\xi)| = \frac{k_{\text{вкл}} ASR_{\text{рез.эк}}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (9.15)$$

Графики АЧХ, построенные в соответствии с выражением (9.15), изображены на рис. 9.3, б при различных факторах связи A . Отметим, что если $A > 1$, то резонансная кривая в полосе пропускания имеет провал, глубина которого возрастает с увеличением фактора связи.

Можно создавать весьма совершенные частотно-избирательные устройства, применяя фильтры с большим числом взаимно связанных колебательных систем.

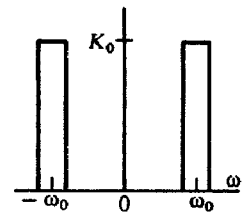
В последнее время в радиотехнике стали получать распространение частотно-избирательные фильтры, построенные на новых схемотехнических принципах — так называемые активные фильтры (см. гл. 14). Большие успехи достигнуты в области конструирования частотных фильтров, работа которых основана на использовании ультразвуковых волн в твердых телах. Новая отрасль радиотехники, получившая название акустоэлектроники, сулит заманчивые перспективы создания миниатюрных и надежных частотно-избирательных систем.

Идеализированные модели частотно-избирательных устройств. При теоретическом исследовании частотно-избирательных узкополосных цепей часто применяют их упрощенные модели, которые позволяют правильно описывать основные свойства фильтров, опуская малосущественные и к тому же трудно анализируемые подробности.

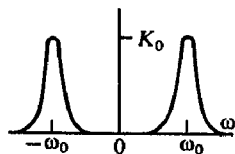
Наиболее простой моделью служит гипотетический *идеальный полосовой фильтр*, коэффициент передачи которого постоянен и равен K_0 в пределах полосы пропускания:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_0 + \Delta\omega, \\ K_0, & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0 & \text{на остальных частотах.} \end{cases} \quad (9.16)$$

Сравнивая АЧХ одно- и двухконтурного усилителей, можно заметить, что при равных добротностях колебательных систем двухконтурный усилитель имеет большую крутизну скатов резонансной кривой, т. е. способен обеспечить большую частотную избирательность



● **идеальный полосовой фильтр**



гауссов
фильтр

радио-

Другой распространенной теоретической моделью узкополосной системы является так называемый *гауссов радиофильтр*, АЧХ которого представляет собой колоколообразную гауссову кривую, симметричную относительно частоты ω_0 . Частотный коэффициент передачи гауссова радиофильтра

$$K(j\omega) = K_0 \exp[-b(\omega + \omega_0)^2] + K_0 \exp[-b(\omega - \omega_0)^2]. \quad (9.17)$$

Здесь b — постоянная величина с размерностью c^2 , определяющая частотные свойства фильтра. Первое слагаемое в (9.17) обуславливает «всплеск» коэффициента передачи в области отрицательных частот, а второе — в области положительных частот. При $b\omega_0^2 \gg 1$ фильтр узкополосен и эффект перекрытия частотных характеристик, отвечающих отрицательным и положительным частотам, не наблюдается.

9.2. Частотно-избирательные цепи при широкополосных входных воздействиях

Задача о поведении узкополосной частотно-избирательной цепи, возбуждаемой широкополосным входным сигналом, представляет интерес, например, в связи с тем, что сигналы помех часто представляют собой короткие импульсы. Эффективная ширина спектра таких сигналов может значительно превышать ширину полосы пропускания частотно-избирательной системы.

Понятие широкополосного сигнала. Пусть $K(j\omega)$ — частотный коэффициент передачи узкополосной цепи, способной выделять спектральные составляющие входного сигнала, сосредоточенные в малых окрестностях частот $\pm \omega_0$. Входное колебание $u_{\text{вх}}(t)$ со спектральной плотностью $S_{\text{вх}}(\omega)$ называют *широкополосным* сигналом применительно к данной цепи, если функцию $S_{\text{вх}}(\omega)$ можно приближенно считать постоянной в пределах полосы пропускания системы. При этом

$$u_{\text{вых}}(t) \approx \frac{S_{\text{вх}}(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{S_{\text{вх}}(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.18)$$

Согласно выражению (9.18), форма выходного сигнала в данном случае определяется не характером входного колебания, а лишь частотным коэффициентом передачи системы.

Импульсная характеристика частотно-избирательной цепи. Сигналом с предельно широким спектром является дельта-импульс, для которого $S_{\text{вх}}(\omega) = 1$. Выходным сигналом в данном случае служит импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.19)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части выражения (9.19) и перейдем в нем от переменной интегриро-



решите задачу 6

Спектральная плотность входного сигнала в пределах полосы пропускания системы устанавливает масштабный уровень выходного отклика

вания ω к новой частотной переменной Ω в соответствии с формулой $\omega = -\omega_0 - \Omega$. Такой переход означает смещение функции $K(j\omega)$ из окрестности точки $-\omega_0$ в окрестность точки $\Omega = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{-e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{\infty}^{-\omega_0} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Поскольку рассматриваемая цепь узкополосная, модуль частотного коэффициента передачи достаточно резко уменьшается с увеличением Ω . Это означает, что в последнем интеграле (9.20) нижний предел $-\omega_0$ можно с полным основанием заменить на $-\infty$. В результате имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega. \quad (9.21)$$

Аналогично, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$, преобразуем второй интеграл в (9.19) к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (9.22)$$

Комплексно-сопряженные выражения (9.21) и (9.22) складываются, поэтому импульсная характеристика узкополосной системы оказывается вещественной:

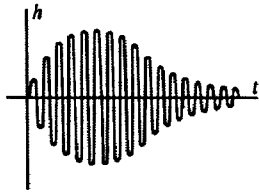
$$h(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega \right] e^{j\omega_0 t} \right\}. \quad (9.23)$$

Низкочастотный эквивалент частотно-избирательной цепи. Этим термином принято называть воображаемую систему, частотный коэффициент передачи которой получается путем смещения частотного коэффициента передачи реальной узкополосной цепи из окрестности частоты ω_0 в окрестность нулевой частоты, т. е.

$$K_{\text{НЧ}}(j\Omega) = K[j(\omega_0 + \Omega)]. \quad (9.24)$$

Интеграл в (9.23) является импульсной характеристикой НЧ-эквивалента:

$$h_{\text{НЧ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{НЧ}}(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (9.25)$$



Поэтому

$$h(t) = \operatorname{Re} [2h_{\text{НЧ}}(t) e^{j\omega_0 t}], \quad (9.26)$$

откуда следует, что функция $2h_{\text{НЧ}}(t)$ является комплексной огибающей импульсной характеристики реальной узкополосной цепи. В соответствии с формулой (9.26), в общем случае импульсная характеристика частотно-избирательной системы представляет собой квазигармоническое колебание, огибающая и начальная фаза которого медленно (в масштабе времени $T = 2\pi/\omega_0$) изменяются во времени.

Пример 9.3. Низкочастотный эквивалент параллельного колебательного контура.

Здесь частотным коэффициентом передачи служит входное сопротивление

$$Z(j\omega) = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + j2Q(\omega - \omega_{\text{рез}})/\omega_{\text{рез}}}. \quad (9.27)$$

Коэффициент передачи НЧ-эквивалента получим, выполнив в (9.27) замену переменной $\omega = \omega_{\text{рез}} + \Omega$:

$$Z_{\text{НЧ}}(j\Omega) = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + j2Q\Omega/\omega_{\text{рез}}}. \quad (9.28)$$

Эта формула с точностью до масштабного множителя $R_{\text{рез}}$ описывает частотный коэффициент передачи динамической системы 1-го порядка (подобной RC-цепи) с постоянной времени

$$\tau_k = 2Q/\omega_{\text{рез}}, \quad (9.29)$$

называемой *постоянной времени колебательного контура*.

Импульсная характеристика подобной системы была найдена в гл. 8 при изучении свойств RC-цепи:

$$h_{\text{НЧ}}(t) = (R_{\text{рез}}/\tau_k) \exp(-t/\tau_k) \sigma(t). \quad (9.30)$$

Отсюда импульсная характеристика параллельного контура

$$h(t) = (R_{\text{рез}}\omega_{\text{рез}}/Q) \exp(-t/\tau_k) \cos(\omega_{\text{рез}}t) \sigma(t). \quad (9.31)$$

Поскольку $R_{\text{рез}}\omega_{\text{рез}}/Q = 1/C$, где C — емкость контура, полученный результат полностью совпадает с найденным в примере 8.19.

Пример 9.4. Импульсная характеристика идеализированной узкополосной системы, частотный коэффициент передачи которой

$$K(j\omega) = K_0 \exp[-b(\omega - \omega_0)] \sigma(\omega - \omega_0) \text{ при } \omega > 0.$$

Перенеся эту функцию в окрестность нулевой частоты, получаем коэффициент передачи НЧ-эквивалента:

$$K_{\text{НЧ}}(j\Omega) = K_0 \exp(-b\Omega) \sigma(\Omega), \quad (9.32)$$

откуда соответствующая импульсная характеристика

$$h_{\text{НЧ}}(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_0^\infty \exp[-(b - jt)\Omega] d\Omega = \frac{K_0}{2\pi(b - jt)}. \quad (9.33)$$

Импульсную характеристику исходной системы найдем по формуле (9.26):

$$h(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{K_0 \exp(j\omega_0 t)}{\pi(b - jt)} \right] = \frac{K_0}{\pi(b^2 + t^2)} (b \cos \omega_0 t - t \sin \omega_0 t).$$

●
постоянная времени контура

Заметим, что $h_{\text{НЧ}}(t)$ — комплекснозначная функция, поэтому низкочастотный эквивалент рассматриваемого фильтра не может быть физически реализуемой цепью

Здесь C_p — разделительный конденсатор, резисторы R_1, R_2 препятствуют накоплению зарядов на затворах транзисторов, резисторы R_3, R_4 создают начальные смещения рабочих точек транзисторов, конденсаторы C_3, C_4 достаточно большой емкости препятствуют возникновению отрицательной обратной связи

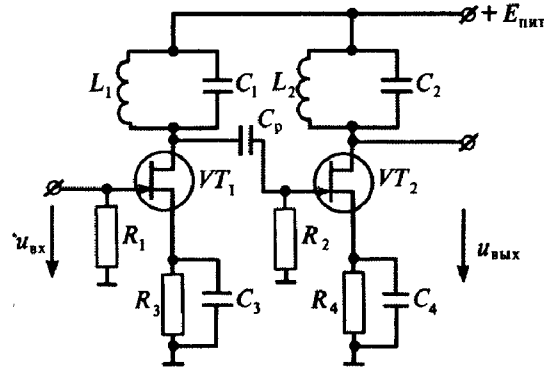


Рис. 9.4. Принципиальная схема двухконтурного усилителя

Пример 9.5. Импульсная характеристика двухконтурного резонансного усилителя, схема которого изображена на рис. 9.4.

Положим для простоты, что обе ступени усилителя настроены на одну и ту же резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, имеют одинаковые резонансные коэффициенты усиления $K_{\text{рез}}$ и одинаковые постоянные времени τ_k . Тогда частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{K_{\text{рез}}^2}{[1 + j(\omega - \omega_{\text{рез}})\tau_k]^2},$$

откуда

$$K_{\text{НЧ}}(j\Omega) = \frac{K_{\text{рез}}^2}{(1 + j\Omega\tau_k)^2}.$$

Заменяя частотную переменную $j\Omega$ на комплексную частоту p , имеем следующую передаточную функцию НЧ-эквивалента:

$$K_{\text{НЧ}}(p) = \frac{K_{\text{рез}}^2}{(1 + p\tau_k)^2} = \frac{K_{\text{рез}}^2/\tau_k^2}{(p + 1/\tau_k)^2}.$$

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа ей отвечает импульсная характеристика

$$h_{\text{НЧ}}(t) = (K_{\text{рез}}^2/\tau_k^2) t \exp(-t/\tau_k) \sigma(t),$$

откуда импульсная характеристика двухконтурного усилителя:

$$h(t) = \frac{2K_{\text{рез}}^2}{\tau_k} \left(\frac{t}{\tau_k} \right) \exp(-t/\tau_k) \cos(\omega_{\text{рез}}t) \sigma(t). \quad (9.34)$$

Соответствующий график приведен на рис. 9.5.

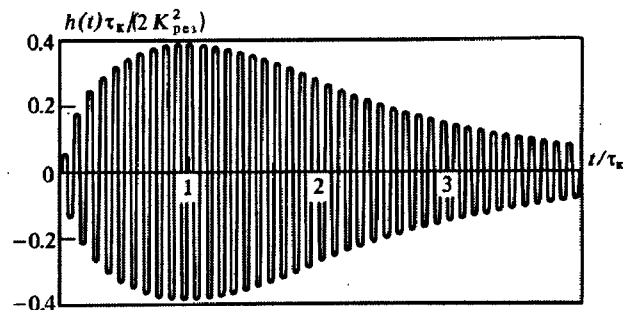


Рис. 9.5. Импульсная характеристика двухконтурного резонансного усилителя

Полезно сравнить этот результат с импульсной характеристикой одночного параллельного контура, полученной в примере 8.20. Обращает на себя внимание «затягивание» входного импульса во времени, происходящее из-за большей инерционности двухконтурной системы

Общий случай. Предположим, что на вход некоторой частотно-избирательной системы воздействует произвольный широкополосный сигнал со спектральной плотностью

$$S_{\text{вх}}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega).$$

Считая, что $u_{\text{вх}}(t)$ — вещественная функция, имеем

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega).$$

Представим выходное колебание в виде суммы

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вых}}^{(1)}(t) + ju_{\text{вых}}^{(2)}(t). \quad (9.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^{(1)}(t) &= \frac{A(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{A(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= 2A(\omega_0) \operatorname{Re} [h_{\text{нч}}(t) e^{j\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^{(2)}(t) &= \frac{B(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{B(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= j2B(\omega_0) \operatorname{Im} [h_{\text{нч}}(t) e^{j\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Подставляя эти промежуточные результаты в (9.35), получаем окончательный результат

$$u_{\text{вых}}(t) = 2 \{ A(\omega_0) \operatorname{Re} [h_{\text{нч}}(t) e^{j\omega_0 t}] - B(\omega_0) \operatorname{Im} [h_{\text{нч}}(t) e^{j\omega_0 t}] \}. \quad (9.38)$$

Естественно, что из (9.38) вытекает как частный случай формула (9.26), описывающая импульсную характеристику узкополосной цепи.

Физический смысл спектрального разложения. Положим для простоты, что $h_{\text{нч}}(t)$ — вещественная функция, и представим формулу (9.38) в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= 2h_{\text{нч}}(t) [A(\omega_0) \cos \omega_0 t - B(\omega_0) \sin \omega_0 t] = \\ &= 2h_{\text{нч}}(t) \sqrt{A^2(\omega_0) + B^2(\omega_0)} \cos [\omega_0 t + \varphi(\omega_0)], \end{aligned} \quad (9.39)$$

где $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0) = B(\omega_0)/A(\omega_0)$.

Входящее сюда выражение $[A^2(\omega_0) + B^2(\omega_0)]^{1/2}$ представляет собой величину $|S_{\text{вх}}(\omega_0)|$. Таким образом, как отмечалось, отклик узкополосной системы на широкополосный сигнал пропорционален абсолютному значению спектральной плотности входного сигнала в той точке на оси частот, которая соответствует центральной частоте полосы пропускания системы.

Этот результат указывает путь осуществления аппаратурного спектрального анализа сигналов. На рис. 9.6 приведена структурная схема анализатора спектра, построенного по так называемому параллельному принципу.

▲
решите задачу 7

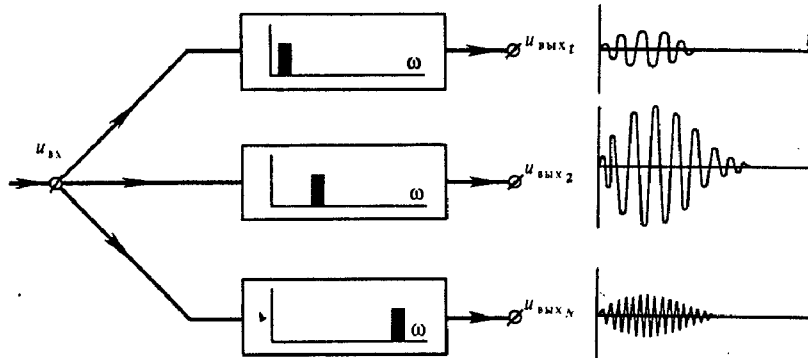


Рис. 9.6. Структурная схема анализатора спектра сигналов (амплитуды выходных колебаний фильтров пропорциональны модулям спектральной плотности)

Сформулированный здесь принцип аппаратного спектрального анализа имеет не только прикладное, но и большое принципиальное значение. В частности, он позволяет установить физический смысл поведения спектров сигналов, изученных в гл. 2. Например, как было показано, спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса длительностью τ_n обращается в нуль на всех частотах $\omega_n = 2\pi/\tau_n$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что данный видеоимпульс воздействует на вход узкополосной колебательной системы, настроенной на одну из этих частот. Период собственных колебаний системы $T_n = 2\pi/\omega_n = \tau_n/n$ находится в целократном соотношении с длительностью импульса. Колебательная система, получив «толчок» от фронта импульса, через время, кратное периоду собственных колебаний, получит такой же «толчок», но в противоположном направлении, от среза импульса. В результате будет наблюдаться взаимное погашение этих реакций. Именно об этом говорят нулевые значения спектральной плотности видеоимпульса в некоторых точках оси частот.

Прекрасное изложение вопросов, связанных с физическими аспектами спектральных разложений, читатель может найти в [19].

9.3. Частотно-избирательные цепи при узкополосных входных воздействиях

В типичной ситуации, например в случае приема модулированных сигналов, на вход частотно-избирательного линейного фильтра подается полезный сигнал, спектральная плотность которого имеет четко выраженный максимум в пределах полосы пропускания цепи. При этом, как правило, резонансная частота колебательной системы совпадает с частотой несущего колебания (симметричная настройка).

Если спектр входного радиосигнала был бы строго ограничен областью частот, в пределах которой частотный коэффициент передачи фильтра неизменен, то выходной сигнал являлся бы просто масштабной копией входного воздействия. Однако неизбежная неидеальность АЧХ и ФЧХ частотно-

Устройство состоит из набора узкополосных фильтров, полосы пропускания которых взаимно не перекрываются. Проводя одновременное измерение амплитуд выходных колебаний, можно получить информацию об интенсивности спектральных составляющих входного сигнала в различных участках оси частот

■ физическая интерпретация спектральной плотности сигнала

избирательной системы ведет к искажениям формы выходного сигнала. Ниже излагается метод, позволяющий находить выходные отклики частотно-избирательных цепей, возбуждаемых узкополосными колебаниями.

Основные соотношения. Рассмотрим произвольную узкополосную цепь, частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ которой существенно отличен от нуля лишь в окрестностях точек $\pm\omega_0$ на оси частот. Предположим, что входным сигналом служит узкополосное (квазигармоническое) колебание с центральной частотой спектра ω_0 . Это означает, что в формуле

$$u_{\text{вх}}(t) = \operatorname{Re} [\tilde{U}_{\text{вх}}(t) e^{j\omega_0 t}] \quad (9.40)$$

комплексная огибающая $\tilde{U}_{\text{вх}}(t)$ является гораздо более медленной функцией, чем колебание $\cos \omega_0 t$. Обозначим соответствие между сигналами и их спектрами: $u_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow S_{\text{вх}}(\omega)$, $\tilde{U}_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow G_{\text{вх}}(\omega)$, причем (см. гл. 5) спектры входного сигнала и его комплексной огибающей связаны таким образом:

$$S_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{2} G_{\text{вх}}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G_{\text{вх}}^*(-\omega - \omega_0).$$

Отсюда, используя спектральный метод анализа линейных цепей, получаем следующее выражение для выходного сигнала:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 G_{\text{вх}}^*(-\omega - \omega_0) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega - \omega_0) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Выполнив в первом интеграле замену переменной $\omega = -\omega_0 - \Omega$, преобразуем его:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 G_{\text{вх}}^*(-\omega - \omega_0) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ = \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}^*(\Omega) K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega \right\} e^{-j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Аналогично, используя подстановку $\omega = \omega_0 + \Omega$, преобразуем второй интеграл в (9.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega - \omega_0) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ = \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\Omega) K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega \right\} e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Заметим, что правые части выражений (9.42) и (9.43) являются комплексно-сопряженными. Кроме того, величина $K[j(\omega_0 + \Omega)]$ на основании (9.24) служит частотным коэффициентом передачи НЧ-эквивалента узкополосной цепи. Поэтому

$$u_{\text{вых}}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\Omega) K_{\text{НЧ}}(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] e^{j\omega_0 t} \right\}.$$

Отсюда видно, что комплексной огибающей выходного сигнала соответствует выражение

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\Omega) K_{\text{НЧ}}(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (9.44)$$

Итак, комплексная огибающая выходного сигнала представляет собой медленно меняющееся во времени колебание со спектральной плотностью

$$G_{\text{вых}}(\Omega) = G_{\text{вх}}(\Omega) K_{\text{НЧ}}(j\Omega). \quad (9.45)$$

Чтобы решить задачу о прохождении узкополосного сигнала через частотно-избирательную систему, следует вначале найти результат воздействия входной комплексной огибающей на НЧ-эквивалент исходной системы, а затем перейти к физическому выходному сигналу

$$u_{\text{вых}}(t) = \operatorname{Re} [\tilde{U}_{\text{вых}}(t) e^{j\omega_0 t}]. \quad (9.46)$$

Равенство (9.44) соответствует спектральному методу нахождения сигнала на выходе системы. В равной мере могут быть использованы и другие известные методы, например операторный метод, а также метод интеграла Дюамеля, согласно которому

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{вх}}(\tau) h_{\text{НЧ}}(t - \tau) d\tau, \quad (9.47)$$

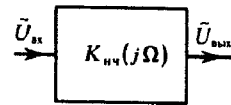
где $h_{\text{НЧ}}(t)$ — импульсная характеристика НЧ-эквивалента.

Воздействие АМ-сигнала на одноконтурный резонансный усилитель. В качестве первого примера рассмотрим задачу о прохождении однотонального АМ-колебания $u_{\text{вх}}(t) = U_0(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ через одноконтурный резонансный усилитель с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{-K_{\text{рез}}}{1 + j(\omega - \omega_{\text{рез}})\tau_k}.$$

Сделаем упрощающее допущение — будем считать, что резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ и частота несущего колебания ω_0 совпадают. Взяв эту частоту в качестве опорной, получим комплексную огибающую входного сигнала

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_0(1 + M \cos \Omega t). \quad (9.48)$$



Низкочастотный эквивалент, рассматриваемый как динамическая система, имеет более низкий порядок, нежели исходная узкополосная цепь. Поэтому нахождение комплексной огибающей на его выходе оказывается более простой задачей

Частотный коэффициент передачи НЧ-эквивалента усилителя

$$K_{\text{НЧ}}(j\Omega) = -K_{\text{рез}}/(1 + j\Omega\tau_k). \quad (9.49)$$

Способ решения
очень прост потому, что входная комплексная огибающая есть сумма постоянной составляющей и гармонического колебания

Выходную комплексную огибающую можно найти из (9.48) и (9.49), применив обычный метод комплексных амплитуд, известный из теории цепей:

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}}U_0 - \frac{K_{\text{рез}}U_0M}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau_k^2}} \cos(\Omega t - \vartheta_\Omega),$$

где фазовый сдвиг $\vartheta_\Omega = \text{arctg } \Omega\tau_k$.

Применив формулу (9.46) и приняв во внимание, что постоянная времени контура $\tau_k = 2Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{рез}}$, находим сигнал на выходе усилителя:

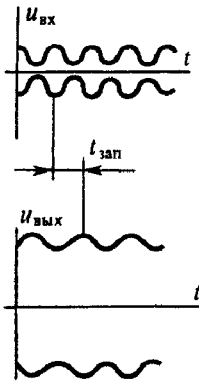
$$u_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}}U_0 \left[1 + \frac{M}{\sqrt{1 + \xi_\Omega^2}} \cos(\Omega t - \vartheta_\Omega) \right] \cos \omega_0 t, \quad (9.50)$$

где $\xi_\Omega = 2Q_{\text{эк}}\Omega/\omega_{\text{рез}}$ — обобщенная расстройка колебательного контура на верхней боковой частоте.

Таким образом, на выходе резонансного усилителя существует колебание, которое, будучи усиленным по амплитуде, по-прежнему является одностональным АМ-сигналом. Однако коэффициент модуляции на выходе меньше, чем на входе:

$$M_{\text{вых}} = M/\sqrt{1 + \xi_\Omega^2}. \quad (9.51)$$

Кроме того, огибающая на выходе запаздывает относительно огибающей входного сигнала на время $t_{\text{зап}} = \vartheta_\Omega/\Omega$.



Пример 9.6. АМ-сигнал с параметрами $M = 0.8$, $\omega_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ проходит через усилитель, настроенный на несущую частоту. Контур усилителя имеет эквивалентную добротность $Q_{\text{эк}} = 75$. Найти величины $M_{\text{вых}}$ и $t_{\text{зап}}$.

В этом случае $\xi_\Omega = 2 \cdot 75 \cdot 3 \cdot 10^4 / 5 \cdot 10^6 = 0.9$, откуда по формуле (9.51) находим

$$M_{\text{вых}} = 0.8/\sqrt{1 + 0.81} = 0.59.$$

Итак, наблюдается ощутимое снижение глубины модуляции.

Поскольку $\text{arctg } 0.9 = 0.733 \text{ рад}$, задержка огибающей $t_{\text{зап}}$ составит $0.733/(3 \cdot 10^4) = 24 \text{ мкс}$.

Воздействие на резонансный усилитель импульса включения гармонической ЭДС. Во многих радиотехнических системах (радиолокационных, системах многоканальной связи) полезная информация передается с помощью последовательностей прямоугольных радиоимпульсов. Проходя через резонансные частотно-избирательные системы, являющиеся неотъемлемыми частями радиоприемных устройств, такие импульсы несколько искажаются. Чтобы оценить степень этих нежелательных искажений, решим задачу о сигнале на выходе одноконтурного резонансного усилителя с частотным коэффи-

циентом передачи (9.12) при условии, что на входе действует сигнал $u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t) \sigma(t)$.

Пусть усилитель настроен на несущую частоту, т. е. $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$. Тогда, выбирая эту частоту в качестве опорной, получим следующее выражение для комплексной огибающей:

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_m \sigma(t). \quad (9.52)$$

Задача о воздействии сигнала (9.52) на линейную систему с коэффициентом передачи вида (9.49) была рассмотрена в гл. 8 при изучении переходной характеристики RC-цепи. Поэтому можно воспользоваться известным результатом и записать

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}} U_m [1 - \exp(-t/\tau_k)] \sigma(t). \quad (9.53)$$

Тогда выходной сигнал усилителя

$$u_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}} U_m [1 - \exp(-t/\tau_k)] \cos(\omega_0 t) \sigma(t). \quad (9.54)$$

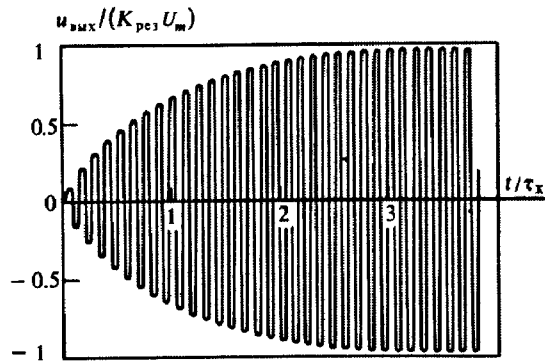


Рис. 9.7. Процесс установления колебаний на выходе резонансного усилителя, настроенного на частоту сигнала

График, построенный по формуле (9.54), представлен на рис. 9.7.

Текущая амплитуда выходного сигнала достигает уровня 0.9 от стационарного значения $K_{\text{рез}} U_m$ за время установления

$$t_{\text{уст}} = 2.303 \tau_k = 4.606 Q_{\text{эк}} / \omega_{\text{рез}}. \quad (9.55)$$

Влияние расстройки. Рассмотрим предыдущую задачу в более общей постановке, предположив, что частота заполнения входного сигнала отличается от резонансной частоты контура на величину $\delta\omega$. При этом

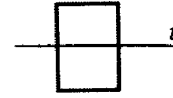
$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos[(\omega_{\text{рез}} + \delta\omega)t] \sigma(t),$$

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_m \exp(j\delta\omega t) \sigma(t).$$

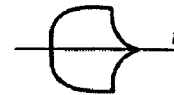
Сигнал на выходе НЧ-эквивалента одноконтурного резонансного усилителя проще всего найти, воспользовавшись интегралом Дюамеля, в который следует подставить выражение импульсной характеристики НЧ-эквивалента:

$$h_{\text{НЧ}}(t) = -(K_{\text{рез}}/\tau_k) \exp(-t/\tau_k) \sigma(t). \quad (9.56)$$

Радиоимпульс на входе усилителя



Радиоимпульсы на выходе:



при $t_{\text{уст}} < \tau_k$



при $t_{\text{уст}} > \tau_k$

Излишне высокая добротность контура приводит к существенному искажению огибающей импульса

По формуле (9.47) находим

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_0^t e^{j\delta\omega\tau} e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau = \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{1 + j\delta\omega\tau_k} (e^{j\delta\omega t} - e^{-t/\tau_k}). \quad (9.57)$$

Физическая огибающая процесса на выходе равна модулю выходной комплексной огибающей:

$$U_{\text{вых}}(t) = |\tilde{U}_{\text{вых}}(t)| = \frac{K_{\text{рез}} U_m}{\sqrt{1 + (\delta\omega\tau_k)^2}} \times \\ \times \sqrt{1 - 2e^{-t/\tau_k} \cos \delta\omega t + e^{-2t/\tau_k}}. \quad (9.58)$$

На рис. 9.8 изображены кривые, построенные по формуле (9.58) при различных значениях безразмерного произведения $\delta\omega\tau_k$.

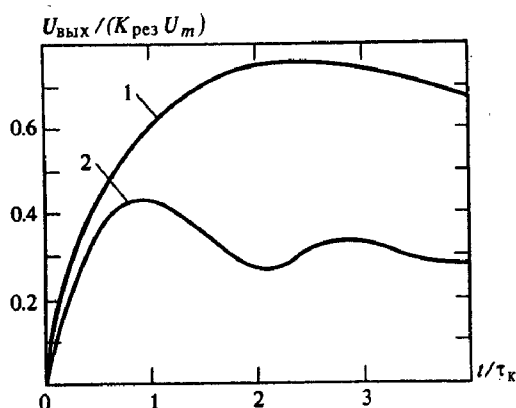
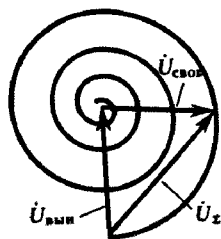


Рис. 9.8. Процесс установления огибающей в резонансном усилителе при наличии расстройки:

1 — при $\delta\omega\tau_k = 1$; 2 — при $\delta\omega\tau_k = 3$



Сложение свободных и вынужденных колебаний

Таким образом, расстройка между резонансной частотой колебательной системы и частотой гармонического заполнения входного импульса приводит к немонотонному изменению огибающей сигнала на выходе. Физическое объяснение этого факта таково: выходной сигнал усилителя складывается из вынужденных колебаний, имеющих частоту внешнего источника, и экспоненциально затухающих во времени свободных колебаний с частотой, равной резонансной частоте контура. Пользуясь языком метода комплексных амплитуд, можно сказать, что вектор $\vec{U}_{\text{своб}}$ вращается с разностной частотой $\delta\omega$ относительно вектора $\vec{U}_{\text{вын}}$. Огибающая выходного сигнала, пропорциональная длине суммарного вектора $\vec{U}_{\Sigma}$, оказывается переменной во времени, стремясь в пределе к амплитуде вынужденных колебаний.

Поскольку вектор $\vec{U}_{\Sigma}$ с течением времени изменяет свое положение на плоскости, во время переходного процесса

непостоянной оказывается и мгновенная частота выходного сигнала. Используя формулу (9.57), на основании принципа вычисления мгновенной частоты, изложенного в гл. 5, имеем

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_{\text{рез}} + \frac{d}{dt} \arg \tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \\ &= \omega_{\text{рез}} + \frac{d}{dt} \arctg \left[\frac{\sin \delta \omega t}{\cos \delta \omega t - \exp(-t/\tau_k)} \right].\end{aligned}\quad (9.59)$$

Можно заметить, что при $t \rightarrow \infty$, когда переходный процесс в усилителе практически закончится, частоты сигналов на входе и выходе становятся одинаковыми.

Воздействие фазоманипулированных сигналов на резонансный усилитель. Как уже упоминалось, в современной радиотехнике часто применяются сигналы, представляющие собой отрезки гармонических колебаний, начальная фаза которых изменяется скачками в дискретные моменты времени. Подобные сигналы называют *фазоманипулированными колебаниями*.

Изучая прохождение таких сигналов через частотно-избирательные цепи, рассмотрим модельную задачу об одноконтурном резонансном усилителе, на входе которого действует сигнал со скачкообразным изменением фазы на φ_0 радиан при $t = 0$:

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_{\text{рез}} t, & t < 0, \\ U_m \cos(\omega_{\text{рез}} t + \varphi_0), & t \geq 0. \end{cases}\quad (9.60)$$

Этому сигналу отвечает комплексная огибающая

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_m [\sigma(-t) + e^{j\varphi_0} \sigma(t)].\quad (9.61)$$

Используя метод интеграла Дюамеля, находим комплексную огибающую на выходе:

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_{-\infty}^t [\sigma(-\tau) + e^{j\varphi_0} \sigma(\tau)] e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau.\quad (9.62)$$

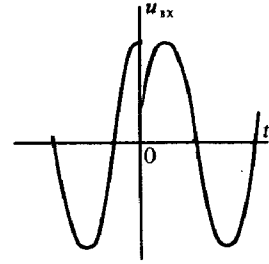
При $t < 0$ из формулы (9.62) следует, что

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau = -K_{\text{рез}} U_m,\quad (9.63)$$

т. е. до момента скачка фазы усилитель находится в стационарном режиме гармонического возбуждения. Если же $t > 0$, то

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\text{вых}}(t) &= \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_{-\infty}^0 e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau - \frac{K_{\text{рез}} U_m e^{j\varphi_0}}{\tau_k} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau = \\ &= -K_{\text{рез}} U_m [e^{-t/\tau_k} + e^{j\varphi_0} (1 - e^{-t/\tau_k})].\end{aligned}\quad (9.64)$$

●
фазовая манипуляция



Если $\varphi_0 = 180^\circ$, то амплитуда выходного колебания вначале плавно уменьшается до нуля, а затем вновь возрастает до первоначального уровня за интервал порядка нескольких постоянных времени контура

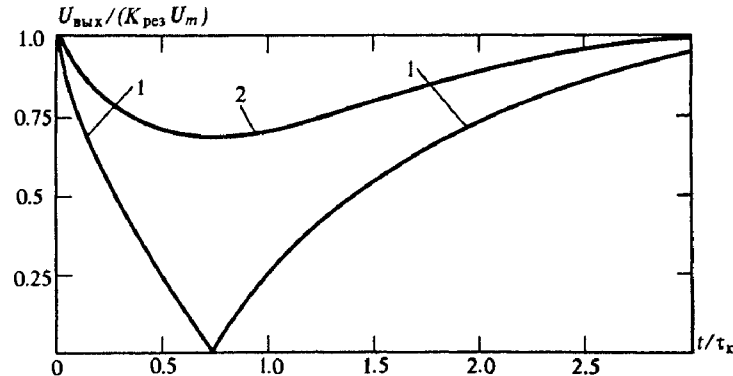


Рис. 9.9. Огибающая сигнала на выходе резонансного усилителя, возбуждаемого фазоманипулированным сигналом:
1 — при $\varphi_0 = 180^\circ$; 2 — при $\varphi_0 = 90^\circ$

Отметим, что при $t = 0$ выражения (9.63) и (9.64) дают одинаковый результат: $\tilde{U}_{\text{вых}}(0) = -K_{\text{рез}} U_m$. Если $t/\tau_k \gg 1$, то $\tilde{U}_{\text{вых}}(t) \approx -K_{\text{рез}} U_m \exp(j\varphi_0)$, т. е. по окончании переходного процесса система переходит в новое стационарное состояние, которое отличается от исходного фазовым сдвигом на φ_0 радиан.

Вычисляя модуль комплексной огибающей, находим выражение для физической огибающей выходного сигнала при $t > 0$:

Берется положительное значение квадратного корня

$$U_{\text{вых}}(t) = K_{\text{рез}} U_m \{ [e^{-t/\tau_k} + (1 - e^{-t/\tau_k}) \cos \varphi_0]^2 + (1 - e^{-t/\tau_k})^2 \sin^2 \varphi_0 \}^{1/2}. \quad (9.65)$$

На практике часто используют сигналы с фазовой манипуляцией на 180° . В этом частном случае

$$U_{\text{вых}}(t) = K_{\text{рез}} U_m |2 \exp(-t/\tau_k) - 1|. \quad (9.66)$$

В момент времени t_0 входной сигнал окончательно «гасит» колебания, существовавшие в контуре до скачка фазы

Здесь амплитуда выходного сигнала становится равной нулю в момент времени t_0 , являющийся корнем уравнения

$$2 \exp(-t_0/\tau_k) - 1 = 0,$$

откуда

$$t_0 = 0.693\tau_k. \quad (9.67)$$

Рис. 9.9 иллюстрирует зависимость физической огибающей выходного сигнала от безразмерного параметра t/τ_k при двух значениях фазового сдвига φ_0 : 180° и 90° .

Для проектирования приемников фазоманипулированных сигналов первостепенный интерес представляет закон изменения мгновенной фазы на выходе усилителя. Записывая выходную комплексную огибающую в форме $\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вых}}(t) \exp[j\varphi_{\text{вых}}(t)]$, из формулы (9.64) имеем следующее выражение мгновенной фазы (рад):

$$\varphi_{\text{вых}}(t) = \pi + \arg [(1 - e^{-t/\tau_k}) \cos \varphi_0 + e^{-t/\tau_k} + j(1 - e^{-t/\tau_k}) \sin \varphi_0]. \quad (9.68)$$

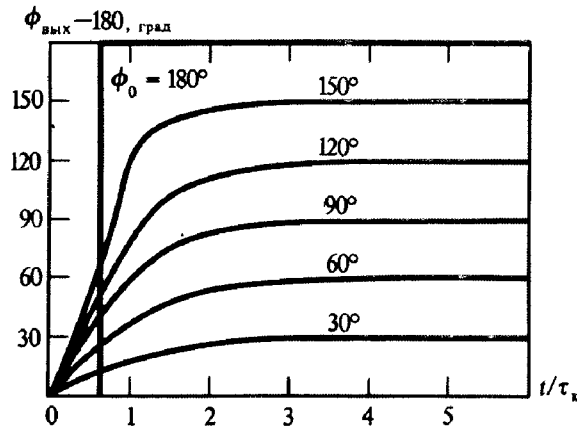


Рис. 9.10. Зависимость мгновенной фазы сигнала на выходе усилителя от безразмерного параметра t/τ_k

Первое слагаемое в правой части дает постоянный фазовый сдвиг, не играющий принципиальной роли. На рис. 9.10 изображены кривые, описывающие зависимость переменной части мгновенной фазы от безразмерного времени t/τ_k .

Случай $\phi_0 = 180^\circ$ является вырожденным: здесь фаза выходного сигнала изменяется скачком в момент времени $t = t_0$ [см. формулу (9.67)]. При прочих значениях ϕ_0 фаза сигнала на выходе изменяется во времени непрерывно.

Воздействие колебания со скачком частоты на резонансную систему. В ряде случаев для передачи сообщений используют сигналы, представляющие собой гармонические колебания с различными частотами. Если частота заполнения изменяется скачком, говорят о *частотной манипуляции* сигнала.

Рассмотрим одноконтурный резонансный усилитель, на вход которого подан сигнал вида

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_{\text{рез}} t, & t < 0, \\ U_m \cos (\omega_{\text{рез}} + \delta\omega) t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Если считать, что опорная частота равна $\omega_{\text{рез}}$,

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_m, & t < 0, \\ U_m \exp(j\delta\omega t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Ясно, что при $t < 0$ усилитель находится в стационарном режиме и $\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}} U_m$ [см. формулу (9.63)]. Исследуя процесс на выходе при $t > 0$, в интеграле Дюамеля (9.47) следует по отдельности учесть вклады от полубесконечного интервала времени $(-\infty, 0)$ и от ограниченного отрезка $[0, t]$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{вых}}(t) &= \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_{-\infty}^0 e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau - \frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_k} \int_0^t e^{j\delta\omega\tau} e^{-(t-\tau)/\tau_k} d\tau = \\ &= -K_{\text{рез}} U_m e^{-t/\tau_k} \left[1 + \int_0^{t/\tau_k} e^{\xi(1+jb)} d\xi \right], \end{aligned} \quad (9.69)$$

Фаза колебаний на выходе усилителя устанавливается за отрезок времени порядка постоянной времени контура

● частотная манипуляция

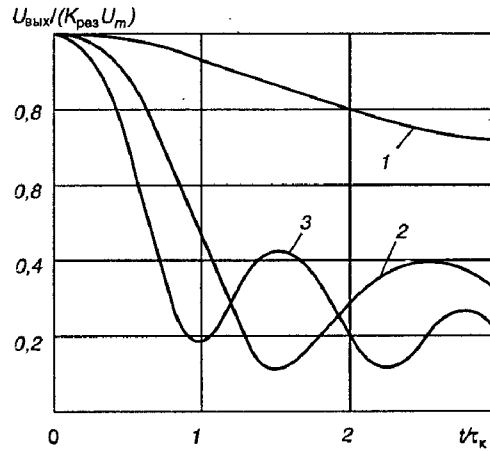


Рис. 9.11. Процесс установления физической огибающей сигнала на выходе усилителя после скачка частоты при различных параметрах $b = \delta\omega\tau_k$:

1 — при $b = 1$; 2 — при $b = 3$; 3 — при $b = 5$

где ξ — формальная переменная интегрирования; $b = \delta\omega\tau_k$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение частотной расстройки $\delta\omega$ к полосе пропускания контура. Интегрируя по ξ , находим, что

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{1 + jb} [e^{jb t/\tau_k} + j b e^{-t/\tau_k}]. \quad (9.70)$$

Следует обратить внимание на то, что огибающая выходного сигнала изменяется во времени в общем случае немонотонно

Отсюда физическая огибающая выходного сигнала при $t > 0$

$$U_{\text{вых}}(t) = |\tilde{U}_{\text{вых}}(t)| = \frac{K_{\text{рез}} U_m}{\sqrt{1 + b^2}} \times \times \{\cos^2(bt/\tau_k) + [\sin(bt/\tau_k) + b \exp(-t/\tau_k)]^2\}^{1/2}. \quad (9.71)$$

Соответствующие графики изображены на рис. 9.11.

Определенный практический интерес представляет характер изменения мгновенной частоты $\omega_{\text{вых}}(t)$ колебаний на выходе резонансного усилителя во время переходного процесса. Здесь следует воспользоваться общей формулой (5.35), которая выражает мгновенную частоту узкополосного сигнала через синфазную и квадратурную амплитуды. В рассматриваемом случае $\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}}(t) + jB_{\text{вых}}(t)$, где, как это следует из (9.70),

$$A_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{1 + b^2} [\cos(bt/\tau_k) + b \sin(bt/\tau_k) + b^2 e^{-t/\tau_k}], \quad (9.72)$$

$$B_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{1 + b^2} [\sin(bt/\tau_k) - b \cos(bt/\tau_k) + b e^{-t/\tau_k}].$$

Проделав несколько громоздкие, но вполне элементарные выкладки, получаем

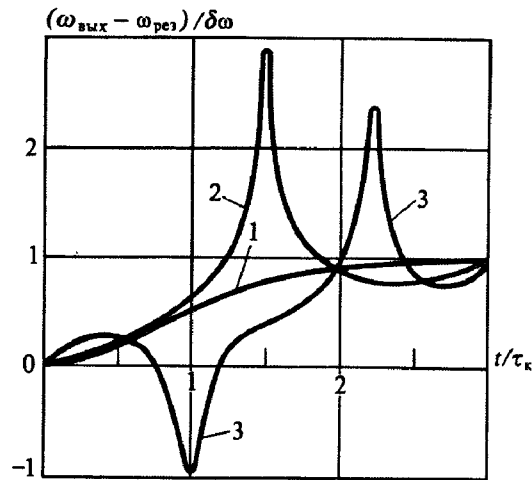


Рис. 9.12. Процесс установления мгновенной частоты на выходе резонансного усилителя:

1 — при $b = 1$; 2 — при $b = 3$; 3 — при $b = 5$

$$\omega_{\text{вых}}(t) = \omega_{\text{рез}} + \frac{B'_{\text{вых}} A_{\text{вых}} - A'_{\text{вых}} B_{\text{вых}}}{A_{\text{вых}}^2 + B_{\text{вых}}^2} = \omega_{\text{рез}} + \delta\omega \times$$

$$\times \frac{1 - e^{-t/\tau_k} \cos(bt/\tau_k) + be^{-t/\tau_k} \sin(bt/\tau_k)}{1 + 2be^{-t/\tau_k} \sin(bt/\tau_k) + b^2 e^{-2t/\tau_k}}. \quad (9.73)$$

На рис. 9.12 представлены три кривые, рассчитанные по этой формуле при различных параметрах $b = \delta\omega\tau_k$. По оси ординат отложена относительная величина мгновенного частотного отклонения.

Если $b = 1$, то рассматриваемая величина с течением времени стремится к установившемуся значению, равному единице, вполне монотонно. При увеличении параметра b переходный процесс приобретает более сложный характер.

Воздействие сигнала с однотоновой угловой модуляцией на одноконтурную резонансную систему. Предположим, что последовательный LCR-контур находится под воздействием источника ЭДС, создающего входной сигнал $u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t)$ с однотоновой ЧМ- или ФМ-модуляцией. Будем считать, что резонансная частота контура $\omega_{\text{рез}}$ и частота несущего колебания ω_0 совпадают. Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе $u_c(t)$. Требуется найти законы изменения во времени физической огибающей $U_{\text{вых}}(t)$ и мгновенной частоты $\omega_{\text{вых}}(t)$ выходного сигнала.

Развитый выше метод НЧ-эквивалента не позволяет решить поставленную задачу. Дело в том, что подстановка комплексной огибающей $\bar{U}_{\text{вх}}(t) = U_m \exp(jm \sin \Omega t)$ в формулу (9.47) приводит к интегралу с переменным верхним пределом. Вычислить такой интеграл не представляется возможным.

Поэтому обратимся непосредственно к дифференциальному уравнению данной цепи, которое, будучи записанным

В некоторые моменты времени частота изменяется весьма резко. Частотное отклонение может даже изменять свой знак, как это видно на примере кривой, соответствующей значению $b = 5$

относительно неизвестного $u_C(t)$, принимает вид

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0 U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t), \quad (9.74)$$

где $\alpha = R/(2L)$ — коэффициент затухания контура.

Перейдем к безразмерному времени $\xi = \omega_0 t$, такому, что $dt = d\xi/\omega_0$, $dt^2 = d\xi^2/\omega_0^2$. Тогда уравнение (9.74) преобразуется следующим образом:

$$\frac{d^2 u_C}{d\xi^2} + \frac{2\alpha}{\omega_0} \frac{du_C}{d\xi} + u_C = U_m \cos[\xi + m \sin(\Omega \xi/\omega_0)]. \quad (9.75)$$

Введем два безразмерных параметра:

$$\varepsilon = 2\alpha/\omega_0, \quad \mu = \Omega/\omega_0. \quad (9.76)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{d\xi^2} + \varepsilon \frac{du_C}{d\xi} + u_C &= U_m \cos(\xi + m \sin \mu \xi) = \\ &= U_m \cos \xi \cos(m \sin \mu \xi) - U_m \sin \xi \sin(m \sin \mu \xi). \end{aligned} \quad (9.77)$$

Для того чтобы найти интересующие нас характеристики выходного колебания, необходимо получить частное решение этого неоднородного дифференциального уравнения в бесконечном интервале $-\infty < \xi < \infty$.

Метод медленно меняющихся амплитуд. С точки зрения радиотехнических приложений основной интерес представляет случай, когда затухание контура мало, т. е. добротность $Q \gg 1$, а значит, параметр $\varepsilon = 1/Q \ll 1$. Из физических соображений ясно, что любые колебания в такой системе, как свободные, так и вынужденные, должны быть квазигармоническими. Поэтому будем искать решение уравнения (9.77) в виде [ср. с формулой (5.25)]

$$u_C(\xi) = A(\xi) \cos \xi - B(\xi) \sin \xi, \quad (9.78)$$

где $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — неизвестные пока синфазная и квадратурная амплитуды, изменяющиеся гораздо медленнее, чем $\cos \xi$ или $\sin \xi$.

Более точно условие медленного изменения амплитуд означает, что

$$A' \sim \varepsilon A; \quad B' \sim \varepsilon B. \quad (9.79)$$

Подставляя выражение (9.78) в уравнение (9.77) и приравнявая коэффициенты при $\sin \xi$ и $\cos \xi$ в обеих частях, получаем систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A(\xi)$ и $B(\xi)$:

$$\begin{aligned} A'' - 2B' + \varepsilon A' - \varepsilon B &= U_m \cos(m \sin \mu \xi), \\ B'' + 2A' - \varepsilon A - \varepsilon B' &= U_m \sin(m \sin \mu \xi). \end{aligned} \quad (9.80)$$

Обратим внимание на то, что здесь слагаемые в левых частях имеют разные порядки малости. Так, например, величины A'' и $\varepsilon A'$ в первом уравнении имеют порядок ε^2 , в то время как B' и εB — порядок ε . Пренебрегая в (9.80) всеми

малыми величинами порядка ε^2 , получаем два укороченных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} 2B' + \varepsilon B &= -U_m \cos(m \sin \mu \xi), \\ 2A' + \varepsilon A &= U_m \sin(m \sin \mu \xi). \end{aligned} \quad (9.81)$$

Очевидно, эти уравнения 1-го порядка значительно проще, чем строгие исходные уравнения (9.80). К тому же здесь каждой неизвестной функции отвечает свое собственное уравнение.

Такой подход к решению задачи о колебаниях в системе с малым затуханием является частным случаем *метода медленно меняющихся амплитуд*. Этот метод предложил в 20-х годах известный голландский радиофизик Ван-дер-Поль.

Сделаем еще одно допущение: будем считать, что $m \ll 1$, т. е. глубина угловой модуляции на входе невелика. Тогда, поступая так же, как в гл. 4, получаем упрощенную форму укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} 2B' + \varepsilon B &= -U_m, \\ 2A' + \varepsilon A &= mU_m \sin \mu \xi. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Стационарным решением первого уравнения (9.82) служит, очевидно, постоянная величина

$$B = -U_m/\varepsilon = -QU_m. \quad (9.83)$$

Второе уравнение (9.82) можно решить элементарной подстановкой $A(\xi) = a \sin \mu \xi + b \cos \mu \xi$. Найдя неизвестные постоянные a и b , получаем

$$A(\xi) = mU_m (\varepsilon \sin \mu \xi - 2\mu \cos \mu \xi) / (4\mu^2 + \varepsilon^2). \quad (9.84)$$

Огибающая и мгновенная частота выходного сигнала. На основании формулы (9.78) находим физическую огибающую выходного сигнала как функцию времени:

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} = \\ &= \frac{U_m}{\varepsilon} \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2 (\varepsilon \sin \Omega t - 2\mu \cos \Omega t)^2 / (4\mu^2 + \varepsilon^2)^2}. \end{aligned}$$

Данное выражение можно существенно упростить, приняв во внимание, что по предположению $m \ll 1$. Тогда, ограничившись двумя членами разложения радикала в степенной ряд, получим приближенное выражение огибающей

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) \approx \frac{U_m}{\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{m^2 \varepsilon^2}{(4\mu^2 + \varepsilon^2)^2} \left[\mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \left(\mu^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos 2\Omega t - 4\mu \sin 2\Omega t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Из этой формулы следует, что при воздействии на колебательный контур сигнала с угловой модуляцией выходное колебание оказывается промодулированным по амплитуде; низкая частота модуляции амплитуды в два раза превышает частоту однотоновой угловой модуляции на входе.

● укороченные дифференциальные уравнения

■ метод медленно меняющихся амплитуд

Полученное решение укороченных дифференциальных уравнений дает возможность ответить на основной вопрос о влиянии колебательной системы на мгновенную частоту выходного сигнала. Учтем, что синфазная амплитуда A мала по сравнению с неизменной во времени квадратурной амплитудой B [см. формулы (9.83), (9.84)]. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_{\text{вых}}(t) &= \omega_0 + \frac{B'A - A'B}{A^2 + B^2} \approx \omega_0 - \frac{A'}{B} = \\ &= \omega_0 - \frac{m\Omega\varepsilon}{4\mu^2 + \varepsilon^2} (\varepsilon \cos \Omega t + 2\mu \sin \Omega t) = \\ &= \omega_0 - \frac{m\Omega}{\sqrt{1 + 4\mu^2/\varepsilon^2}} \sin(\Omega t + \Phi),\end{aligned}\quad (9.86)$$

где $\Phi = \operatorname{arctg}(2\mu/\varepsilon)$.

Итак, за счет инерционности контура наблюдается уменьшение девиации частоты на выходе по сравнению с девиацией на входе:

▲
решите задачу 10

$$\Delta\omega_{\text{вых}} = \frac{m\Omega}{\sqrt{1 + 4\mu^2/\varepsilon^2}} = \frac{\Delta\omega_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau_k^2}},\quad (9.87)$$

где $\tau_k = 2Q/\omega_0$ — постоянная времени контура.

К тому же функция, описывающая закон угловой модуляции выходного сигнала, оказывается смещенной во времени относительно входной модулирующей функции.

Роль фазовой характеристики цепи. Заканчивая изучение свойств и характеристик линейных узкополосных цепей, возбуждаемых детерминированными сигналами, рассмотрим вопрос о том, какое влияние на выходной сигнал оказывает ФЧХ системы.

Чтобы изучить принципиальную сторону явлений, обратимся к случаю, когда на вход системы подается сумма двух гармонических сигналов единичной амплитуды с частотами ω_1 и ω_2 , относительная разность между которыми мала: $|\omega_1 - \omega_2|/\omega_1 \ll 1$.

Аналитическая форма записи входного сигнала такова:

$$\begin{aligned}u_{\text{вх}}(t) &= \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = \\ &= 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).\end{aligned}\quad (9.88)$$

●
узкополосные группы

Энергия суммарного процесса локализуется во времени в виде отдельных «порций», носящих название *узкополосных* или *квазигармонических групп*. Чем меньше частотный промежуток между составляющими, тем больше степень растянутости этих групп во времени. Низкочастотный сомножитель в формуле (9.88) является огибающей группы. Узкополосную группу можно рассматривать как простейший элемент, из которых складывается колебание с более сложным спектральным составом.

Пусть сигнал вида (9.88) проходит через линейную стационарную систему с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| \exp[j\varphi_K(\omega)]. \quad (9.89)$$

Предположим, что в пределах частотного интервала (ω_1, ω_2) модуль коэффициента передачи можно считать постоянной величиной K_0 . Тогда

$$u_{\text{вых}}(t) \approx K_0 \{ \cos[\omega_1 t + \varphi_K(\omega_1)] + \cos[\omega_2 t + \varphi_K(\omega_2)] \}. \quad (9.90)$$

ФЧХ системы можно разложить в ряд Тейлора относительно точки ω_1 :

$$\varphi_K(\omega_2) = \varphi_K(\omega_1) + \frac{d\varphi_K}{d\omega}(\omega_2 - \omega_1) + \dots$$

Удерживая в этом разложении только член, линейный относительно $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, будем иметь

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &\approx K_0 \{ \cos[\omega_1 t + \varphi_K(\omega_1)] + \\ &+ \cos\left[\omega_1 t + \Delta\omega t + \varphi_K(\omega_1) + \frac{d\varphi_K}{d\omega}\Delta\omega\right] \} = \\ &= 2K_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t + \frac{d\varphi_K}{d\omega}\right)\right] \times \\ &\times \cos\left[\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \varphi_K(\omega_1) + \frac{1}{2}\frac{d\varphi_K}{d\omega}\Delta\omega\right]. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно видно, что огибающая квазигармонической группы на выходе системы смещена во времени относительно огибающей входного сигнала на величину, равную по абсолютному значению $d\varphi_K/d\omega$. Если эта производная отрицательна, то огибающая выходного сигнала запаздывает на время

$$t_{\text{гр}} = - \frac{d\varphi_K}{d\omega}, \quad (9.91)$$

называемое *групповым временем запаздывания*. Производная вычисляется в некоторой произвольной точке частотного интервала, где сконцентрирована энергия узкополосного сигнала.

Групповое время запаздывания служит удобной характеристикой для оценки задержки узкополосных сигналов в инерционных линейных цепях.

▲ решите задачу 11

● групповое время запаздывания

Пример 9.7. Прямоугольный радиоимпульс с длительностью $\tau_n = 20$ мкс и с частотой заполнения $f_0 = 10$ МГц подается на вход одноконтурного резонансного усилителя, настроенного на частоту заполнения импульса. Эквивалентная добротность колебательной системы $Q_{\text{ж}} = 40$. Оценить время запаздывания выходного импульса относительно колебания на входе.

Спектр входного сигнала сосредоточен в интервале частот $(f_0 - 1/\tau_n, f_0 + 1/\tau_n)$, т. е. в промежутке от 9.950 МГц до 10.050 МГц (ширина спектра оценивается по нулям первого лепестка спектраль-

ной диаграммы). Полоса пропускания усилителя $P_{0.707} = f_{\text{рез}}/Q_{\text{эк}} = 250$ кГц. Приближенно можно полагать, что входной импульс в данном случае является узкополосным сигналом, задержку которого можно оценить по формуле (9.91). Используя уравнение ФЧХ $\varphi_K(\omega) = -\arctg[(\omega - \omega_{\text{рез}})\tau_K]$, находим

$$t_{\text{гр}}|_{\omega = \omega_{\text{рез}}} = \tau_K = 2Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{рез}} = 1.27 \text{ мкс.}$$

Результаты

- ◇◇ Для узкополосных частотно-избирательных систем характерно то, что отношение ширины полосы пропускания к центральной частоте этого интервала мало. Их применяют для частотной фильтрации полезных сигналов, имеющих ограниченный спектр.
- ◇◇ Физически, частотно-избирательные цепи могут быть реализованы в виде высокодобротных колебательных систем, как одноконтурных, так и многоконтурных.
- ◇◇ Входной сигнал является широкополосным по отношению к частотно-избирательной системе, если его спектральную плотность можно считать постоянной в пределах полосы пропускания.
- ◇◇ Низкочастотный эквивалент узкополосной цепи — воображаемая система, частотный коэффициент передачи которой получен путем переноса частотной характеристики исходной цепи в окрестность нулевой частоты.
- ◇◇ Импульсная характеристика узкополосной цепи представляет собой узкополосное колебание, мгновенная частота которого близка к центральной частоте полосы пропускания.
- ◇◇ Комплексная огибающая импульсной характеристики узкополосной цепи пропорциональна импульсной характеристике низкочастотного эквивалента.
- ◇◇ С помощью частотно-избирательных цепей, измеряя их отклики на произвольный широкополосный сигнал, можно экспериментально исследовать зависимость модуля спектральной плотности сигнала от частоты (аппаратурный спектральный анализ).
- ◇◇ Вместо полного решения задачи о воздействии узкополосного сигнала на частотно-избирательную цепь достаточно решить более простую задачу о прохождении комплексной огибающей входного сигнала через низкочастотный эквивалент системы.
- ◇◇ В результате воздействия узкополосной цепи на АМ-сигнал при условии, что центральная частота полосы пропускания и частота несущего колебания совпадают, происходит снижение глубины модуляции.
- ◇◇ При прохождении импульса включения гармонического сигнала через настроенную одноконтурную систему огибающая выходного процесса устанавливается до уровня 0.9 от стационарного значения за время $t_{\text{уст}} = 4.606Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{рез}}$.
- ◇◇ Расстройка между резонансной частотой контура и частотой гармонического заполнения импульса включения приводит к немонокотонному изменению во времени огибающей выходного сигнала. Мгновенная частота на выходе также оказывается непостоянной.
- ◇◇ Прохождение фазоманипулированных и частотно-манипулированных сигналов через узкополосный, резонансный усилитель сопровождается изменением во времени физической огибающей, полной фазы и мгновенной частоты выходного сигнала.
- ◇◇ Задачу о воздействии сигналов с непрерывной ЧМ или ФМ на узкополосные цепи удастся решить методом медленно меняющихся амплитуд при условии,

что затухание колебательных контуров мало и индекс угловой модуляции невелик.

- ◇◇ Групповое время запаздывания узкополосных сигналов с точностью до знака равно значению первой производной ФЧХ на центральной частоте спектра сигнала.

Вопросы

1. Как принято определять ширину полосы пропускания узкополосных радиотехнических цепей? На сколько децибел ослабляется сигнал с частотой, соответствующей границе полосы пропускания?
2. При каком условии АЧХ одноконтурной резонансной системы оказывается симметричной относительно резонансной частоты?
3. Каков типичный порядок величин L , C , $R_{\text{рез}}$ для параллельных колебательных контуров с резонансной частотой в несколько десятков мегагерц?
4. Что такое абсолютная и относительная расстройки?
5. Изобразите характерную картину расположения на комплексной плоскости полюсов передаточной функции узкополосной системы. Можно ли по ней определить добротность системы?
6. Как осуществляется неполное включение колебательного контура во внешнюю цепь?
7. В чем проявляется влияние внутреннего сопротивления электронного прибора на характеристики резонансного усилителя малых колебаний? Как можно ослабить возникающий здесь вредный эффект?
8. Каково преимущество усилителя со связанными контурами по сравнению с одноконтурным усилителем? Какую роль в формировании АЧХ усилителя играет фактор связи?
9. Перечислите факторы, определяющие предельную верхнюю частоту, на которой резонансный усилитель еще оказывается работоспособным.
10. Какой смысл (абсолютный или относительный) вкладывается в понятие «широкополосный сигнал»?
11. Обязательно ли низкочастотный эквивалент узкополосной системы должен быть физически реализуемой цепью?
12. Изобразите примерный график импульсной характеристики какой-либо узкополосной системы. Обратите внимание на условия физической реализуемости.
13. Что такое постоянная времени колебательного контура?
14. Какова разница между импульсными характеристиками одноконтурного и двухконтурного усилителей?
15. Сформулируйте физический смысл спектрального разложения сигнала.
16. Как следует выбирать полосу пропускания резонансного усилителя для удовлетворительного в техническом отношении пропускания АМ-сигналов? В чем заключена противоречивость требований к форме АЧХ частотных фильтров?
17. Чем определяется время установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе?
18. Дайте физическую трактовку процесса установления колебаний в одноконтурной резонансной системе, возбуждаемой со стороны входа импульсом включения гармонической ЭДС. Какова здесь роль собственных колебаний контура? Почему в начальный момент времени выходной сигнал мал?
19. Проведите такой же анализ применительно к фазоманипулированному входному сигналу. Почему во время переходного процесса частота сигнала на выходе непостоянна?
20. В чем сущность метода медленно меняющихся амплитуд?
21. Что такое групповое время запаздывания? Какова должна быть ФЧХ системы для того, чтобы проходящий через нее сигнал испытывал минимальные искажения?

Задачи

1. При каком значении обобщенной расстройки крутизна АЧХ резонансного контура максимальна?
2. Параллельный колебательный контур на резонансной частоте 20 МГц имеет активное сопротивление 30 кОм, а на частоте 21 МГц модуль его сопротивления равен 18 кОм. Рассчитайте параметры контура.
3. Найдите частотный коэффициент передачи и импульсную характеристику низкочастотного эквивалента идеального полосового фильтра [см. формулу (9.16)].

4. Решите предыдущую задачу применительно к гауссовому радиофильтру [см. формулу (9.17)].

5. В схеме резонансного усилителя малых колебаний (см. рис. 9.2) коэффициент включения контура в коллекторную цепь транзистора может изменяться путем перемещения отвода по виткам катушки. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе контура от коэффициента включения.

6. Гауссов радиофильтр [см. формулу (9.17)] с параметрами $K_0 = 10$, $\omega_0 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $b = 5 \cdot 10^{-10} \text{ с}^2$ возбуждается входным сигналом, имеющим вид прямоугольного видеопульса с амплитудой 25 В и длительностью 0.2 мкс. Покажите, что этот сигнал по отношению к данному фильтру можно считать широкополосным. Найдите сигнал на выходе системы.

7. На входе одноконтурного резонансного усилителя с параметрами $f_{\text{рез}} = 6 \text{ МГц}$, $Q_{\text{эк}} = 40$, $K_{\text{рез}} = 35$ действует экспоненциальный видеопульс напряжения $u_{\text{вх}}(t) = 0.3 \exp \times (-4 \cdot 10^7 t) \text{ В}$. Найдите сигнал на выходе усилителя.

8. На входе последовательного колебательного контура включен источник ЭДС

$u_{\text{вх}}(t) = 5(1 + 0.8 \cos 4 \cdot 10^3 t) \cos 10^6 t$. Контур настроен в резонанс с частотой несущего колебания. Определите добротность контура, при которой коэффициент модуляции тока равен 0.4.

9. Исследуйте искажения огибающей прямоугольных радиопульсов при прохождении их через одноконтурный резонансный усилитель с эквивалентной добротностью $Q_{\text{эк}} = 60$. Несущая частота входного сигнала, равная 2 МГц, совпадает с резонансной частотой контура.

10. Определите закон изменения во времени мгновенной частоты сигнала на выходе одноконтурного резонансного усилителя, возбуждаемого сигналом $u_{\text{вх}}(t) = 10^{-3} \times \cos(2\pi \cdot 10^6 t + 0.1 \cos 2\pi \cdot 10^3 t)$, В. Контур усилителя настроен на несущую частоту входного колебания и имеет постоянную времени, равную 10^{-5} с .

11. Резонансный усилитель содержит два контура, настроенных на одинаковую частоту 12 МГц. Добротности контуров первого и второго звеньев равны 40 и 50 соответственно. Определите групповое время запаздывания узкополосного сигнала с центральной частотой 12.2 МГц.

Более сложные решения

12. Решите задачу о воздействии однонального АМ-сигнала на резонансный усилитель в условиях, когда несущая частота сигнала ω_0 не совпадает с резонансной частотой контура $\omega_{\text{рез}}$. Покажите, что расстройка между этими частотами приводит к паразитной угловой модуляции выходного сигнала. Считая относительную расстройку $|\omega_0 - \omega_{\text{рез}}|/\omega_0$ малой, выведите формулу для расчета параметров паразитной модуляции.

13. Многоконтурный резонансный усилитель состоит из идентичных звеньев. Выведите формулу, называемую в радиотехнике формулой Агеева — Кобзарева, определяющую время установления выходных колебаний в данной системе в зависимости от числа звеньев N , постоянной времени одного

контура τ_k и резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$. Входной сигнал — импульс включения гармонической ЭДС с частотой $\omega_0 = \omega_{\text{рез}}$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь законом соответствия изображений и оригиналов вида

$$\frac{1}{p(p+a)^N} \leftrightarrow \frac{1}{a^N} \left[1 - e^{-at} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(at)^m}{m!} \right].$$

14. На основании формулы (9.86) получите следующий член разложения мгновенной частоты выходного сигнала по степеням малого параметра ϵ . Докажите, что очередное слагаемое ряда изменяется во времени с утроенной частотой модуляции.

Глава 10

Воздействие случайных сигналов на линейные стационарные цепи

В гл. 8, 9 излагались методы, позволяющие решать задачи о прохождении детерминированных сигналов через линейные стационарные системы. Последним шагом, завершающим теорию линейных систем, является перенесение этих методов в статистическую область.

Предположим, что на входе линейной стационарной системы присутствует колебание $x(t)$, представляющее собой некоторую реализацию случайного процесса $X(t)$. Если эта реализация указана заранее, то никакой новой задачи не возникает — к сигналу $x(t)$ следует относиться как к детерминированной, хотя, возможно, очень сложно описываемой функции. Зная математическую модель системы, которая определяется, например, частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$, можно в принципе всегда найти выходную реакцию $y(t)$.

Однако специфика статистической теории состоит в том, что столь полные сведения о входном сигнале недоступны — вместо детерминированного описания входного сигнала мы располагаем лишь сведениями об усредненных вероятностных характеристиках случайного процесса $X(t)$. Такими характеристиками могут явиться одномерная и многомерные плотности вероятности, а также различные моментные функции, прежде всего математическое ожидание и функция корреляции. Наша цель — исследовать ту связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$, которая может быть найдена на основе математической модели системы.

■
статистический
подход к проблеме
преобразования си-
гналов в системе

10.1. Спектральный метод анализа воздействия случайных сигналов на линейные стационарные цепи

С самого начала введем ограничение — будем рассматривать лишь входные случайные процессы $X(t)$, стационарные в широком смысле. Как известно, это означает, что математическое ожидание $\overline{x(t)}$ мгновенных значений реализаций постоянно во времени, в то время как функция корреляции $R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} - (\bar{x})^2$ зависит лишь от величины $|\tau| = |t_1 - t_2|$ — абсолютного сдвига между точками на оси времени, в которых производится измерение мгновенных значений.

В дальнейшем всюду будем полагать $\overline{x(t)} = 0$. Это предположение не ограничивает общности рассуждений и выводов. Благодаря свойству линейности рассматриваемых цепей задача о влиянии постоянной составляющей входного сигнала на выходной отклик системы может быть решена

**О возможности
спектрального
представления
реализаций случай-
ного процесса см.
в § 7.1**

независимо и, что важно, без привлечения статистических методов.

Среднее значение выходного сигнала. Рассмотрим отдельно взятую реализацию входного сигнала $x(t)$ и представим ее в виде интеграла Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выходной сигнал системы будет найден, если известен ее частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.1)$$

**Усреднение про-
изводится по ан-
самблю реализаций**

Переходя от отдельной реализации к статистическому ансамблю входных сигналов, следует считать, что $S_x(\omega)$ — случайная функция, причем (см. гл. 7) предположение о стационарности процесса $X(t)$ накладывает условие: среднее значение спектральной плотности $\overline{S_x(\omega)} = 0$. Поэтому, выполняя статистическое усреднение в обеих частях выражения (10.1), имеем

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega)} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 0. \quad (10.2)$$

**Сдвигу сигнала во
времени отвечает
умножение спек-
тральной плотности
на экспоненциаль-
ную функцию с
мнимым показате-
лем**

Функция корреляции и спектральная плотность мощности случайного сигнала на выходе системы. Чтобы вычислить функцию корреляции $R_y(\tau)$, необходимо, помимо спектрального разложения (10.1), располагать значением выходного сигнала в момент времени $t + \tau$. Это значение можно получить на основании известных свойств преобразования Фурье:

$$y(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega') K(j\omega') e^{j\omega'\tau} e^{j\omega't} d\omega'. \quad (10.3)$$

Небольшая (и не принципиальная) деталь, относящаяся к технике вычислений: функция $y(t)$ вещественна, поэтому формула (10.3) не изменится, если в ее правой части перейти к комплексно-сопряженным величинам:

$$y(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega') K^*(j\omega') e^{-j\omega'\tau} e^{-j\omega't} d\omega'. \quad (10.4)$$

Функцию корреляции выходного сигнала найдем, перемножая сигналы, определенные равенствами (10.1) и (10.4),

а затем проводя статистическое усреднение:

$$R_y(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} K(j\omega) K^*(j\omega') \times \\ \times e^{-j\omega'\tau} e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'. \quad (10.5)$$

На первый взгляд, анализ этой формулы может показаться безнадежно сложным. Но следует иметь в виду, что рассматриваемый входной случайный процесс стационарен, поэтому (см. гл. 7) случайные спектральные плотности его отдельных реализаций дельта-коррелированы, т. е.

$$\overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} = 2\pi W_x(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (10.6)$$

где $W_x(\omega)$ — спектр мощности стационарного случайного процесса $X(t)$.

Эта особенность спектра входного сигнала позволяет выяснить очень простой смысл формулы (10.5):

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega,$$

или, в равной мере,

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

(10.7)

Формула (10.7), по сути дела, содержит полное решение поставленной задачи в рамках корреляционной теории: спектр мощности выходного случайного сигнала связан с аналогичным спектром сигнала на входе соотношением

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) |K(j\omega)|^2. \quad (10.8)$$

В прикладных задачах часто приходится иметь дело с односторонними спектрами $N_x(f)$ и $N_y(f)$, которые определены только при положительных частотах f , измеряемых в герцах. Очевидно, что

$$N_y(f) = N_x(f) |K(j2\pi f)|^2, \quad (10.9)$$

поэтому дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \int_0^{\infty} N_x(f) |K(j2\pi f)|^2 df \quad (10.10)$$

является результатом суммирования вкладов от спектра мощности входного сигнала, умноженного на зависящий от частоты квадрат модуля коэффициента передачи, т. е. частотный коэффициент передачи мощности.

Техника решения конкретных задач из рассматриваемого здесь круга хорошо известна — это всевозможные приемы

**Используется
фильтрующее
свойство дельта-
функции**

вычисления интегралов Фурье. Поэтому в нижеследующих примерах внимание будет сосредоточено не столько на математической стороне дела, сколько на обсуждении физических особенностей процессов.

Пример 10.1. Динамическая система 1-го порядка, принципиальная схема которой изображается в виде интегрирующей RC-цепи, возбуждена со стороны входа источником шумовой ЭДС с постоянной на всех частотах спектральной плотности мощности W_0 ($\text{В}^2 \cdot \text{с}$). Определить дисперсию и функцию корреляции выходного напряжения $y(t)$.

Вычислим коэффициент передачи мощности для данной цепи:

$$|K(j\omega)|^2 = 1/[1 + \omega^2(RC)^2].$$

Далее по формуле (10.7), положив $\tau = 0$, определим дисперсию шума на выходе:

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = \frac{W_0}{2RC}. \quad (10.11)$$

Функция корреляции выходного сигнала

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2}. \quad (10.12)$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = 2 \int_0^\infty \frac{\cos \omega\tau d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2}.$$

Последний интеграл является табличным [15], поэтому, воспользовавшись готовым результатом, получаем

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{2RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right). \quad (10.13)$$

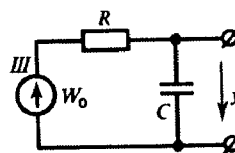
Итак, возбуждая интегрирующую RC-цепь белым шумом, получаем на выходе случайный процесс с функцией корреляции экспоненциального типа.

Существенно, что RC-цепь, обладая инерционностью, выполняет известное «упорядочение»: если входной сигнал, будучи белым шумом, абсолютно непрогнозируем, то выходной сигнал оказывается сглаженным; его интервал корреляции имеет порядок постоянной времени цепи.

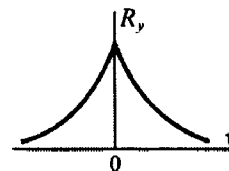
Пример 10.2. Воздействие белого шума на одноконтурный резонансный усилитель.

Предположим, что источник ЭДС вида белого шума с односторонним спектром мощности N_0 ($\text{В}^2/\text{Гц}$) возбуждает вход резонансного усилителя малых колебаний. Частотный коэффициент передачи данной системы

$$K(j2\pi f) = \frac{-K_{\text{рез}}}{1 + j2\pi(f - f_{\text{рез}})\tau_k};$$



решите задачи
1 и 2



Знак функции корреляции неизменен. Это означает, что выходной сигнал не является квазипериодическим

коэффициент передачи мощности

$$|K(j2\pi f)|^2 = \frac{K_{\text{рез}}^2}{1 + 4\pi^2(f - f_{\text{рез}})^2 \tau_k^2}.$$

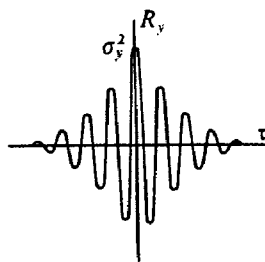
Расчет дисперсии проводится по формуле (10.10):

$$\sigma_y^2 = N_0 K_{\text{рез}}^2 \int_0^\infty \frac{df}{1 + 4\pi^2(f - f_{\text{рез}})^2 \tau_k^2}.$$

Введем переменную $\eta = f - f_{\text{рез}}$ и положим колебательный контур усилителя столь добротным, что коэффициент передачи при $f = 0$ можно считать нулевым. Тогда

$$\sigma_y^2 = N_0 K_{\text{рез}}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{1 + 4\pi^2 \eta^2 \tau_k^2} = \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\tau_k}. \quad (10.14)$$

Наконец, функция корреляции выходного сигнала



$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau d\omega}{1 + (\omega - \omega_{\text{рез}})^2 \tau_k^2} \approx \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\Omega + \omega_{\text{рез}})\tau d\Omega}{1 + \Omega^2 \tau_k^2} = \\ &= \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \Omega \tau d\Omega}{1 + \Omega^2 \tau_k^2} \right] \cos \omega_{\text{рез}} \tau = \\ &= \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\tau_k} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_k}\right) \cos \omega_{\text{рез}} \tau. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Значение функции корреляции в нуле равно дисперсии выходного сигнала

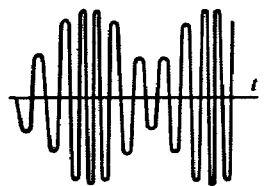
$$R_y(\tau) = \sigma_y^2 \rho(\tau) \cos \omega_{\text{рез}} \tau, \quad (10.16)$$

характерный для узкополосного случайного процесса, поскольку огибающая $\rho(\tau) = \exp(-|\tau|/\tau_k)$ является медленной функцией по сравнению с высокочастотным заполнением.

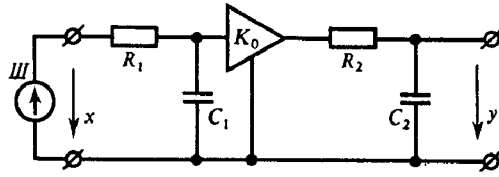
Любая реализация случайного сигнала на выходе узкополосного усилителя представляет собой квазигармоническое колебание со случайными огибающей и мгновенной частотой; в среднем частота заполнения равна резонансной частоте колебательной системы. Такое свойство выходного сигнала легко объяснить, заметив, что этот сигнал является результатом суммирования огромного числа элементарных откликов, каждый из которых пропорционален импульсной характеристике системы (принцип интеграла Дюамеля).

Для того чтобы получить представление о порядке величин, с которыми имеет дело статистическая радиотехника, оценим дисперсию шума на выходе резонансного усилителя при следующих исходных данных: $N_0 = 10^{-16}$ В²/Гц, $K_{\text{рез}} = 30$, $f_{\text{рез}} = 1.59 \cdot 10^7$ Гц, $Q_{\text{эк}} = 60$. Постоянная времени контура $\tau_k = 2Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{рез}} = 1.2$ мкс, поэтому на основании формулы (10.14) дисперсия $\sigma_y^2 = 10^{-16} \cdot 900 / (2.4 \cdot 10^{-6}) = 3.75 \cdot 10^{-8}$ В²; эффективное напряжение шума, равное квадратному корню из дисперсии, составит 194 мкВ.

Пример 10.3. Цепь образована двумя RC-звеньями, между которыми включен идеальный усилитель с коэффициентом усиления K_0 :



Типичная реализация случайного сигнала на выходе резонансного усилителя



На входе цепи включен источник ЭДС вида белого шума с известной спектральной плотностью мощности W_0 ($B^2 \cdot c$). Вычислить функцию корреляции выходного напряжения.

Коэффициент передачи мощности

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{K_0^2}{(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)}.$$

В соответствии с (10.7) функция корреляции выходного напряжения

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega\tau) d\omega}{(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)}. \quad (10.17)$$

Целесообразно воспользоваться теорией вычетов, повторив этот же путь, который был проделан в гл. 8 при анализе импульсной характеристики RC -цепи. Подынтегральная функция в (10.17) имеет четыре простых полюса с координатами $\omega_{1,2} = \pm j/\tau_1$, $\omega_{3,4} = \pm j/\tau_2$.

Будем вычислять функцию $R_y(\tau)$ при $\tau > 0$, замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Вычет подынтегральной функции в точке ω_1

$$\begin{aligned} \text{res}|_{\omega=\omega_1} &= \frac{\exp(j\omega\tau)}{\frac{d}{d\omega}[(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)]} \Big|_{\omega=\omega_1} = \\ &= \frac{\tau_1 \exp(-\tau/\tau_1)}{2j(\tau_1^2 - \tau_2^2)}. \end{aligned}$$

Аналогично находят вычет в точке $\omega = \omega_3$, лежащей внутри контура интегрирования:

$$\text{res}|_{\omega=\omega_3} = \frac{-\tau_2 \exp(-\tau/\tau_2)}{2j(\tau_1^2 - \tau_2^2)}.$$

Отсюда, применив теорему Коши, без труда находим, что при $\tau > 0$

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1^2 - \tau_2^2)} (\tau_1 e^{-\tau/\tau_1} - \tau_2 e^{-\tau/\tau_2}). \quad (10.18)$$

Функция корреляции при $\tau < 0$ получится из этой же формулы при замене τ на $-\tau$. Это вытекает из свойства четности функции корреляции, однако результат может быть подтвержден прямым расчетом.

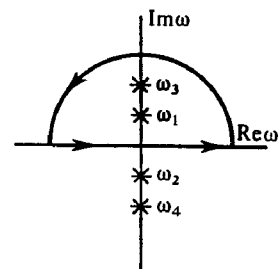
Итак,

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1^2 - \tau_2^2)} (\tau_1 e^{-|\tau|/\tau_1} - \tau_2 e^{-|\tau|/\tau_2}). \quad (10.19)$$

Дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1 + \tau_2)}. \quad (10.20)$$

▲
решите задачу 4



При $\tau < 0$ следует замкнуть путь интегрирования дугой бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости комплексной частоты ω

▲
решите задачу 6

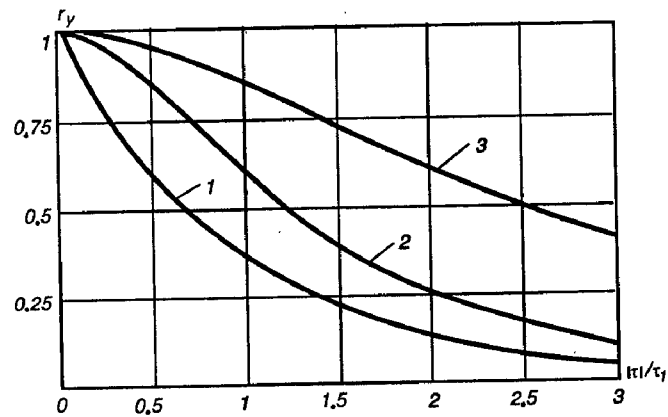
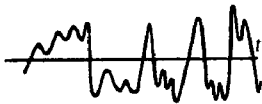


Рис. 10.1. Нормированная функция корреляции случайного процесса на выходе системы из двух RC-цепей:

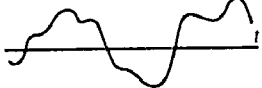
1 — при $\tau_2 = \tau_1/2$; 2 — при $\tau_1 = \tau_2$

поэтому нормированная функция корреляции выходного случайного процесса

$$r_y(\tau) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-|\tau|/\tau_1} - \tau_2 e^{-|\tau|/\tau_2}). \quad (10.21)$$



Белый шум, преобразованный одной



и двумя последовательно включенными RC-цепями

На рис. 10.1 изображены результаты расчетов по формуле (10.21) при двух различных значениях отношения τ_1/τ_2 .

На этом же рисунке для сравнения представлена кривая, отображающая функцию $r_y(\tau)$ на выходе одиночной интегрирующей RC-цепи с постоянной времени τ_1 . Интересно отметить не только рост интервала корреляции, вызванный добавлением второго инерционного звена, но также изменение характера функции $r_y(\tau)$ двухзвенного фильтра в окрестности точки $\tau = 0$. Существование второй производной функции корреляции в этой точке обеспечивает дифференцируемость выходного случайного процесса (см. гл. 7). Физически дифференцируемость означает гладкость реализаций сигнала, прошедшего две каскадно включенные RC-цепи.

Прохождение случайных сигналов с широким спектром через узкополосные цепи. Шумовая полоса. Часто приходится рассматривать воздействие на линейные частотно-избирательные цепи широкополосных случайных сигналов, образованных, например, хаотической последовательностью коротких импульсов. В этом случае если эффективная ширина спектра входного случайного процесса значительно превышает ширину полосы пропускания системы, то реальный случайный процесс можно заменить эквивалентным ему белым шумом с односторонним спектром мощности $N_0 = N_x(f_0)$, где f_0 — некоторая точка в пределах полосы пропускания цепи.

Формула (10.10), определяющая дисперсию выходного сигнала, в этом случае упростится:

$$\sigma_y^2 = N_0 \int_0^\infty |K(j2\pi f)|^2 df. \quad (10.22)$$

■ замена широкополосного случайного процесса эквивалентным белым шумом

шумовая полоса пропускания

В инженерных расчетах линейную частотно-избирательную цепь, находящуюся под воздействием широкополосного случайного сигнала, удобно характеризовать шумовой полосой пропускания $\Pi_{\text{ш}}$ (Гц). Она определяется как полоса пропускания идеального полосового фильтра с вещественным коэффициентом передачи K_{max} , равным максимуму модуля коэффициента передачи реальной цепи; при возбуждении идеальной и реальной систем белым шумом со спектром мощности N_0 дисперсии шумовых сигналов на выходах обеих цепей должны совпадать:

$$N_0 \int_0^{\infty} |K(j2\pi f)|^2 df = N_0 K_{\text{max}}^2 \Pi_{\text{ш}}. \quad (10.23)$$

Отсюда

решите задачу 8

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{K_{\text{max}}^2} \int_0^{\infty} |K(j2\pi f)|^2 df. \quad (10.24)$$

Например, для интегрирующей RC-цепи

$$K_{\text{max}} = 1, |K(j2\pi f)|^2 = 1/[1 + (2\pi fRC)^2],$$

поэтому шумовая полоса пропускания

$$\Pi_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (2\pi fRC)^2} = \frac{1}{4RC}. \quad (10.25)$$

Заметим, что для данной системы модуль частотного коэффициента передачи падает в $\sqrt{2}$ раз по отношению к максимальному значению при $f = 0$ на частоте $f_{0.707} = 1/(2\pi RC)$. Поэтому шумовая полоса пропускания оказывается шире полосы $\Pi_{0.707}$:

$$\Pi_{\text{ш}}/\Pi_{0.707} = \pi/2 = 1.571.$$

Аналогично находим шумовую полосу пропускания одноконтурного резонансного усилителя:

$$\Pi_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + 4\pi^2 (f - f_{\text{рез}})^2 \tau_k^2} = \frac{1}{2\tau_k} = 1.571 \Pi_{0.707}. \quad (10.26)$$

Продemonстрируем использование понятия шумовой полосы пропускания в радиотехнических расчетах.

Пример 10.4. На входе одноконтурного резонансного усилителя малых колебаний с параметрами $K_{\text{рез}} = 85$, $Q_{\text{эк}} = 70$, $f_{\text{рез}} = 0.7$ МГц действует источник стационарной шумовой ЭДС $x(t)$, имеющий функцию корреляции $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta|\tau|)$. Определить эффективное напряжение шума на выходе усилителя, если $\beta = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_x^2 = 0.45 \text{ В}^2$.

Прежде всего по теореме Винера — Хинчина находим спектр мощности входного случайного сигнала

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos \omega\tau d\tau.$$

Подобный спектр уже был вычислен нами в гл. 7. Воспользуемся полученным там результатом и запишем для данного случая

$$W_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\beta}{\beta^2 + \omega^2} = \frac{9 \cdot 10^6}{10^{14} + \omega^2}.$$

Односторонний спектр мощности ($\text{В}^2/\text{Гц}$)

$$N_x(f) = 2W_x(2\pi f) = \frac{1.8 \cdot 10^7}{10^{14} + (2\pi f)^2}.$$

Замечая, что спектр мощности максимален на нулевой частоте, а при $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$ его значение уменьшается лишь вдвое, приходим к выводу, что в пределах полосы пропускания усилителя входной сигнал можно заменить эквивалентным белым шумом со спектральной плотностью мощности $N_0 = N_x(f_{\text{рез}}) = 1.508 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

Полоса пропускания усилителя по уровню 0.707

$$\Pi_{0.707} = f_{\text{рез}}/Q_{\text{эк}} = 10 \text{ кГц}.$$

Шумовая полоса пропускания

$$\Pi_{\text{ш}} = (\pi/2) \Pi_{0.707} = 15.7 \text{ кГц}.$$

Подставив полученные значения в формулу (10.23), находим, что $\sigma_y^2 = 1.508 \cdot 10^{-7} \cdot (85)^2 \cdot 1.57 \cdot 10^4 \approx 17.1 \text{ В}^2$.

Эффективное напряжение шума на выходе $\sigma_y = \sqrt{17.1} = 4.14 \text{ В}$.

Нормализация случайного сигнала на выходе линейной стационарной цепи. Все задачи, которые были рассмотрены ранее, решались в рамках корреляционной теории, т. е. с привлечением моментных функций не выше второго порядка. Более полная постановка проблемы выглядит так: входной случайный процесс задается семейством своих n -мерных плотностей вероятности $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Требуется, зная частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$, определить аналогичные плотности вероятности процесса на выходе линейной системы.

Решить такую задачу в общем случае весьма сложно, и она в этой книге не рассматривается. Однако часто можно заранее предполагать гауссов характер законов распределения выходного сигнала независимо от того, каков вид плотностей вероятности случайного процесса на входе.

Нормализация выходного сигнала наблюдается в любой стационарной линейной системе с достаточно сильно выраженной инерционностью. Дело в том, что на основании формулы Дюамеля мгновенное значение отклика

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

есть результат суммирования предшествующих значений входного сигнала $x(t)$, умноженных на сдвинутую импульс-

▲
решите задачу 5

Если входной случайный процесс нормален, то случайный процесс на выходе будет обладать этим свойством независимо от динамических свойств линейной системы

ную характеристику цепи. Если протяженность функции $h(t)$ составляет несколько интервалов корреляции входного случайного процесса, то становится применимой центральная предельная теорема (см. гл. 7). Следствием этого является асимптотическая нормальность выходного сигнала.

Любую n -мерную плотность вероятности гауссова случайного процесса можно построить, зная лишь функцию корреляции.

Поэтому методы корреляционной теории оказываются вполне пригодными для решения многих задач, связанных с прохождением случайных сигналов через линейные стационарные цепи.

10.2. Источники флуктуационных шумов в радиотехнических устройствах

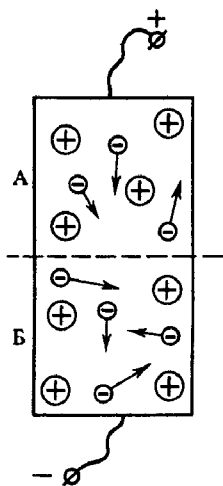
В данном параграфе мы познакомимся с физическими явлениями, которые порождают флуктуации напряжения и тока в радиотехнических цепях. Будут получены формулы, используемые для оценки интенсивности шумов.

Тепловые шумы резисторов. Одной из главных причин возникновения шума являются флуктуации объемной плотности электрического заряда в проводящих телах (резисторах) из-за хаотического теплового движения носителей заряда. Несмотря на электрическую нейтральность системы в целом, внутри объема резистора возникают переменные электромагнитные поля, а на внешних зажимах появляется шумовая разность потенциалов. Спектр шума оказывается чрезвычайно широким из-за высокой плотности «упаковки» зарядов и большой средней тепловой скорости. Это позволяет считать, что на частотах радиодиапазона тепловой шум резистора достаточно точно соответствует модели белого (дельта-коррелированного) шума.

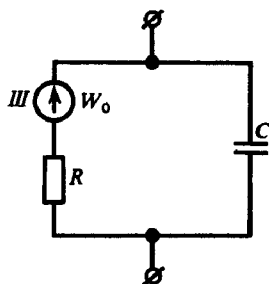
Формула Найквиста. Выведем соотношение для расчета спектра мощности, который описывает шумовое напряжение на зажимах резистора R , находящегося в тепловом равновесии с окружающей внешней средой при абсолютной температуре T . Для этого мысленно включим параллельно резистору вспомогательный элемент — конденсатор C и будем считать, что реальный шумящий резистор эквивалентно заменен последовательным соединением идеального нешумящего резистора и источника ЭДС, создающего белый шум. Спектр мощности W_0 этого шума требуется определить.

Как известно из курса физики, любая система, находящаяся в тепловом равновесии, обладает средней энергией $kT/2$, приходящейся на одну степень свободы. Именно такой будет средняя энергия электрического поля, накопленная в конденсаторе, поскольку рассматриваемая цепь является динамической системой 1-го порядка с одной степенью свободы. Итак,

$$Cu_c^2/2 = kT/2,$$



Заряды областей A и B не равны из-за хаотического движения носителей



поэтому дисперсия шумового напряжения на конденсаторе $\sigma^2 = \overline{u_C^2} = kT/C$.

Теперь воспользуемся формулой (10.11), которая связывает дисперсию со спектром мощности шумового напряжения. Поскольку $W_0/(2RC) = kT/C$, вспомогательная величина C исключается и получается равенство $W_0 = 2kTR$.

Практически удобнее пользоваться односторонним энергетическим спектром, который задается только в области положительных частот и имеет размерность $\text{В}^2/\text{Гц}$:

$$N_0 = 2W_0 = 4kTR. \quad (10.27)$$

Это замечательное соотношение, носящее название *формулы Найквиста*, было доказано в конце 20-х годов.

Подчеркнем, что величина N_0 имеет простой и ясный физический смысл *удельной дисперсии* теплового шума резистора, которая приходится на полосу частот шириной в 1 Гц.

Спектральную плотность мощности тепловых шумов можно оценить из следующего примера: при $T = 300 \text{ К}$ и $R = 10 \text{ кОм}$ значение N_0 составит $1.66 \cdot 10^{-16} \text{ В}^2/\text{Гц}$, откуда удельное эффективное напряжение шума равно $1.29 \cdot 10^{-8} \text{ В}/\sqrt{\text{Гц}}$. Несмотря на кажущуюся малость, эффект тепловых шумов может явиться решающим фактором, ограничивающим реальную чувствительность приемных устройств.

Интересно и важно отметить, что мощность шума, которая может быть передана во внешнюю резистивную нагрузку, не зависит от сопротивления резистора R . Для доказательства рассмотрим систему, в которой между шумящим резистором R и нагрузкой R_n включен идеальный фильтр с полосой пропускания 1 Гц. Как известно, мощность, передаваемая в нагрузку, максимальна при $R = R_n$ (условие согласования) и равна в нашем случае $(\text{Вт}/\text{Гц})$

$$P_{\text{уд}} = \overline{u_{\text{уд}}^2}/(4R) = kT. \quad (10.28)$$

Поэтому единственным радикальным средством борьбы с тепловыми шумами является глубокое охлаждение входных цепей чувствительных радиоприемных устройств, применяемых в радиолокации, радиоастрономии и системах космической связи.

Шумы приемных антенн. Источником шума в радиотехническом устройстве может быть приемная антенна, на выходе которой возникает случайное напряжение под воздействием хаотических флуктуаций электромагнитного поля.

Пусть простейшая приемная антенна (вibrator Герца) длиной l ориентирована вдоль оси z и помещена внутри замкнутой полости, стенки которой имеют температуру T .

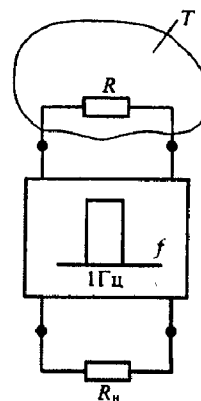
В соответствии с законом Планка, известным читателю из курса физики, полость заполнена равновесным электромагнитным излучением, которое характеризуется особым спектральным параметром, носящим название *удельной яр-*

Отметим, что идеальные реактивные элементы цепи не являются источником шума

▲ решите задачу 7

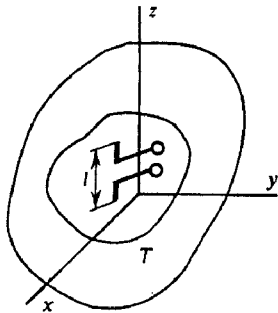
▲ решите задачу 10

Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$



Наилучшие результаты достигаются при охлаждении входных цепей приемников до температуры жидкого гелия ($T = 4.2 \text{ К}$)

удельная яркость



Входящая сюда величина $Z_0 = 120\pi \approx 377$ Ом представляет собой характеристическое сопротивление вакуума

кости ($\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср})$):

$$B = \frac{2hf^3}{c^2 \{ \exp [hf/(kT)] - 1 \}}, \quad (10.29)$$

где f — частота, Гц; c — скорость света, м/с; $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц — постоянная Планка.

Удельная яркость представляет собой плотность потока электромагнитного излучения, отнесенного к частотному интервалу 1 Гц и приходящего в данную точку из телесного угла в 1 ср.

Если $hf \ll kT$, что типично для радиодиапазона, то (10.29) превращается в приближенную формулу Рэлея — Джинса:

$$B = 2kT/\lambda^2, \quad (10.30)$$

где $\lambda = c/f$ — длина волны.

Рассмотрим величину

$$\overline{E_{\text{уд}}^2} = \overline{E_{x\text{уд}}^2} + \overline{E_{y\text{уд}}^2} + \overline{E_{z\text{уд}}^2}$$

— средний квадрат напряженности электрического поля E , приходящийся на интервал частот 1 Гц. В теории электромагнетизма доказывается, что плотность потока мощности излучения ($\text{Вт}/\text{м}^2$) составит при этом $\overline{E_{\text{уд}}^2}/(120\pi) = \overline{E_{z\text{уд}}^2}/(40\pi)$. Здесь учтено, что из-за полного равноправия всех пространственных направлений $\overline{E_{\text{уд}}^2} = 3\overline{E_{z\text{уд}}^2}$. Деля плотность потока мощности на 4π , т. е. на телесный угол всего пространства, получаем выражение удельной яркости через полевые величины:

$$B = \overline{E_{z\text{уд}}^2}/(160\pi^2). \quad (10.31)$$

Приравняв правые части выражений (10.30) и (10.31), находим удельный средний квадрат проекции составляющей вектора напряженности электрического поля, которая ориентирована вдоль антенны:

$$\overline{E_{z\text{уд}}^2} = 320\pi^2 kT/\lambda^2. \quad (10.32)$$

Поскольку на выходе антенны, малой по сравнению с длиной волны, возникает напряжение $u = El$, получаем удельную дисперсию выходного напряжения:

$$\overline{u_{\text{уд}}^2} = 320\pi^2 (l/\lambda)^2 kT. \quad (10.33)$$

Если ввести так называемое сопротивление излучения (Ом) вибратора Герца $R_{\Sigma} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2$, то из (10.33) получим формулу Найквиста для элементарной приемной антенны:

$$\overline{u_{\text{уд}}^2} = N_0 = 4kTR_{\Sigma}, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (10.34)$$

решите задачу 11

Здесь температура T является параметром равновесной среды, через которую распространяются электромагнитные волны. В сущности это справедливо лишь для шумов космического происхождения. Измерения показали, что наиболее «холодные» участки небесного свода имеют температуру порядка нескольких кельвинов. В то же время температура

в направлении радиогалактик и других космических источников шумового радиоизлучения может достигать 10 000 К.

Если говорить о естественных помехах земного происхождения, то подавляющая часть мощности этого шума сосредоточена на частотах ниже 30 МГц. Для того чтобы оставить неизменным вид формулы (10.34), вводят шумовую температуру $T_{\text{ш}}$, зависящую от частоты. Спектральный состав земных помех таков, что на частотах порядка 1 МГц температура $T_{\text{ш}}$ при некоторых условиях может достигать $3 \cdot 10^8$ К.

Дробовой шум. Еще одним источником шума в радиотехнических устройствах являются электронные приборы — диоды, транзисторы и лампы. В отличие от резисторов флуктуации возникают здесь не за счет хаотического теплового движения электронов, а вследствие статистической независимости их упорядоченного перемещения.

Рассмотрим, например, вакуумный диод, к которому подключен источник постоянной ЭДС. От катода к аноду движется поток электронов, каждый из которых переносит электрический заряд $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл (по модулю). Время пролета электрона с катода на анод $\tau_{\text{пр}}$ имеет порядок 10^{-9} с. В этот интервал времени во внешних цепях регистрируется короткий импульс так называемого конвекционного тока, причем

$$\int_0^{\tau_{\text{пр}}} i_{\text{кон}} dt = e,$$

откуда следует оценка $i_{\text{кон}} \sim 1.6 \cdot 10^{-10}$ А.

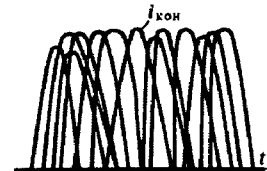
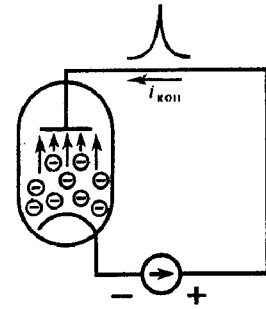
В обычных режимах ток диода составляет несколько миллиампер, поэтому импульсы конвекционного тока густо перекрываются во времени.

Акты вылета отдельных электронов с катода являются статистически независимыми случайными событиями. Отсюда следует, что мгновенное значение анодного тока диода не остается постоянным, а претерпевает некоторые флуктуации. Любой электронный прибор служит источником шума, который в физике и радиотехнике получил название *дробового шума*.

Распределение Пуассона. Обозначим символом ν среднее число электронов, прибывающих на анод за 1 с. Эксперимент убедительно говорит о том, что эта числовая характеристика является статистически устойчивой, т. е. стационарной. Постоянная составляющая анодного тока связана с параметром ν простым соотношением $I_0 = e\nu$. Значение ν весьма велико: при $I_0 = 1$ мА имеем оценку $\nu \sim 10^{16}$ с $^{-1}$.

Переходя к статистическому анализу процесса, сделаем одно упрощающее предположение, не существенное физически, но облегчающее расчеты: допустим, что в промежутке катод — анод электроны следуют друг за другом «цепочкой», так что вероятность парных или более сложных приходов электронов на анод пренебрежимо мала.

Основные источники земных помех — грозовые разряды и процессы коммутации в мощных электрических цепях



Эффект перекрытия импульсов

Все рассуждения справедливы также применительно к процессу инжекции носителей заряда в полупроводниковых приборах

Естественно, считать, что если A — событие прихода электрона на анод в интервале времени $(t, t + \Delta t)$, то с точностью до малых величин порядка $(\Delta t)^2$ вероятность этого события

$$P_A = v \Delta t. \quad (10.35)$$

Поскольку ток диода складывается из большого числа независимых импульсов, мгновенные значения этого тока распределены по нормальному закону (см. гл. 6)

Обозначим через $P_0(t)$ вероятность не иметь ни одного пришедшего электрона в интервале времени $(0, t)$. Тогда $P_0(t + \Delta t)$ будет вероятностью сложного события — ни одного электрона не должно появиться на аноде ни в интервале времени $(0, t)$, ни в интервале времени $(t, t + \Delta t)$. На основании свойства вероятности сложного события

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - v \Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_0}{dt} = -vP_0$$

с очевидным начальным условием $P_0(0) = 1$.

Решение этой начальной задачи элементарно:

$$P_0(t) = \exp(-vt).$$

Поскольку $v \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$, вероятность не наблюдать ни одного электрона за интервал времени 1 с составит $\exp(-10^{16})$, что можно считать вероятностью невозможного события

Найдем вероятность $P_1(t)$ наблюдать в интервале времени $(0, t)$ ровно один пришедший электрон. На расширенном интервале $(0, t + \Delta t)$ такая вероятность будет складываться из вероятностей двух несовместимых событий:

- а) электрон прибывает в интервале времени $(0, t)$,
- б) электрон прибывает в интервале времени $(t, t + \Delta t)$.

По свойству вероятностей

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)(1 - v \Delta t) + P_0(t)v \Delta t,$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_1}{dt} = -vP_1 + vP_0$$

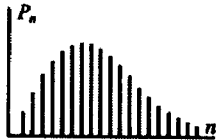
с начальным условием $P_1(0) = 0$. Аналогично получается начальная задача, решение которой описывает вероятность прибытия на анод ровно n электронов:

$$\begin{cases} \frac{dP_n}{dt} = -vP_n + vP_{n-1}, \\ P(0) = 0. \end{cases} \quad (10.36)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что

$$P_n(t) = \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt}. \quad (10.37)$$

Формула (10.37) определяет закон распределения Пуассона, который встречается во многих задачах статистической радиотехники.



Моменты пуассоновской случайной величины. Возьмем некоторый интервал времени длительностью T и подсчитаем среднее число прибывших электронов:

$$\bar{n}_T = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(vT)^n}{n!} e^{-vT} = vT e^{-vT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(vT)^{n-1}}{(n-1)!} = vT. \quad (10.38)$$

Смысл этой формулы нагляден: подтверждается исходное предположение о том, что v — средняя интенсивность потока электронов.

Теперь найдем средний квадрат числа прибывших за это время электронов:

$$\begin{aligned} \overline{n_T^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(vT)^n}{n!} e^{-vT} = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + n] \frac{(vT)^n}{n!} e^{-vT} = \\ &= vT + (vT)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(vT)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-vT} = vT + (vT)^2. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Используя формулы (10.38) и (10.39), вычисляем дисперсию числа прибывших электронов

$$\sigma_n^2 = \overline{n_T^2} - (\bar{n}_T)^2 = vT. \quad (10.40)$$

Статистические свойства тока диода. Если за время T на анод поступило n электронов, то ток, отнесенный к длительности интервала наблюдения, $i_T = en/T$.

Среднее значение наблюдаемого тока

$$I_0 = \bar{i}_T = (e/T) \bar{n}_T = ev. \quad (10.41)$$

В то же время дисперсия тока

$$\sigma_i^2 = (e^2/T^2) \sigma_n^2 = (e/T) I_0. \quad (10.42)$$

Если за меру интенсивности флуктуаций тока взять отношение среднеквадратического отклонения к среднему значению, то

$$\sigma_i/I_0 = \sqrt{e/T}/\sqrt{I_0}. \quad (10.43)$$

Вывод, следующий из формулы (10.43), таков: относительный уровень флуктуации тока диода снижается с увеличением времени наблюдения и ростом среднего значения тока.

Если целочисленная величина распределена по закону Пуассона, то в отдельных испытаниях редко наблюдаются значительные отклонения от среднего значения как в одну, так и в другую сторону

Здесь сумма является рядом Тейлора для функции $\exp(vT)$

Применен искусственный прием — использовано тождество $n^2 = n(n-1) + n$

Здесь речь идет о режиме работы диода в отсутствие пространственного заряда

▲
решите задачу 12

Пример 10.5. Пусть ток $I_0 = 10^{-2}$ А и время наблюдения $T = 1$ с.

Дисперсия тока за время наблюдения $\sigma_i^2 = 1.6 \cdot 10^{-21}$ А² и ток диода можно оценить следующим образом: $i = 10^{-2} \pm 4 \cdot 10^{-11}$ А. Видно, что относительные флуктуации тока здесь очень невелики.

Если же существенно сократить как среднее значение тока, так и время наблюдения, положив $I_0 = 10^{-8}$ А и $T = 10^{-8}$ с,

то $\sigma_i^2 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ А}^2$, так что оценка тока $i = 10^{-8} \pm 4 \cdot 10^{-10} \text{ А}$. Видно, что относительные флуктуации тока существенно возрастают.

Рассмотренный пример дает возможность понять, почему мы не наблюдаем случайных колебаний стрелки магнитоэлектрического измерительного прибора, включенного в цепь диода. Здесь из-за инерционности механической системы прибора происходит усреднение измеряемого тока на интервале времени длительностью порядка секунды.

Формула Шотки. Чем меньше время наблюдений T , тем большую полосу частот в спектре процесса приходится учитывать. По теореме Котельникова, для проведения обработки сигнала за время T регистрирующая система должна быть способна пропускать все частоты вплоть до частоты f_v , удовлетворяющей соотношению $T = 1/(2f_v)$.

Учтя это в формуле (10.42), имеем $\sigma_i^2 = 2eI_0 f_v$, откуда удельная дисперсия флуктуационного тока ($\text{А}^2/\text{Гц}$), приходящаяся на полосу частот в 1 Гц,

$$N_0 = 2eI_0. \quad (10.44)$$

Это соотношение получило в радиотехнике название *формулы Шотки*. Согласно ей, эквивалентная шумовая схема электронного прибора содержит в себе источник тока, создающий белый шум со спектральной плотностью, описываемой формулой (10.44).

Эксперименты показывают, что дробовой шум электронных приборов имеет постоянный спектр мощности вплоть до частот в несколько сотен мегагерц, а затем начинает уменьшаться с ростом частоты. Это связано с тем, что на очень высоких частотах (при малых значениях T) несправедливой становится принятая модель шума, согласно которой за время наблюдения на анод должно приходиться достаточно большое число электронов. Кроме того, начинает сказываться уменьшение модуля спектральной плотности отдельных импульсов конвекционного тока, длительность которых хотя и мала, но все же конечна.

Пример 10.6. Транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой имеет следующие параметры: $R_n = 5.1 \text{ кОм}$, $C_n = 45 \text{ пФ}$, $R_i = 20 \text{ кОм}$. Рабочая точка на характеристике транзистора выбрана таким образом, что постоянная составляющая тока коллектора $I_{0K} = 1.5 \text{ мА}$. Вычислить эффективное шумовое напряжение на выходе, обусловленное дробовым шумом транзистора.

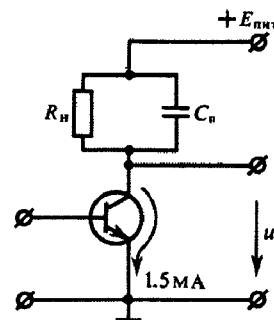
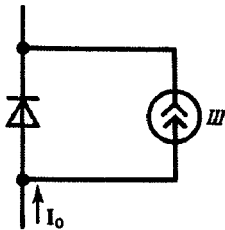
Прежде всего по формуле Шотки находим спектр мощности источника шумового тока:

$$N_0 = 2eI_{0K} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} = 4.8 \cdot 10^{-22} \text{ А}^2/\text{Гц}.$$

Составив эквивалентную схему усилителя, замечаем, что роль частотного коэффициента передачи системы играет комплексное сопротивление, включенное параллельно источнику тока:

$$Z(j\omega) = R_{эк} / (1 + jR_{эк}C_n),$$

$$\text{где } R_{эк} = R_n R_i / (R_n + R_i).$$



В данном случае $R_{\text{эк}} = 5.1 \cdot 20 / 25.1 = 4.06$ кОм.

Дисперсию шумового напряжения на выходе усилителя вычисляем по формуле (10.22):

$$\begin{aligned}\sigma_u^2 &= N_0 \int_0^\infty |Z(j2\pi f)|^2 df = N_0 R_{\text{эк}}^2 \int_0^\infty \frac{df}{1 + 4\pi^2 f^2 R_{\text{эк}}^2 C_n^2} = \\ &= \frac{N_0 R_{\text{эк}}}{4C_n} = 1.08 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2.\end{aligned}$$

Наконец, находим эффективное напряжение шума на выходе $\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = 104$ мкВ.

Подобные расчеты приходится выполнять каждый раз, определяя предельную чувствительность усилителей малых сигналов. Для этого обычно поступают так: эффективное напряжение шума приводит ко входу по формуле $\sigma_{\text{вх}} = \sigma_{\text{вых}}/K$, где K — коэффициент усиления напряжения на частоте сигнала. Полученную величину принимают за минимальный уровень эффективного напряжения полезного гармонического сигнала, который может усиливаться данным устройством, откуда минимальная амплитуда $U_{\text{min}} = \sqrt{2} \sigma_{\text{вх}}$.

Так, в рассмотренном примере при крутизне характеристики транзистора $S = 20$ мА/В коэффициент усиления напряжения на нулевой частоте $K = SR_{\text{эк}} = 81.2$. Поэтому $\sigma_{\text{вх}} = 108/81.2 = 1.28$ мкВ, минимальная амплитуда усиливаемого сигнала $U_{\text{min}} = 1.28 \cdot 1.41 = 1.81 \approx 2$ мкВ.

Коэффициент шума четырехполосника. Основными элементами любого радиотехнического устройства являются разнообразные четырехполосники, как активные, так и пассивные. Каждый четырехполосник имеет два *порта*, один из которых служит входом, а другой выходом. Считаются известными коэффициент передачи мощности четырехполосника K_p и ширина полосы пропускания Π , Гц. Чтобы охарактеризовать шумовые свойства такого элемента цепи, вводят особый параметр, называемый шумовой температурой $T_{\text{ш}}$, К. При этом полагают, что все устройство находится при так называемой *стандартной температуре* $T_0 = 290$ К.

На входе любого четырехполосника всегда имеется некоторый резистивный элемент. В соответствии с равенством (10.28) это приводит к тому, что на входе обнаруживается тепловой шум с мощностью

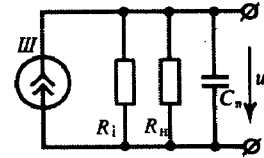
$$P_{\text{швх}} = k T_0 \Pi. \quad (10.45)$$

В четырехполоснике этот шум усиливается (или ослабляется); здесь же к нему добавляется внутренний шум четырехполосника, пропорциональный шумовой температуре:

$$P_{\text{швых}} = k T_0 \Pi K_p + k T_{\text{ш}} \Pi K_p. \quad (10.46)$$

Наряду с шумовой температурой часто используют безразмерный параметр, называемый *коэффициентом шума четырехполосника*:

$$F = \frac{(P_c/P_{\text{ш}})_{\text{вх}}}{(P_c/P_{\text{ш}})_{\text{вых}}}. \quad (10.47)$$



В расчетах предполагается, что частота гармонического сигнала существенно ниже граничной частоты усилителя

Мощности сигнала на входе и на выходе связаны соотношением $P_{с\text{вых}} = K_p P_{с\text{вх}}$. Приняв это во внимание и воспользовавшись равенствами (10.45) и (10.46), находим, что

$$F = 1 + \frac{T_{ш}}{T_0}. \quad (10.48)$$

Для воображаемого не шумящего четырехполосника $T_{ш} = 0$ и поэтому $F = 1$. Реальные мало шумящие усилители имеют шумовые температуры порядка десятков кельвинов. В то же время шумовая температура обычного радиовещательного приемника среднего качества составляет несколько тысяч кельвинов.

Пример 10.7. Антенна соединена со входом приемника отрезком согласованного коаксиального кабеля. За счет тепловых потерь мощность сигнала уменьшается в кабеле в α раз ($\alpha > 1$). Устройство находится при температуре T . Определить шумовую температуру $T_{ш}$ данного отрезка кабеля и его коэффициент шума F .

Очевидно, что здесь $K_p = 1/\alpha$. Мощность шума на выходе

$$P_{ш\text{вых}} = k T_0 \Pi (1/\alpha) + k T_{ш} \Pi (1/\alpha).$$

С другой стороны, кабель со стороны выхода ведет себя подобно некоторому резистору и поэтому

$$P_{ш\text{вых}} = k T_0 \Pi.$$

Приравнявая правые части двух последних формул, убеждаемся, что

$$T_{ш} = (\alpha - 1) T_0,$$

а, значит, $F = \alpha$.

Можно сделать вывод о том, что по возможности следует добиваться малого затухания в той линии передачи, которая соединяет антенну со входом чувствительного приемника. Иногда целесообразно совсем избавиться от такой линии, размещая входные цепи приемника непосредственно в самой антенне.

Пример 10.8. Некоторый усилитель образован каскадным соединением двух ступеней с коэффициентами усиления мощности K_{p1} , K_{p2} и шумовыми температурами $T_{ш1}$ и $T_{ш2}$ соответственно. Вывести формулу для вычисления коэффициента шума F такого усилителя.

В данном случае, учитывая, что шум, возникающий во второй ступени, не поступает на вход первой, без труда находим:

$$P_{с\text{вых}} = P_{с\text{вх}} K_{p1} K_{p2};$$

$$P_{ш\text{вх}} = k T_0 \Pi;$$

$$\begin{aligned} P_{ш\text{вых}} &= k T_0 \Pi K_{p1} K_{p2} + k T_{ш1} \Pi K_{p1} K_{p2} + k T_{ш2} \Pi K_{p2} = \\ &= P_{ш\text{вх}} K_{p1} K_{p2} + (F_1 - 1) P_{ш\text{вх}} K_{p1} K_{p2} + (F_2 - 1) P_{ш\text{вх}} K_{p2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{K_{p1}}.$$

Данная формула весьма примечательна, она свидетельствует о том, что основной вклад в коэффициент шума вносит именно первая ступень усилителя, так как обычно $K_{p1} \gg 1$. Естественным образом формула может быть распространена на случай усилителя с большим числом ступеней.

Результаты

- ◇◇ Если среднее значение стационарного случайного процесса на входе линейной системы равно нулю, то таково же и среднее значение выходного процесса.
- ◇◇ Спектральные плотности мощности стационарных случайных процессов на входе и выходе стационарной линейной цепи связаны между собой квадратом модуля частотного коэффициента передачи.
- ◇◇ Функция корреляции случайного процесса на выходе интегрирующей RC-цепи, возбуждаемой белым шумом, имеет экспоненциальный характер.
- ◇◇ Выходной сигнал резонансного усилителя, на вход которого подан белый шум, является узкополосным случайным процессом.
- ◇◇ Если линейная стационарная цепь достаточно инерционна, то случайный процесс на ее выходе асимптотически нормален независимо от статистических свойств входного случайного процесса.
- ◇◇ Тепловой шум резистора обусловлен случайными флуктуациями плотности электрического заряда. На частотах радиодиапазона этот шум имеет практически постоянный спектр мощности.
- ◇◇ Спектр мощности теплового шума вычисляют по формуле Найквиста.
- ◇◇ Эквивалентная шумовая температура приемных антенн зависит от частотного диапазона.
- ◇◇ Дробовой шум электронных приборов связан со статистической независимостью движения носителей заряда.
- ◇◇ Электронный прибор, в котором наблюдается дробовой эффект, эквивалентно заменяется источником шумового тока с равномерной спектральной плотностью мощности, устанавливаемой формулой Шотки.
- ◇◇ Шумовые свойства реального четырехполосника характеризуются его шумовой температурой или коэффициентом шума.

Вопросы

1. Какую роль играет свойство стационарности входного случайного процесса при выводе формулы, определяющей спектр мощности случайного процесса на выходе?

2. Как выглядят примерные графики функций корреляции случайных сигналов: а) на выходе интегрирующей RC-цепи, б) на выходе одноконтурного резонансного усилителя? Входной сигнал — белый шум. Являются ли реализации дифференцируемыми в статистическом смысле?

3. В чем состоят характерные отличия функции корреляции случайного сигнала на выходе двухзвенной RC-цепи, возбуждаемой белым шумом?

4. В каком случае случайный процесс, действующий на входе реальной цепи, можно заменить белым шумом?

5. Что такое шумовая полоса пропускания цепи?

6. Каковы физические факторы, приводящие к нормализации случайного процесса на выходе линейной цепи?

7. Опишите механизм возникновения тепловых шумов в резисторах. Каков частотный диапазон, в пределах которого тепловой шум можно считать белым?

8. Чем определяется шумовое напряжение на выходе приемной антенны?

9. Опишите природу дробового шума, возникающего в электронных приборах.

10. Напишите формулу закона распределения Пуассона и поясните физический смысл параметра ν .

11. Как выглядит эквивалентная схема, описывающая шумовые свойства электронного прибора, в котором наблюдается дробовой эффект?

12. Как распределен по частоте спектр мощности дробового шума?

13. Почему коэффициент шума любого реального фильтра всегда превышает единицу?

14. Почему коэффициент шума усилителя со многими ступенями зависит, главным образом, от параметров первой ступени?

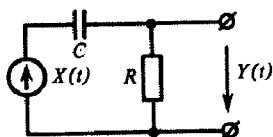
Задачи

1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектром мощности

$$W_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ W_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b \end{cases}$$

подан на вход интегрирующей RC-цепи. Найдите дисперсию выходного сигнала.

2. Решите задачу 1 при условии, что заданный сигнал подается на вход дифференцирующей цепи:

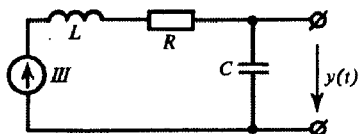


3. Напряжение, действующее на входе идеального ФНЧ с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ K_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b, \end{cases}$$

представляет собой реализацию стационарного случайного процесса, функция корреляции которого $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Вычислите спектр мощности, функцию корреляции и дисперсию выходного напряжения.

4. На входе последовательного колебательного контура

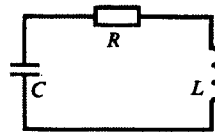


действует источник ЭДС вида белого шума с параметром W_0 . Определите спектр мощности и функцию корреляции выходного напряжения $y(t)$.

5. На входе одноконтурного резонансного усилителя включен источник ЭДС, создающий белый гауссов шум со значением $N_0 = 10^{-15} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Параметры усилителя: $K_{\text{рез}} = 100$, $Q_{\text{эк}} = 110$, $f_{\text{рез}} = 15 \text{ МГц}$. Вычислите вероятность события, состоящего в том, что случайное шумовое напряжение на выходе превышает уровень 2 мВ.

6. Выведите формулу, определяющую спектр мощности выходного сигнала двухзвенного RC-фильтра (см. пример 10.3), на входе которого создано шумовое напряжение с функцией корреляции $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$.

7. Колебательный контур



с параметрами $R = 8 \text{ Ом}$, $L = 1.5 \text{ мкГн}$, $C = 120 \text{ пФ}$ помещен в среду с температурой $T = 400 \text{ К}$. Вычислите дисперсию шумового напряжения на индуктивном элементе.

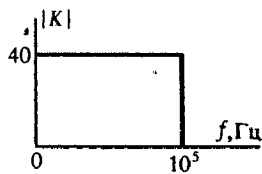
8. Модуль частотного коэффициента передачи ФНЧ линейно падает с ростом частоты в диапазоне $(0, f_b)$:



Вычислите шумовую полосу пропускания системы.

9. Определите шумовую полосу пропускания двухзвенного RC-фильтра, рассмотренного в примере 10.3.

10. Резистор сопротивлением 10 кОм, находящийся при температуре 300 К, включен на вход идеального ФНЧ со следующей частотной характеристикой:



Определите дисперсию и функцию корреляции выходного сигнала фильтра.

11. Антенна СВЧ, имеющая сопротивление излучения $R_z = 2.5$ Ом, принимает сигналы из области пространства с температурой $T = 20$ К. Полоса пропускания системы равна 400 МГц. Каково эффективное напряжение шума на выходе антенны?

12. Оцените дисперсию выходных показателей инерционного прибора, измеряющего ток

диода. Постоянная составляющая тока 0.3 мА, время интегрирования (постоянная времени) прибора 2 с.

13. Резистор с сопротивлением 10^5 Ом, находящийся при абсолютной температуре T , включен в цепь, которая содержит диод, работающий в режиме насыщения, и источник постоянной ЭДС. В цепи протекает ток со средним значением $I_0 = 1$ мкА. Найдите температуру T , при которой удельные дисперсии шумовых напряжений, создаваемых на резисторе за счет случайного характера электронного потока и за счет теплового эффекта, оказываются одинаковыми. Сделайте вывод о том, какой из двух указанных компонентов шума более значим на практике.

Более сложные задания

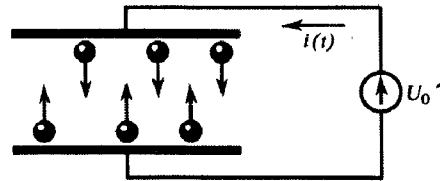
14. Случайный процесс $X(t)$ с функцией корреляции $R_x(t_1, t_2)$ действует на входе линейной стационарной системы, для которой известна импульсная характеристика $h(t)$. Прямым вычислением, используя формулу Дюамеля, покажите, что функция корреляции выходного сигнала описывается формулой

$$R_y(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_x(\xi_1, \xi_2) \times \\ \times h(t_1 - \xi_1) h(t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

т. е. является двумерной сверткой функций $R_x(t_1, t_2)$ и $h(t)$.

15. Исследуйте статистические характеристики случайного тока в системе, где между обкладками конденсатора под воз-

действием сил электрического поля движется множество легких проводящих тел (например, частицы металлической пыли):



Оцените дисперсию и ширину спектра процесса в зависимости от физических параметров устройства. Продумайте способ демонстрации явления без применения сложного и небезопасного источника высокого постоянного напряжения.

Глава 11

Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях

Все радиотехнические цепи, рассмотренные нами ранее, относились к классу стационарных линейных систем. Замечательной особенностью линейной цепи является справедливость для нее принципа суперпозиции. Из этого принципа и из условия стационарности вытекает простое и важное следствие – гармонический сигнал, проходя через линейную стационарную систему, остается неизменным по форме, приобретая лишь другие амплитуду и начальную фазу.

Однако именно поэтому линейная стационарная система неспособна обогатить спектральный состав колебаний, поданных на ее вход. Это обстоятельство в значительной степени сужает класс полезных преобразований сигналов, которое осуществляются линейными цепями с постоянными параметрами.

Гораздо большими возможностями в этом отношении обладают нелинейные системы, в которых связь между входным сигналом $u_{\text{вх}}(t)$ и выходной реакцией $u_{\text{вых}}(t)$ устанавливается нелинейной функциональной зависимостью

$$u_{\text{вых}}(t) = f(u_{\text{вх}}, t). \quad (11.1)$$

В настоящей главе будут рассмотрены общие закономерности, присущие простейшим нелинейным системам, приемы их математического исследования, а также некоторые виды преобразований сигналов, осуществляемых с помощью нелинейных цепей и устройств.

11.1. Безынерционные нелинейные преобразования

Исследование нелинейной цепи в общем случае – задача весьма сложная в том отношении, что при математическом описании функционирования такой системы мы сталкиваемся с проблемой решения нелинейных дифференциальных уравнений. Известно, что здесь неприменимы большинство приемов и методов, которые позволяют относительно легко решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Тем не менее в ряде случаев исследование нелинейных систем удается довести до конца простыми способами. Для этого достаточно потребовать, чтобы нелинейная зависимость вида (11.1) *не содержала явно времени*. Физически такое требование означает *безынерционность* нелинейного элемента, т. е. мгновенное установление выходной реакции вслед за изменением внешнего входного воздействия.

Безынерционных нелинейных элементов, строго говоря, не существует. Однако эта идеализация достаточно точна, если характерное время изменения входного сигнала значительно превышает время установления процесса внутри самого нелинейного элемента.

В радиотехнике нелинейные элементы — это чаще всего полупроводниковые приборы — диоды, биполярные и полевые транзисторы. Современные полупроводниковые приборы достаточно совершенны по своим частотным свойствам. Поэтому предположение о безынерционном характере внутренних процессов в нелинейных радиотехнических элементах часто бывает оправданным.

Внешние характеристики безынерционных нелинейных элементов. Функциональную зависимость вида (11.1) можно рассматривать как простейшую математическую модель нелинейного элемента. Особенность ее состоит в том, что здесь не фигурируют процессы, происходящие внутри элемента. Принято говорить, что здесь имеют дело с внешней характеристикой системы.

■
условие безынерционности

Равновесное (стационарное) состояние в полупроводниковых приборах может устанавливаться за время порядка 10^{-11} с

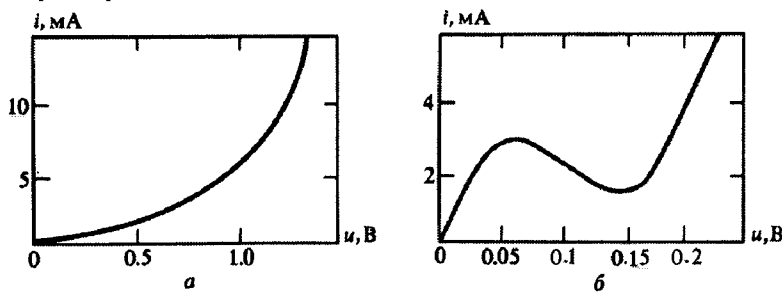


Рис. 11.1. Типичные вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников:

a — однозначная характеристика полупроводникового диода; *b* — характеристика туннельного диода, отличающаяся тем, что одному и тому же значению тока могут соответствовать три различных значения напряжения

Ниже для конкретности будут рассматриваться внешние характеристики нелинейных двухполюсников, когда входным сигналом служит напряжение u , а выходным — ток i в двухполюснике. Зависимость $i(u)$ обычно принято называть *вольт-амперной характеристикой (ВАХ)* нелинейного элемента. Все методы и результаты можно перенести и на случай нелинейного четырехполюсника, например транзистора, работающего в нелинейном режиме при больших амплитудах входного сигнала. Здесь выходная цепь представляется источником тока, управляемым входным напряжением; связь между мгновенными значениями напряжения и тока оказывается существенно нелинейной.

Используемые на практике нелинейные элементы имеют разнообразные внешние характеристики. Так, можно выделить класс элементов с однозначными вольт-амперными характеристиками (рис. 11.1, *a*) и класс элементов, характеристики которых содержат участки многозначности (рис. 11.1, *b*).

●
вольт-амперная характеристика

Сопротивление нелинейного двухполюсника. Понятие сопротивления для нелинейного двухполюсника можно определить по-разному. Пусть $i(u)$ — вольт-амперная характеристика. Приложив к двухполюснику постоянное напряжение $u = U_0$, имеем в цепи ток $I_0 = i(U_0)$. Отношение

$$R_- = U_0/I_0 \quad (11.2)$$

называют *сопротивлением элемента постоянному току*. В отличие от обычного сопротивления линейного резистора значение величины R_- не постоянно, а зависит от приложенного напряжения.

Часто приходится иметь дело с одновременным воздействием на нелинейный элемент двух источников напряжения: U_0 и Δu , причем $|\Delta u|/|U_0| \ll 1$. Разложив вольт-амперную характеристику в ряд Тейлора в окрестности точки U_0 , находим ток $i \approx I_0 + i'(U_0)\Delta u$. Отношение приращения напряжения к приращению тока в выбранной рабочей точке (U_0, I_0) называют *дифференциальным сопротивлением* нелинейного двухполюсника:

$$R_{\text{диф}} = \Delta u/\Delta i = 1/i'(U_0). \quad (11.3)$$

Иногда удобнее пользоваться *дифференциальной крутизной* ВАХ

$$S_{\text{диф}} = 1/R_{\text{диф}} = i'(U_0), \quad (11.4)$$

которая является тангенсом угла наклона касательной вольт-амперной характеристики в данной рабочей точке.

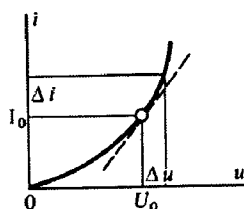
Подчеркнем, что, вводя понятие дифференциального сопротивления или дифференциальной крутизны, мы, по сути дела, линейризуем реальную ВАХ, что справедливо лишь для малых приращений сигнала относительно рабочей точки.

Способы описания характеристик нелинейных элементов. Как правило, вольт-амперные характеристики нелинейных элементов получают экспериментально; гораздо реже удается найти их из теоретического анализа. Для изучения процессов в радиотехнических цепях, содержащих такие элементы, необходимо прежде всего отобразить вольт-амперные характеристики в математической форме, пригодной для расчетов.

Простым и весьма точным способом может явиться представление характеристики в виде таблицы. Этот способ особенно удобен для анализа процессов в цепях с помощью ЭВМ; аргумент и функция образуют в запоминающем устройстве двумерный массив чисел.

Если исследование должно проводиться не численными, а аналитическими методами, то требуется подобрать такую аппроксимирующую функцию, которая, будучи довольно простой, отражала бы все важнейшие особенности экспериментально снятой характеристики с достаточной степенью точности.

В радиотехнике чаще всего используют следующие способы аппроксимации вольт-амперных характеристик нелинейных двухполюсников.



●
дифференциальное
сопротивление и
крутизна

Можно получить
любую заданную
точность, выбирая
шаг таблицы доста-
точно малым, а
также используя
интерполяцию

Кусочно-линейная аппроксимация. Данный способ основан на приближенной замене реальной характеристики отрезками прямых линий с различными наклонами. В качестве примера на рис. 11.2 показана входная характеристика реального транзистора, аппроксимированная двумя отрезками прямых.

Аппроксимация определяется двумя параметрами — напряжением начала характеристики U_n и крутизной S , имеющей размерность проводимости. Математическая форма аппроксимированной ВАХ такова:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ S(u - U_n), & u \geq U_n. \end{cases} \quad (11.5)$$

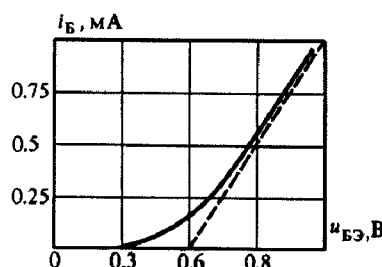


Рис. 11.2. Входная характеристика транзистора КТ306 — зависимость тока базы от напряжения промежутка база — эмиттер

Напряжение начала входных характеристик биполярных транзисторов имеет порядок 0.2–0.8 В; крутизна характеристики тока базы $i_B(u_{БЭ})$, как правило, около 10 мА/В. Если же говорить о крутизне характеристики $i_K(u_{БЭ})$ тока коллектора в зависимости от напряжения база — эмиттер, то последняя цифра должна быть умножена на $h_{21Э}$ — коэффициент усиления тока базы. Поскольку $h_{21Э} = 100 \div 200$, указанная крутизна имеет порядок нескольких ампер на вольт (сименсов).

Степенная аппроксимация. Этот способ основан на разложении нелинейной вольт-амперной характеристики $i(u)$ в ряд Тейлора, сходящийся в окрестности рабочей точки U_0 :

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots \quad (11.6)$$

Здесь коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ — некоторые числа. Количество членов разложения зависит от заданной точности расчетов.

Способ нахождения коэффициентов степенной аппроксимации иллюстрируется следующим простым примером.

Такую аппроксимацию обычно применяют при расчете процессов в нелинейных элементах в случае больших амплитуд внешних воздействий

Общая формула

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n i}{du^n} \right|_{u=U_0}$$

Пример 11.1. Экспериментально снятая входная характеристика $i_B = f(u_{БЭ})$ транзистора КТ301 задана графиком (рис. 11.3). Найти коэффициенты a_0, a_1 и a_2 , определяющие аппроксимацию вида $i_B = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0) + a_2(u_{БЭ} - U_0)^2$ в окрестности рабочей точки $U_0 = 0.7$ В.

Выбираем в качестве узлов аппроксимации точки 0.5, 0.7 и 0.9 В. Как видно из построения, для нахождения неизвестных

коэффициентов следует решить систему уравнений:

$$a_0 - 0.2a_1 + 0.04a_2 = 0.05,$$

$$a_0 = 0.15,$$

$$a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 = 0.5,$$

откуда $a_0 = 0.15$ мА, $a_1 = 1.125$ мА/В, $a_2 = 3.125$ мА/В².

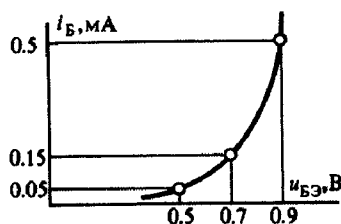


Рис. 11.3. Степенная аппроксимация входной характеристики транзистора КТ301

Подчеркнем, что степенная аппроксимация есть способ преимущественно локального описания характеристик; пользоваться ей при значительных отклонениях мгновенных значений входного сигнала от рабочей точки нецелесообразно из-за существенного ухудшения точности.

▲
решите задачу 1

Степенную аппроксимацию широко используют при анализе работы нелинейных устройств, на которые подаются относительно малые внешние воздействия

Показательная аппроксимация. Из теории работы p - n -переходов следует, что вольт-амперная характеристика полупроводникового диода в области $u > 0$ описывается выражением

$$i(u) = I_0 [\exp(u/u_T) - 1]. \quad (11.7)$$

Значение величины I_0 весьма мало и составляет обычно несколько пикоампер

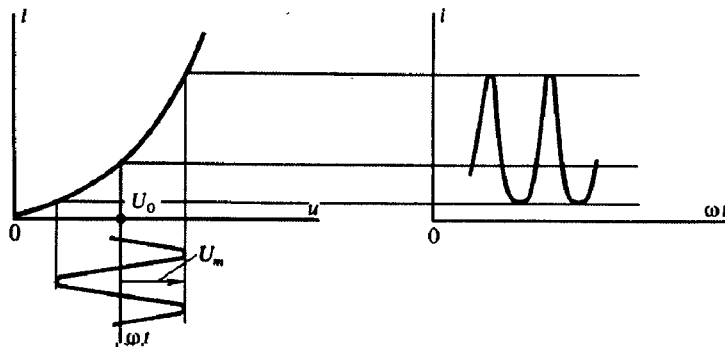
Здесь I_0 — обратный ток насыщения, u_T — температурный потенциал, равный 25 мВ для кремниевых приборов при стандартной температуре 300 К.

Показательную зависимость вида (11.7) часто используют при изучении нелинейных явлений в радиотехнических цепях, содержащих полупроводниковые устройства. Аппроксимация вполне точна при значениях тока, не превышающих нескольких миллиампер. При больших токах экспоненциальная характеристика плавно переходит в прямую линию из-за влияния объемного сопротивления полупроводникового материала.

11.2. Спектральный состав тока в безынерционном нелинейном элементе при гармоническом внешнем воздействии

Рассмотрим явления в простейшей цепи, образованной последовательным соединением источника гармонического сигнала $u_c(t) = U_m \cos \omega t$, источника постоянного напряжения смещения U_0 и безынерционного нелинейного элемента. Найдем форму тока в цепи, воспользовавшись несложными графическими построениями, приведенными на рис. 11.4.

Легко видеть, что формы тока и напряжения оказываются здесь различными. Причина искажения кривой тока очень



Ток в цепи имеет несинусоидальную форму

Рис. 11.4. Графическое построение кривой, отображающей изменение тока в безынерционной нелинейной цепи

проста: одинаковым приращениям напряжения отвечают неодинаковые приращения тока, поскольку $\Delta i = S_{\text{диф}}(u) \Delta u$, а дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики на разных участках также различна.

Основной принцип. Подходя к описанной задаче аналитически, будем считать известной нелинейную функцию $i(u) = i(u_0, U_0)$.

Пусть к входным зажимам нелинейного двухполюсника приложено напряжение сигнала $u_c(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Если ввести безразмерную переменную $\xi = \omega t + \varphi$, то функция

$$i(\xi) = i(U_m \cos \xi, U_0) \quad (11.8)$$

оказывается периодической относительно аргумента ξ с периодом 2π , поэтому она может быть представлена рядом Фурье

$$i(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\xi} \quad (11.9)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(U_m \cos \xi, U_0) e^{-jn\xi} d\xi.$$

Поскольку функция $i(\xi)$ четная, ряд Фурье (11.9) будет содержать только косинусоидальные слагаемые:

$$i(\xi) = I_0 + \sum_{n=1/\infty}^{\infty} I_n \cos n\xi. \quad (11.10)$$

Амплитудные коэффициенты гармоник выражаются следующим образом:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(I_m \cos \xi, U_0) d\xi, \quad (11.11)$$

Постоянное напряжение смещения играет роль параметра данной функции

$$I_n = 2\operatorname{Re} C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(U_m \cos \xi, U_0) \cos n\xi d\xi,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

■
спектральный состав тока в безынерционном нелинейном двухполюснике

Формулы (11.10) и (11.11) дают общее решение задачи о спектре тока в нелинейном безынерционном элементе при гармоническом внешнем воздействии. Оказывается, что ток

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + n\varphi), \quad (11.12)$$

кроме постоянной составляющей I_0 , содержит бесконечную последовательность гармоник с амплитудами I_n , $n = 1, 2, \dots$. Амплитуды гармоник в соответствии с (11.11) зависят от параметров U_m и U_0 , а также от вида аппроксимирующей функции.

Кусочно-линейная аппроксимация. Форма тока в цепи, содержащей нелинейный элемент с характеристикой

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ S(u - U_n), & u \geq U_n, \end{cases} \quad (11.13)$$

на который подано напряжение

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t,$$

видна из построения на рис. 11.5.

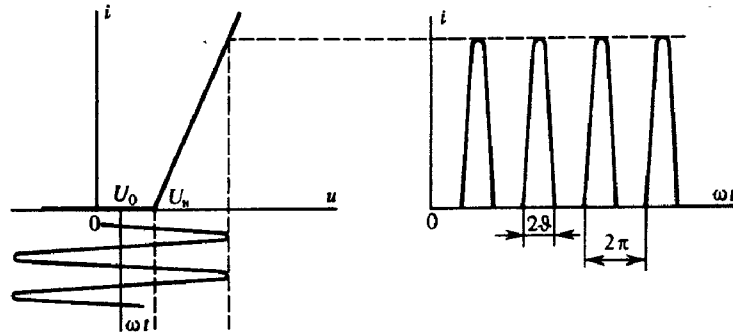


Рис. 11.5. Форма тока в цепи, содержащей нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой

График тока имеет характерный вид косинусоидальных импульсов с отсечкой. Спектральный состав такого периодического процесса подробно изучался в гл. 2.

Угол отсечки импульсов тока определяется из равенства $U_0 + U_m \cos \vartheta = U_n$, откуда

$$\cos \vartheta = \frac{U_n - U_0}{U_m}. \quad (11.14)$$

Постоянную составляющую и амплитуды гармоник тока вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} I_0 &= SU_m \gamma_0(\vartheta), \\ I_n &= SU_m \gamma_n(\vartheta), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11.15)$$

в которые входят соответствующие функции Берга $\gamma_n(\vartheta)$.

Пример 11.2. Нелинейный элемент имеет кусочно-линейную ВАХ с параметрами $U_n = 0.6$ В, $S = 25$ мА/В. К данному элементу приложено напряжение (В) $u = 0.2 + 0.8 \cos \omega t$. Вычислить постоянную составляющую I_0 и первую гармонику I_1 тока.

Так как $\cos \vartheta = (0.6 - 0.2)/0.8 = 0.5$, то $\vartheta = 60^\circ$.

Значения функций Берга:

$$\gamma_0(\vartheta) = (1/\pi)(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) = 0.109,$$

$$\gamma_1(\vartheta) = (1/\pi)(\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) = 0.196.$$

По формулам (11.15) находим $I_0 = 25 \cdot 0.8 \cdot 0.109 = 2.18$ мА, $I_1 = 25 \cdot 0.8 \cdot 0.196 = 3.92$ мА.

Степенная аппроксимация. Пусть в окрестности рабочей точки U_0 вольт-амперная характеристика нелинейного элемента представлена в виде

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots; \quad (11.16)$$

приложенное к нелинейному двухполюснику напряжение

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t. \quad (11.17)$$

Воспользовавшись известными формулами

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2x + \cos 4x),$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x),$$

.....

путем подстановки (11.17) в (11.16) получаем

$$\begin{aligned} i(t) &= (a_0 + \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{3}{8}a_4U_m^4 + \dots) + \\ &+ (a_1U_m + \frac{3}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{8}a_5U_m^5 + \dots) \cos \omega t + \\ &+ (\frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{1}{8}a_4U_m^4 + \dots) \cos 2\omega t + \\ &+ (\frac{1}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{16}a_5U_m^5 + \dots) \cos 3\omega t + \dots \end{aligned} \quad (11.18)$$

Отсюда вытекают следующие соотношения для расчета постоянной составляющей тока и амплитуд гармоник:

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{3}{8}a_4U_m^4 + \dots, \\ I_1 &= a_1U_m + \frac{3}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{8}a_5U_m^5 + \dots, \\ I_2 &= \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{1}{8}a_4U_m^4 + \dots, \\ I_3 &= \frac{1}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{16}a_5U_m^5 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (11.19)$$

Общее выражение при произвольном номере гармоники n таково:

Постоянная составляющая и амплитуды четных гармоник определяются коэффициентами степенного ряда с четными номерами. Амплитуды нечетных гармоник зависят лишь от нечетных коэффициентов

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{2^{2k+n-1} k! (k+n)!} a_{2k+n} U_m^{2k+n}. \quad (11.20)$$

Показательная аппроксимация. В случае, когда ВАХ двухполюсника аппроксимирована выражением

$$i(u) = b [\exp(au) - 1],$$

для вычисления спектра тока используют формулу

$$\exp(m \cos x) = I_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(m) \cos nx,$$

где $I_k(m)$ — модифицированная функция Бесселя k -го индекса.

Если к нелинейному двухполюснику с экспоненциальной характеристикой приложена сумма напряжений смещения и гармонического сигнала, т. е. $u = U_0 + U_m \cos \omega t$, то

$$i(t) = b [\exp(aU_0) I_0(aU_m) - 1] + + 2b \exp(aU_0) \sum_{n=1}^{\infty} I_n(aU_m) \cos n\omega t. \quad (11.21)$$

Нелинейные искажения в усилителе с резистивной нагрузкой. Трансформация спектра входного сигнала в нелинейных цепях является чрезвычайно важным явлением. С одной стороны, на нем основана работа целого ряда радиотехнических устройств (модуляторов, детекторов и т. д.), которые будут рассмотрены ниже; с другой, из-за нелинейности характеристик возникают некоторые нежелательные эффекты, которые необходимо оценивать и учитывать.

Рассмотрим, например, транзисторный усилитель, нагрузкой которого служит резистор R_n . В отличие от усилителя малых сигналов (см. гл. 8) будем полагать, что амплитуда входного гармонического сигнала $U_{mвх}$ достаточно велика для того, чтобы сделать обязательным учет нелинейности проходной характеристики транзистора $i_K(u_{БЭ})$. Пусть в простейшем случае эта характеристика при некотором выборе рабочей точки задается многочленом второй степени:

$$i_K = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0) + a_2(u_{БЭ} - U_0)^2.$$

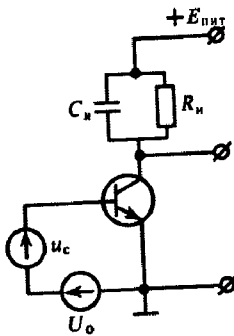
Подав на вход усилителя напряжение

$$u_{БЭ} = U_0 + U_{mвх} \cos \omega t,$$

в коллекторной цепи будем иметь постоянную составляющую тока, а также токи, отвечающие первой и второй гармоникам частоты сигнала, причем на основании (11.19)

$$I_1 = a_1 U_{mвх}, \quad I_2 = a_2 U_{mвх}^2 / 2.$$

Эти гармоники тока, проходя через резистор нагрузки, создают на нем падение напряжения, которое является выходным сигналом. Для того чтобы количественно оценить степень искажения сигнала на выходе усилителя, вводят



величину $k_{нл}$, называемую *коэффициентом нелинейных искажений* усилителя и равную отношению среднеквадратического уровня всех высших гармоник тока к амплитуде тока полезного сигнала:

$$k_{нл} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}}{I_1}. \quad (11.22)$$

В данном случае

$$k_{нл} = I_2/I_1 = 1/2 (a_2/a_1) U_{мвх}. \quad (11.23)$$

Заметим, что коэффициент нелинейных искажений увеличивается с ростом амплитуды сигнала.

11.3. Нелинейные резонансные усилители и умножители частоты

В технике радиопередающих устройств широко применяются резонансные усилители мощности. Их отличительная черта — работа при больших амплитудах входных напряжений, что делает обязательным учет нелинейного вида вольт-амперных характеристик активных элементов (транзисторов или ламп).

Принцип работы нелинейного резонансного усилителя. Рассмотрим транзисторный усилитель (рис. 11.6, а) с нагрузкой в виде параллельного колебательного контура. На вход усилителя подано напряжение $u_{вх}(t) = U_0 + U_{мвх} \cos \omega t$; колебательный контур настроен на частоту сигнала: $\omega_{рез} = \omega$.

Предположим, что характеристика $i_k(u_{бэ})$ транзистора аппроксимирована отрезками прямых, и обратимся к рис. 11.6, б. Ток в цепи коллектора имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой. Эти импульсы обладают сложным спектральным составом, однако ведущую роль в работе устройства играет лишь первая гармоника тока, частота которой совпадает с резонансной частотой контура; сопро-

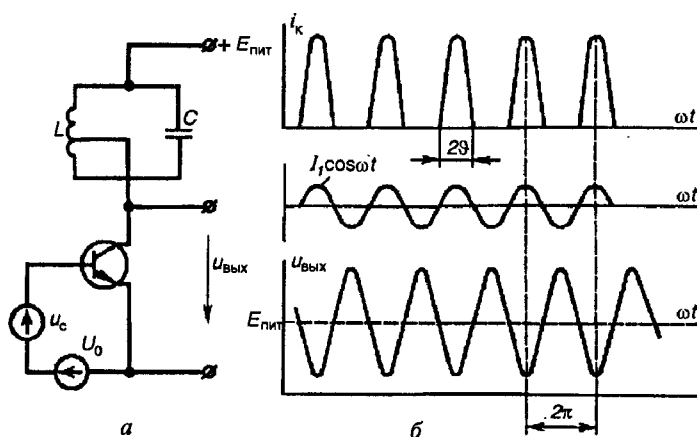


Рис. 11.6. Принципиальная схема резонансного усилителя (а) и временные диаграммы его работы (б)

●
коэффициент нелинейных искажений

тивление колебательной системы на частотах 2ω , 3ω и т. д. столь мало, что высшие гармоники практически не дают вклада в выходной сигнал.

Первая гармоника коллекторного тока создает на выходе полезное напряжение с амплитудой

$$U_{m\text{вых}} = I_1 R_{\text{рез}} = S R_{\text{рез}} U_{m\text{вх}} \gamma_1(\vartheta). \quad (11.24)$$

Аналогично, используя формулу (11.19), можно записать выражение амплитуды гармонического сигнала на выходе резонансного усилителя при степенной аппроксимации характеристики транзистора:

$$U_{m\text{вых}} = R_{\text{рез}} (a_1 U_{m\text{вх}} + \frac{3}{4} a_3 U_{m\text{вх}}^3 + \frac{5}{8} a_5 U_{m\text{вх}}^5 + \dots). \quad (11.25)$$

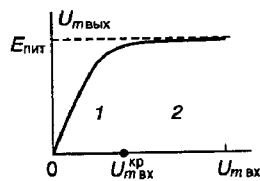
Колебательная характеристика. Так принято называть зависимость $U_{m\text{вых}} = f(U_{m\text{вх}})$, вытекающую из формулы (11.24) или (11.25). Естественное требование к колебательной характеристике — ее линейность, что особенно важно при усилении АМ-сигналов. Как видно, например, из выражения (11.24), колебательная характеристика в общем случае нелинейна, поскольку угол отсечки ϑ , а значит, и коэффициент Берга $\gamma_1(\vartheta)$ зависят от амплитуды возбуждающего напряжения $U_{m\text{вх}}$. Исключение составляет случай, когда положение рабочей точки совпадает с началом характеристики. При этом, как легко видеть, $\vartheta = 90^\circ$ независимо от $U_{m\text{вх}}$.

Работа усилителя с углом отсечки 90° выгодна еще и потому, что в отсутствие высокочастотного сигнала (режим «молчания») постоянная составляющая коллекторного тока обращается в нуль. Данное обстоятельство благоприятно сказывается на КПД усилителя.

Важным параметром колебательной характеристики является ширина ее линейного участка, который определяет динамический диапазон усиливаемых сигналов. Естественная причина, ограничивающая рост колебательной характеристики, состоит в следующем: при некотором критическом значении амплитуды входного сигнала $U_{m\text{вх}}^{\text{кр}}$ колебательное напряжение на контуре становится близким по значению к напряжению источника питания $E_{\text{пит}}$. Дальнейший рост амплитуды напряжения на контуре становится невозможным, поскольку при этом в некоторые моменты времени мгновенное значение напряжения на коллекторе транзистора становится малым. Как следствие, нормально запертый коллекторный переход открывается и цепь коллектор — база — источник сигнала — источник питания резко шунтирует колебательную систему усилителя.

Если $U_{m\text{вх}} > U_{m\text{вх}}^{\text{кр}}$, то говорят, что усилитель работает в *перенапряженном режиме*. Этот режим непригоден для усиления АМ-сигналов. Однако, значительно снижая напряжение источника питания, резонансный усилитель можно перевести в перенапряженный режим, превратив его в ограничитель амплитуды квазигармонических колебаний — полезное устройство, ликвидирующее паразитную амплитудную модуляцию ЧМ- или ФМ-сигналов.

▲
решите задачу 2



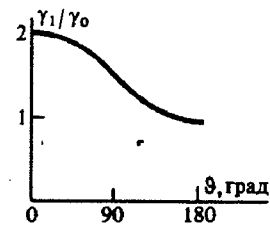
1 — недонапряженный режим; 2 — перенапряженный режим

Энергетические соотношения в нелинейном резонансном усилителе. Рассматриваемые здесь резонансные усилители — как правило, достаточно мощные устройства, и для них немаловажен высокий коэффициент полезного действия. Чтобы вычислить КПД, необходимо знать мощность, потребляемую от источника питания: $P_{\text{пит}} = E_{\text{пит}} I_0$ и полезную активную мощность, передаваемую колебательному контуру: $P_{\text{пол}} = U_{\text{т.вых}} I_1 / 2$.

В мощных усилителях обычно стремятся максимально полно использовать источник питания, приближаясь к границе перенапряженного режима, т. е. $U_{\text{т.вых}} \approx E_{\text{пит}}$. Тогда

$$\text{КПД} = P_{\text{пол}} / P_{\text{пит}} = \frac{1}{2} \gamma_1(\vartheta) / \gamma_0(\vartheta). \quad (11.26)$$

Исследуя отношение $\gamma_1(\vartheta) / \gamma_0(\vartheta)$, легко убедиться, что оно максимально и равно двум при $\vartheta = 0^\circ$; с ростом ϑ это отношение уменьшается, составляя $\pi/2 = 1.57$ при 90° . Поэтому с точки зрения эффективности использования источника питания выгоден режим с малым углом отсечки, когда КПД усилителя приближается к единице. При этом электронный прибор большую часть времени находится в запертом состоянии и тепловое рассеяние мощности на коллекторе (аноде) не происходит. Однако при этом резко снижается коэффициент γ_1 и для получения заданной полезной мощности приходится существенно увеличивать амплитуду входного сигнала, что не всегда возможно. Принимая во внимание требование линейности колебательной характеристики, на практике идут на некоторое снижение КПД и выбирают угол отсечки, близкий к 90° .



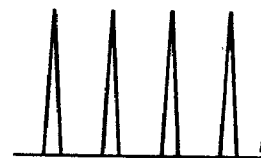
Резонансное умножение частоты. Если в схеме резонансного усилителя, работающего с большой амплитудой входного сигнала, колебательная система будет настроена на частоту $n\omega$ — частоту одной из высших гармоник входного сигнала, то данное устройство может использоваться в качестве умножителя частоты.

Потребность в умножителях возникает, например, при создании источников гармонических колебаний с высокой стабильностью частоты, если непосредственное генерирование таких колебаний в заданном частотном диапазоне невозможно, однако в распоряжении имеется весьма стабильный низкочастотный генератор.

Расчеты умножителей частоты и нелинейных резонансных усилителей в принципе не отличаются. По аналогии с (11.24), амплитуда выходного сигнала умножителя при кусочно-линейной аппроксимации

$$U_{\text{т.вых}} = S R_{\text{рез}} U_{\text{т.вх}} \gamma_n(\vartheta). \quad (11.27)$$

Трудность создания резонансных умножителей частоты заключается в низких значениях $\gamma_n(\vartheta)$ при большой кратности умножения. Поэтому следует выбирать углы отсечки, максимизирующие соответствующие коэффициенты Берга. Чем выше скважность последовательности импульсов коллекторного тока, тем богаче их спектральный состав. Отсюда



Импульсы с малым углом отсечки

следует, что, желая создать умножитель с высокой кратностью, следует выбирать малые углы отсечки. Анализ функций $\gamma_n(\vartheta)$ показывает, что существует оптимальный угол $\vartheta_{\text{опт}}$, причем

$$\vartheta_{\text{опт}} = 180^\circ/n. \quad (11.28)$$

Именно таким должен быть угол отсечки тока в умножителе частоты при фиксированном значении амплитуды возбуждающего напряжения.

11.4. Безынерционные нелинейные преобразования суммы нескольких гармонических сигналов

Свойство нелинейной цепи обогащать спектр, создавая на выходе спектральные составляющие, первоначально отсутствующие на входе, ярче всего проявляется, если входной сигнал представляет собой сумму некоторого числа гармонических колебаний с различными частотами. Эффект возникновения большого числа новых спектральных составляющих лежит в основе важных для радиотехники нелинейных преобразований сигналов.

Бигармоническое воздействие на нелинейный элемент со степенной характеристикой. Будем изучать нелинейный двухполюсник, вольт-амперная характеристика которого для конкретности описывается многочленом 2-й степени:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2. \quad (11.29)$$

Приложенное напряжение помимо постоянной составляющей содержит два гармонических колебания с различными частотами ω_1 и ω_2 ; амплитуды колебаний равны U_{m1} и U_{m2} соответственно:

$$u = U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (11.30)$$



Спектр бигармонического сигнала

Такой сигнал в радиотехнике принято называть *бигармоническим воздействием*. Он очень удобен для выяснения принципиальных особенностей преобразования спектра в нелинейных цепях.

Подставим сигнал (11.30) в формулу (11.29):

$$i(t) = a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + a_2 U_{m1}^2 \cos^2 \omega_1 t + \\ + 2a_2 U_{m1} U_{m2} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + a_2 U_{m2}^2 \cos^2 \omega_2 t.$$

Выполнив элементарные тригонометрические преобразования и сгруппировав члены, приходим к следующему спектральному представлению тока в нелинейном двухполюснике:

$$i(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{m1}^2 + U_{m2}^2) + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + \\ + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + \\ + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_1 + \omega_2) t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_1 - \omega_2) t. \quad (11.31)$$

▲
решите задачу 3

Видно, что в составе тока присутствуют слагаемые, встречавшиеся ранее: постоянная составляющая, а также

первые и вторые гармоники обоих источников входного сигнала. Принципиально новым является появление двух гармонических составляющих с частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$. Амплитуды этих колебаний, равные $a_2 U_{m1} U_{m2}$, в одинаковой мере зависят от амплитуд входных сигналов и обращаются в нуль, если один из источников на входе отсутствует. Это свидетельствует о том, что из-за нелинейности рассматриваемого двухполюсника в нем происходит взаимодействие колебаний, соответствующих отдельным гармоническим составляющим входного сигнала. На рис. 11.7 изображена полная спектральная диаграмма тока в двухполюснике применительно к выбранному виду входного сигнала.

Влияние кубического члена вольт-амперной характеристики. Несколько усложним задачу и будем считать, что в составе вольт-амперной характеристики $i(u)$ имеется кубическое слагаемое, которое обуславливает дополнительный ток

$$i_3(t) = a_3 (u - U_0)^3. \quad (11.32)$$

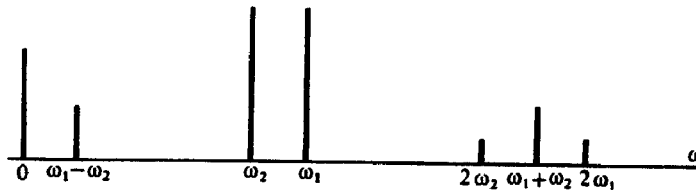


Рис. 11.7. Спектральная диаграмма тока в нелинейном двухполюснике с вольт-амперной характеристикой, описываемой квадратичным многочленом (входной сигнал — бигармоническое колебание)

Подставив сюда сигнал (11.30), получим

$$\begin{aligned} i_3(t) = a_3 [& (3/4 U_{m1}^3 + 3/2 U_{m1} U_{m2}^2) \cos \omega_1 t + \\ & + (3/4 U_{m2}^3 + 3/2 U_{m1}^2 U_{m2}) \cos \omega_2 t + 1/4 U_{m1}^3 \cos 3\omega_1 t + \\ & + 1/4 U_{m2}^3 \cos 3\omega_2 t + 3/4 U_{m1}^2 U_{m2} \cos (2\omega_1 + \omega_2) t + \\ & + 3/4 U_{m1} U_{m2}^2 \cos (2\omega_1 - \omega_2) t + \\ & + 3/4 U_{m1} U_{m2}^2 \cos (2\omega_2 + \omega_1) t + \\ & + 3/4 U_{m1} U_{m2}^2 \cos (2\omega_2 - \omega_1) t]. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Видно, что, с одной стороны, кубическое слагаемое несколько изменяет уровень амплитуд первых гармоник тока, имеющих частоты ω_1 и ω_2 . Существеннее, однако, появление новых спектральных составляющих с частотами $3\omega_1$, $3\omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 + \omega_1$, $2\omega_2 - \omega_1$.

Комбинационные частоты. Рассмотрим общую постановку задачи о воздействии нескольких гармонических сигналов с разными частотами на безынерционный нелинейный элемент.

Пусть к данному элементу приложено M напряжений сигналов, имеющих вид

$$\begin{aligned} u_{c1}(t) &= U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = U_{m1} \cos \psi_1, \\ u_{c2}(t) &= U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = U_{m2} \cos \psi_2, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{cM}(t) &= U_{mM} \cos(\omega_M t + \varphi_M) = U_{mM} \cos \psi_M. \end{aligned}$$

По отношению к одному из этих источников, скажем, с частотой ω_1 , нелинейный элемент представляет собой двух-полюсник, описываемый вольт-амперной характеристикой

$$i = i(U_{m1} \cos \psi_1, U_{m2} \cos \psi_2, \dots, U_{mM} \cos \psi_M). \quad (11.34)$$

Выражение (11.34) представляет собой функцию M независимых аргументов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$; по каждому из них функция периодична с периодом 2π , поэтому она может быть разложена в M -кратный ряд Фурье:

Эта формула обобщает принцип спектрального анализа периодических сигналов на случай функции, зависящей от нескольких аргументов [16]

$$i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_M=-\infty}^{\infty} C_{n_1 n_2 \dots n_M} \times \\ \times \exp[j(n_1 \psi_1 + n_2 \psi_2 + \dots + n_M \psi_M)]. \quad (11.35)$$

Коэффициенты данного ряда

$$C_{n_1 n_2 \dots n_M} = \frac{1}{(2\pi)^M} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} i(U_{m1} \cos \psi_1, U_{m2} \cos \psi_2, \dots, \\ \dots, U_{mM} \cos \psi_M) \exp[-j(n_1 \psi_1 + n_2 \psi_2 + \dots + n_M \psi_M)] d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_M. \quad (11.36)$$

Функция $i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M)$ — четная по каждому из аргументов, поэтому ряд (11.35) фактически имеет вид

$$i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_M=-\infty}^{\infty} I_{|n_1| |n_2| \dots |n_M|} \times \\ \times \cos(n_1 \psi_1 + n_2 \psi_2 + \dots + n_M \psi_M).$$

Амплитудные коэффициенты этого ряда $I_{|n_1| |n_2| \dots |n_M|} = 2 \operatorname{Re} C_{n_1 n_2 \dots n_M}$ не зависят от того, какие знаки (положительные или отрицательные) имеют индексы суммирования.

Полученное общее решение дает возможность представить ток в рассматриваемом двухполюснике как функцию времени:

$$i(t) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_M=-\infty}^{\infty} I_{|n_1| |n_2| \dots |n_M|} \times \\ \times \cos[(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_M \omega_M) t + \\ + (n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 + \dots + n_M \varphi_M)]. \quad (11.37)$$

Всевозможные частоты гармонических колебаний, входящие в формулу (11.37), называют *комбинационными частотами*:

$$\omega_{\text{ком}} = |n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_M\omega_M|, \quad (11.38)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_M$ — любые целые числа, положительные и отрицательные, включая нуль.

Таким образом, показано, что спектр тока в безынерционном нелинейном двухполюснике, находящемся под воздействием нескольких гармонических сигналов с различными частотами, образован в общем случае бесконечной совокупностью комбинационных частот вида (11.38).

Комбинационные частоты принято группировать, объединяя вместе все частоты, для которых

$$|n_1| + |n_2| + \dots + |n_k| + \dots = N. \quad (11.39)$$

Число N называют *порядком комбинационной частоты*.

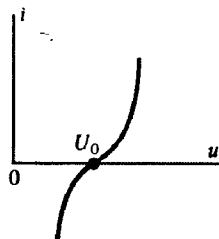
Рассмотренный ранее частный пример показывает, что в спектре тока, проходящего через нелинейный элемент с характеристикой, содержащей степени не выше 3-й, при возбуждении системы суммой двух гармонических сигналов наблюдаются комбинационные следующие частоты:

N	Частоты
1	ω_1, ω_2
2	$2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$
3	$3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$

Можно заметить закономерность: слагаемое со степенью N в вольт-амперной характеристике элемента дает комбинационные составляющие с предельным порядком, равным степени этого слагаемого. При этом если N — четное число, то возникают комбинационные частоты четных порядков: $N, N-2, N-4, \dots$ вплоть до $N=0$ (постоянная составляющая). Если же N нечетно, то порядки комбинационных частот также нечетны: $N, N-2, N-4, \dots$ вплоть до $N=1$.

●
комбинационные
частоты

▲
решите задачу 3



Пример 11.3. Нелинейный двухполюсник имеет кубическую ВАХ $i(u) = a_3(u - U_0)^3$. Входное напряжение является суммой трех гармонических колебаний: $u(t) = U_0 + U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos\omega_2 t + U_{m3}\cos\omega_3 t$. Найти частоты всех комбинационных составляющих тока.

Поскольку степень ВАХ равна трем, будут наблюдаться комбинационные частоты с $N=1$ и $N=3$.

Комбинационные частоты 1-го порядка: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Комбинационные частоты 3-го порядка: $3\omega_1, 3\omega_2, 3\omega_3$,

$$|\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3|, |\pm 2\omega_1 \pm \omega_2|, |\pm 2\omega_1 \pm \omega_3|, |\pm 2\omega_2 \pm \omega_1|, \\ |\pm 2\omega_2 \pm \omega_3|, |\pm 2\omega_3 \pm \omega_1|, |\pm 2\omega_3 \pm \omega_2|.$$

Фактически необходимо учитывать лишь различающиеся частоты. Так, выражениям $2\omega_1 + \omega_2$ и $-2\omega_1 - 2\omega_2$ отвечает одна и та же частота.

Эффекты, сопровождающие нелинейные преобразования нескольких колебаний. Возникновение комбинационных составляющих в выходном сигнале безынерционного нелинейного преобразователя, а также зависимость амплитуд комбинационных колебаний на выходе от амплитуд сигналов на входе обуславливает ряд принципиально важных эффектов, с которыми приходится сталкиваться при построении радиотехнических устройств и систем.

К числу таких явлений относится в первую очередь *перенос модуляции с одной несущей частоты на другую*.

Пусть, например, к входу нелинейного двухполосника с кубической ВАХ

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_3(u - U_0)^3 \quad (11.40)$$

помимо постоянного напряжения смещения U_0 приложена сумма двух напряжений: однотонового АМ-сигнала $u_{c1} = U_{m1}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_1 t$ и немодулированного сигнала $u_{c2} = U_{m2} \cos \omega_2 t$.

На основании формулы (11.33) убеждаемся, что составляющая тока с частотой ω_2 имеет при этом амплитуду

$$\begin{aligned} I_{\omega_2} &= a_1 U_{m2} + \frac{3}{4} a_3 U_{m2}^3 + \frac{3}{2} a_3 U_1^2(t) U_{m2} = \\ &= a_1 U_{m2} + \frac{3}{4} a_3 U_{m2}^3 + \frac{3}{2} a_3 U_{m1}^2 U_{m2} \times \\ &\quad \times (1 + \frac{1}{2} M^2 + 2M \cos \Omega t + \frac{1}{2} M^2 \cos 2\Omega t). \end{aligned} \quad (11.41)$$

Видно, что рассматриваемая составляющая представляет собой АМ-колебание, промодулированное частотами Ω и 2Ω . Налицо перенос модуляции с несущей частоты ω_1 на новую несущую частоту ω_2 .

Из формулы (11.33) следует, что промодулированными по амплитуде окажутся также комбинационные колебания с частотами $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 + \omega_1$ и $2\omega_2 - \omega_1$.

Описанное здесь явление в радиотехнике называют *интермодуляцией*. Следствием его может оказаться весьма ощутимое снижение работоспособности приемного устройства, которое содержит нелинейный элемент, возбуждаемый несколькими сигналами. Если даже частоты этих сигналов существенно отличаются от номинальной рабочей частоты приемника, одна или несколько комбинационных частот могут попасть в полосу пропускания и быть приняты наравне с полезным сигналом.

Борьба с интермодуляционными сигналами — одна из составных частей работы по обеспечению электромагнитной совместимости (ЭМС) радиоэлектронных средств.

К интермодуляции близко примыкает явление, состоящее в том, что за счет нелинейного взаимодействия происходит усиление или подавление одного сигнала другим. Проиллюстрируем это на примере нелинейного элемента с ВАХ вида (11.40). Пусть на входе действуют два немодулированных сигнала с различными частотами: $u_{c1} = U_{m1} \cos \omega_1 t$ и $u_{c2} = U_{m2} \cos \omega_2 t$. Амплитуда тока I_{ω_2} в соответствии с формулой (11.41) существенным образом зависит не только от

●
интермодуляция

●
электромагнитная
совместимость

■
усиление и подав-
ление сигналов
в безынерционном
нелинейном эле-
менте

«собственной» амплитуды U_{m2} , но и от амплитуды U_{m1} источника с частотой ω_1 . Характер этой зависимости определяется знаком коэффициента a_3 . Если $a_3 > 0$, то второй сигнал усиливается за счет энергии первого. Если же $a_3 < 0$, то, наоборот, наблюдается подавление одного сигнала другим.

Отметим, что нелинейное подавление всегда проявляется по отношению к более слабому сигналу. Сильная помеха может настолько подавить слабый полезный сигнал, что дальнейшее его усиление становится практически невозможным из-за шумов. Однако встречается и обратная ситуация — сильный полезный сигнал, взаимодействуя в нелинейном элементе приемника со слабой помехой, подавляет ее, так что качество приема улучшается.

11.5. Получение модулированных радиосигналов

Подавая на безынерционный нелинейный элемент сумму исходных колебаний, в выходном сигнале можно наблюдать всевозможные комбинационные составляющие. Если теперь пропустить выходной сигнал через линейный частотный фильтр, то можно выделить ряд полезных компонентов преобразованного сигнала. На этом принципе основана работа большого числа радиотехнических устройств, в частности модуляторов.

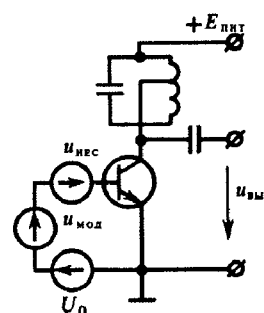
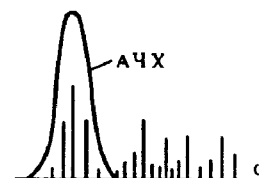
Принцип работы амплитудного модулятора. Амплитудным модулятором называют устройство, создающее на выходных зажимах АМ-сигнал вида $u_{AM}(t) = U_m(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ при подаче на входы цепи гармонического несущего колебания $u_{нес}(t) = U_{mнес} \cos \omega_0 t$ и низкочастотного модулирующего сигнала $u_{мод}(t) = U_{mмод} \cos \Omega t$. Чаще всего амплитудные модуляторы строят, используя эффект преобразования спектра суммы двух сигналов в безынерционном нелинейном элементе.

Простейшим амплитудным модулятором служит нелинейный усилитель, у которого резонансный контур в выходной цепи настроен на частоту несущего колебания. К входу модулятора приложено напряжение

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{mмод} \cos \Omega t + U_{mнес} \cos \omega_0 t. \quad (11.42)$$

Принцип работы данного модулятора поясняется осциллограммами напряжений и токов, показанными на рис. 11.8.

Для определенности считается, что проходная характеристика транзистора аппроксимирована отрезками двух прямых. За счет того, что рабочая точка перемещается в такт с низкочастотным модулирующим колебанием, происходит непрерывное изменение угла отсечки несущего сигнала. Амплитуда первой гармоники последовательности импульсов коллекторного тока оказывается не постоянной во времени. Колебательный контур фильтрует коллекторный ток, выделяя на выходе АМ-сигнал, т. е. несущее колебание с переменной амплитудой, пропорциональной полезному модулирующему сигналу.



■ принцип работы амплитудного модулятора с кусочно-линейной характеристикой

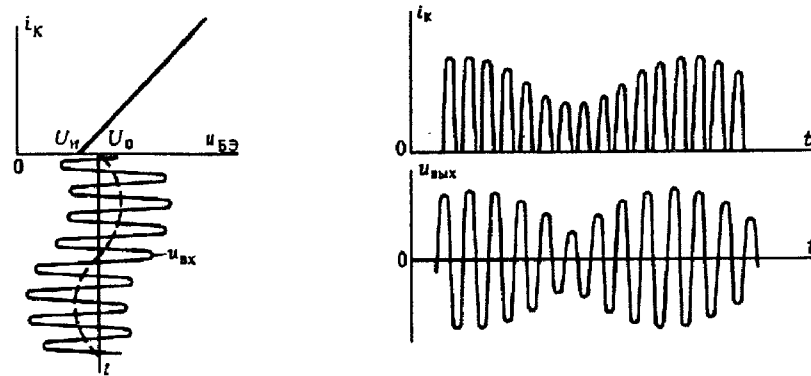


Рис. 11.8. Токи и напряжения в амплитудном модуляторе

Пример 11.4. Транзистор, используемый в амплитудном модуляторе, имеет характеристику с изломом в точке $U_H = 0.6$ В. Амплитуда несущего колебания на входе $U_{мнес} = 0.4$ В, амплитуда модулирующего сигнала $U_{ммод} = 0.1$ В, начальное смещение $U_0 = 0.6$ В. Определить коэффициент амплитудной модуляции M .

В соответствии с исходными данными рабочая точка перемещается в пределах от $U_0 + U_{ммод} = 0.7$ В до $U_0 - U_{ммод} = 0.5$ В. Отсюда находим предельные значения угла отсечки:

$$\vartheta_{\max} = \arccos[(0.6 - 0.7)/0.4] \approx 1.823 \text{ рад},$$

$$\vartheta_{\min} = \arccos[(0.6 - 0.5)/0.4] \approx 1.318 \text{ рад}.$$

Амплитуда первой гармоники коллекторного тока пропорциональна функции Берга $\gamma_1(\vartheta)$, которая изменяется в пределах от

$$\gamma_1(\vartheta_{\max}) = (1/\pi)(\vartheta_{\max} - \sin \vartheta_{\max} \cos \vartheta_{\max}) = 0.657$$

до

$$\gamma_1(\vartheta_{\min}) = (1/\pi)(\vartheta_{\min} - \sin \vartheta_{\min} \cos \vartheta_{\min}) = 0.342.$$

Следовательно, коэффициент модуляции выходного сигнала

$$M = \frac{I_{1\max} - I_{1\min}}{I_{1\max} + I_{1\min}} = \frac{0.657 - 0.342}{0.657 + 0.342} = 0.315.$$

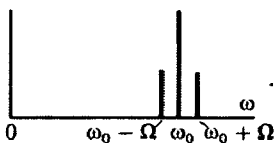
▲ решите задачу 4



Аналитическое рассмотрение. Процесс получения АМ-сигнала можно изучить аналитически, применив развитую выше теорию комбинационных частот. Пусть на входе нелинейного элемента с характеристикой простейшего вида (11.29) действует напряжение $u_{вх}(t) = U_0 + U_{ммод} \cos \Omega t + U_{мнес} \cos \omega_0 t$, причем $\omega_0 \gg \Omega$.

В составе тока, проходящего через двухполосник, можно выделить составляющие с частотами, близкими к ω_0 , которые образуют амплитудно-модулированный ток

$$i_{\text{АМ}}(t) = a_1 U_{мнес} \cos \omega_0 t + a_2 U_{мнес} U_{ммод} \cos(\omega_0 + \Omega)t + a_2 U_{мнес} U_{ммод} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (11.43)$$



Как известно (см. гл. 4), относительный уровень боковых колебаний по сравнению с несущим колебанием равен $M/2$.

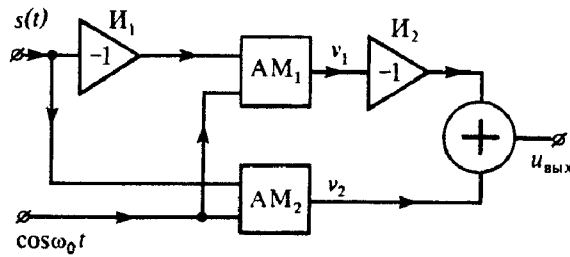


Рис. 11.9. Структурная схема балансного модулятора

Из формулы (11.43) следует, что в данном случае коэффициент амплитудной модуляции выходного сигнала

$$M = (2a_2/a_1) U_{\text{мод}}. \quad (11.44)$$

Получение сигналов с балансной модуляцией. Схему амплитудного модулятора можно видоизменить таким образом, что на выходе устройства будет получен сигнал с подавлением несущим колебанием, т. е. сигнал с балансной модуляцией (см. гл. 4).

Структурная схема балансного модулятора представлена на рис. 11.9.

Здесь несущее гармоническое колебание с частотой ω_0 синфазно подводится к нижним входам двух одинаковых амплитудных модуляторов AM_1 и AM_2 . Модулирующий сигнал $s(t)$ поступает на модулятор AM_1 через инвертор I_1 , имеющий коэффициент передачи, равный -1 . Поэтому на выходах модуляторов будут получены сигналы

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A [1 - Ms(t)] \cos \omega_0 t, \\ v_2(t) &= A [1 + Ms(t)] \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (11.45)$$

где A — постоянный коэффициент.

Инвертор I_2 изменяет знак сигнала v_1 на противоположный, так что выходной сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = v_2 - v_1 = 2AMs(t) \cos \omega_0 t \quad (11.46)$$

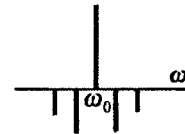
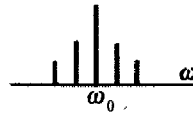
представляет собой произведение модулирующего и несущего колебаний, т. е. действительно является балансно-модулированным колебанием.

Получение сигналов с угловой модуляцией. В 30-х годах Армстронг предложил эффективный метод получения радиосигналов с угловой модуляцией (ЧМ- и ФМ-сигналов). Структурная схема модулятора Армстронга изображена на рис. 11.10.

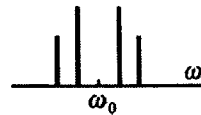
Здесь к одному из входов сумматора приложен сигнал v_1 , поступающий с балансного модулятора БМ. На второй вход сумматора подается немодулированный сигнал v_2 с выхода фазовращателя, изменяющего фазу гармонического сигнала несущей частоты на 90° в сторону запаздывания. Таким образом, сигнал на выходе данного модулятора

$$u_{\text{вых}}(t) = U_{m1}s(t) \cos \omega_0 t + U_{m2} \sin \omega_0 t, \quad (11.47)$$

где U_{m1} и U_{m2} — некоторые постоянные амплитуды.

Спектр сигнала v_1 сигнала v_2 

и колебания на выходе балансного модулятора



Эдвин Армстронг (1890 — 1954) — известный американский радиоинженер и изобретатель

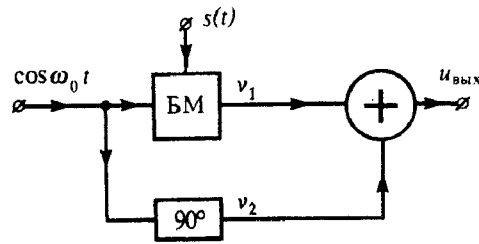
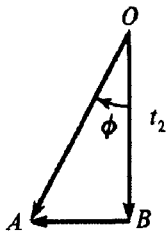
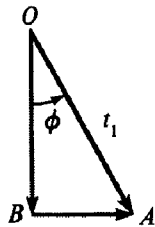


Рис. 11.10. Модулятор Армстронга



Векторные диаграммы сигнала на выходе модулятора Армстронга в два последовательных момента времени t_1 и t_2

Для того чтобы убедиться, что формула (11.47) действительно описывает сигнал с угловой модуляцией, рассмотрим векторную диаграмму этого колебания. Немодулированной составляющей $U_{m2} \sin \omega_0 t$ отвечает постоянный вектор OB длиной U_{m2} . Балансно-модулированный сигнал $U_{m1} s(t) \cos \omega_0 t$ отображается вектором BA . Длина этого вектора $U_{m1} s(t)$ непостоянна во времени, однако он всегда перпендикулярен вектору OB . Ясно, что результирующий вектор OA с течением времени будет поворачиваться, имея центр вращения в точке O . Угол $\phi(t)$, входящий в выражение $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ полной фазы сигнала на выходе модулятора, очевидно, можно найти из соотношения $\operatorname{tg} \phi(t) = U_{m1} s(t) / U_{m2}$.

Обычно стремятся получить линейную зависимость между сигналом $s(t)$ и фазовым углом $\phi(t)$. Для этого устанавливают такой режим работы модулятора, когда $U_{m1} \ll U_{m2}$, так что

$$\phi(t) \approx U_{m1} s(t) / U_{m2}. \quad (11.48)$$

В этом случае мгновенная частота выходного сигнала приблизительно пропорциональна производной низкочастотного передаваемого колебания:

$$\omega_{\text{вых}}(t) \approx \omega_0 + U_{m1} s'(t) / U_{m2}. \quad (11.49)$$

Итак, модулятор Армстронга согласно выражению (11.48) должен работать с малым индексом модуляции, т. е. с малой девиацией частоты. Чтобы преодолеть этот недостаток, в передатчиках ФМ- и ЧМ-сигналов после модулятора предусматривают многократное умножение частоты. Если на входе умножителя девиация частоты составляет $\Delta\omega$, то на выходе она будет равна $n\Delta\omega$, где n — кратность умножения.

11.6. Амплитудное, фазовое и частотное детектирование

Объединяя нелинейные элементы с соответствующими линейными частотно-избирательными звеньями, можно создавать устройства для детектирования (демодуляции) радиосигналов. Ниже будет рассмотрена теория работы важнейших видов детекторов.

Принцип детектирования АМ-сигналов. Операция амплитудного детектирования прямо противоположна амплитудной модуляции. Имея на входе идеального детектора АМ-коле-

бание $u_{\text{вх}}(t) = U_{\text{мвх}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, следует получить на выходе низкочастотный сигнал $u_{\text{вых}}(t) = U_{\text{мвых}} \cos \Omega t$, пропорциональный передаваемому сообщению. Эффективность работы детектора принято оценивать *коэффициентом детектирования*

$$k_{\text{дет}} = U_{\text{мвых}} / (MU_{\text{мвх}}), \quad (11.50)$$

равным отношению амплитуды низкочастотного сигнала на выходе к «размаху» изменения амплитуды высокочастотного сигнала на входе.

Можно осуществить детектирование, подав АМ-сигнал на безынерционный нелинейный элемент и предусмотрев последующую фильтрацию низкочастотных составляющих спектра.

Рассмотрим схему так называемого *коллекторного детектора*, представляющего собой транзисторное устройство с нагрузкой в виде параллельной RC -цепи. Для того чтобы нагрузочная цепь выполняла роль частотного фильтра, подавляющего высокочастотные спектральные составляющие, потребуем выполнение неравенств

$$1/(\omega_0 C_n) \ll R_n, \quad 1/(\Omega C_n) \gg R_n. \quad (11.51)$$

Это означает, что для сигнала с частотой модуляции Ω нагрузка детектора практически резистивна и равна R_n , в то же время модуль сопротивления нагрузки, а значит, и коэффициент передачи системы на несущей частоте ω_0 пренебрежимо мал.

Пусть входное напряжение на базе транзистора

$$u_{\text{БЭ}}(t) = U_0 + U_{\text{мвх}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

причем амплитуда $U_{\text{мвх}}$ достаточно велика для того, чтобы можно было воспользоваться кусочно-линейной аппроксимацией вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Положим также для простоты, что $U_0 = U_n$ и угол отсечки тока $\vartheta = 90^\circ$ независимо от изменения во времени амплитуды входного сигнала. Процессы в коллекторном детекторе иллюстрируются графиками рис. 11.11.

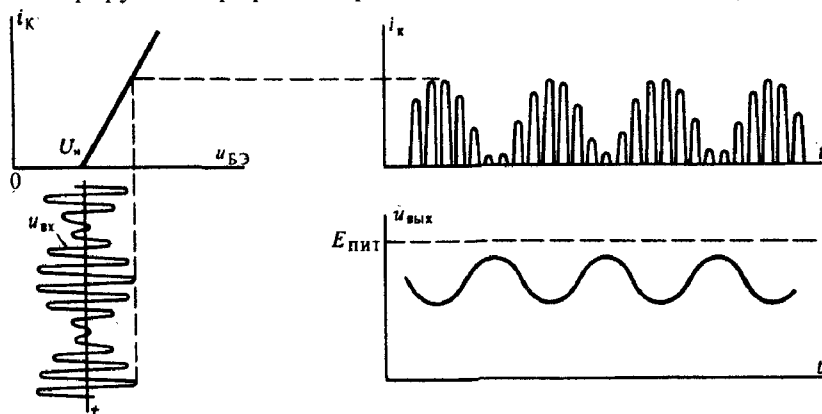


Рис. 11.11. Осциллограммы токов и напряжений в коллекторном детекторе

● коэффициент детектирования

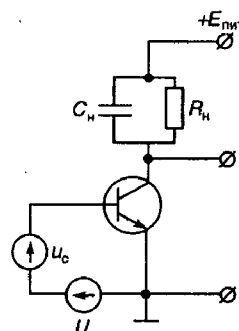


Схема коллекторного детектора

Неравенства (11.51) заведомо могут выполняться, если входной сигнал достаточно узкополосен, т. е. $\omega_0 \gg \Omega$

Последовательность импульсов коллекторного тока оказывается промодулированной по амплитуде; нулевая составляющая тока медленно (с частотой Ω) изменяется во времени, причем

$$I_{0K}(t) = SU_{mвх}(1 + M \cos \Omega t) \gamma_0(90^\circ) = 0.318SU_{mвх}(1 + M \cos \Omega t).$$

Выходное напряжение детектора

$$u_{вых}(t) = E_{пит} - I_{0K}(t)R_n = E_{пит} - 0.318SR_nU_{mвх}(1 + M \cos \Omega t), \quad (11.52)$$

откуда коэффициент детектирования

$$k_{дет} = 0.318SR_n. \quad (11.53)$$

режим линейного детектирования

Существенно, что здесь амплитуды сигналов на входе и на выходе связаны прямой пропорциональностью. Поэтому такой режим работы детектора принято называть *линейным*. Его отличительная черта — отсутствие искажений передаваемого сообщения.

Квадратичное детектирование. Рассмотрим отдельно важный для приложений случай детектирования слабых сигналов, когда вольт-амперная характеристика должна быть аппроксимирована степенной зависимостью вида

$$i(u) = a_0 + a_1(u_{вх} - U_0) + a_2(u_{вх} - U_0)^2 + \dots \quad (11.54)$$

Ограничимся лишь выписанными здесь членами и предположим, что на детектор подано напряжение АМ-сигнала вместе с постоянным смещением U_0 :

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{mвх}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t. \quad (11.55)$$

Подставив (11.55) в (11.54), обнаружим среди разнообразных комбинационных колебаний, присутствующих в токе, следующую низкочастотную составляющую:

$$i_{нч}(t) = a_2U_{mвх}^2M \cos \Omega t + \frac{1}{4}a_2U_{mвх}^2M^2 \cos 2\Omega t. \quad (11.56)$$

Благодаря фильтрующему действию нагрузочной RC -цепи выходной сигнал будет определяться именно этим током:

$$u_{вых}(t) = E_{пит} - a_2R_nU_{mвх}^2M \cos \Omega t - \frac{1}{4}a_2R_nU_{mвх}^2M^2 \cos 2\Omega t. \quad (11.57)$$

нелинейные искажения при детектировании

Полезный эффект детектирования пропорционален здесь величине $U_{mвх}^2$, поэтому детектирование АМ-сигналов с малыми амплитудами является *квадратичным*. Наличие в (11.57) слагаемого, пропорционального $\cos 2\Omega t$, говорит о том, что квадратичное детектирование сопровождается искажениями передаваемого сообщения. Введя коэффициент нелинейных искажений $k_{нл}$, равный отношению амплитуд выходных колебаний с частотами 2Ω и Ω , находим из (11.57), что $k_{нл} = M/4$. Нелинейные искажения оказываются весьма значительными при глубокой амплитудной модуляции на входе. Поэтому в радиоприемных устройствах желательно, чтобы амплитуда

несущего колебания АМ-сигнала, подаваемого на детектор, составляла несколько вольт. При этом реализуется режим линейного детектирования и нелинейных искажений не возникает.

Диодный детектор АМ-сигналов. Широко используется диодный детектор, особенно пригодный для работы с сигналами большого уровня. Такой детектор образован последовательным соединением диода и параллельной RC -цепи, которая выполняет роль частотного фильтра. Параметры RC -цепи выбирают согласно условиям (11.51).

Будем считать, что диод имеет кусочно-линейную ВАХ с нулевым напряжением начала:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ Su, & u \geq 0. \end{cases}$$

Для нормальной работы детектора необходимо, чтобы сопротивление резистора нагрузки R_n значительно превышало сопротивление диода в прямом направлении, т. е. чтобы $SR_n \gg 1$. Пусть на вход детектора подан немодулированный гармонический сигнал $u_{вх}(t) = U_{мвх} \cos \omega_0 t$. Конденсатор заряжается через открытый диод гораздо быстрее, чем разряжается через высокоомный резистор нагрузки. Поэтому осциллограмма выходного сигнала представляет собой пилообразную кривую с малой относительной высотой зубцов. Средний уровень выходного напряжения близок к амплитуде входного сигнала. Таким образом, диод большую часть периода оказывается запертым.

Пренебрежем указанным непостоянством выходного сигнала и будем считать, что $U_{вых}$ — постоянная величина. Заметим далее, что напряжение $U_{вых}$ приложено к диоду в обратном направлении и служит для него напряжением смещения $U_0 = -U_{вых}$. Коэффициент детектирования данного устройства

$$k_{дет} = U_{вых}/U_{мвх} = \cos \vartheta$$

может быть сделан близким к единице, поскольку $U_{вых} \approx U_{мвх}$, а значит, угол отсечки тока достаточно мал.

Угол отсечки находят из соотношения

$$-U_0 = I_0 R_n = S U_{мвх} \gamma_0(\vartheta) R_n,$$

откуда следует трансцендентное уравнение

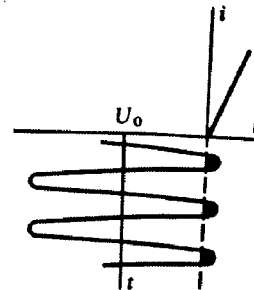
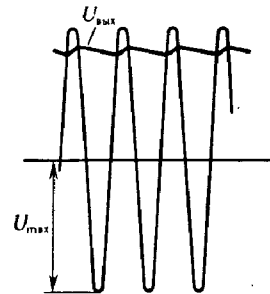
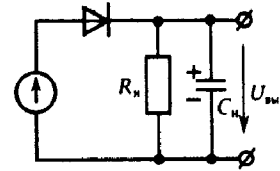
$$\cos \vartheta = (SR_n/\pi)(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)$$

или

$$\boxed{\operatorname{tg} \vartheta - \vartheta = \pi/(SR_n)}. \quad (11.58)$$

При $SR_n \gg 1$ корень этого уравнения близок к нулю, так что из (11.58) вытекает формула для расчета коэффициента детектирования:

$$k_{дет} = \cos \left[\sqrt[3]{3\pi/(SR_n)} \right]. \quad (11.59)$$



Выходное напряжение в диодном детекторе близко к амплитуде входного сигнала

При малых ϑ имеет место: $\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta + \vartheta^3/3$.

Пример 11.5. Диодный детектор имеет параметры: $R_H = 18 \text{ кОм}$, $S = 10 \text{ мА/В}$. Определить коэффициент детектирования данного устройства.

Безразмерное произведение $SR_H = 180$ достаточно велико, поэтому можно воспользоваться формулой (11.59), которая дает

$$k_{\text{дет}} = \cos \left[\sqrt[3]{3 \cdot 14 \cdot 3 / 180} \right] = 0.93.$$

Если на вход диодного детектора поступает АМ-колебание, то при выполнении условий (11.51) выходное напряжение детектора «отслеживает» мгновенный уровень амплитуды входного сигнала.

Взаимодействие сигнала и помехи в амплитудном детекторе.

Предположим, что на входе идеального линейного детектора АМ-сигнала с известным коэффициентом детектирования $k_{\text{дет}}$ присутствует сумма полезного однотонового АМ-колебания и немодулированного колебания помехи:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{\text{мс}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t + U_{\text{мп}} \cos \omega_{\text{п}} t;$$

частоты ω_0 и $\omega_{\text{п}}$ в общем случае различны.

Выходной сигнал детектора пропорционален физической огибающей колебания $u_{\text{вх}}(t)$. Чтобы вычислить этот сигнал, воспользуемся понятием сопряженного сигнала $\hat{u}_{\text{вх}}(t)$ (см. гл. 5), который, очевидно, записывается так:

$$\hat{u}_{\text{вх}}(t) = U_{\text{мс}}(1 + M \cos \Omega t) \sin \omega_0 t + U_{\text{мп}} \sin \omega_{\text{п}} t,$$

откуда

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) &= k_{\text{дет}} \sqrt{u_{\text{вх}}^2 + \hat{u}_{\text{вх}}^2} = \\ &= k_{\text{дет}} U_{\text{мп}} \left[1 + (U_{\text{мс}}/U_{\text{мп}})^2 (1 + 2M \cos \Omega t + M^2 \cos^2 \Omega t) + \right. \\ &\quad \left. + 2(U_{\text{мс}}/U_{\text{мп}})(1 + M \cos \Omega t) \cos(\omega_0 - \omega_{\text{п}})t \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Рассмотрим случай, когда полезный сигнал значительно слабее помехи, т. е. $U_{\text{мс}}/U_{\text{мп}} \ll 1$. Будем интересоваться полезной составляющей выходного колебания, которая изменяется во времени пропорционально передаваемому сообщению $\cos \Omega t$. Разлагая радикал, входящий в (11.60), в ряд по степеням малого параметра $U_{\text{мс}}/U_{\text{мп}}$, убеждаемся, что данная спектральная составляющая создает на выходе колебание

$$U_{\text{пол}}(t) = k_{\text{дет}} U_{\text{мс}} (U_{\text{мс}}/U_{\text{мп}}) M \cos \Omega t. \quad (11.61)$$

Видно, что с ростом амплитуды помехи происходит подавление полезного сигнала. Это явление уже обсуждалось ранее в настоящей главе.

Вредное действие помехи проявляется также в том, что на выходе детектора может возникнуть большое число комбинационных колебаний из-за нелинейного взаимодействия сигнала и помехи.

Фазовое детектирование. Известно много схем фазовых детекторов — устройств для демодуляции колебаний с полной фазой $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, промодулированных по фазовому углу. Работа таких детекторов основана на нелинейном

С этими обстоятельствами приходится считаться при проектировании радиоприемных устройств, обеспечивая тщательную частотную фильтрацию помех в линейных цепях до амплитудного детектора

взаимодействии модулированного сигнала с немодулированным опорным колебанием, которое должно создаваться вспомогательным внешним источником.

Пусть, например, к нелинейному безынерционному двух-полоснику с ВАХ вида $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ приложена сумма двух напряжений:

$$u(t) = u_1 + u_2 = U_{m1} \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + U_{m2} \cos \omega_0 t.$$

Из-за квадратичного слагаемого характеристики в токе будет присутствовать составляющая, которая описывает нелинейное взаимодействие колебаний:

$$i_{вз}(t) = 2a_2 U_{m1} U_{m2} \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \cos \omega_0 t = a_2 U_{m1} U_{m2} \sin \varphi(t) + a_2 U_{m1} U_{m2} \sin[2\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (11.62)$$

Второму слагаемому в последней части формулы (11.62) отвечает высокочастотный сигнал со средней частотой $2\omega_0$, который без труда подавляется линейным фильтром нижних частот (например, RC-цепью). Первое слагаемое в (11.62) описывает низкочастотный ток

$$i_{нч}(t) = a_2 U_{m1} U_{m2} \sin \varphi(t) \approx a_2 U_{m1} U_{m2} \varphi(t), \quad (11.63)$$

приблизленно пропорциональный передаваемому сообщению $\varphi(t)$, если девиация фазы (индекс модуляции) детектируемого сигнала достаточно мала.

При создании фазовых детекторов неизбежны трудности, связанные с требованием жесткой стабилизации фазы колебаний опорного генератора.

Частотное детектирование. При частотной модуляции, как известно, полезное сообщение пропорционально отклонению мгновенной частоты сигнала от частоты несущего колебания. Рассмотрим некоторые способы демодуляции ЧМ-сигналов.

Частотную модуляцию можно превратить в неглубокую амплитудную модуляцию, подавая демодулируемый сигнал на линейный частотный фильтр, настроенный таким образом, чтобы в разложении АЧХ

$$|K(j\omega)| = |K(j\omega_0)| + |K(j\omega_0)|'(\omega - \omega_0) + \dots$$

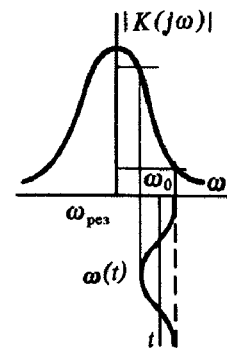
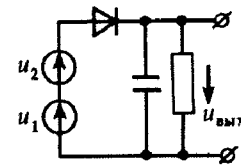
коэффициент $|K(j\omega_0)|'$ был отличен от нуля. Тогда, полагая, что частота детектируемого сигнала $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$, получим на выходе фильтра сигнал со сложной амплитудно-угловой модуляцией. Мгновенная амплитуда переменной составляющей этого сигнала изменяется во времени по закону

$$U_{мвых}(t) = B_0 |K(j\omega_0)|' \Delta\omega \cos \Omega t, \quad (11.64)$$

где B_0 — постоянный коэффициент, т. е. повторяет по форме передаваемое сообщение.

Окончательная обработка сигнала проводится обычным АМ-детектором, включенным на выходе фильтра.

Рассмотренному способу частотного детектирования присущ ряд недостатков — высокие требования к качеству огра-



Чтобы превратить ЧМ в АМ, достаточно расположить несущую частоту ω_0 на «склоне» амплитудно-частотной характеристики резонансного контура

Отметим, что АМ-детектор принципиально нечувствителен к непостоянству во времени мгновенной частоты сигнала, подаваемого на его вход

ничения возможной паразитной АМ на входе фильтра, а также недостаточная линейность характеристики детектирования.

Лучшие результаты обеспечивает способ, основанный на преобразовании ЧМ-сигнала в ФМ-сигнал при помощи линейного частотно-избирательного фильтра с последующим фазовым детектированием. При таком методе демодуляции фазочастотная характеристика избирательной узкополосной цепи (см. гл. 9) в малой окрестности частоты ω_0 имеет вид

$$\varphi_K(\omega) = \varphi_K(\omega_0) - t_{\text{гр}}(\omega - \omega_0), \quad (11.65)$$

где $t_{\text{гр}}$ — групповое время запаздывания.

Если $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$, то узкополосный сигнал на выходе фильтра имеет полную фазу

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi_K(\omega_0) - \Delta\omega t_{\text{гр}} \cos \Omega t,$$

т. е. действительно является ФМ-сигналом.

11.7. Воздействие стационарных случайных сигналов на безынерционные нелинейные цепи

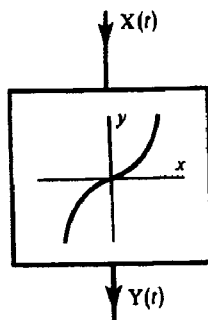
Предположим, что на входе безынерционной нелинейной системы присутствует случайный сигнал $x(t)$, являющийся одной из реализаций стационарного случайного процесса $X(t)$. Выходной сигнал $y(t)$ связан с входным воздействием зависимостью вида $y(t) = f[x(t)]$; ансамбль реализаций $y(t)$ задает стационарный случайный процесс $Y(t)$. Ставится задача найти связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$. При этом возможны два частных подхода:

1. По известной n -мерной плотности вероятности входного случайного процесса $p_{\text{вх}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ ищут аналогичную функцию $p_{\text{вых}}(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, определяющую выходной сигнал.

2. Исследование проводят в рамках корреляционной теории — ищут математическое ожидание m_y и функцию корреляции $R_y(\tau)$ выходного случайного процесса. Наряду с функцией корреляции интерес может представлять спектральная плотность мощности $W_y(\omega)$ выходного сигнала.

Плотность вероятности выходного сигнала после нелинейного преобразования. Первую из поставленных задач легко можно решить теми приемами, которые были описаны в гл. 6 при рассмотрении плотностей вероятности систем случайных величин, подвергнутых функциональным преобразованиям. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — случайные значения, наблюдаемые на входе в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ соответственно, то, учитывая безынерционный характер преобразования, имеем на выходе в те же моменты времени

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n). \quad (11.66)$$



Применив обратную функцию $x = g(y)$, получим

$$x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2), \dots, x_n = g(y_n). \quad (11.67)$$

Тогда многомерная плотность вероятности на выходе

$$p_{\text{вых}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_{\text{вх}}[g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_n)] |D|, \quad (11.68)$$

где D — якобиан преобразования (11.66).

Формула (11.68) решает поставленную задачу в самом общем виде.

Если обратная функция многозначна, следует просуммировать вклады в якобиан от всех ветвей этой функции

Пример 11.6. На входе безынерционного нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax, & x \geq 0 \end{cases}$$

действует гауссов случайный процесс $X(t)$ с нулевым средним значением и заданной дисперсией σ_x^2 . Плотность вероятности входного сигнала

$$p_{\text{вх}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Вычислить плотность вероятности сигнала на выходе.

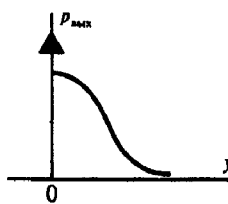
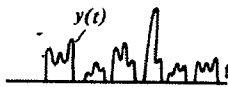
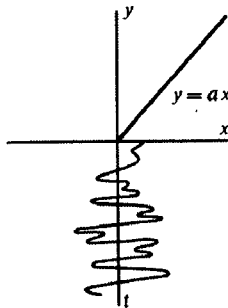
При $x \geq 0$ обратная функция имеет вид $x = y/a$ и, таким образом, $|dx/du| = 1/|a|$. Поэтому

$$p_{\text{вых}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x |a|} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}\right)$$

при $y > 0$. Любому отрицательному значению x соответствует единственное значение $y = 0$. Чтобы обеспечить нормировку плотности вероятности на выходе, следует считать, что плотность вероятности $p_{\text{вых}}(y)$ при $y = 0$ имеет дельта-особенность с коэффициентом, равным $1/2$:

$$p_{\text{вых}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x |a|} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}\right) & \text{при } y \geq 0. \end{cases}$$

Принципиально важно, что, подав на вход нелинейной системы гауссов сигнал, мы наблюдаем на выходе случайный процесс негауссова вида. Мгновенные значения выходного сигнала неотрицательны; в среднем с вероятностью 0.5 сигнал на выходе равен нулю.



Среднее значение сигнала на выходе нелинейной системы.

Простейшая статистическая характеристика стационарного случайного процесса — его среднее значение, получающееся путем усреднения по ансамблю реализаций или, если процесс эргодический, по одной достаточно протяженной реализации. Чтобы вычислить среднее значение сигнала после нелинейного безынерционного преобразования, нужно располагать одномерной плотностью вероятности $p_{\text{вых}}(y)$. На

основании принципа усреднения (см. гл. 6)

$$\bar{y} = m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\text{вых}}(y) dy. \quad (11.69)$$

Таким образом, данная задача сводится к квадратуре. С равным успехом можно найти среднее значение преобразованного сигнала, усреднив функцию $f(x)$ с помощью одномерной плотности вероятности входного сигнала:

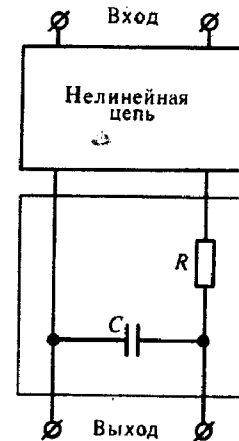
$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\text{вх}}(x) dx. \quad (11.70)$$

Пример 11.7. Найти среднее значение выходного сигнала для системы, описанной в примере 11.6.

По формуле (11.70)

$$\bar{y} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = a\sigma_x/\sqrt{2\pi} = 0.399a\sigma_x.$$

Отсюда следует возможность измерять дисперсию стационарных гауссовых процессов с помощью нелинейного преобразователя и каскадно включенной линейной инерционной цепи, выполняющей операцию усреднения по времени.



Вычисление функции корреляции выходного сигнала. В соответствии с общим правилом функция корреляции сигнала $y(t)$ на выходе безынерционного нелинейного преобразователя

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t+\tau)} - (\bar{y})^2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x_\tau) p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau) dx dx_\tau - [\overline{f(x)}]^2. \end{aligned} \quad (11.71)$$

Для того чтобы можно было воспользоваться формулой (11.71), необходимо располагать функцией $p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau)$ — двумерной плотностью вероятности входного сигнала для двух сечений, разделенных промежутком времени τ .

Вычисления по формуле (11.71) могут оказаться весьма сложными. Окончательный результат в более или менее обобщимом виде удастся получить лишь для нормального процесса на входе, когда

$$p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r_x^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + x_\tau^2 - 2r_x x x_\tau}{2\sigma_x^2 (1-r_x^2)}\right], \quad (11.72)$$

где $r_x(\tau)$ — коэффициент корреляции сигнала на входе.

Пример 11.8. Вычислить функцию корреляции выходного сигнала применительно к условиям, сформулированным в примере 11.6.

Основная трудность заключается в нахождении ковариационного момента

$$\overline{yy_\tau} = \frac{a^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xx_\tau}{2\sigma_x^2 \sqrt{1-r_x^2}} \exp \left[-\frac{x^2 + x_\tau^2 - 2r_x xx_\tau}{2\sigma_x^2(1-r_x^2)} \right] dx dx_\tau.$$

Выполнив замены переменных

$$\xi = \frac{x}{\sigma_x \sqrt{2(1-r_x^2)}}, \quad \xi_\tau = \frac{x_\tau}{\sigma_x \sqrt{2(1-r_x^2)}},$$

запишем среднее значение произведения:

$$\overline{yy_\tau} = (2/\pi) a^2 \sigma_x^2 (1-r_x^2)^{3/2} J,$$

где

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi \xi_\tau \exp(-\xi^2 - \xi_\tau^2 + 2r_x \xi \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau.$$

Интеграл J проще всего вычислить, перейдя к полярным координатам: $\xi = \rho \cos \varphi$, $\xi_\tau = \rho \sin \varphi$

Опуская несложные, но громоздкие выкладки, приведем результат:

$$J = 1/4 (1-r_x^2)^{3/2} [\sqrt{1-r_x^2} + r_x \arccos(-r_x)].$$

Отсюда, используя формулу (11.71), находим функцию корреляции выходного сигнала:

$$R_y(\tau) = \frac{a^2 \sigma_x^2}{2\pi} [\sqrt{1-r_x^2} + r_x \arccos(-r_x) - 1]. \quad (11.73)$$

Поскольку при $\tau = 0$ величина $r_x(0) = 1$, дисперсия сигнала на выходе

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = a^2 \sigma_x^2 (\pi - 1)/(2\pi) = 0.341 a^2 \sigma_x^2. \quad (11.74)$$

▲
решите задачи 6 и 7

Поэтому коэффициент корреляции случайного процесса на выходе безынерционного нелинейного преобразователя с кусочно-линейной характеристикой описывается формулой

$$r_y(\tau) = \frac{1}{\pi - 1} [\sqrt{1-r_x^2} + r_x \arccos(-r_x) - 1]. \quad (11.75)$$

Можно видеть, что при больших сдвигах τ коэффициент корреляции выходного сигнала стремится к нулю.

Нелинейные преобразования узкополосных случайных процессов. Предположим, что входной сигнал нелинейного безынерционного преобразователя является узкополосным случайным процессом с гауссовым законом распределения. Его реализации имеют вид квазигармонических случайных колебаний с центральной частотой ω_0 . Функция корреляции входного сигнала

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (11.76)$$

Найдем функцию корреляции выходного сигнала применительно к конкретному виду нелинейного элемента с

кусочно-линейной характеристикой, который изучался в предыдущих примерах. Непосредственная подстановка r_x из (11.76) в (11.75), хотя и приводит к требуемому результату, но такой путь лишен наглядности. Целесообразно несколько преобразовать выражение (11.75), разложив его правую часть в бесконечный ряд по степеням величины $r_x(\tau)$. Для этого воспользуемся тем, что

$$\arccos(-r_x) = \frac{\pi}{2} + r_x + \frac{r_x^3}{6} + \dots,$$

$$\sqrt{1-r_x^2} = 1 - \frac{r_x^2}{2} - \frac{r_x^4}{8} - \dots$$

Поэтому

$$r_y(\tau) = \frac{1}{\pi-1} \left[\frac{\pi}{2} r_x(\tau) + \frac{1}{2} r_x^2(\tau) + \frac{1}{24} r_x^4(\tau) + \dots \right]. \quad (11.77)$$

Воспользовавшись формулой (11.76), находим, что

$$r_y(\tau) = \frac{1}{\pi-1} \left[\frac{\pi}{2} \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \rho^2(\tau) \cos^2 \omega_0 \tau + \frac{1}{24} \rho^4(\tau) \cos^4 \omega_0 \tau + \dots \right]. \quad (11.78)$$

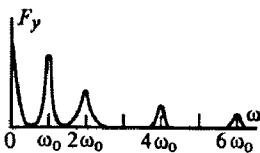
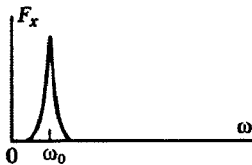
Поскольку

$$\cos^2 \omega_0 \tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau,$$

$$\cos^4 \omega_0 \tau = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0 \tau,$$

из (11.78) следует, что

$$r_y(\tau) \approx 0.117 \rho^2(\tau) + 0.007 \rho^4(\tau) + 0.733 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau + \\ + [0.117 \rho^2(\tau) + 0.01 \rho^4(\tau)] \cos 2\omega_0 \tau + 0.002 \rho^4(\tau) \cos 4\omega_0 \tau. \quad (11.79)$$



Интенсивности высокочастотных спектральных составляющих, как правило, быстро уменьшаются с ростом их номера

Отсюда с помощью теоремы Винера — Ханчина можно установить вид спектра мощности $F_y(\omega)$ выходного случайного процесса. Оказывается, что спектр колебаний на выходе нелинейного преобразователя разбивается на бесконечную сумму составляющих, каждая из которых отображает индивидуальный узкополосный случайный процесс. Максимумы спектральных плотностей мощности этих составляющих наблюдаются на частотах $\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots$. Помимо этого в спектре выходного сигнала возникает низкочастотная составляющая в окрестности нулевой частоты, которую можно рассматривать как результат амплитудного детектирования входного сигнала.

Интересно отметить, что в данном случае спектр выходного сигнала не содержит составляющих с частотами $3\omega_0, 5\omega_0, \dots$. Безусловно, что при других видах характеристики нелинейного элемента можно ожидать появления всех без исключения гармоник центральной частоты входного случайного колебания.

Результаты

- ◇◇ Для аппроксимации реальных вольт-амперных характеристик безынерционных нелинейных двухполюсников используют различные функции простого вида. Наиболее распространены кусочно-линейная, степенная и показательная (экспоненциальная) аппроксимации.
- ◇◇ Ток в нелинейном безынерционном двухполюснике при гармоническом внешнем воздействии содержит в общем случае постоянную составляющую и бесконечное число гармоник — колебаний с частотами, кратными частоте входного сигнала.
- ◇◇ Напряжение на выходе резонансного усилителя, работающего в нелинейном режиме, синусоидально из-за частотно-избирательных свойств контура, несмотря на негармонический характер тока, протекающего через колебательный контур.
- ◇◇ При большой амплитуде входного сигнала в резонансном усилителе возникает перенапряженный режим.
- ◇◇ Воздействие на нелинейный элемент суммы гармонических сигналов с различными частотами приводит к возникновению на выходе колебаний с комбинационными частотами.
- ◇◇ Фильтрация соответствующих комбинационных колебаний позволяет осуществить амплитудную модуляцию, а также детектирование АМ-сигнала.
- ◇◇ При безынерционном нелинейном преобразовании гауссова случайного процесса возникает случайный процесс с негауссовой плотностью вероятности.
- ◇◇ Для того чтобы вычислить функцию корреляции случайного процесса на выходе нелинейного преобразования, необходимо знать двумерную плотность вероятности входного сигнала.

Вопросы

1. При каком условии нелинейное преобразование сигнала можно считать безынерционным?
2. Можно ли так выбрать положение рабочей точки на ВАХ нелинейного двухполюсника, что в составе тока будут отсутствовать гармоники нечетных номеров?
3. Из каких соображений выбирают угол отсечки тока в резонансном усилителе, работающем при больших уровнях входного сигнала?
4. Каков физический принцип работы нелинейного умножителя частоты? Почему трудно добиться высокой кратности умножения?
5. Из каких соображений выбирают параметры нагрузки детектора АМ-колебаний?
6. В чем состоит отличие между линейным и квадратичным детектированием?
7. Чем определяется угол отсечки тока в диодном детекторе?
8. На чем основан принцип детектирования ЧМ- и ФМ-сигналов?
9. Как вычисляются одномерная и многомерные плотности вероятности случайного процесса после нелинейного безынерционного преобразования?
10. Чем характеризуется нелинейное преобразование узкополосных случайных процессов?

Задачи

1. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника имеет вид $i(u) = 10u^3$, мА. Какова аналитическая запись этой характеристики в окрестности рабочей точки $U_0 = 2$ В?

2. Резонансный усилитель гармонических колебаний создан по схеме, приведенной на рис. 11.6. Характеристика транзистора (мА)

аппроксимирована отрезками двух прямых:

$$i_K(u_{БЭ}) = \begin{cases} 50(u_{БЭ} - 0.2), & u_{БЭ} > 0.2 \text{ В}, \\ 0, & u_{БЭ} < 0.2 \text{ В}. \end{cases}$$

Сопротивление колебательного контура при резонансе $R_{рез} = 0.8$ кОм. Напряжение источника питания $E_{пит} = 9$ В. Рабочая точка совпадает с точкой излома характеристики.

При какой амплитуде входного сигнала в усилителе возникает перенапряженный режим?

3. Нелинейный безынерционный элемент имеет вольт-амперную характеристику вида $i(u) = a_0 + a_1 u + a_4 u^4$. К элементу приложено напряжение $u(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t$. Найдите амплитуды и частоты всех комбинационных составляющих тока.

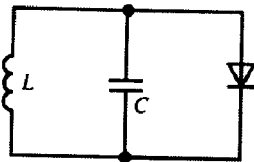
4. К нелинейному резистору с характеристикой вида $i(u) = 25u + 4u^2$, мА, приложено напряжение $u = 5 + 2 \cos \Omega t + 1.5 \cos \omega_0 t$, В. Найдите амплитуду несущего колебания и глубину модуляции тока.

5. В диодном детекторе применен полупроводниковый диод с крутизной $S = 10$ мА/В, сопротивление резистора нагрузки $R_n = 20$ кОм. На вход детектора подано напряжение АМ-сигнала $u(t) = 5(1 + 0.6 \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, В. Найдите амплитуду сигнала низкой частоты Ω , выделяемого на нагрузке детектора.

У к а з а н и е. При нахождении коэффициента детектирования воспользуйтесь тем, что для выбранных параметров схемы безразмерное произведение $SR_n \gg 1$.

Более сложные задания

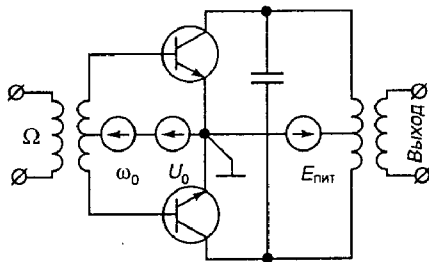
8. Исследуйте свободные колебания в нелинейной системе, представляющей собой параллельный колебательный LC-контур, зашунтированный диодом.



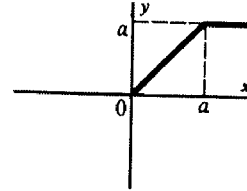
Характеристика диода задана в виде

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ S(u - U_n), & u \geq U_n. \end{cases}$$

9. Проанализируйте работу балансного модулятора:



6. Нелинейное устройство представляет собой ограничитель, характеристика $y(x)$ которого имеет вид

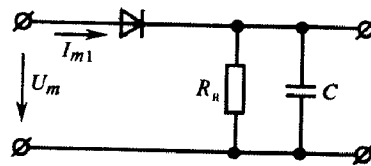


На входе устройства действует стационарный гауссов случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x^2 . Изобразите типичную реализацию процесса на выходе. Вычислите математическое ожидание и дисперсию выходного сигнала.

7. На входе нелинейного безынерционного элемента с характеристикой $y(x) = a|x|$ действует стационарный гауссов случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и функцией корреляции $R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$. Найдите функцию корреляции выходного сигнала.

Колебательный контур в коллекторной цепи настроен на частоту ω_0 . Покажите, что при идеальной симметрии плеч схемы выходной сигнал не содержит составляющей с несущей частотой.

10. Покажите, что диодный детектор, собранный по схеме:



имеет входное сопротивление $R_{вх} = R_n/2$. Под входным сопротивлением понимается отношение амплитуды напряжения U_m к амплитуде первой гармоники тока I_{m1} на входе.

11. Составьте программу для микрокалькулятора или для ЭВМ, позволяющую решать трансцендентное уравнение, определяющее угол отсечки тока в диодном детекторе, методом последовательных приближений. Исходными данными служат сопротивление резистора нагрузки R_n (кОм), крутизна вольт-амперной характеристики диода S (мА/В) и абсолютное значение погрешности расчета $\epsilon \approx 10^{-3}$.

Глава 12

Преобразования сигналов в линейных параметрических цепях

Интересными и полезными для радиотехнических приложений свойствами обладают линейные системы, которые описываются нестационарными системными операторами $T(t)$, зависящими от времени. Закон преобразования входного сигнала здесь имеет вид

$$u_{\text{вых}}(t) = T(t) u_{\text{вх}}(t), \quad (12.1)$$

причем благодаря линейности системы

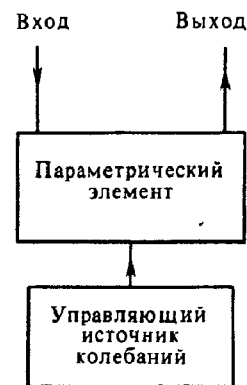
$$T(t)[\alpha_1 u_{\text{вх}1} + \alpha_2 u_{\text{вх}2}] = \alpha_1 T(t) u_{\text{вх}1} + \alpha_2 T(t) u_{\text{вх}2} \quad (12.2)$$

при любых постоянных α_1 и α_2 .

Цепи, описываемые равенством (12.1), называются *параметрическими*. Термин связан с тем, что в составе таких цепей обязательно присутствуют элементы, параметры которых зависят от времени. В радиотехнических цепях находят применение следующие параметрические элементы: резисторы $R(t)$, конденсаторы $C(t)$ и индуктивности $L(t)$.

Отличительная черта линейной параметрической системы — наличие вспомогательного источника колебаний, управляющего параметрами элементов.

Важная роль, отводимая в радиотехнике параметрическим цепям, обусловлена их способностью преобразовывать спектры входных сигналов, а также возможностью создания малошумящих параметрических усилителей.



12.1. Прохождение сигналов через резистивные параметрические цепи

Параметрическую цепь называют *резистивной*, если ее системный оператор имеет вид числа $k(t)$, зависящего от времени и служащего коэффициентом пропорциональности между входным $u_{\text{вх}}(t)$ и выходным $u_{\text{вых}}(t)$ сигналами:

$$u_{\text{вых}}(t) = k(t) u_{\text{вх}}(t). \quad (12.3)$$

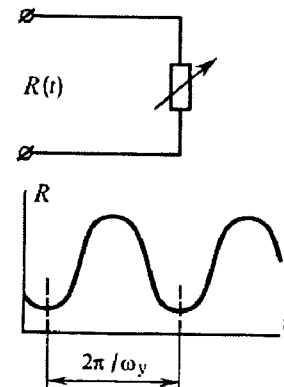
Простейшей системой такого вида служит параметрический резистор с сопротивлением $R(t)$. Закон, связывающий мгновенные значения напряжения и тока в этом двухполюснике, таков:

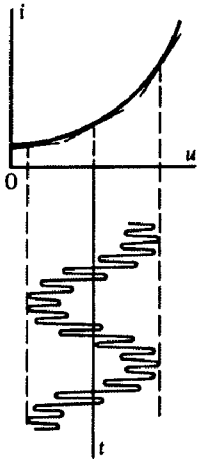
$$u(t) = R(t) i(t). \quad (12.4)$$

Параметрический резистивный элемент может описываться также переменной во времени проводимостью $G(t) = 1/R(t)$.

Реализация параметрических резистивных элементов. На практике параметрически управляемые резисторы создают следующим образом. На вход безынерционного нелинейного

● резистивная параметрическая цепь

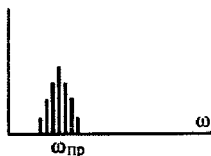
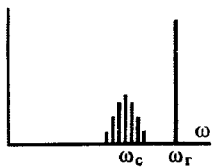




Дифференциальная крутизна характеристики определяется «большим» управляющим напряжением



промежуточная частота



Преобразование частоты

двухполосника с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$ подадут сумму двух колебаний: управляющего напряжения $u_y(t)$ и напряжения сигнала $u_c(t)$. При этом управляющее напряжение значительно превышает по амплитуде полезный сигнал. Ток в нелинейном двухполоснике можно записать, разложив вольт-амперную характеристику в ряд Тейлора относительно мгновенного значения управляющего напряжения:

$$i = i(u_y + u_c) = i(u_y) + i'(u_y)u_c + \frac{1}{2}i''(u_y)u_c^2 + \dots \quad (12.5)$$

Амплитуду сигнала выбирают столь малой, что в формуле (12.5) можно пренебречь вторыми и более высокими степенями величины $u_c(t)$. Обозначив через $i_c(t)$ приращение тока в двухполоснике, вызванное наличием сигнала, получим

$$i_c(t) \approx i'[u_y(t)]u_c = S_{\text{диф}}[u_y(t)]u_c. \quad (12.6)$$

Ниже будут изучены важные применения параметрических резистивных элементов рассмотренного вида.

Преобразование частоты. Так называют трансформацию модулированного сигнала, связанную с переносом его спектра из окрестности несущей частоты ω_c в окрестность некоторой промежуточной частоты $\omega_{\text{пр}}$, совершаемую без изменения закона модуляции.

Преобразователь частоты состоит из *смесителя* — параметрического безынерционного элемента, и *гетеродина* — вспомогательного генератора гармонических колебаний с частотой ω_r , служащего для параметрического управления смесителем. Под действием напряжения гетеродина дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики смесителя периодически изменяется во времени по закону

$$S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_r t + S_2 \cos 2\omega_r t + \dots \quad (12.7)$$

Если на входе преобразователя частоты действует напряжение АМ-сигнала $u_c(t) = U_m(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_c t$, то в соответствии с выражениями (12.6) и (12.7) в выходном токе появляется составляющая

$$i_c(t) = U_m(1 + M \cos \Omega t) [S_0 \cos \omega_c t + \frac{1}{2}S_1 \cos(\omega_r - \omega_c)t + \frac{1}{2}S_1 \cos(\omega_r + \omega_c)t + \frac{1}{2}S_2 \cos(2\omega_r - \omega_c)t + \frac{1}{2}S_2 \cos(2\omega_r + \omega_c)t + \dots]$$

В качестве промежуточной принято выбирать частоту $\omega_{\text{пр}} = |\omega_r - \omega_c|$; ток на промежуточной частоте

$$i_{\text{пр}}(t) = \frac{1}{2}S_1 U_m(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{пр}} t \quad (12.8)$$

является АМ-колебанием с тем же законом модуляции, что и входной сигнал.

Для выделения составляющих спектра с частотами, близкими к промежуточной частоте, в выходную цепь преобразователя включают колебательный контур, настроенный на частоту $\omega_{\text{пр}}$.

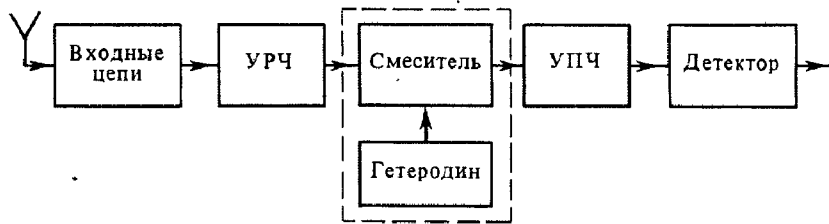


Рис. 12.1. Структурная схема супергетеродинного приемника

Преобразование частоты широко используется в радио-приемных устройствах — так называемых *супергетеродинах*. Структурная схема супергетеродинного приемника изображена на рис. 12.1.

Сигнал, принятый антенной, через фильтрующие входные цепи и усилитель радиочастоты (УРЧ) поступает на преобразователь. Выходной сигнал преобразователя является модулированным колебанием с несущей частотой, равной промежуточной частоте приемника. Основное усиление приемника и его частотная избирательность, т. е. способность выделять полезный сигнал из помех с другими частотами, обеспечиваются узкополосным усилителем промежуточной частоты (УПЧ).

Большое достоинство супергетеродина — неизменность промежуточной частоты; для настройки приемника приходится перестраивать лишь гетеродин и в некоторых случаях колебательные системы, которые имеются во входных цепях и в УРЧ.

Отметим, что преобразователь частоты одинаково реагирует на сигналы с частотами $\omega_{c1} = \omega_r + \omega_{пр}$ и $\omega_{c2} = \omega_r - \omega_{пр}$. В радиотехнике говорят, что возможен прием как по *основному*, так и по *зеркальному каналу*. Во избежание неоднозначности настройки приемника требуется обеспечить такую избирательность резонансных систем, включенных между антенной и преобразователем частоты, чтобы практически подавить сигналы зеркального канала.

Крутизна преобразования. Эффективность работы преобразователя частоты принято характеризовать особым параметром — *крутизной преобразования* $S_{пр}$, которая служит коэффициентом пропорциональности между амплитудой тока промежуточной частоты и амплитудой немодулированного напряжения сигнала, т. е. $S_{пр} = I_{мпр}/U_{мс}$. Как следует из соотношения (12.8),

$$S_{пр} = S_1/2. \quad (12.9)$$

Итак, крутизна преобразования равна половине амплитуды первой гармоники дифференциальной крутизны параметрического элемента.

Предположим, что вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, входящего в преобразователь частоты, квадратична: $i(u) = bu^2$. В отсутствие сигнала к элементу приложена сумма напряжений смещения и гетеродина: $u_y = U_0 + U_{мг} \cos \omega_r t$. Дифференциальная крутизна преобразо-

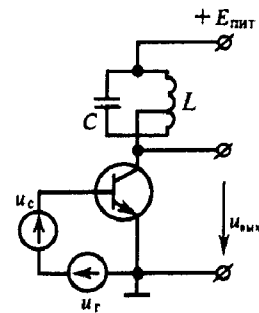
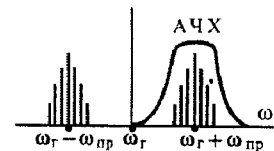


Схема преобразователя частоты



Подавление зеркального канала

● крутизна преобразования

вателя изменяется во времени по закону

$$S_{\text{диф}}(t) = 2b u_y = 2b U_0 + 2b U_{\text{мг}} \cos \omega_r t. \quad (12.10)$$

Обращаясь к формуле (12.9), видим, что в данном случае

$$S_{\text{пр}} = b U_{\text{мг}}. \quad (12.11)$$

▲
решите задачи 1,
2, 3

Таким образом, при постоянном уровне полезного сигнала на входе амплитуда выходного сигнала преобразователя пропорциональна амплитуде напряжения гетеродина.

Пример 12.1. В преобразователе частоты использован нелинейный элемент (транзистор) с характеристикой $i = 20u^2$, имеющей параметр $b = 20 \text{ мА/В}^2$. Резонансное сопротивление колебательного контура в коллекторной цепи $R_{\text{рез}} = 3 \text{ кОм}$. Амплитуда немодулированного входного сигнала $U_{\text{мс}} = 50 \text{ мкВ}$, амплитуда напряжения гетеродина $U_{\text{мг}} = 0.5 \text{ В}$. Найти значение $U_{\text{мпр}}$ — амплитуду напряжения промежуточной частоты на выходе преобразователя.

По формуле (12.11) вычисляем крутизну преобразования $S_{\text{пр}} = 20 \cdot 0.5 = 10 \text{ мА/В}$. Амплитуда тока промежуточной частоты в цепи коллектора $I_{\text{мпр}} = S_{\text{пр}} U_{\text{мс}} = 0.5 \text{ мкА}$. Полагая выходное сопротивление транзистора достаточно высоким, так что можно пренебречь его шунтирующим действием на колебательный контур, находим $U_{\text{мпр}} = I_{\text{мпр}} R_{\text{рез}} = 1.5 \text{ мВ}$.

Синхронное детектирование. Предположим, что в преобразователе частоты гетеродин настроен точно на частоту сигнала, поэтому дифференциальная крутизна изменяется во времени по закону

$$S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_c t + S_2 \cos 2\omega_c t + \dots$$

Подав на вход такого устройства АМ-сигнала $u_c(t) = U_{\text{мс}}(1 + M \cos \Omega t) \cos(\omega_c t + \varphi_c)$, получаем выражение для тока, обусловленного сигналом:

$$i_c(t) = U_{\text{мс}}(1 + M \cos \Omega t) [S_0 \cos(\omega_c t + \varphi_c) + \frac{1}{2} S_1 \cos(2\omega_c t + \varphi_c) + \frac{1}{2} S_1 \cos \varphi_c + \dots]. \quad (12.12)$$

Выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, содержит постоянную составляющую $\frac{1}{2} S_1 \cos \varphi_c$, которая зависит от сдвига фазы между сигналом гетеродина и несущим колебанием входного сигнала. Поэтому в спектре выходного тока появится низкочастотная составляющая

$$i_{\text{нч}}(t) = \frac{1}{2} S_2 U_{\text{мс}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \varphi_c; \quad (12.13)$$

этот ток пропорционален переменной амплитуде АМ-сигнала.

Синхронным детектором называют преобразователь частоты, работающий при условии $\omega_r = \omega_c$; для выделения полезного сигнала на выходе включен ФНЧ, например, параллельная RC-цепь.

При использовании синхронных детекторов на практике между несущим колебанием входного сигнала и колебанием гетеродина должно поддерживаться жесткое фазовое

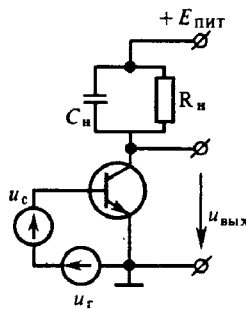
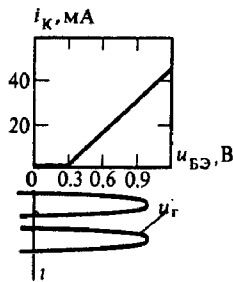


Схема синхронного детектора

соотношение. Наиболее благоприятен режим работы при $\varphi_c = 0^\circ$, если же $\varphi_c = 90^\circ$, то полезный выходной сигнал отсутствует. Чувствительность синхронного детектора к сдвигу фаз позволяет использовать его для измерения фазовых соотношений между двумя когерентными колебаниями.

Ниже показана конкретная методика расчета синхронного детектора.



Пример 12.2. В синхронном детекторе использован транзистор, характеристика $i_K = i(u_{БЭ})$ которого аппроксимируется двумя отрезками прямых. Параметры аппроксимации: $S = 50$ мА/В, $U_H = 0.3$ В. Амплитуда напряжения гетеродина $U_{мг} = 1$ В, постоянное напряжение смещения отсутствует ($U_0 = 0$). Немодулированное напряжение полезного сигнала с амплитудой $U_{мс} = 25$ мкВ сдвинуто по фазе относительно колебаний гетеродина на угол $\varphi_c = 45^\circ$. Определить изменение уровня постоянного напряжения на выходе синхронного детектора, вызванное полезным сигналом, если сопротивление резистора $R_H = 1.2$ кОм.

При данном виде вольт-амперной характеристики нелинейного элемента дифференциальная крутизна может принимать лишь два значения:

$$S_{\text{диф}} = \begin{cases} 0, & u_y < U_H \\ S, & u_y \geq U_H \end{cases}$$

Поэтому график изменения дифференциальной крутизны во времени представляет собой периодическую последовательность прямоугольных видеоимпульсов. Угол отсечки тока ϑ , определяющий длительность этих импульсов, найдем по формуле (см. гл. 2)

$$\vartheta = \arccos[(U_H - U_0)/U_{мг}] = 72.5^\circ.$$

Разлагая функцию $S_{\text{диф}}(t)$ в ряд Фурье, вычисляем амплитуду первой гармоники крутизны:

$$S_1 = \frac{S}{\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \cos \xi \, d\xi = (2/\pi) S \sin \vartheta = 0.607S = 30.35 \text{ мА/В}.$$

Полезный сигнал вызывает согласно (12.13) приращение тока через транзистор на величину $\Delta i = 1/2 S_1 U_{мс} \cos \varphi_c = 0.268$ мкА. Отсюда находим изменение уровня постоянного напряжения на выходе синхронного детектора:

$$\Delta u_{\text{вых}} = -\Delta i R_H = -0.32 \text{ мВ}.$$

Следует обратить внимание на то, что оптимальным углом отсечки является угол, равный 90°

Спектр сигнала на выходе параметрического резистивного элемента. Анализ работы преобразователя частоты и синхронного детектора убеждает, что в параметрическом резистивном элементе возникают спектральные составляющие, которые отсутствуют на входе этого элемента.

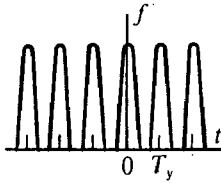
Рассмотрим параметрическое преобразование вида (12.3) с общих позиций спектрального анализа. Очевидно, параметрический резистивный элемент функционирует как перемножитель входного сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ и управляющего колебания $f(t)$.

Запишем следующее соответствие между сигналами и их преобразованиями Фурье:

$$u_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вх}}(\omega), \quad u_{\text{вых}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вых}}(\omega), \quad f(t) \leftrightarrow F(\omega).$$

На основании теоремы о спектре произведения сигналов (см. гл. 2) спектральная плотность выходного сигнала представляет собой свертку

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\omega - \xi) F(\xi) d\xi. \quad (12.14)$$



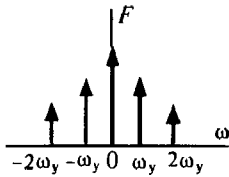
Периодическое управляющее колебание

В прикладном отношении большой интерес представляет случай, когда управляющее колебание $f(t)$ является периодическим с некоторым заданным периодом T_y и может быть представлено рядом Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_y t}, \quad (12.15)$$

где $\omega_y = 2\pi/T_y$ — угловая частота управляющего сигнала.

Как известно, подобный неинтегрируемый сигнал имеет спектральную плотность, отличную от нуля лишь в дискретных точках на оси частот:



Спектральная плотность управляющего сигнала

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_y). \quad (12.16)$$

Подставив данное выражение в формулу (12.14), получим спектр сигнала на выходе параметрического элемента:

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\omega - \xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\xi - n\omega_y) d\xi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\omega - \xi) \delta(\xi - n\omega_y) d\xi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n U_{\text{вх}}(\omega - n\omega_y). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Спектр стробированного сигнала. Анализ общей формулы (12.17) удобно провести применительно к частному, но широко распространенному на практике случаю. Пусть управляющая функция $f(t)$ на протяжении каждого периода равна единице в пределах отрезка времени длительностью τ_y ; в остальные моменты времени функция $f(t)$ равна нулю.

● стробирование

В радиотехнике операцию умножения сигнала на функцию подобного вида называют *стробированием* сигнала.

Легко убедиться, что коэффициенты комплексного ряда Фурье (12.15) применительно к рассматриваемой стробирующей функции $f(t)$ выражаются следующим образом:

$$C_n = \frac{1}{T_y} \int_{-\tau_y/2}^{\tau_y/2} e^{-jn\omega_y t} dt = \frac{1}{q} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q}, \quad (12.18)$$

где $q = T_y/\tau_y$ — скважность стробирующей последовательности.

Подстановка этого результата в формулу (12.17) приводит к выводу о том, что спектральная плотность стробированного сигнала

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} U_{\text{вх}}(\omega - n\omega_y). \quad (12.19)$$

Рис. 12.2 иллюстрирует процесс трансформации спектра при стробировании идеального низкочастотного сигнала (см. гл. 5). Графики изображены для случая, когда частота

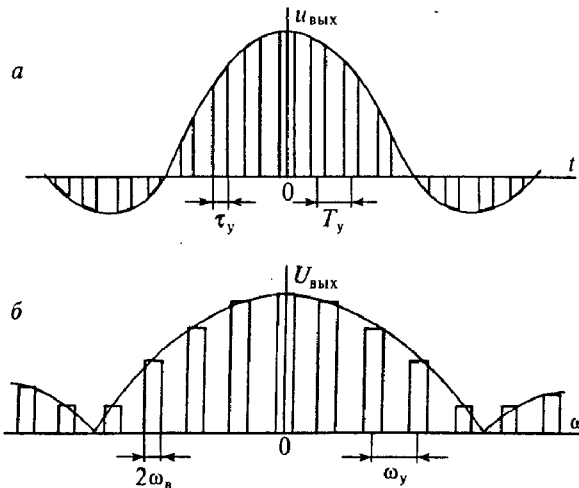
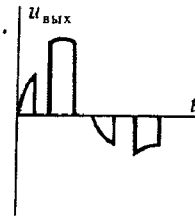
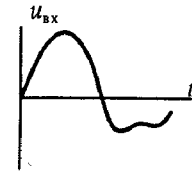


Рис. 12.2. Стробирование идеального низкочастотного сигнала: а — временная диаграмма сигнала на выходе стробирующего устройства; б — спектральная плотность выходного сигнала

управляющего сигнала ω_y значительно превышает величину ω_s — верхнюю граничную частоту в спектре входного сигнала.

Можно заметить, что в спектре стробированного сигнала возникает бесконечное число «копий» спектра исходного колебания. Каждая такая «копия» локализуется на оси частот вблизи точек $\pm n\omega_y$, $n = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих гармоникам основной частоты генератора, который управляет стробирующим устройством. С ростом номера n интенсивность спектральных составляющих падает пропорционально множителю $\sin(n\pi/q)/(n\pi/q)$.

Модуляторы и детекторы на базе параметрических резистивных элементов. Подав на один из входов перемножителя сигнал $s(t)$, пропорциональный передаваемому сообщению, а на другой — немодулированное колебание



Временные диаграммы, поясняющие процесс преобразования сигнала в стробирующем устройстве

Если длительность стробирующего импульса стремится к нулю, то интенсивности всех спектральных составляющих становятся одинаковыми и спектр выходного сигнала перестает иметь лепестковый характер

вида $\cos \omega_0 t$, получим на выходе сигнал с балансной амплитудной модуляцией

$$u_{\text{БМ}}(t) = s(t) \cos \omega_0 t.$$

Такое устройство легко превратить в модулятор, создающий АМ-сигнал с обеими боковыми полосами и с неподавленным несущим колебанием, если к первому из сигналов добавить постоянную составляющую:

$$u_{\text{АМ}}(t) = [1 + Ms(t)] \cos \omega_0 t.$$

Используя параметрический элемент-перемножитель, можно создать устройство для получения любых модулированных сигналов – АМ, ЧМ или ФМ. Работа параметрического модулятора основана на том, что модулированные

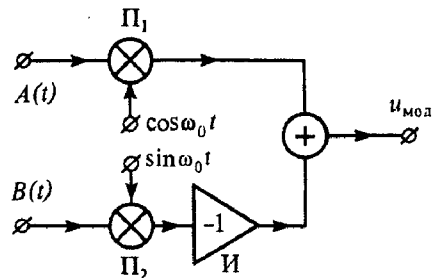


Рис. 12.3. Структурная схема параметрического модулятора

радиосигналы, будучи узкополосными колебаниями, допускают представление (см. гл. 5) вида

$$u_{\text{мод}}(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t. \quad (12.20)$$

Структурная схема параметрического модулятора общего вида представлена на рис. 12.3. Устройство состоит из двух перемножителей Π_1 и Π_2 , инвертора I и сумматора. Модулирующими сигналами служат синфазная $A(t)$ и квадратурная $B(t)$ составляющие комплексной огибающей выходного сигнала.

Колебание несущей частоты ω_0 в соответствии с выражением (12.20) должно подаваться на входы перемножителей, имея взаимный фазовый сдвиг 90° . В простейшем случае, когда требуется получить АМ-сигнал, в схеме рис. 12.3 достаточно иметь только один, например верхний, канал.

Параметрический демодулятор, будучи устройством когерентной обработки радиосигналов, в равной мере пригоден для детектирования АМ-, ЧМ- и ФМ-колебаний

С параметрическим демодулятором мы уже познакомились на примере синхронного детектора. В общем случае такой демодулятор представляет собой каскадное соединение перемножителя и фильтра нижних частот (ФНЧ). К одному из входов перемножителя приложен сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, подлежащий детектированию, на второй вход подано периодическое управляющее напряжение

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_y t,$$

причем частота колебания управляющего генератора ω_y должна находиться в целократном отношении с несущей частотой: $\omega_y = \omega_0/k$ ($k = 1, 2, \dots$).

При этом условии в составе сигнала на выходе перемножителя будет присутствовать низкочастотная составляющая, обусловленная k -й гармоникой управляющего напряжения. Так, при демодуляции АМ-сигнала $u_{\text{вх}}(t) = U_m [1 + Ms(t)] \cos \omega_0 t$ имеем

$$u_{\text{нч}}(t) = 1/2 A_k U_m [1 + Ms(t)].$$

Если демодуляции подлежит сигнал с угловой модуляцией вида $u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + ms(t)]$,

то

$$u_{\text{нч}}(t) = 1/2 A_k U_m \cos[ms(t)].$$

12.2. Энергетические соотношения в параметрических реактивных элементах цепи

Целым рядом особых свойств обладают параметрические реактивные элементы, у которых либо емкость $C(t)$, либо индуктивность $L(t)$ переменны во времени. Ниже на примере параметрически управляемого конденсатора будет показано, что в определенных условиях такие элементы могут выступать в роли «посредников», передающих часть энергии от внешних управляющих источников, так называемых *генераторов накачки*, к цепям, несущим полезный сигнал. На этом принципе основано параметрическое усиление сигналов, которое будет изучаться в следующем параграфе.

Связь между емкостью конденсатора и запасенной энергией. Для уяснения физических основ процессов, происходящих в реактивных параметрических цепях, рассмотрим плоский конденсатор с емкостью C и расстоянием x_0 между обкладками, заряженный до напряжения U_0 . Конденсатор несет разделенный заряд $q = CU_0$.

Предположим, что зазор между обкладками механически увеличен до величины $x_0 + dx$. Перемещение производится в направлении против силы электрического поля, стремящейся сблизить обкладки. Поэтому внешние силы совершают некоторую положительную работу и запас энергии поля в конденсаторе возрастает.

Для того чтобы получить количественные оценки, заметим, что исходная энергия конденсатора $E = q^2/(2C)$. Если емкость получила приращение dC , то приращение энергии

$$dE = -\frac{q^2}{2C^2} dC = -E \frac{dC}{C}, \quad (12.21)$$

поскольку ток проводимости отсутствует и заряд q неизменен. Вычисляя емкость C по известной формуле плоского конденсатора $C = \epsilon_0 S/x_0$ (S — площадь обкладки), имеем следующее выражение для относительного приращения

● генератор накачки

С увеличением зазора емкость конденсатора уменьшается

Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8.842 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

емкости: $dC/C = -dx/x_0$, откуда приращение энергии конденсатора

$$dE = E \frac{dx}{x_0}.$$

Как и следовало ожидать, для увеличения запаса энергии электрического поля в системе необходимо за счет внешних факторов уменьшить емкость заряженного конденсатора.

Параметрическое возбуждение колебательного контура. Если величина заряда q постоянна, то невозможно добиться непрерывного притока энергии в изолированный конденсатор, периодически изменяя его емкость вокруг некоторого среднего значения. Внешний источник накачки, совершив положительную работу на отрезке времени, когда емкость уменьшалась, получит от конденсатора обратно ровно такую же порцию энергии в процессе увеличения емкости. Поэтому усредненная за период мощность накачки будет равна нулю.

Другая картина наблюдается в колебательной системе, где напряжение на конденсаторе изменяет знак, переходя через нуль.

Рассмотрим добротный колебательный контур, образованный постоянной индуктивностью L , параметрической емкостью $C(t)$ и сопротивлением потерь R . Предположим, что в контуре каким-либо образом возбуждены собственные колебания. Пренебрегая незначительным уменьшением амплитуды колебаний из-за потерь, будем считать, что U_{mC} — амплитуда напряжения на конденсаторе, которое изменяется во времени с частотой собственных колебаний $\omega_{\text{соб}} = 1/\sqrt{LC_0}$. Здесь C_0 — среднее значение емкости.

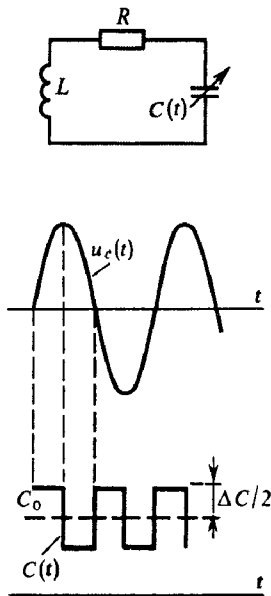
Пусть емкость конденсатора периодически изменяется следующим образом: дважды за период собственных колебаний, в те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе экстремально, емкость скачком уменьшается на величину ΔC . Возвращение в исходное состояние, т. е. положительный перепад емкости наблюдается в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе проходит через нуль.

При такой накачке будет наблюдаться однонаправленный приток энергии в колебательный контур. Действительно, работа внешних сил, выполняемая в моменты отрицательных перепадов емкости, всегда положительна независимо от знака напряжения на обкладках. Возвращение емкости в исходное состояние будет совершаться в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе равно нулю, т. е. без затраты энергии. Если

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2} U_{mC}^2 (C_0 + \Delta C/2) \approx \frac{1}{2} U_{mC}^2 C_0$$

— максимальная энергия, запасаемая в конденсаторе, то, согласно формуле (12.21), за период собственных колебаний система получит энергию накачки

$$E_n = 2E_{\text{max}} \Delta C/C_0 = U_{mC}^2 \Delta C. \quad (12.22)$$



Учитывается, что энергия поступает в контур дважды за период собственных колебаний

В то же время средняя мощность потерь в контуре

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} U_{mC}^2 R / \rho^2 = \frac{1}{2} U_{mC}^2 / (\rho Q). \quad (12.23)$$

Энергия, рассеиваемая в резисторе за период колебаний T , составит величину

$$E_{\text{пот}} = P_{\text{пот}} T = U_{mC}^2 C_0 \pi / Q. \quad (12.24)$$

Если выполняется равенство

$$E_n = E_{\text{пот}}, \quad (12.25)$$

то за счет действия источника накачки происходит компенсация потерь в контуре. Если же $E_n > E_{\text{пот}}$, то система становится неустойчивой и амплитуда колебаний в контуре будет экспоненциально нарастать, т. е. произойдет *параметрическое возбуждение* колебательной системы. Из (12.22) и (12.24) вытекает соотношение, определяющее критическое значение относительного изменения емкости:

$$\Delta C_{\text{кр}} / C_0 = \pi / Q. \quad (12.26)$$

Значения $\Delta C_{\text{кр}}$, как правило, невелики. Так, для параметрического возбуждения контура с параметрами $C_0 = 20$ пФ, $Q = 100$ достаточно иметь $\Delta C = 0.63$ пФ.

Анализ приведенного здесь частного примера системы с управляемой емкостью проведен в предположении, что сигнал накачки изменяет емкость конденсатора дважды за период собственных колебаний. Однако легко видеть, что эффект параметрического возбуждения колебательной системы будет наблюдаться и тогда, когда основная частота негармонического напряжения накачки $\omega_n = \omega_{\text{соб}} / n$, $n = 1, 2, \dots$. Важно лишь, чтобы в спектре сигнала накачки присутствовала составляющая с частотой $2\omega_{\text{соб}}$.

Для работы параметрического генератора требуется также, чтобы в процессе возбуждения между собственными колебаниями контура и колебаниями генератора накачки поддерживались строгие фазовые соотношения. Достаточно сдвинуть сигнал накачки по фазе на половину периода, как положительный перепад емкости будет приходиться на те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе проходит через экстремумы. При этом параметрический конденсатор уже не будет поставлять энергию в контур, а начнет выполнять роль дополнительной резистивной нагрузки.

Связь между напряжением и током в параметрическом конденсаторе. Рассмотрим цепь, образованную источником напряжения сигнала $u(t) = U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ и управляемым конденсатором, емкость которого изменяется во времени по гармоническому закону с частотой накачки:

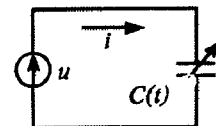
$$C(t) = C_0 [1 + \beta \cos(\omega_n t + \varphi_n)]. \quad (12.27)$$

Здесь β — коэффициент, характеризующий глубину модуляции емкости.

Принимается во внимание, что $\rho \omega_{\text{соб}} = 1 / C_0$

■
требования к генератору накачки, обеспечивающие параметрическое возбуждение колебательного контура

▲
решите задачу 4



Поскольку заряд в конденсаторе $q = C(t)u$, ток в цепи

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dC}{dt}u + C \frac{du}{dt} = \\ &= -\beta\omega_n C_0 U_m \sin(\omega_n t + \varphi_n) \cos(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &\quad - \omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &\quad - \beta\omega_c C_0 U_m \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(\omega_c t + \varphi_c). \end{aligned} \quad (12.28)$$

Воспользовавшись известной формулой тригонометрии $\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$,

можно представить произведения, стоящие в первом и третьем слагаемых правой части формулы (12.28), так:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_n t + \varphi_n) \cos(\omega_c t + \varphi_c) &= \frac{1}{2} \{ \sin[(\omega_c + \omega_n)t + \varphi_c + \varphi_n] - \\ &\quad - \sin[(\omega_c - \omega_n)t + \varphi_c - \varphi_n] \}, \end{aligned} \quad (12.29)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(\omega_c t + \varphi_c) &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin[(\omega_c + \omega_n)t + \varphi_c + \varphi_n] - \\ &\quad - \sin[(\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n - \varphi_c] \}. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i(t) &= -\omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta C_0 U_m (\omega_c - \omega_n) \sin[(\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n - \varphi_c] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta C_0 U_m (\omega_n + \omega_c) \sin[(\omega_c + \omega_n)t + \varphi_c + \varphi_n]. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Это выражение устанавливает вид спектральной диаграммы тока в параметрическом конденсаторе. Спектр, помимо составляющей на частоте сигнала, содержит два боковых колебания с частотами $\omega_c - \omega_n$ и $\omega_c + \omega_n$.

Средняя мощность, потребляемая двухполюсником:

$P = UI/2 \cdot \cos \varphi$,
где φ — угол сдвига фаз между током и напряжением

Средняя мощность, потребляемая параметрическим конденсатором на частоте сигнала. Из теории цепей известно, что для существования некоторого среднего потока мощности от источника к нагрузке требуется, чтобы в гармоническом режиме сдвиг фаз между током и напряжением был отличен от 90° .

Как видно из формулы (12.31), в составе тока, проходящего через параметрический конденсатор, всегда присутствует реактивная составляющая на частоте сигнала:

$$i_p(t) = -\omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c).$$

Этот ток, находясь во временной квадратуре с напряжением источника, в среднем не выделяет мощности. Однако при соответствующем выборе частоты накачки можно добиться появления еще одной составляющей тока с частотой сигнала. Как видно из выражений (12.29) и (12.30), для этого достаточно положить $\omega_n = 2\omega_c$. Тогда ток через параметрический конденсатор будет содержать составляющую, которую назовем *полезной*:

$$i_n(t) = -\frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_n - \varphi_c). \quad (12.32)$$

Следует сравнить этот результат с полученным при анализе параметрического возбуждения контура

Мгновенная мощность полезной составляющей

$$\begin{aligned} p_n(t) &= u(t) i_n(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_m^2 \cos(\omega_c t + \varphi_c) \sin(\omega_c t + \varphi_n - \varphi_c) = \\ &= -\frac{1}{4} \beta \omega_c C_0 U_m^2 [\sin(2\omega_c t + \varphi_n) - \sin(2\varphi_c - \varphi_n)]. \end{aligned}$$

Мощность полезной составляющей, усредненная за период сигнала,

$$P_{п.ср} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} p_n(t) dt = \frac{1}{4} \beta \omega_c C_0 U_m^2 \sin(2\varphi_c - \varphi_n). \quad (12.33)$$

Схема замещения параметрического конденсатора. Формула (12.33) свидетельствует о том, что в зависимости от соотношения между начальными фазами источника входного сигнала и генератора колебаний накачки значение средней мощности может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому при соответствующем выборе углов φ_c и φ_n возможен режим, когда параметрически управляемый конденсатор ведет себя подобно активному элементу, не потребляя, а поставляя в цепь мощность на частоте входного сигнала.

Введя угол $\Phi = 2\varphi_c - \varphi_n$, запишем выражение средней мощности колебательного процесса в конденсаторе в виде

$$P_{п.ср} = U_m^2 / (2R_{вн}).$$

Здесь

$$R_{вн} = 2 / (\beta \omega_c C_0 \sin \Phi) \quad (12.34)$$

— активное сопротивление, вносимое данным элементом в цепь. Схема замещения параметрического конденсатора, управляемого источником накачки с удвоенной частотой сигнала, представляет собой параллельное соединение емкости C_0 и сопротивления $R_{вн}$. Для того чтобы этот элемент вел себя подобно генератору, необходимо иметь отрицательное значение вносимого активного сопротивления.

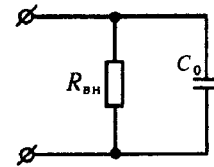
12.3. Принципы параметрического усиления

Способность управляемых реактивных двухполюсников при определенных условиях играть роль активных элементов цепи послужила основой для создания особого вида радиотехнических устройств, называемых *параметрическими усилителями*. Эти усилители нашли применение главным образом в СВЧ-диапазоне как входные ступени высокочувствительных радиоприемных устройств. Основное достоинство параметрических усилителей — низкий уровень собственных шумов, что связано с отсутствием в них дробовых флуктуаций тока.

Реализация параметрически управляемых реактивных элементов. Возможность параметрического усиления сигналов была теоретически предсказана еще в начале века. Однако практическое осуществление этой идеи стало возможным

Среднее за период значение гармонической функции, очевидно, равно нулю

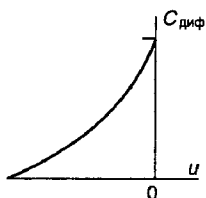
▲
решите задачу 5



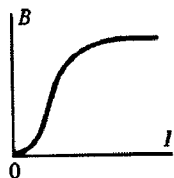
■
применение параметрических усилителей

●
варактор

●
вольт-кулонная характеристика



Реализация параметрически управляемой емкости достигается за счет нелинейных свойств варактора



Кривая намагничивания ферромагнитного материала

лишь в 50-х годах после того, как были созданы первые удачные конструкции параметрических полупроводниковых диодов. Работа этих диодов, называемых также *варакторами*, основана на следующем эффекте. Если к *p-n*-переходу диода приложено напряжение обратной полярности, то разделенный заряд q в запирающем слое является нелинейной функцией приложенного напряжения u . Зависимость $q(u)$ называют *вольт-кулонной характеристикой* такого нелинейного конденсатора. При изменении напряжения в запертом переходе диода возникает ток смещения

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \frac{du}{dt} = C_{\text{диф}}(u) \frac{du}{dt}. \quad (12.35)$$

Здесь $C_{\text{диф}}(u)$ — дифференциальная емкость варактора, которая приближенно описывается формулой

$$C_{\text{диф}}(u) = k(\varphi_k + |u|)^{-1/2}, \quad (12.36)$$

где k — размерный коэффициент; $\varphi_k \approx 0.3$ В — контактная разность потенциалов.

Чем сильнее заперт переход, тем меньше его дифференциальная емкость.

Современные варакторы обладают весьма совершенными характеристиками и способны работать вплоть до частот в несколько десятков гигагерц, что соответствует миллиметровому диапазону длин волн.

Может быть создан также элемент с параметрически управляемой индуктивностью $L(t)$. Он представляет собой индуктивную катушку, имеющую сердечник из ферромагнитного материала с резко выраженной зависимостью индукции B от подмагничивающего тока I . Такие элементы не нашли широкого применения на радиочастотах из-за большой инерционности процессов перемагничивания материала.

Одноконтурный параметрический усилитель. Рассмотрим генератор сигнала, образованный параллельным соединением элемента с активной проводимостью G_r и идеального источника гармонического тока с амплитудой I_m и частотой ω . К генератору подключена резистивная нагрузка, имеющая проводимость G_n . На зажимах генератора существует напряжение с амплитудой $U_m = I_m/(G_r + G_n)$; в нагрузке выделяется активная мощность

$$P_n = \frac{I_m^2 G_n}{2(G_r + G_n)^2}.$$

Как известно из теории цепей, в режиме согласования нагрузки с генератором, когда $G_n = G_r$, величина P_n достигает максимального значения:

$$P_{n\text{max}} = I_m^2/(8G_r). \quad (12.37)$$

Очевидно, мощность в нагрузке можно повысить, уменьшив каким-либо образом проводимость генератора. Этого можно достичь, например, включив параллельно генератору параметрический конденсатор (варактор). Емкость варактора

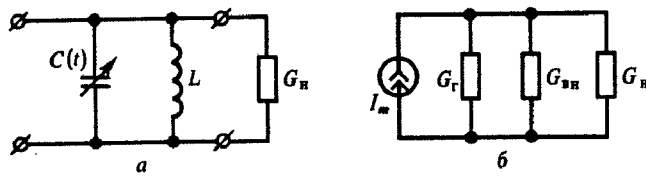


Рис. 12.4. Схемы одноконтурного параметрического усилителя:
а — принципиальная; б — эквивалентная

должна изменяться с частотой $2\omega_c$. Начальную фазу генератора накачки следует выбрать так, чтобы сопротивление $R_{вн}$ [см. формулу (12.34)] было отрицательным.

На рис. 12.4, а, б изображены схемы простейшего одноконтурного параметрического усилителя, реализующего данный принцип.

Индуктивный элемент L вместе с конденсатором C_0 [см. формулу (12.27)] образуют параллельный колебательный контур, настроенный на частоту сигнала. Входное сопротивление этого контура настолько велико, что практически не шунтирует отрицательную активную проводимость

$$G_{вн} = 1/R_{вн} = 1/2\beta\omega_c C_0 \sin \Phi, \quad (12.38)$$

вносимую варактором.

Обратившись к рис. 12.4, б, замечаем, что мощность, выделяемая в нагрузку, будет также максимальна в режиме согласования, т. е. при $G'_н = G_r + G_{вн} < G_r$:

$$P'_{н\max} = I_m^2 / [8(G_r + G_{вн})]. \quad (12.39)$$

Отношение этой величины к той, которая определяется формулой (12.37) в отсутствие параметрического элемента, принято называть *номинальным коэффициентом усиления мощности*:

$$K_{Рном} = P'_{н\max} / P_{н\max} = G_r / (G_r + G_{вн}). \quad (12.40)$$

Например, пусть $G_r = 0.01$ См, $G_{вн} = -0.008$ См. Тогда $K_{Рном} = 0.01/0.002 = 5$, или в логарифмических единицах $\Delta_{Рном} = 10 \lg 5 = 7$ дБ.

Устойчивость параметрического усилителя. Если отрицательная проводимость варактора полностью компенсирует сумму проводимостей генератора и нагрузки, то параметрический усилитель становится неустойчивым и самовозбуждается.

Из эквивалентной схемы, приведенной на рис. 12.4, б, следует, что критическое значение вносимой отрицательной проводимости

$$G_{вн.кр} = -(G_r + G_n). \quad (12.41)$$

Полагая, что фазовые соотношения колебаний сигнала и накачки оптимальны в том смысле, что $\sin \Phi = -1$, из формул (12.34), (12.41) находим критическую глубину модуляции емкости:

$$\beta_{кр} = 2(G_r + G_n) / (\omega_c C_0). \quad (12.42)$$

Говорят, что при выполнении указанных условий параметрический усилитель работает в синхронном режиме

● номинальный коэффициент усиления мощности

▲ решите задачу 6

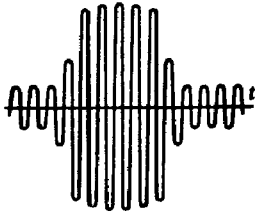
● условие самовозбуждения параметрического усилителя

Пример 12.3. Одноконтурный параметрический усилитель работает на частоте 6 ГГц ($\lambda = 5$ см), генератор сигнала и нагрузка имеют одинаковые проводимости 0.005 См ($R_1 = R_n = 200$ Ом), емкость варактора $C_0 = 0.8$ пФ. Определить предельные границы изменения емкости, при достижении которых усилитель самовозбуждается.

По формуле (12.42) определяем

$$\beta_{кр} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{6.28 \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-13}} = 0.66.$$

Таким образом, параметрический усилитель самовозбуждается, если емкость варактора, изменяясь во времени по гармоническому закону, колеблется в пределах от $C_{max} = C_0(1 + \beta_{кр}) = 1.33$ пФ до $C_{min} = C_0(1 - \beta_{кр}) = 0.27$ пФ.



Выходной сигнал усилителя в асинхронном режиме

Параметрическое усиление в режиме расстройки. В реальных условиях трудно, а порой и невозможно точно выполнить условие синхронизма $\omega_n = 2\omega_c$. Если частота сигнала несколько расстроена относительно требуемого значения, т. е. $\omega_c = \omega_n/2 + \delta\omega$, то говорят, что параметрический усилитель работает в *асинхронном режиме*. При этом величина Φ , определяющая, согласно (12.34), активное вносимое сопротивление, зависит от времени: $\Phi(t) = 2\varphi_c - \varphi_n + 2\delta\omega t$. Вносимое сопротивление, изменяясь по закону

$$R_{вн}(t) = \frac{2}{\beta\omega_c C_0 \sin \Phi(t)},$$

периодически приобретает разные знаки. Как следствие этого, наблюдаются глубокие изменения уровня выходного сигнала, аналогичные по характеру биениям. Этот недостаток одноконтурных усилителей в значительной степени препятствует их практическому использованию.

Двухконтурный параметрический усилитель. Работы, направленные на улучшение эксплуатационных характеристик параметрических усилителей, привели к созданию принципиально иных устройств, свободных от указанного выше недостатка. Так называемый *двухконтурный усилитель* способен работать при произвольном соотношении частот сигнала и накачки, причем *независимо от начальных фаз этих колебаний*. Такой эффект достигается за счет использования вспомогательных колебаний, возникающих на одной из комбинационных частот.

Схема двухконтурного параметрического усилителя приведена на рис. 12.5.

Усилитель состоит из двух колебательных контуров, один из которых, называемый *сигнальным контуром*, настроен на частоту ω_c , а другой, так называемый *холостой контур*, — на *холостую частоту* $\omega_x = \omega_n - \omega_c$. Связь между контурами осуществляется при помощи параметрической емкости варактора, которая изменяется во времени по гармоническому закону с частотой накачки ω_n :

$$C(t) = C_0(1 + \beta \cos \omega_n t).$$

●
холостой контур и холостая частота

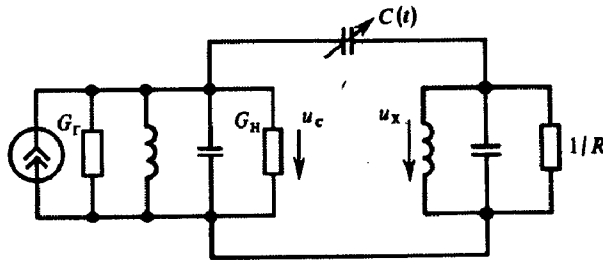


Рис. 12.5. Схема двухконтурного параметрического усилителя

Обычно добротности сигнального и холостого контуров велики. Поэтому в стационарном режиме напряжения на этих контурах достаточно точно описываются гармоническими функциями времени:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= U_{mc} \cos(\omega_c t + \varphi_c), \\ u_x(t) &= U_{mx} \cos(\omega_x t + \varphi_x) \end{aligned} \quad (12.43)$$

с некоторыми амплитудами и начальными фазами.

Приняв во внимание знаки напряжений, указанные на рис. 12.5, находим, что напряжение на варакторе $u_v = u_c - u_x$, откуда ток через варактор

$$\begin{aligned} i(t) &= C(t) \frac{du_v}{dt} + u_v \frac{dC}{dt} = \\ &= C_0(1 + \beta \cos \omega_n t) [-\omega_c U_{mc} \sin(\omega_c t + \varphi_c) + \\ &\quad + \omega_x U_{mx} \sin(\omega_x t + \varphi_x)] - \\ &\quad - \beta \omega_n C_0 \sin \omega_n t [U_{mc} \cos(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &\quad - U_{mx} \cos(\omega_x t + \varphi_x)]. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Проанализируем спектральный состав этого тока. Воспользовавшись уже встречавшейся формулой $\cos x \sin y = 1/2 [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$, убеждаемся, что ток содержит составляющие на частоте сигнала $\omega_c = \omega_n - \omega_x$, на холостой частоте $\omega_x = |\omega_n - \omega_c|$, а также на комбинационных частотах $\omega_c + \omega_n$ и $\omega_n + \omega_x$.

Для того чтобы найти проводимость, вносимую в сигнальный контур последовательным соединением варактора и холостого контура, следует прежде всего выделить в формуле (12.44) составляющую тока на частоте сигнала:

$$\begin{aligned} i_c(t) &= -\omega_c C_0 U_{mc} \sin(\omega_c t + \varphi_c) + \\ &\quad + 1/2 \beta \omega_c C_0 U_{mx} \sin(\omega_c t - \varphi_x). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Здесь первое слагаемое находится во временной квадратуре с напряжением $u_c(t)$ и поэтому не связано с внесением в контур активной проводимости. Второе слагаемое пропорционально амплитуде U_{mx} напряжения на холостом контуре. Чтобы найти эту величину, выделим в (12.44) полезную составляющую тока на холостой частоте, пропорциональную амплитуде U_{mc} :

$$i_{п.х}(t) = -1/2 \beta \omega_x C_0 U_{mc} \sin(\omega_x t - \varphi_c). \quad (12.46)$$

Если $R_{\text{рез.х}}$ — резонансное сопротивление холостого контура, то напряжение на нем, вызванное колебаниями на частоте сигнала,

$$u_x(t) = -\frac{1}{2}\beta\omega_x C_0 U_{\text{мс}} R_{\text{рез.х}} \sin(\omega_x t - \varphi_c),$$

откуда следует, что

$$U_{\text{мх}} = \frac{1}{2}\beta\omega_x C_0 U_{\text{мс}} R_{\text{рез.х}},$$

$$\varphi_x = \pi/2 - \varphi_c. \quad (12.47)$$

Подставив величины $U_{\text{мх}}$ и φ_x во второе слагаемое формулы (12.45), получим выражение полезной составляющей тока на частоте сигнала, которая обусловлена влиянием варактора и холостого контура:

$$i_{\text{п.с}} = -\frac{1}{4}\beta^2\omega_c\omega_x C_0^2 U_{\text{мс}} R_{\text{рез.х}} \cos(\omega_c t + \varphi_c). \quad (12.48)$$

Таким образом, проводимость, вносимая в сигнальный контур последовательным соединением варактора и холостого контура, оказывается активной и отрицательной:

$$G_{\text{вн}} = -\frac{1}{4}\beta^2\omega_c\omega_x C_0^2 R_{\text{рез.х}}. \quad (12.49)$$

■
преимущества
двухконтурного
усилителя

Номинальный коэффициент усиления рассчитывают по формуле (12.40). Анализ устойчивости проводят так же, как и в случае одноконтурного усилителя.

Сопоставляя формулы (12.38) и (12.49), можно отметить, что в двухконтурном усилителе вносимая отрицательная проводимость не связана с начальными фазами сигнала и накачки. Кроме того, двухконтурный параметрический усилитель не критичен к выбору частот ω_c и ω_n . Вносимая проводимость будет отрицательна всегда, если $\omega_n > \omega_c$.

Баланс мощностей в многоконтурных параметрических системах. Нечувствительность параметрических усилителей, использующих комбинационные колебания, к соотношению фаз полезного сигнала и накачки дает возможность изучать такие системы на основе простых энергетических соотношений. Обратимся к общей схеме, представленной на рис. 12.6.

Здесь параллельно конденсатору с нелинейной емкостью $C_{\text{нл}}$ включены три цепи. Две из них содержат источники сигнала и накачки, третья является пассивной и служит холостым контуром, настроенным на комбинационную частоту $\omega_k = m\omega_c + n\omega_n$ (m, n — целые числа). Каждая цепь снабжена узкополосным фильтром, пропускающим лишь колебания с частотами, близкими к $\omega_c, \omega_n, \omega_k$ соответственно. Для простоты считается, что цепи сигнала и накачки не имеют омических потерь.

Пусть один из источников (сигнала или накачки) отсутствует. Тогда в токе, протекающем через нелинейный конденсатор, не будет составляющих с комбинационными частотами. Ток холостого контура равен нулю и система в целом ведет себя как реактивная цепь, не потребляя в среднем мощности от источника.

Если имеются оба источника, то появляется составляющая тока на комбинационной частоте; этот ток может замыкаться

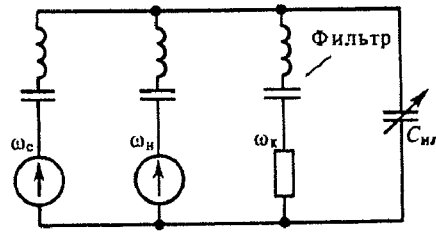


Рис. 12.6. К выводу энергетических соотношений в двухконтурной параметрической системе

только через цепь холостого контура. Имеющаяся здесь нагрузка в среднем потребляет мощность, а в цепи сигнала и накачки вносятся положительные или отрицательные сопротивления, значение и знак которых определяют перераспределение мощностей между источниками.

Рассматриваемая система замкнута (автономна), и на основании закона сохранения энергии средние мощности сигнала, накачки и комбинационных колебаний связаны соотношением

$$P_c + P_n + P_k = 0. \quad (12.50)$$

Мощность, усредненную за период колебаний T , можно выразить через энергию E , выделяемую в этот интервал времени:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = f E$$

(f — частота в герцах). Таким образом,

$$f_c E_c + f_n E_n + f_k E_k = 0,$$

или, учитывая, что $f_k = m f_c + n f_n$,

$$f_c (E_c + m E_k) + f_n (E_n + n E_k) = 0. \quad (12.51)$$

Равенство (12.51) должно выполняться тождественно при любых частотах f_c и f_n . Это возможно лишь в том случае, если

$$\begin{aligned} E_c + m E_k &= 0, \\ E_n + n E_k &= 0. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Переходя от энергий к мощностям, получаем два важных соотношения, которые называют уравнениями Мэнли — Роу:

$$\begin{aligned} P_c / f_c + m P_k / (m f_c + n f_n) &= 0, \\ P_n / f_n + n P_k / (m f_c + n f_n) &= 0. \end{aligned} \quad (12.53)$$

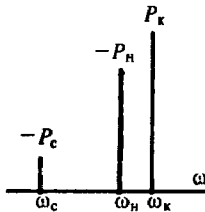
Уравнения Мэнли — Роу позволяют просто и наглядно изучать закономерности преобразования мощностей в многоконтурных параметрических системах. Рассмотрим два типичных случая.

Приведенные рассуждения в равной мере справедливы, если система содержит нелинейный индуктивный элемент

●
уравнения
Мэнли — Роу

Параметрическое усиление с преобразованием частоты «вверх». Положив в формулах (12.53) $m = n = 1$, имеем

$$\begin{aligned} P_c/f_c + P_k/(f_c + f_n) &= 0, \\ P_n/f_n + P_k/(f_c + f_n) &= 0. \end{aligned} \quad (12.54)$$



Как это принято, будем считать положительной мощность, выделяемую в нагрузке, и отрицательной мощность, отдаваемую генератором. Из соотношений (12.54) видно, что так как $P_k > 0$, то $P_c < 0$ и $P_n < 0$. Итак, если холостой контур усилителя настроен на частоту $f_k = f_c + f_n$, то оба источника (сигнала и накачки) отдают мощность холостому контуру, где она потребляется в нагрузке. Так как $P_k = -P_c - P_n$, то коэффициент усиления мощности

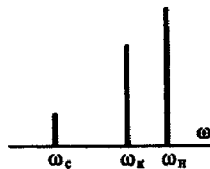
$$K_P = P_k/(-P_c) = 1 + f_n/f_c = f_k/f_c. \quad (12.55)$$

Достоинство такого способа параметрического усиления заключается в устойчивости системы, неспособной самовозбудиться ни при каких мощностях сигнала и накачки. Недостаток же связан с тем, что частота выходного сигнала оказывается выше частоты сигнала на входе. В диапазоне СВЧ это вызывает известные трудности при дальнейшей обработке колебаний.

Регенеративное параметрическое усиление. Пусть $m = -1$, $n = 1$, т. е. частота настройки холостого контура $f_k = f_n - f_c$. Уравнения Мэнли – Роу принимают вид

Предполагается, что $f_n > f_c$

$$\begin{aligned} P_c/f_c - P_k/(f_n - f_c) &= 0, \\ P_n/f_n + P_k/(f_n - f_c) &= 0. \end{aligned} \quad (12.56)$$



Как следует из первого уравнения, в данном режиме положительными являются обе мощности P_k и P_c . Таким образом, некоторая часть мощности, отбираемая от генератора накачки, поступает в сигнальный контур, т. е. в системе наблюдается *регенерация на частоте сигнала*. Выходную мощность можно извлечь как из сигнального, так и из холостого контура.

Уравнения (12.56) не дают возможности определить коэффициент усиления системы, поскольку мощность P_c содержит в себе как часть, потребляемую от устройств, подключенных ко входу усилителя, так и часть, возникающую за счет эффекта регенерации. Можно отметить способность таких усилителей к самовозбуждению, поскольку при определенных условиях в сигнальном контуре будет развиваться отличная от нуля мощность даже в отсутствие полезного сигнала на входе.

12.4. Воздействие гармонических сигналов на параметрические системы со случайными характеристиками

Большой теоретический и прикладной интерес представляет изучение прохождения сигналов через системы, параметры которых случайно изменяются во времени. В простей-

шем случае речь идет о случайной неустойчивости коэффициента усиления некоторого устройства, приводящей к флуктуациям амплитуды на выходе. В более сложной ситуации приходится рассматривать распространение сигналов в различных средах, например, в плазме ионосферы Земли, при наличии случайных изменений показателя преломления. Здесь принятый сигнал искажен случайной угловой модуляцией, поскольку набег фазы сигнала на трассе распространения оказывается случайной функцией времени.

Подробное исследование статистических характеристик сигналов на выходе линейных систем со случайно изменяющимися параметрами проведено в работе [22]. Здесь будут изучены две простейшие задачи.

Случайная амплитудная модуляция. Рассмотрим сигнал на выходе резистивной параметрической цепи, которая осуществляет умножение гармонического колебания $U_0 \cos \omega_0 t$ на функцию $z(t)$, принадлежащую ансамблю реализаций стационарного случайного процесса $Z(t)$. Математическое ожидание m_z и функция корреляции $R_z(\tau)$ считаются известными. Методами корреляционной теории исследуем статистические характеристики процесса $Y(t)$ на выходе такой цепи.

Поскольку реализация выходного сигнала $y(t) = U_0 z(t) \cos \omega_0 t$, то, очевидно, $m_y = \bar{y} = 0$.

Функция корреляции выходного сигнала

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t) y(t+\tau)} = \\ &= \overline{U_0^2 z(t) z(t+\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t+\tau)}. \end{aligned} \quad (12.57)$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t+\tau) &= \\ &= \frac{1}{2} [\cos \omega_0 (2t+\tau) + \cos \omega_0 \tau] = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau, \end{aligned}$$

то

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 \overline{z(t) z(t+\tau) \cos \omega_0 \tau}.$$

Согласно определению, ковариационный момент

$$\overline{z(t) z(t+\tau)} = R_z(\tau) + m_z^2,$$

откуда получаем окончательную формулу, связывающую функции корреляции выходного сигнала и случайного коэффициента передачи $z(t)$:

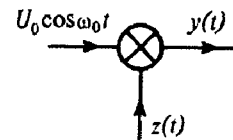
$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 [R_z(\tau) + m_z^2] \cos \omega_0 \tau. \quad (12.58)$$

Дисперсия выходного случайного процесса

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{1}{2} U_0^2 [\sigma_z^2 + m_z^2].$$

Характерный вид формулы (12.58) говорит о том, что если реализации $z(t)$ изменяются во времени медленно по сравнению с входным сигналом, то выходное колебание является реализацией узкополосного случайного процесса. Следует заметить, что если $m_z \neq 0$, то функция $R_y(\tau)$ не стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Для того чтобы понять физические следствия этого свойства, обратим по Фурье

В большинстве реальных случаев одновременно имеется случайная модуляция и по амплитуде, и по фазе



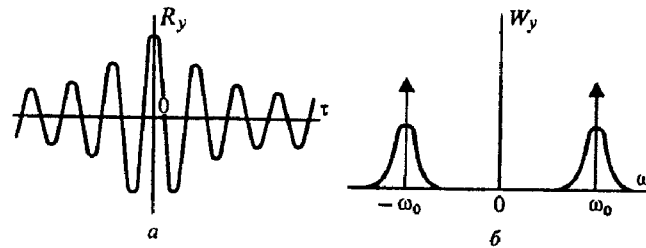


Рис. 12.7. Характеристики сигнала на выходе случайного амплитудного модулятора:

a — функция корреляции; b — спектральная плотность мощности

функцию $R_y(\tau)$, т. е. найдем спектр мощности процесса $Y(t)$:

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} r_z(\tau) \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} U_0^2 m_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau d\tau. \end{aligned}$$

Несложные преобразования позволяют представить эту зависимость в виде

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \frac{1}{2} U_0^2 \sigma_z^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} r_z(\tau) \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{-\infty}^{\infty} r_z(\tau) \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau \right] + \\ &+ \frac{1}{2} U_0^2 m_z^2 \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \end{aligned} \quad (12.59)$$

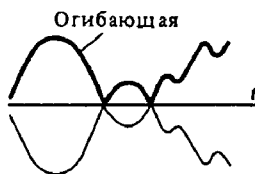
■
характер спектра мощности выходного сигнала при случайной амплитудной модуляции

Таким образом, в спектре мощности процесса на выходе случайного амплитудного модулятора присутствуют две компоненты: непрерывная, обусловленная случайными флуктуациями амплитуды, и дискретная, описывающая прохождение на выход немодулированного несущего колебания; дискретному спектру соответствуют две дельта-функции в частотной области. Доля дискретной части тем значительнее, чем больше величина m_z^2 по сравнению с дисперсией σ_z^2 . Примерный вид графиков функции корреляции и спектра мощности для рассматриваемого случая изображен на рис. 12.7.

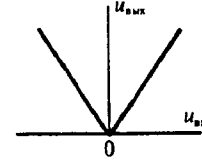
Огибающая выходного сигнала. Если $Z(t)$ — медленный процесс, то можно считать, что мгновенное значение физической, огибающей на выходе рассматриваемой системы пропорционально абсолютной величине его реализации:

$$U_y(t) = |U_0 z(t)|, \quad (12.60)$$

поскольку амплитудный детектор, создающий на выходе огибающую, нечувствителен к фазе высокочастотного заполнения.



Соотношение (12.60) указывает на то, что огибающая узкополосного процесса на выходе параметрической системы с флуктуирующим коэффициентом передачи $z(t)$ есть результат нелинейного безынерционного преобразования случайного процесса $Z(t)$ в воображаемом устройстве с кусочно-линейной характеристикой $u_{\text{вых}} = |U_0 u_{\text{вх}}|$. Среднее значение, дисперсия и функция корреляции огибающей могут быть вычислены с помощью методов, изложенных в гл. 11.



Случайная угловая модуляция. Пусть гармонический сигнал $U_0 \cos \omega_0 t$ подвергается параметрическому преобразованию, в результате которого возникает колебание $y(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + z(t)]$, промодулированное по фазовому углу реализацией стационарного случайного процесса $Z(t)$. Очевидно, функция корреляции выходного сигнала

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= U_0^2 \overline{\cos [\omega_0 t + z(t)] \cos [\omega_0 (t + \tau) + z(t + \tau)]} = \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \{ \overline{\cos [2\omega_0 t + \omega_0 \tau + z(t) + z(t + \tau)]} + \\ &\quad + \overline{\cos [\omega_0 \tau + z(t + \tau) - z(t)]} \}. \end{aligned} \quad (12.61)$$

Здесь учтено, что среднее значение выходного сигнала равно нулю

Первое слагаемое в фигурных скобках при усреднении обращается в нуль, поэтому

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\cos (\omega_0 \tau + z_\tau - z)} = \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\cos (z_\tau - z) \cos \omega_0 \tau -} \\ &\quad - \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\sin (z_\tau - z) \sin \omega_0 \tau} \end{aligned} \quad (12.62)$$

(для сокращения записи аргумент функции $z(t)$ опущен).

Если $\tau \rightarrow 0$, то $\lim \cos (z_\tau - z) = 1$, $\lim \sin (z_\tau - z) = 0$ и эффективная мощность сигнала, т. е. его дисперсия $\sigma_y^2 = U_0^2/2$, оказывается такой же, как мощность гармонического сигнала с амплитудой U_0 .

Формула (12.62) дает полное описание свойств сигнала со случайной угловой модуляцией в рамках корреляционной теории. Так, она указывает на следующий факт: если процесс $Z(t)$ образован реализациями, медленными по сравнению с гармоническими колебаниями частоты ω_0 , то сигнал на выходе фазового модулятора является узкополосным случайным процессом с центральной частотой ω_0 .

Угловая модуляция нормальным случайным процессом. Для анализа формулы (12.62) необходимо найти среднее значение входящих в нее тригонометрических функций от разностного аргумента. Это можно сделать, располагая двумерной плотностью вероятности $p(z, z_\tau)$:

$$\overline{\cos (z_\tau - z)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \cos (z_\tau - z) p(z, z_\tau) dz dz_\tau,$$

$$\overline{\sin (z_\tau - z)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \sin (z_\tau - z) p(z, z_\tau) dz dz_\tau.$$

Вычислить такие интегралы в общем случае весьма сложно. Однако если случайный процесс $Z(t)$ гауссов, то существует

■ постоянное дисперсии сигнала при случайной угловой модуляции

изыщный способ, сразу приводящий к окончательному результату. Этот способ основан на использовании двумерной характеристической функции гауссова процесса [см. формулу (6.32)]

$$\begin{aligned}\Theta(v_1, v_2) &= \overline{\exp[j(z_\tau v_1 + zv_2)]} = \\ &= \exp\{jm_z(v_1 + v_2) - 1/2\sigma_z^2[v_1^2 + 2r_z(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\}.\end{aligned}\quad (12.63)$$

Так как

усреднение с помощью характеристической функции

$$\begin{aligned}\cos(z_\tau - z) &= \{\exp[j(z_\tau - z)] + \exp[-j(z_\tau - z)]\}/2, \\ \sin(z_\tau - z) &= \{\exp[j(z_\tau - z)] - \exp[-j(z_\tau - z)]\}/(2j), \\ \text{то на основании формулы (12.63) находим средние значения:} \\ \overline{\cos(z_\tau - z)} &= [\Theta(1, -1) + \Theta(-1, 1)]/2, \\ \overline{\sin(z_\tau - z)} &= [\Theta(1, -1) - \Theta(-1, 1)]/(2j).\end{aligned}\quad (12.64)$$

Положив для определенности $m_z = 0$, имеем

$$\Theta(1, -1) = \Theta(-1, 1) = \exp\{-\sigma_z^2[1 - r_z(\tau)]\},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\cos(z_\tau - z)} &= \exp\{-\sigma_z^2[1 - r_z(\tau)]\}, \\ \overline{\sin(z_\tau - z)} &= 0.\end{aligned}$$

Подставив эти результаты в (12.62), найдем окончательное выражение функции корреляции сигнала, возникающего при гауссовой угловой модуляции гармонического колебания:

$$R_y(\tau) = 1/2 U_0^2 \exp\{-\sigma_z^2[1 - r_z(\tau)]\} \cos \omega_0 \tau. \quad (12.65)$$

С качественной точки зрения эта функция аналогична той, которая была найдена ранее при анализе случайной амплитудной модуляции. Поэтому полностью повторяется вывод о том, что спектр мощности содержит две составляющие — непрерывную и дискретную. Анализ показывает [22], что при $\sigma_z^2 \gg 1$ случайная угловая модуляция оказывается широкополосной. Дискретная часть спектра практически исчезает, а непрерывная часть вблизи частоты ω_0 описывается гауссовой функцией

$$W_y(\omega) = \frac{U_0^2 \sqrt{\pi/2}}{\sigma_z \sqrt{-r_z''(0)}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_z^2[-r_z''(0)]}}. \quad (12.66)$$

Эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \sqrt{2\pi\sigma_z^2[-r_z''(0)]} \quad (12.67)$$

возрастает с увеличением как дисперсии σ_z^2 , так и величины $-r_z''(0)$, пропорциональной скорости изменения модулирующей функции.

Результаты

- ◇◇ Для реализации резистивного параметрического элемента на вход безынерционного нелинейного двухполюсника подают сумму малого полезного сигнала и большого управляющего сигнала.
- ◇◇ Преобразование частоты заключается в переносе спектра сигнала из окрестности несущей частоты в окрестность промежуточной частоты без изменения закона модуляции.
- ◇◇ При синхронном детектировании частоты сигнала и гетеродина совпадают.
- ◇◇ Если сопротивление безынерционного параметрического элемента периодически изменяется во времени, то в спектре выходного сигнала содержится, вообще говоря, бесконечное число комбинационных составляющих с частотами $\omega_c \pm k\omega_p$, $k = 0, 1, 2, \dots$
- ◇◇ Параметрические реактивные элементы могут передавать часть мощности генератора накачки цепям, в которых присутствует полезный сигнал.
- ◇◇ При определенных фазовых соотношениях параметрически управляемый конденсатор может вызывать возбуждение колебаний в LC-контуре. Такой конденсатор эквивалентен отрицательной активной проводимости, вносимой в контур.
- ◇◇ Различают одноконтурные и двухконтурные параметрические усилители; последние содержат холостой контур, настроенный на одну из комбинационных частот.
- ◇◇ Энергетические соотношения в многоконтурной параметрической системе описываются уравнениями Мэнли — Роу.
- ◇◇ При случайной амплитудной модуляции в спектре выходного сигнала содержатся как непрерывная, так и дискретная составляющие.
- ◇◇ Если при угловой модуляции модулирующая функция является реализацией нормального случайного процесса, то функция корреляции выходного сигнала может быть выражена через характеристическую функцию сигнала на входе модулятора.

Вопросы

1. Чем принципиально отличаются спектры токов в резистивном параметрическом и нелинейном двухполюсниках? Оба элемента возбуждаются гармоническим входным сигналом.
2. Изобразите структурную схему супергетеродинного приемника. Что такое зеркальный канал приема? Как можно исключить неоднозначность настройки приемника?
3. Как определяется понятие крутизны преобразования?
4. Каковы достоинства и недостатки синхронного детектора?
5. Можно ли добиться возбуждения колебательного контура с помощью параметрического конденсатора, емкость которого изменяется во времени с частотой, равной резонансной частоте контура?
6. Опишите физический принцип работы варактора.
7. Какими явлениями сопровождается работа одноконтурного параметрического усилителя в асинхронном режиме?
8. В чем состоит достоинство двухконтурных параметрических усилителей?
9. Почему параметрическим усилителям свойствен низкий уровень собственных шумов? Целесообразно ли использовать одноконтурные или двухконтурные параметрические усилители вместо обычных транзисторных усилителей напряжения в диапазоне умеренно высоких частот, не превышающих нескольких десятков мегагерц?
10. Приведите пример физической системы, в которой входной сигнал подвергается случайной амплитудной модуляции.
11. Каковы характерные особенности спектра сигнала, получаемого при случайной угловой модуляции гармонического несущего колебания? На каком основании можно утверждать, что в спектре мощности выходного сигнала углового модулятора существуют непрерывная и дискретная составляющие?
12. Обоснуйте физический механизм возникновения случайной угловой модуляции при отражении радиосигналов от ионосферы.

Задачи

1. Параметрическая активная проводимость (См) изменяется во времени по закону $G(t) = 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} \cos 10^5 t + 3 \cdot 10^{-4} \cos 2 \cdot 10^5 t$. К данному элементу приложено напряжение (В) $u(t) = 5 \cos 10^6 t$. Найдите амплитуды и частоты всех составляющих тока. Постройте спектральную диаграмму тока.

2. Безынерционный нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику (мА) вида $i(u) = 5 + 2.5u + 1.5u^2$.

К резистору приложено напряжение (В) $u(t) = 3 + 0.5 \cos \Omega t$. Выведите формулу, определяющую зависимость дифференциальной крутизны во времени.

3. В преобразователе частоты применен транзистор с характеристикой (мА)

$$i_K = \begin{cases} 0, & u_{БЭ} < 0.5 \text{ В}, \\ 20(u_{БЭ} - 0.5), & u_{БЭ} \geq 0.5 \text{ В}. \end{cases}$$

В отсутствие полезного сигнала на базу подана сумма напряжений смещения и гетеродина (В): $u_{БЭ} = 0.2 + 0.7 \cos \omega_r t$. Вычислите крутизну преобразования.

Более сложные задания

7. Исследуйте процесс параметрического возбуждения колебаний в LCR -контуре, емкость которого изменяется во времени по закону $C(t) = C_0(1 + \beta \cos \omega_n t)$. Покажите, что в случае если частота накачки $\omega_n = 2\sqrt{LC_0}$, то критическое значение глубины модуляции емкости $\beta_{кр} = 2/Q$, где $Q = \sqrt{L/C_0}/R$ — добротность колебательного контура.

8. Емкость параметрического конденсатора изменяется во времени по закону $C(t) =$

4. Емкость параметрического конденсатора (пФ) изменяется во времени по закону $C(t) = 200 + 80 \cos(10^5 t + \pi/4) + 40 \cos 5 \cdot 10^5 t$.

К конденсатору приложено напряжение (В) $u(t) = 30 \cos 5 \cdot 10^6 t$. Найдите аналитическое выражение тока в конденсаторе.

5. Индуктивность колебательного контура равна 0.5 мГн, средняя емкость $C_0 = 750$ пФ, сопротивление потерь контура 12 Ом. Емкость контура изменяется скачкообразно с одинаковыми приращениями в обе стороны относительно среднего значения. С какой частотой и в каких пределах следует изменять емкость, чтобы контур имел результирующую добротность $Q = 300$?

6. Одноконтурный параметрический усилитель предназначен для усиления колебаний с частотой 120 МГц. Усилитель содержит катушку с индуктивностью 0.6 мкГн; собственная добротность контура усилителя равна 35. Определите частоту и пределы изменения емкости конденсатора, при которых усиление системы составляет 15 дБ.

$= C_0 \exp(-t/\tau) \sigma(t)$, где C_0 , τ — постоянные величины. К конденсатору подключен источник линейно нарастающего напряжения $u(t) = at \sigma(t)$. Найдите момент времени t_1 , в который мгновенная мощность, потребляемая конденсатором от источника сигнала, максимальна, а также момент времени t_2 , в который максимальной оказывается мощность, отдаваемая конденсатором во внешнюю цепь.

Глава 13

Элементы теории синтеза линейных частотных фильтров

Теорию цепей принято делить на две обширные области, тесно связанные между собой, — анализ и синтез. Задачей анализа является нахождение внешних и внутренних характеристик электрической цепи, структура которой задана заранее, например в виде принципиальной схемы. Задача синтеза цепи диаметрально противоположна — внешняя характеристика, такая, как частотный коэффициент передачи напряжения, входное или выходное сопротивление и т. д., считается известной. Требуется найти структуру цепи, реализующую эту характеристику.

В отличие от анализа синтез цепи, как правило, является неоднозначной процедурой. Поэтому среди множества структур с одинаковыми свойствами необходимо отыскать ту, которая в некотором определенном смысле оптимальна. Так, всегда желательно, чтобы синтезируемая цепь содержала минимально возможное число элементов. Во многих случаях нужно, чтобы цепь была малочувствительна к выбору номиналов входящих в нее элементов.

Синтез цепей является развитой областью современной теоретической радиотехники. Разработан целый ряд методов синтеза, порой весьма сложных, с которыми читатель может познакомиться самостоятельно [35, 36]. Методы синтеза цепей приобрели исключительно большое значение в связи с внедрением систем автоматизированного проектирования радиотехнических устройств на ЭВМ.

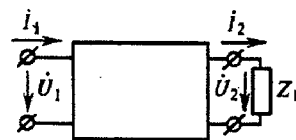
В данной главе будет изучаться простейшая задача синтеза частотных фильтров, представляющих собой линейные стационарные четырехполюсники, образованные элементами L , C и R . Исходные данные для синтеза во всех случаях будут задаваться амплитудно-частотными характеристиками.

13.1. Частотные характеристики четырёхполюсников

Четырёхполюсниками называют электрические цепи, имеющие вид «черного ящика» с двумя парами доступных зажимов. Одна пара служит входом, другая — выходом сигнала. В рабочем режиме ко входу подключен источник сигнала, а выходные зажимы нагружены на сопротивление нагрузки Z_n .

Предполагается, что читатель знаком с методами анализа четырёхполюсников, которые излагаются в курсе теории цепей [3, 36]. Материал данного параграфа освещает лишь отдельные моменты, существенные для синтеза четырёхполюсников.

Излагаемые здесь методы синтеза применимы не только к электрическим цепям, но и к любым линейным системам, которые допускают модельное представление в виде четырёхполюсников с сосредоточенными параметрами



Матричное описание. Важнейшее свойство линейного стационарного четырехполюсника состоит в том, что четыре комплексные амплитуды $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$ при любой частоте внешнего воздействия связаны двумя линейными алгебраическими уравнениями. Две произвольно выбранные комплексные амплитуды можно принять за независимые величины, а две другие должны определяться через них. Это служит основанием для матричного описания линейных четырехполюсников. Так, часто используют матрицу передачи (*ABCD*-матрицу), полагая независимыми переменными напряжение и ток на выходе. При этом

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.\end{aligned}\quad (13.1)$$

Коэффициенты A, B, C и D имеют разные физические размерности и могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания. Матрицы передачи особенно удобны для описания каскадного включения четырехполюсников, поскольку результирующая матрица есть произведение матриц отдельных звеньев.

● функции цепи

Если заданы матрица четырехполюсника и сопротивление нагрузки, то можно вычислить так называемые *функции цепи*, к которым относят, например:

- а) входное сопротивление $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$;
- б) передаточное сопротивление $Z_n = \dot{U}_2/\dot{I}_1$;
- в) частотный коэффициент передачи напряжения $K = \dot{U}_2/\dot{U}_1$.

Функции цепи зависят в общем случае от частоты. Любая функция цепи выражается через элементы матрицы четырехполюсника и через сопротивление нагрузки. Так, для левых и правых частей уравнения (13.1) друг на друга, находим, что входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = (AZ_n + B)/(CZ_n + D). \quad (13.2)$$

Аналогично, частотный коэффициент передачи напряжения

$$K(j\omega) = Z_n/(AZ_n + B). \quad (13.3)$$

Коэффициенты прямой и обратной передач в общем случае не совпадают

Обратим внимание на то, что функция $K(j\omega)$ зависит от направления передачи энергии в системе. Если источник и нагрузка поменялись местами, то вводят частотный коэффициент передачи в обратном направлении (нагрузка слева):

$$K_{\text{обр}}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{U}_2. \quad (13.4)$$

Передаточная функция четырехполюсника. В дальнейшем в качестве аргумента частотного коэффициента передачи будет использоваться не только переменная $j\omega$, но и комплексная частота p , т. е. наряду с функцией $K(j\omega)$ будет рассматриваться более общая характеристика — передаточная функция $K(p)$. Передаточная функция четырехполюсника обладает всеми свойствами передаточных функций линейных стационарных систем, рассмотренных в гл. 8. Так, линейному четырехполюснику с постоянными параметрами отвечает

функция

$$K(p) = K_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (13.5)$$

где K_0 — постоянная величина. Если цепь устойчива, то полюсы $p_1, p_2, \dots, p_n$ должны располагаться в левой полуплоскости, образуя комплексно-сопряженные пары.

Обычно вводят дополнительное условие — число полюсов функции $K(p)$ должно превышать число нулей, т. е. в бесконечно удаленной точке должен существовать не полюс, а нуль передаточной функции. Тогда импульсная характеристика цепи

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_C K(p) e^{pt} dp$$

оказывается ограниченной, поскольку при бесконечно большом радиусе контура интегрирования C экспоненциальный сомножитель подынтегральной функции сможет «погасить» интеграл по дуге.

Расположение нулей передаточной функции. В отличие от полюсов нули функции $K(p)$ устойчивого линейного четырехполюсника могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости переменной p . Действительно, если $K(p) = 0$, то это лишь означает, что при некотором $U_1(p) \neq 0$ изображение выходного напряжения $U_2(p)$ обращается в нуль. Это не противоречит свойствам устойчивых систем.

Четырехполюсники, не имеющие нулей передаточной функции в правой полуплоскости, называют *минимально-фазовыми цепями*. Если же нули в правой полуплоскости имеются, то такие четырехполюсники называют *неминимально-фазовыми цепями*.

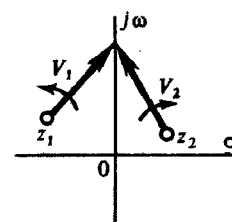
Данная терминология связана со следующими обстоятельствами. Рассмотрим плоскость комплексной частоты, на которой обозначены некоторые точки z_1 и z_2 в левой и правой полуплоскостях. Пусть эти точки являются нулями передаточной функции четырехполюсника. Если цепь находится под гармоническим внешним воздействием, так что $p = j\omega$, то данным точкам соответствуют два вектора на комплексной плоскости: $V_1 = j\omega - z_1$ и $V_2 = j\omega - z_2$, которые отвечают соответствующим сомножителям в числителе формулы (13.5). Оба вектора поворачиваются и изменяют свою длину при изменении частоты ω . Разница между ними состоит в том, что вектор V_1 с изменением частоты от $-\infty$ до $+\infty$ увеличивает фазовый угол частотного коэффициента передачи на π радиан, в то время как вектор V_2 при тех же условиях уменьшает фазу на ту же величину. Коэффициент передачи четырехполюсника является дробно-рациональной функцией, изменение аргумента которой

$$\Delta \arg K(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{+\infty} = \Delta \arg (\text{числит.}) - \Delta \arg (\text{знаменат.}).$$

■ расположение полюсов передаточной функции четырехполюсника

Существование нуля передаточной функции в бесконечно удаленной точке обеспечивает спад АЧХ цепи при очень высоких частотах

● минимально-фазовые цепи



Поэтому при одинаковом числе нулей и полюсов неминимально-фазовая цепь обеспечивает большее по абсолютному значению изменение фазы коэффициента передачи по сравнению с минимально-фазовой цепью.

Расположение нулей функции $K(p)$ связано с топологической структурой цепи. В теории цепей показывается, что минимально-фазовым будет любой четырехполюсник со следующим свойством: передача сигнала с входа на выход может быть полностью прекращена путем разрыва единственной ветви. В частности, минимально-фазовыми цепями будут любые четырехполюсники лестничной структуры.

Неминимально-фазовые четырехполюсники имеют, как правило, структуру мостовых (скрещенных) цепей, в которых сигнал на выход проходит по двум или более каналам. Простейшая неминимально-фазовая цепь — симметричный мостовой четырехполюсник, образованный элементами R и C . Здесь, как нетрудно убедиться, передаточная функция по напряжению

$$K(p) = (pRC - 1)/(pRC + 1). \quad (13.6)$$

Данная функция имеет единственный нуль $z = 1/(RC)$, который находится в правой полуплоскости.

Однако мостовая структура не гарантирует автоматически принадлежность цепи к неминимально-фазовому классу. В каждом отдельном случае следует проверять наличие или отсутствие нулей передаточной функции в правой полуплоскости.

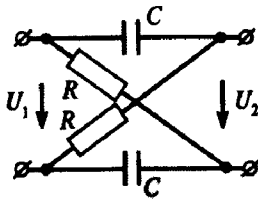
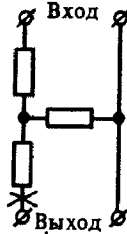
Связь между АЧХ и ФЧХ минимально-фазового четырехполюсника. Передаточная функция $K(p)$ любого устойчивого четырехполюсника в правой полуплоскости переменной p является аналитической функцией. Если к тому же этот четырехполюсник принадлежит к числу цепей минимально-фазового типа, то его передаточная функция в правой полуплоскости не имеет и нулей. Это значит, что аналитической оказывается функция

$$\ln K(p) = \ln |K(p)| + j \arg K(p).$$

В соответствии с материалом гл. 5 граничные значения вещественной и мнимой частей функции $\ln K(p)$ на мнимой оси, т. е. при $p = j\omega$, связаны между собой парой преобразований Гильберта:

$$\begin{aligned} \arg K(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(j\xi)|}{\xi - \omega} d\xi, \\ \ln |K(j\omega)| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg K(j\xi)}{\omega - \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Таким образом, реализуя заданную АЧХ четырехполюсника минимально-фазового типа, невозможно получить при



этом любую ФЧХ. Основываясь на свойствах преобразований Гильберта, можно утверждать, например, что если АЧХ минимально-фазового четырехполюсника на какой-нибудь частоте достигает максимума, то ФЧХ в окрестности этой частоты проходит через нуль.

Если же четырехполюсник принадлежит к классу цепей неминимальной фазы, то АЧХ и ФЧХ независимы друг от друга. Среди неминимально-фазовых цепей особо важную роль играют так называемые *всепропускающие четырехполюсники*, у которых модуль коэффициента передачи постоянен и не зависит от частоты. Примером может служить симметричный мостовой RC-четыреполюсник, для которого в соответствии с равенством (13.6)

$$|K(j\omega)| = 1, \quad \varphi_K(\omega) = -2 \arctg \omega RC. \quad (13.8)$$

Подобные четырехполюсники используются для фазовой коррекции сигналов. Они позволяют частично компенсировать искажения формы сигналов, прошедших через радиотехнические устройства.

Коэффициент передачи мощности. Как известно (см. гл. 8), так принято называть квадрат модуля частотного коэффициента передачи четырехполюсника:

$$K_P(\omega) = K(j\omega) K^*(j\omega) = K(j\omega) K(-j\omega). \quad (13.9)$$

В отличие от самого коэффициента передачи $K(j\omega)$ функция $K_P(\omega)$ вещественна и поэтому особенно удобна для задания исходных данных к синтезу четырехполюсника.

Как видно из формулы (13.9), коэффициент передачи мощности — четная функция частоты, т. е. всегда может быть представлен в виде отношения двух многочленов по степеням ω^2 :

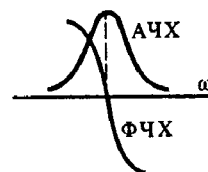
$$K_P(\omega) = M(\omega^2)/N(\omega^2). \quad (13.10)$$

Если подставить переменную p вместо переменной $j\omega$, то функция $K_P(\omega)$ будет аналитически продолжаться с мнимой оси $j\omega$ на всю плоскость комплексных частот:

$$K_P(p) = K(p) K(-p). \quad (13.11)$$

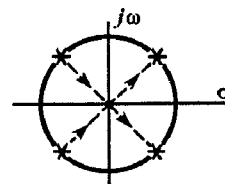
Формула (13.11) устанавливает следующий факт: если $a + jb$ — особая точка (нуль или полюс) функции $K(p)$, то $K_P(p)$ будет иметь такую же особую точку как при $p = a + jb$, так и при $p = -a - jb$. Принято говорить, что особые точки частотного коэффициента передачи мощности имеют *квадрантную симметрию*, т. е. располагаются на комплексной плоскости, имея центр симметрии в начале координат. Это свойство имеет большое значение в теории синтеза четырехполюсников, поскольку оно дает возможность восстанавливать частотный коэффициент передачи по известной функции $K_P(p)$.

Этапы синтеза частотно-избирательных четырехполюсников. Синтез частотных фильтров обычно начинают с того, что выбирают некоторую идеализированную функцию, которая



■ применение неминимально-фазовых цепей

■ частотные свойства коэффициента передачи мощности



Расположение полюсов, находящихся в квадрантной симметрии

описывает частотную зависимость коэффициента передачи мощности, равную квадрату АЧХ. Никаких ограничений на вид ФЧХ фильтра не налагают. Поэтому такой подход называют *синтезом фильтра по заданной АЧХ*.

Как правило, идеализированная частотная характеристика является физически нереализуемой. Поэтому второй этап синтеза состоит в *аппроксимации* этой характеристики такой функцией, которая может принадлежать физически реализуемой цепи.

Далее по аппроксимированной частотной характеристике передачи мощности находят передаточную функцию $K(p)$ фильтра.

Зная координаты нулей и полюсов этой функции, можно провести *реализацию* цепи, т. е. получить принципиальную схему фильтра вместе с номиналами входящих в него элементов.

13.2. Фильтры нижних частот

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые физически реализуемые характеристики фильтров нижних частот (ФНЧ). Основное назначение таких устройств — с минимальным ослаблением передавать на выход колебания, частоты которых не превосходят заданной граничной частоты, называемой *частотой среза* фильтра ω_c . В то же время колебания с более высокими частотами должны существенно ослабляться.

Очевидно, для ФНЧ с частотой среза ω_c идеальная частотная зависимость коэффициента передачи мощности имеет вид

$$K_p(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (13.12)$$

(имеются в виду физические частоты $\omega > 0$).

Такая частотная характеристика заведомо нереализуема. Обращение в нуль функции $K_p(\omega)$, а значит, и передаточной функции $K(p)$ противоречит известному критерию Пэли — Винера (см. гл. 8).

Возникает задача подбора допустимой аппроксимирующей функции.

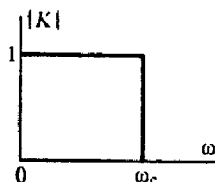
Максимально-плоская аппроксимация. Один из возможных способов аппроксимации идеальной характеристики ФНЧ построен на использовании коэффициента передачи мощности

$$K_p(\omega_n) = 1/(1 + \omega_n^{2n}), \quad (13.13)$$

где $\omega_n = \omega/\omega_c$ — безразмерная *нормированная частота*.

ФНЧ, имеющий такие частотные свойства, называют *фильтром с максимально-плоской характеристикой* или *фильтром Баттерворта*. Целое число $n = 1, 2, 3, \dots$ является *порядком фильтра*. Сравнение выражений (13.10) и (13.13) показывает, что при любом n такой фильтр реализуем.

● частота среза



В общем случае коэффициент передачи мощности может содержать произвольный масштабный множитель

● порядок фильтра

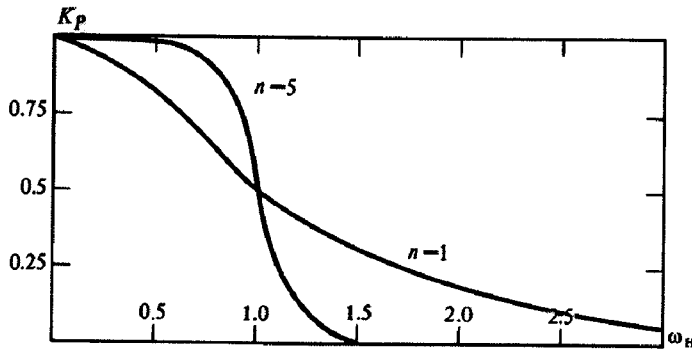


Рис. 13.1. Частотные характеристики коэффициента передачи мощности для фильтров Баттерворта при $n = 1$ и $n = 5$

В полосе пропускания фильтра, т. е. при $0 \leq \omega_n \leq 1$, квадрат модуля коэффициента передачи плавно уменьшается с ростом частоты. На частоте среза (при $\omega_n = 1$) ослабление, вносимое фильтром, составляет $10 \lg 0.5 \approx -3$ дБ независимо от порядка системы. Чем больше n , тем точнее аппроксимируется идеальная форма частотной характеристики. На рис. 13.1 изображены графики, построенные по формуле (13.13) для максимально-плоских характеристик различных порядков.

Порядок фильтра обычно подбирают, исходя из требований, предъявляемых к ослаблению сигналов с частотами $\omega > \omega_c$.

▲
решите задачу 1

Пример 13.1. Найти порядок фильтра Баттерворта с частотой среза 10^5 с^{-1} , который при $\omega = 3 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ обеспечивает ослабление сигнала не хуже чем -26 дБ по отношению к уровню при $\omega = 0$.

Условие задачи определяет порядок n фильтра как целое число, ближайшее (с избытком) к корню уравнения

$$10 \lg [1/(1 + 3^{2n})] = -26,$$

или

$$1 + 3^{2n} = 10^{2.6} = 398.$$

Решая его, находим

$$2n = \lg 397 / \lg 3 = 5.45,$$

откуда $n = 3$.

Если частота сигнала значительно превышает частоту среза фильтра ($\omega_n \gg 1$), то из формулы (13.13) получим

$$K_p(\omega_n) \approx \omega_n^{-2n},$$

т. е. ослабление, выраженное в децибелах,

$$\Delta = 10 \lg K_p \approx -20n \lg \omega_n.$$

Отсюда следует, что при увеличении частоты вдвое ослабление, вносимое фильтром Баттерворта, возрастает на $-20n \cdot 0.301 \approx -6n$ дБ. Говорят, что для фильтра этого типа скорость роста ослабления вне полосы пропускания составляет $-6n$ дБ/октава.

▲
решите задачу 2

Октава — интервал частот, граничные точки которого отличаются в два раза

Передаточная функция фильтра с максимально-плоской частотной характеристикой. Для того чтобы в дальнейшем синтезировать структуру цепи, необходимо от коэффициента передачи мощности, выбранного в форме (13.13), перейти к передаточной функции $K(p)$. С этой целью введем нормированную комплексную частоту $p_n = \sigma_n + j\omega_n$ и запишем формулу (13.13) так:

$$K_P(p_n) = 1/[1 + (-1)^n p_n^{2n}]. \quad (13.14)$$

▲
решите задачу 3

Отсюда видно, что на плоскости p_n функция $K_P(p_n)$, отвечающая ФНЧ с характеристикой Баттерворта n -го порядка, имеет $2n$ полюсов, которые являются корнями уравнения

$$1 + (-1)^n p_n^{2n} = 0. \quad (13.15)$$

Все эти корни лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

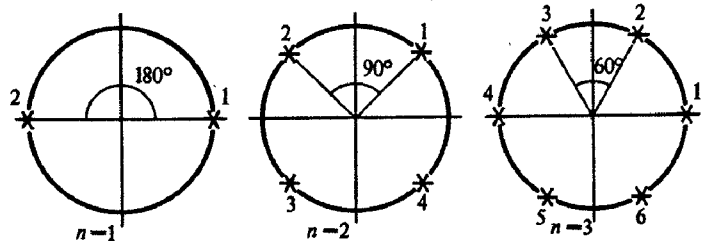


Рис. 13.2. Полюсы коэффициента передачи мощности ФНЧ с характеристикой Баттерворта при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$

При $n = 1$ полюсы коэффициента передачи мощности находят из уравнения $p_n^2 = 1$, т. е.

$$p_{n1} = 1, \quad p_{n2} = -1. \quad (13.16)$$

Если $n = 2$, то уравнение $p_n^4 = -1$ имеет четыре корня:

$$p_{n1} = e^{j\pi/4}, \quad p_{n2} = e^{j3\pi/4}, \quad p_{n3} = e^{j5\pi/4}, \quad p_{n4} = e^{j7\pi/4}. \quad (13.17)$$

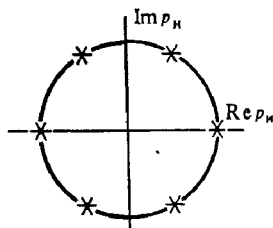
Наконец, для фильтра 3-го порядка необходимо решить уравнение $p_n^6 = 1$, у которого имеется шесть корней:

$$p_{n1} = 1, \quad p_{n2} = e^{j\pi/3}, \quad p_{n3} = e^{j2\pi/3}, \\ p_{n4} = -1, \quad p_{n5} = e^{j4\pi/3}, \quad p_{n6} = e^{j5\pi/3}. \quad (13.18)$$

Расположение корней на комплексной плоскости для приведенных случаев показано на рис. 13.2.

Общая закономерность при любом n такова: все полюсы расположены на одинаковом угловом расстоянии друг от друга, равном π/n ; если n — нечетное число, то первый корень $p_{n1} = 1$, если же n четно, то $p_{n1} = e^{j\pi/n}$.

Теперь воспользуемся тем, что полюсы коэффициента передачи мощности имеют квадрантную симметрию, т. е. их число и конфигурация расположения в обеих полуплоскостях одинаковы. Это позволяет считать, что только полюсы, расположенные в левой полуплоскости, отвечают синтези-



■
принцип отбора полюсов передаточной функции

руемому фильтру. Их «зеркальные копии» в правой полуплоскости соотносятся с функцией $K(-p_n)$ и не принимаются во внимание. Описанный здесь принцип является главным в процедуре синтеза фильтров, поскольку именно на нем в дальнейшем основана реализация цепи.

Пример 13.2. Определить передаточную функцию ФНЧ с характеристикой Баттерворта 2-го порядка.

Передаточная функция определяется двумя полюсами, лежащими в левой полуплоскости [см. (13.17)]:

$$p_{н2} = (-1 + j)/\sqrt{2}, \quad p_{н3} = (-1 - j)/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$K(p_n) = \frac{1}{(p_n - p_{н2})(p_n - p_{н3})} = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2}p_n + 1}.$$

Таким образом, для реализации ФНЧ при $n=2$ требуется динамическая система 2-го порядка (колебательное звено).

Чебышевская аппроксимация. Широкое применение находит также другой способ аппроксимации частотной характеристики идеального ФНЧ, получивший название *чебышевской аппроксимации*. Коэффициент передачи мощности ФНЧ такого вида задается формулой

$$K_p(\omega_n) = 1/[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)], \quad (13.19)$$

где $\varepsilon \leq 1$ — постоянное число, называемое *коэффициентом неравномерности характеристики в полосе пропускания*; $T_n(\omega_n)$ — многочлен Чебышева n -го порядка, определяемый выражением

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (13.20)$$

Функция $T_n(x)$ при любом n может быть найдена из рекуррентного соотношения

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad (13.21)$$

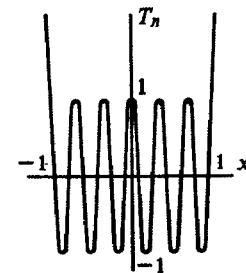
причем $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$.

Эти многочлены часто используются во всевозможных задачах аппроксимации благодаря следующему свойству: среди всех многочленов n -й степени с одинаковыми коэффициентами при старшей степени аргумента они менее всего отклоняются от нуля на интервале $-1 < x < 1$. В то же время при $|x| \gg 1$ абсолютные значения многочленов Чебышева весьма велики. Асимптотически при $|x| \gg 1$

$$T_n(x) \approx 2^{n-1}x^n. \quad (13.22)$$

С помощью таких функций можно удачно аппроксимировать идеальную характеристику ФНЧ: из формулы (13.19) видно, что в пределах полосы пропускания величина K_p колеблется от 1 до $1/(1 + \varepsilon^2)$, если же $\omega_n \gg 1$, то фильтр обеспечивает большое ослабление сигнала.

● коэффициент неравномерности характеристики



■ Типичный график многочлена Чебышева

■ свойство многочленов Чебышева

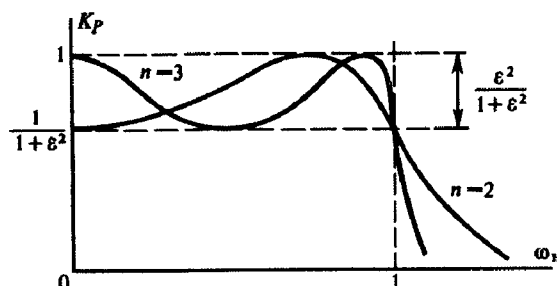


Рис. 13.3. Частотные характеристики ФНЧ чебышевского типа

На рис. 13.3 приведены типичные графики частотных характеристик передачи мощности для двух чебышевских фильтров при $n = 2$ и $n = 3$.

▲
решите задачу 4

Из графиков видно, что в полосе пропускания частотные характеристики чебышевских фильтров немонотонны. Величина пульсаций ослабления тем выше, чем больше ϵ . Как следует из формулы (13.19), увеличение ϵ ведет к большему ослаблению сигналов вне полосы пропускания. Подбором двух параметров n и ϵ можно добиться выполнения исходных условий, предъявляемых к синтезируемому фильтру.

Пример 13.3. Фильтр с чебышевской характеристикой 3-го порядка на частоте среза ($\omega_n = 1$) обеспечивает ослабление мощности в два раза, т. е. такое же, как и фильтр с максимально-плоской характеристикой. Определить величину ослабления, вносимого этим фильтром на частоте, в три раза превышающей частоту среза.

Прежде всего найдем параметр ϵ . Как следует из выражения (13.20), $T_n(1) = 1$ при любом n , поэтому $K_p(1) = 0.5$ в случае, если $\epsilon = 1$.

Многочлен Чебышева 3-го порядка

$$T_3(\omega_n) = 4\omega_n^3 - 3\omega_n,$$

откуда ослабление, вносимое чебышевским фильтром с единичным коэффициентом неравномерности на частоте $\omega = 3\omega_c$, составит

$$\Delta_{\text{ч}} = 10 \lg [1/(1 + 99^2)] = -39.9 \text{ дБ.}$$

Отметим, что в аналогичных условиях фильтр Баттерворта 3-го порядка обеспечивает ослабление

$$\Delta_{\text{Б}} = 10 \lg [1/(1 + 3^6)] = -28.6 \text{ дБ.}$$

Таким образом, применение фильтра с чебышевской характеристикой позволяет существенно лучше подавлять сигналы, частоты которых лежат вне полосы пропускания.

Передаточная функция чебышевского ФНЧ. Как видно из (13.19), полюсы коэффициента передачи мощности чебышевского фильтра являются корнями уравнения

$$1 + \epsilon^2 T_n^2(p_n) = 0 \quad (13.23)$$

[ср. с формулой (13.15)].

Метод его решения довольно громоздок и с ним читатель может ознакомиться в [35]. Практические расчеты выполняют так. Прежде всего вычисляют параметр

$$a = \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right). \quad (13.24)$$

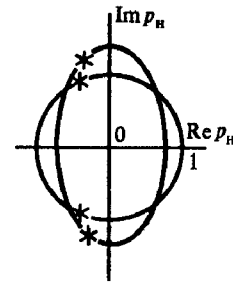
Затем находят полюсы передаточной функции фильтра Баттерворта того же порядка и с той же частотой среза. Чтобы перейти к полюсам передаточной функции чебышевского фильтра, абсциссу каждого полюса фильтра Баттерворта умножают на $\operatorname{sh} a$, а ординату — на $\operatorname{ch} a$.

В то время как полюсы фильтра Баттерворта располагаются на единичной окружности, полюсы фильтра с чебышевской характеристикой лежат на эллипсе, уравнение которого в плоскости $p_n = \sigma_n + j\omega_n$ имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_n}{\operatorname{sh} a} \right)^2 + \left(\frac{\omega_n}{\operatorname{ch} a} \right)^2 = 1.$$

Получив координаты полюсов, можно записать выражение передаточной функции чебышевского ФНЧ:

$$K(p_n) = 1 / [(p_n - p_{n1})(p_n - p_{n2}) \cdots (p_n - p_{nn})].$$



Полюсы фильтров с максимально-плоской и чебышевской характеристиками

Пример 13.4. Найти передаточную функцию чебышевского ФНЧ 2-го порядка с параметром $\varepsilon = 1$.

Здесь

$$a = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) = 0.4407.$$

▲
решите задачу 9

Соответствующий фильтр Баттерворта имеет передаточную функцию с двумя полюсами:

$$p_{n1} = 0.707(-1 + j), \quad p_{n2} = 0.707(-1 - j).$$

Абсциссы полюсов передаточной функции чебышевского фильтра будут равны $-0.707 \operatorname{sh} a = -0.322$; ординаты полюсов составят $\pm 0.707 \operatorname{ch} a = \pm 0.777$.

Из этого примера видно, что переход от максимально-плоской к чебышевской характеристике осуществляется путем приближения полюсов к мнимой оси; перемещение их по вертикали незначительно. С физической точки зрения это означает, что колебательная система, образующая чебышевский фильтр, должна обладать меньшим затуханием.

13.3. Реализация фильтров

Окончательный этап синтеза фильтра состоит в нахождении принципиальной схемы устройства. В этом параграфе будет рассмотрен так называемый *структурный синтез*, когда цепь образуется каскадным включением некоторого числа звеньев, отделенных друг от друга идеальными развязывающими элементами (рис. 13.4).

Частотный коэффициент передачи такой цепи

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega) \cdots K_N(j\omega).$$

●
структурный синтез

Широкое использование элементов развязки характерно для современного синтеза активных цепей в микроэлектронном исполнении

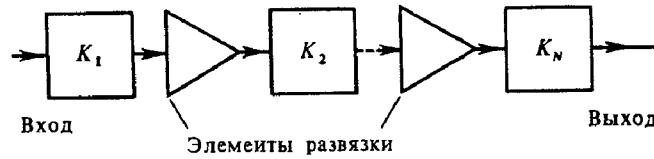


Рис. 13.4. Структурная схема фильтра, образованного каскадным включением звеньев (в качестве элементов развязки обычно используются эмиттерные или истоковые повторители)

Коэффициенты передачи $K_1, K_2, \dots, K_N$ должны быть такими, чтобы они могли реализовывать те полюсы функции $K(p)$, которые были определены ранее на этапе аппроксимации.

Для создания ФНЧ требуются звенья двух видов — звено 1-го порядка с единственным вещественным полюсом и звено 2-го порядка, имеющее пару комплексно-сопряженных полюсов.

Звено 1-го порядка. Простейшей цепью данного вида является Г-образный четырехполюсник, для которого передаточная функция по напряжению

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC}; \quad (13.25)$$

координата полюса $p_1 = -1/(RC)$.

Отметим, что, задавая p_1 , получаем лишь произведение RC . Один из элементов, R или C , может быть выбран произвольно.

Звено 2-го порядка. Два комплексно-сопряженных полюса передаточной функции можно реализовать с помощью Г-образного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 13.5.

Для этого звена легко вычислить передаточную функцию по напряжению:

$$K(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}, \quad (13.26)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\alpha = 1/(2RC)$.

Передаточная функция имеет полюсы в точках с координатами

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (13.27)$$

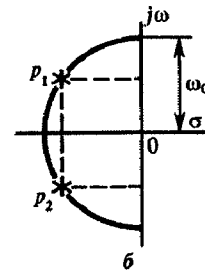
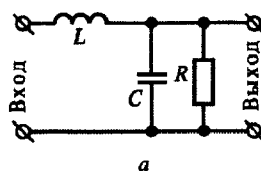


Рис. 13.5. Звено 2-го порядка:

а — принципиальная схема; б — расположение полюсов передаточной функции

▲
решите задачу 6

Желательно, чтобы емкость C значительно превосходила входную емкость последующего звена. При этом снижается чувствительность частотной характеристики фильтра к неточному выбору номиналов элементов

которые в зависимости от соотношения между ω_0 и α могут быть как комплексно-сопряженными, так и вещественными.

Рассмотрим конкретные примеры реализации ФНЧ с помощью звеньев, включаемых каскадно.



Пример 13.5. Реализовать ФНЧ с максимально-плоской характеристикой 3-го порядка при частоте среза 10^5 с^{-1} . Нагрузкой фильтра служит резистор с сопротивлением $R_n = 0.5 \text{ кОм}$.

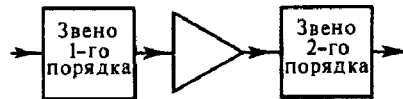
Как было показано ранее, такой фильтр должен иметь три полюса передаточной функции в точках с координатами

$$p_{1,2} = -10^5 (\cos 60^\circ \pm j \sin 60^\circ) = -5 \cdot 10^4 \pm j 8.66 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1},$$

$$p_3 = -10^5 \text{ с}^{-1}$$

(здесь выполнен переход от нормированной переменной p_n к истинной комплексной частоте $p = \omega_c p_n$).

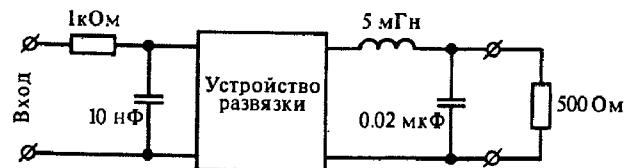
Пусть синтезируемый фильтр имеет вид каскадного соединения звена 1-го порядка, которому отвечает полюс p_3 , развязывающего устройства и звена 2-го порядка с полюсами p_1 и p_2 :



Звено 1-го порядка в соответствии с формулой (13.25) должно иметь постоянную времени $RC = 1/\omega_c = 10^{-5} \text{ с}$. Если выбрать $C = 10 \text{ нФ}$, то резистор, образующий это звено, будет иметь сопротивление $R = 10^{-5}/C = 1 \text{ кОм}$.

Допустим, что роль резистора, входящего в звено 2-го порядка, выполняет нагрузочное сопротивление. На основании соотношения (13.27) пара комплексно-сопряженных корней будет иметь требуемую вещественную часть, если $1/(2R_n C) = -\text{Re } p_{1,2} = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Отсюда $C = 1/(10^6 \cdot R_n) = 0.02 \text{ мкФ}$. Наконец, индуктивность $L = 1/(\omega_c^2 C) = 5 \text{ мГн}$.

Принципиальная схема синтезированного фильтра имеет вид



Пример 13.6. Реализовать чебышевский фильтр нижних частот 2-го порядка, работающий на резистивную нагрузку с сопротивлением $R_n = 1 \text{ кОм}$. Исходные данные к синтезу: частота среза $\omega_c = 10^5 \text{ с}^{-1}$, коэффициент неравномерности $\epsilon = 1$.

Для реализации частотной характеристики фильтра 2-го порядка достаточно иметь одно Г-образное LCR-звено. В примере 13.4 были получены координаты полюсов передаточной функции чебышевского фильтра 2-го порядка при $\epsilon = 1$:

$$p_{n1,2} = -0.322 \pm j 0.777,$$

или после перехода к ненормированной переменной p :

$$p_{1,2} = -3.22 \cdot 10^4 \pm j 7.77 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

▲
решите задачу 7

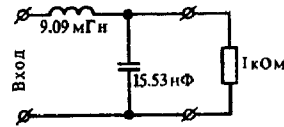
▲
решите задачу 8

Емкость конденсатора C находим из (13.27), приравняв величину α требуемой абсциссе полюсов: $\alpha = 1/(2R_n C) = 3.22 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, откуда $C = 15.53 \text{ нФ}$.

Индуктивность L определяется из уравнения для координат полюсов по мнимой оси: $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 7.77 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Решая его, находим $\omega_0^2 = 1/(LC) = 7.08 \cdot 10^9 \text{ с}^{-2}$,

$$L = 1/(\omega_0^2 C) = 9.09 \text{ мГн}.$$

Итак, заданная частотная характеристика фильтра реализуется цепью, схема которой имеет вид



▲
решите задачу 9

Здесь термин «преобразование частоты» не следует смешивать с тем, который используется в теории нелинейных и параметрических преобразований сигналов

Отметим, что на практике, особенно в СВЧ-диапазоне, используются схемы фильтров, в которых развязывающие элементы отсутствуют. С методами расчета таких цепей читатель может познакомиться самостоятельно [35].

Реализация фильтров верхних частот. Фильтр верхних частот (ФВЧ) предназначен для того, чтобы с малым ослаблением пропускать колебания, частоты которых превышают частоту среза ω_c . Схема ФВЧ может быть получена непосредственно, если синтезирован ФНЧ с такой же частотой среза. Для этого в теории цепей используется прием, называемый *преобразованием частоты*.

Перейдем от переменной p , которая использована для описания ФНЧ, к новой частотной переменной p' , такой, что

$$p = \omega_c^2 / p'. \quad (13.28)$$

При этом точке $p = 0$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка в плоскости p' . Двум точкам $p_{1,2} = \pm j\omega_c$ на мнимой оси отвечают две точки $p'_{1,2} = \mp j\omega_c$, отличающиеся от исходных лишь измененными знаками. Поэтому можно ожидать, что АЧХ фильтра, синтезированного из ФНЧ путем частотного преобразования (13.28), будет действительно соответствовать ФВЧ.

Каждый конденсатор, имевший в схеме ФНЧ проводимость pC , должен быть заменен на элемент с проводимостью $\omega_c^2 C / p'$, т.е. на катушку с индуктивностью $L = 1/(\omega_c^2 C)$. Аналогично, катушка с индуктивностью L в низкочастотном фильтре должна быть заменена на конденсатор с емкостью $C = 1/(\omega_c^2 L)$. Резистивные элементы фильтра остаются без изменения. Описанный здесь переход изображен на рис. 13.6.

Реализация полосовых фильтров. Полосовой фильтр (ПФ) с малым ослаблением пропускает лишь частоты в полосе, прилегающей к некоторой точке $\omega_0 \neq 0$. Если синтезирован ФНЧ с заданной частотой среза, то можно непосредственно перейти к схеме ПФ, выполнив замену переменной

$$p = p' + \omega_0^2 / p'. \quad (13.29)$$

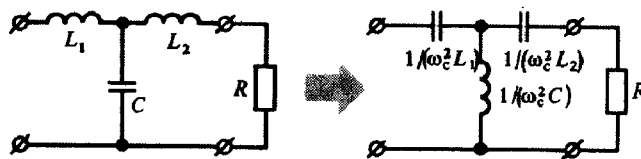


Рис. 13.6. Переход от схемы ФНЧ к схеме ФВЧ

При этом точке $p' = j\omega_0$ отвечает точка $p = 0$ и, таким образом, максимум АЧХ, наблюдавшийся в ФНЧ на нулевой частоте, будет возникать в ПФ на частоте ω_0 . Поскольку $pC = p'C + \omega_0^2 C/p'$,

проводимости конденсатора, примененного в схеме ФНЧ, отвечает в схеме ПФ проводимость параллельного колебательного контура, образованного конденсатором C и катушкой $L = 1/(\omega_0^2 C)$. Заметим, что данный контур оказывается настроенным на частоту ω_0 .

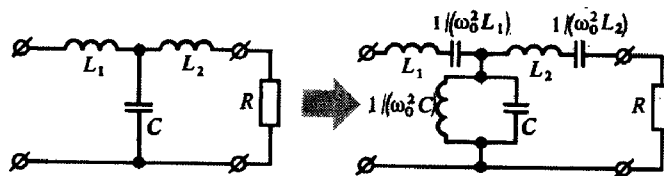


Рис. 13.7. Переход от схемы ФНЧ к схеме ПФ

Аналогично, из равенства $pL = p'L + \omega_0^2 L/p'$ заключаем, что катушка L превращается в последовательное соединение катушки и конденсатора $C = 1/(\omega_0^2 L)$, т. е. в последовательный колебательный контур (рис. 13.7).

Рассмотренные здесь примеры показывают, что ФНЧ при синтезе частотно-избирательных цепей служит так называемым *фильтром-прототипом*, параметры которого дают возможность перейти в дальнейшем к схемам любых других фильтров.

●
фильтр-прототип

Результаты

- ◇◇ Полюсы передаточной функции устойчивого четырехполюсника располагаются только в левой полуплоскости.
- ◇◇ Нули передаточной функции устойчивого четырехполюсника могут находиться в правой полуплоскости (неминимально-фазовые цепи).
- ◇◇ Нули и полюсы частотного коэффициента передачи мощности размещаются в квадрантной симметрии.
- ◇◇ Полюсы передаточной функции ФНЧ с максимально-плоской характеристикой находятся на окружности, радиус которой равен частоте среза.
- ◇◇ ФНЧ с чебышевской характеристикой имеет полюсы передаточной функции, расположенные на эллипсе, эксцентриситет которого определяется коэффициентом неравномерности АЧХ.
- ◇◇ Реализация фильтров верхних частот и полосовых фильтров проводится на основании найденной заранее схемы ФНЧ, играющего роль фильтра-прототипа.

Вопросы

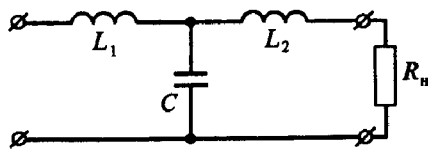
1. Какими функциями цепи принято описывать четырехполюсники?
2. Почему передаточная функция устойчивого четырехполюсника должна иметь нуль в бесконечно удаленной точке?
3. Является ли четырехполюсник с лестничной структурой минимально-фазовой цепью?
4. Какова связь между АЧХ и ФЧХ четырехполюсника минимально-фазового типа?
5. Каково техническое назначение неминимально-фазовых цепей?
6. Как располагаются полюсы передаточной функции ФНЧ с характеристикой Баттерворта?
7. Почему многочлены Чебышева удобны для аппроксимации характеристик ФНЧ?
8. В чем заключается разница между свойствами фильтра Чебышева и Баттерворта?
9. Каков принцип структурного синтеза фильтров?
10. Приведите формулы преобразования частотной переменной, обеспечивающие переход от ФНЧ к ФВЧ и ПФ.

Задачи

1. Докажите, что первые $n - 1$ производных от частотного коэффициента передачи мощности ФНЧ с характеристикой Баттерворта n -го порядка при $\omega_n = 0$ обращаются в нуль.
2. Фильтр нижних частот с максимально-плоской характеристикой имеет частоту среза 10 кГц. Ослабление гармонического сигнала при переходе от частоты 80 кГц к частоте 160 кГц возрастает на 36 дБ. Найдите порядок фильтра.
3. Вычислите передаточную функцию ФНЧ с характеристикой Баттерворта 4-го порядка.
4. Фильтр с чебышевской характеристикой имеет коэффициент неравномерности $\epsilon = 0.3$. Какова неравномерность АЧХ этого фильтра при $\omega_n < 1$, выраженная в децибелах?
5. Вычислите передаточную функцию ФНЧ 2-го порядка с чебышевской характеристикой при $\epsilon = 0.5$.
6. Покажите, что изменение сопротивления резистора R , входящего в звено 2-го порядка, ведет к перемещению комплексно-сопряженных полюсов передаточной функции вдоль окружности радиусом ω_0 . Исследуйте также случай $\alpha > \omega_0$.
7. Реализуйте ФНЧ с максимально-плоской характеристикой 2-го порядка при частоте среза $\omega_c = 10^6 \text{ с}^{-1}$. Нагрузкой фильтра служит резистор с сопротивлением $R_n = 20 \text{ кОм}$. При нахождении номиналов элементов фильтра обратите внимание на практическую выполнимость цепи.
8. Найдите координаты полюсов передаточной функции чебышевского ФНЧ 3-го порядка с параметрами: $\omega_c = 4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $\epsilon = 0.5$.
9. Реализуйте фильтр, рассмотренный в задаче 8, путем каскадного включения звеньев 1-го и 2-го порядков. Сопротивление нагрузочного резистора $R_n = 2 \text{ кОм}$.

Более сложные задания

10. Докажите, что цепь, собранная по схеме:



позволяет реализовать максимально-плоскую характеристику ФНЧ 3-го порядка. Выведите формулы для расчета номиналов элементов цепи по заданной частоте среза.

11. Система, осуществляющая идеальную задержку сигналов на T секунд, имеет

передаточную функцию

$$K(p) = \exp(-pT) = \frac{1}{1 + pT + (pT)^2/2! + \dots}$$

Исследуйте возможность приближенной замены этой характеристики дробно-рациональной функцией с различными степенями знаменателя. Найдите полюсы передаточной функции в 1-, 2- и 3-м приближениях.

12. Исследуйте фазочастотную характеристику ФНЧ с передаточной функцией максимально-плоского типа. Выведите формулы для группового времени запаздывания.

13. Вычислите импульсные характеристики ФНЧ 2-го порядка с максимально-плоскими и чебышевскими АЧХ.

Глава 14

Активные цепи с обратной связью и автоколебательные системы

В данной главе изучается особый класс активных линейных и нелинейных цепей, для которых характерно то, что выходной сигнал или некоторая его часть снова поступает на вход. Такие цепи принято называть *цепями с обратной связью*.

Введение обратной связи, с одной стороны, позволяет в ряде случаев существенно улучшить рабочие характеристики цепей, с другой, при определенных условиях такие цепи становятся неустойчивыми и в них возникают автоколебания. На этом принципе построены различные автоколебательные системы, прежде всего автогенераторы гармонических колебаний, которые являются неотъемлемыми элементами любого радиопередающего устройства.

14.1. Передаточная функция линейной системы с обратной связью

Для того чтобы последующий анализ можно было применить к большому числу различных частных случаев, рассмотрим проблему цепи с обратной связью в общей постановке, не конкретизируя физический характер входных и выходных сигналов.

Вывод основного соотношения. Будем изучать линейную систему, структурная схема которой приведена на рис. 14.1.

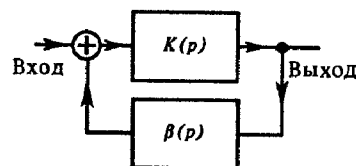


Рис. 14.1. Структурная схема линейной системы с обратной связью

Система состоит из двух звеньев. Активное звено с передаточной функцией $K(p)$ называется *основным элементом* системы. Другое, как правило, пассивное звено с передаточной функцией $\beta(p)$ называется *элементом обратной связи*. Стрелки на рисунке указывают направления путей сигналов с системе.

На входе основного элемента имеется устройство, суммирующее входной сигнал и выходную реакцию элемента обратной связи. Если $U_{\text{вх}}(p)$ и $U_{\text{вых}}(p)$ — изображения входного и выходного сигналов соответственно, то, как легко видеть,

$$U_{\text{вых}}(p) = K(p) [U_{\text{вх}}(p) + \beta(p) U_{\text{вых}}(p)]. \quad (14.1)$$

●
**основной элемент
и элемент обратной
связи**

Отсюда непосредственно следует формула, определяющая передаточную функцию системы, охваченной обратной связью:

$$K_{OC}(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{K(p)}{1 - \beta(p) K(p)}. \quad (14.2)$$

В соответствии с этой формулой частотные свойства системы в равной мере зависят как от функции $K(p)$, так и от характеристики $\beta(p)$ элемента обратной связи. Поэтому можно, оставляя неизменным основной элемент системы, в широких пределах варьировать частотную характеристику всего устройства, изменяя лишь параметры элемента обратной связи.

Отрицательная и положительная обратные связи. Рассмотрим формулу (14.2) при $p = j\omega$. Частотный коэффициент передачи системы с обратной связью

$$K_{OC}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 - \beta(j\omega) K(j\omega)}. \quad (14.3)$$

Если на заданной частоте ω выполняется неравенство

$$|1 - \beta(j\omega) K(j\omega)| > 1, \quad (14.4)$$

то введение обратной связи уменьшает модуль коэффициента передачи системы и, следовательно, амплитуду выходного сигнала. Такую связь принято называть *отрицательной обратной связью* (ООС). Если выполняется обратное неравенство

$$|1 - \beta(j\omega) K(j\omega)| < 1, \quad (14.5)$$

то в системе реализуется *положительная обратная связь* (ПОС).

Как отрицательная, так и положительная обратная связь широко используются при создании радиотехнических устройств. Однако следует иметь в виду, что положительная обратная связь может явиться причиной неустойчивости системы. Действительно, пусть, например, $\beta = \beta_0$ и $K = K_0$ — положительные вещественные числа. Если β_0 вначале равно нулю, а затем увеличивается, то в соответствии с (14.3) при этом коэффициент усиления $|K_{OC}|$ возрастает; если же β_0 становится равным $1/K_0$, то $|K_{OC}| = \infty$, что означает самовозбуждение системы — появление выходного сигнала в отсутствие сигнала на входе.

Применение ООС дает возможность существенно улучшить частотные характеристики усилительных устройств. Продемонстрируем на конкретных примерах целесообразность использования ООС.

Стабилизация коэффициента усиления. Предположим, что имеется усилитель с большим, но недостаточно стабильным коэффициентом усиления K_0 . Требуется создать на его базе усилительное устройство с меньшей нестабильностью коэффициента усиления.

Здесь в дальнейшем предполагается, что как основной элемент, так и элемент обратной связи являются не взаимными устройствами, пропускающими сигналы лишь в одном направлении

▲
решите задачу 1

Иногда не вводят термины ООС и ПОС и говорят о более широком понятии комплексной ОС. В этом случае указывается величина фазового сдвига сигнала в элементе обратной связи

Охватив усилитель петлей ООС, т. е. взяв $\beta(j\omega) = -\beta_0 < 0$, на основании (14.3) имеем $K_{OC} = K_0/(1 + \beta_0 K_0)$, откуда

$$\frac{dK_{OC}}{K_{OC}} = \frac{1}{1 + \beta_0 K_0} \frac{dK_0}{K_0}. \quad (14.6)$$

Если параметр $\beta_0 K_0 \gg 1$, то относительная нестабильность результирующего коэффициента усиления падает примерно в $\beta_0 K_0$ раз. Правда, во столько же раз уменьшается и сам коэффициент усиления, но это, как правило, не вызывает дополнительных трудностей, так как всегда можно получить нужное усиление за счет включения добавочных звеньев.

Подавление паразитных сигналов. Пусть основной элемент усилителя представляет собой каскадное включение двух звеньев, имеющих коэффициенты усиления напряжения K_1 и K_2 соответственно; в точку их соединения подводится некоторый нежелательный паразитный сигнал с амплитудой напряжения U_n . Усилитель в целом охвачен петлей ООС с коэффициентом β . Требуется найти величину $K_n = U_{\text{вых}}/U_n$, т. е. коэффициент передачи паразитного сигнала на выход.

Поскольку, очевидно, амплитуда выходного сигнала $U_{\text{вых}} = K_2(U_n - \beta K_1 U_{\text{вых}})$, то

$$K_n = K_2/(1 + \beta K_1 K_2). \quad (14.7)$$

Отсюда видно, что паразитный сигнал, «проникающий» в систему в точке, близкой к выходу, т. е. при $K_2 \ll K_1$, будет существенно ослаблен. На этом эффекте основан способ борьбы с нелинейными искажениями в многоступенчатых усилителях (рис. 14.2).

Как известно (см. гл. 11), из-за нелинейности характеристик активных элементов возникают высшие гармоники частоты сигнала. Уровень гармоник тем выше, чем больше амплитуда сигнала. Мысленно можно представлять себе, что паразитные сигналы гармоник как бы вводятся в систему извне, причем главным образом в последних мощных ступенях усилителя. Из формулы (14.7) следует вывод о том, что ООС может значительно уменьшить уровень гармоник на выходе. Поэтому практически лю-

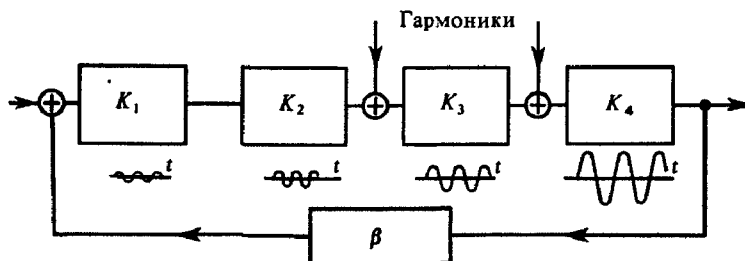
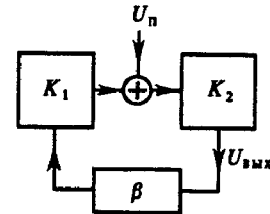


Рис. 14.2. Подавление высших гармоник в многоступенчатом усилителе с ООС

бые усилители, предназначенные для высококачественного воспроизведения сигналов звуковых частот (радиовещание, звукозапись), строят с применением ООС.

Коррекция частотной характеристики. Рассмотрим простейший транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой, имеющий передаточную функцию (см. гл. 8)

$$K(p) = -K_0/(1 + p\tau_{эк}), \quad (14.8)$$

где $K_0 = SR_{эк}$; $\tau_{эк} = R_{эк}C_{п}$.

На нулевой частоте передаточная функция отрицательна: $K(0) = -K_0$.

Охватив этот усилитель петлей частотно-независимой обратной связи с вещественным положительным параметром $\beta(\omega) = \beta_0$, на основании (14.2) получим

$$K_{ос}(0) = -K_0/(1 + \beta_0 K_0).$$

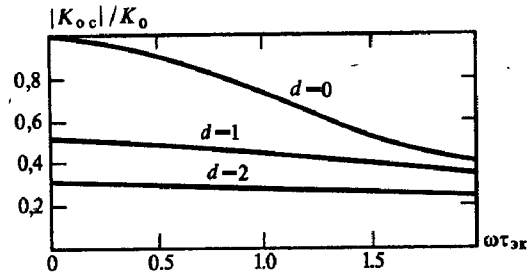


Рис. 14.3. Амплитудно-частотные характеристики усилителей с резистивно-емкостной нагрузкой при различных уровнях ООС

Так как $1 + \beta_0 K_0 > 1$, то в данном случае обратная связь будет отрицательной. Легко проверить, что отрицательный характер обратной связи сохранится на всех частотах, поскольку

$$|1 - \beta_0 K(j\omega)| = \left| 1 + \frac{\beta_0 K_0}{1 + j\omega\tau_{эк}} \right| > 0$$

при любом значении $\omega > 0$. Подставив (14.8) в общую формулу (14.2), получим выражение для передаточной функции усилителя с ООС:

$$K_{ос}(p) = \frac{-K_0}{(1 + \beta_0 K_0) + p\tau_{эк}}, \quad (14.9)$$

откуда следует уравнение АЧХ:

$$|K_{ос}(j\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{(1 + \beta_0 K_0)^2 + \omega^2 \tau_{эк}^2}}. \quad (14.10)$$

▲
решите задачу 2

На рис. 14.3 приведено семейство амплитудно-частотных характеристик усилителей с различными уровнями ООС, которые устанавливаются значением параметра

$$d = \beta_0 K_0. \quad (14.11)$$

Приведенный рисунок иллюстрирует главный эффект — ООС приводит к «выравниванию» АЧХ за счет снижения усиления на низких частотах. Вследствие этого расширяется эффективная полоса пропускания усилителя. Так, в соответствии с формулой (14.10) граничная частота, определяемая по спаду АЧХ до уровня $0.707K_0$,

$$\omega_{гп} = (1 + \beta_0 K_0) / \tau_{эк} \quad (14.12)$$

линейно возрастает с увеличением уровня ООС.

Чтобы создать ООС в простейшем усилителе, можно, например, снабдить цепь эмиттера добавочным резистором обратной связи $R_{ос}$. Увеличение входного напряжения вызывает рост тока эмиттера. Как следствие, возрастает напряжение $U_{ос}$ на резисторе обратной связи и уменьшается управляющее напряжение транзистора $U_{бэ} = U_{вх} - U_{ос}$, т. е. в усилителе действительно возникает ООС.

Положительная обратная связь в резонансном усилителе. Рассмотрим одноконтурный резонансный усилитель малых колебаний с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{-K_{рез}}{1 + j(\omega - \omega_{рез})\tau_k}, \quad (14.13)$$

где $K_{рез} = SR_{рез}$; $\tau_k = 2Q_{эк}/\omega_{рез}$ — постоянная времени контура.

Представим, что усилитель охвачен цепью частотно-независимой ПОС с параметром β_0 , так что

$$K_{ос}(j\omega) = K(j\omega) / [1 + \beta_0 K(j\omega)] = \frac{-\frac{K_{рез}}{1 - \beta_0 K_{рез}}}{1 + j \frac{(\omega - \omega_{рез})\tau_k}{1 - \beta_0 K_{рез}}}. \quad (14.14)$$

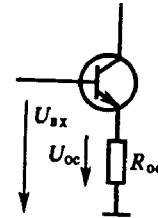
Сравнивая выражения (14.13) и (14.14), видим, что при $\beta_0 K_{рез} < 1$ форма частотной характеристики усилителя с ПОС такая же, как и усилителя без обратной связи. Однако в системе с ПОС резонансный коэффициент усиления увеличивается в $1/(1 - \beta_0 K_{рез})$ раз; во столько же раз возрастает эквивалентная добротность колебательного контура усилителя: $Q_{ос} = Q_{эк}/(1 - \beta_0 K_{рез})$ и соответственно сокращается полоса пропускания.

Эти явления связаны с тем, что в усилителе с ПОС происходит *регенерация*, т. е. частичная компенсация потерь в колебательном контуре за счет энергии источника питания.

Для создания ПОС в резонансном усилителе можно применять катушку, включенную последовательно во входную цепь и индуктивно связанную с колебательным контуром.

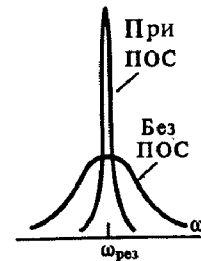
Несмотря на простоту, резонансные усилители с ПОС применяют редко из-за их склонности к самовозбуждению при $\beta_0 K_{рез} \rightarrow 1$.

Запаздывающая обратная связь. На рис. 14.4 изображена структурная схема системы, в которой цепь обратной связи помимо масштабного усилительного звена с постоян-



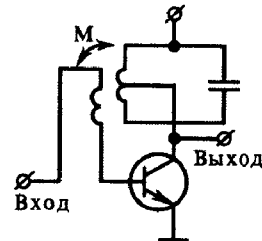
▲
решите задачи 3, 4 и 5

Рассматривается только область положительных частот



Влияние ПОС на АЧХ усилителя

●
регенерация



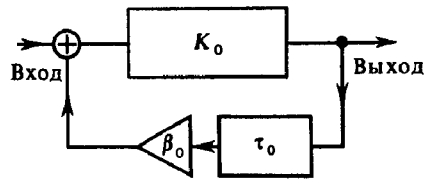
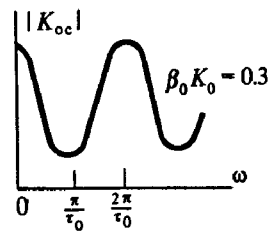
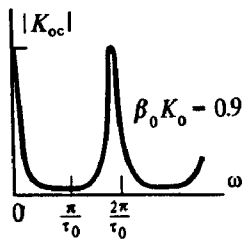


Рис. 14.4. Структурная схема системы с запаздывающей обратной связью



АЧХ гребенчатых фильтров

ным коэффициентом передачи β_0 содержит идеальное устройство задержки сигналов на время τ_0 .

Пусть коэффициент передачи основного элемента K_0 не зависит от частоты. Тогда

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{K_0}{1 - \beta_0 K_0 \exp(-j\omega\tau_0)}. \quad (14.15)$$

Амплитудно-частотная характеристика данной системы

$$|K_{oc}(j\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 - 2\beta_0 K_0 \cos \omega\tau_0 + (\beta_0 K_0)^2}}. \quad (14.16)$$

Если $\beta_0 K_0 < 1$, то система устойчива. Ее АЧХ описывается периодической кривой с чередующимися максимумами и минимумами, т. е. характер обратной связи оказывается различным на разных частотах.

Запаздывающая обратная связь позволяет создавать частотно-избирательные системы с периодическими АЧХ, так называемые *гребенчатые фильтры*. Отметим, что системы этого вида самовозбуждаются при $\beta_0 K_0 \geq 1$.

14.2. Устойчивость цепей с обратной связью

В этом параграфе рассматривается теория устойчивости состояния равновесия системы с обратной связью. Подтверждаются качественные рассуждения о возможности самовозбуждения систем с ПОС, которые приводились выше.

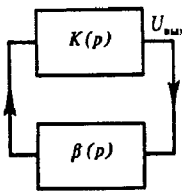
Постановка задачи. Рассмотрим систему, включающую в себя активный основной элемент с передаточной функцией $K(p)$; выход элемента соединен со входом звеном обратной связи с передаточной функцией $\beta(p)$. Предполагается, что внешний входной сигнал отсутствует, т. е. система автономна.

Уравнение состояния системы записывается на основании того, что изображение выходного сигнала $U_{\text{вых}}(p) = K(p) \beta(p) U_{\text{вых}}(p)$, откуда

$$[1 - \beta(p) K(p)] U_{\text{вых}}(p) = 0. \quad (14.17)$$

Поскольку $U_{\text{вых}}(p) \neq 0$ тождественно (в противном случае система не была бы возбуждена), равенство (14.17) справедливо лишь при тех значениях p , которые являются корнями характеристического уравнения

$$1 - \beta(p) K(p) = 0. \quad (14.18)$$



Пусть $p_1, p_2, \dots$ — корни этого уравнения. Так как рассматриваемая система линейна, то в общем случае выходной сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots \quad (14.19)$$

Этот сигнал будет ограниченным, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, т. е. располагаются в левой полуплоскости переменной p . Цепь с обратной связью, обладающая такими свойствами, будет устойчива (см. гл. 8).

При синтезе и анализе систем с обратной связью возникают две проблемы. Если синтезируемая цепь, например усилитель, должна быть устойчивой, требуется критерий, который позволил бы по виду функций $\beta(p)$ и $K(p)$ судить об отсутствии корней характеристического уравнения в правой полуплоскости. Если, наоборот, обратная связь используется для создания неустойчивой автоколебательной системы, то следует знать корни уравнения (14.18), определяющие частоту возникающих колебаний.

В данном параграфе будет рассмотрена первая из поставленных проблем. Полученные выводы будут касаться не только устойчивости системы с обратной связью, но также устойчивости любой линейной динамической системы.

Алгебраические критерии устойчивости. Предположим, что как основной элемент, так и элемент обратной связи являются цепями с сосредоточенными параметрами и, следовательно, передаточные функции

$$K(p) = P_1(p)/Q_1(p), \quad \beta(p) = P_2(p)/Q_2(p) \quad (14.20)$$

суть отношения многочленов по степеням p . Подставив формулы (14.20) в (14.18), получим характеристическое уравнение системы:

$$\frac{Q_1(p)Q_2(p) - P_1(p)P_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)} = 0. \quad (14.21)$$

Отсюда следует, что система с обратной связью устойчива, если все корни уравнения

$$H(p) = Q_1(p)Q_2(p) - P_1(p)P_2(p) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части. В алгебре многочлены $H(p)$ с такими свойствами называют *многочленами Гурвица*.

Рассмотрим частный случай многочлена Гурвица $H(p) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)$, имеющего три корня, один из которых $p_1 = -\alpha_1$ вещественный и отрицательный, а два других $p_{2,3} = -\beta \pm j\omega_0$ — комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями. Прямая подстановка показывает, что данный многочлен

$$\begin{aligned} H(p) &= (p + \alpha)[(p + \beta)^2 + \omega_0^2] = \\ &= p^3 + (\alpha + 2\beta)p^2 + (\beta^2 + 2\alpha\beta + \omega_0^2)p + \alpha(\beta^2 + \omega_0^2) \end{aligned}$$

●
характеристическое уравнение системы с обратной связью

●
многочлены Гурвица

● **критерий Рауса — Гурвица**

содержит все степени переменной p , начиная со старшей, и имеет коэффициенты одного знака. Этот признак указывает лишь необходимые условия для того, чтобы многочлен был многочленом Гурвица. Полное решение задачи было получено в конце прошлого века и нашло отражение в известном *критерии Рауса — Гурвица*. Доказательство критерия можно найти в [14]. Приведем окончательную формулировку: для того чтобы уравнение

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

с вещественными коэффициентами имело корни, лежащие лишь в левой полуплоскости переменной p , необходимо и достаточно, чтобы были положительными следующие величины:

- 1) коэффициенты a_n и a_0 ;
- 2) определитель Гурвица

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix};$$

- 3) все главные миноры этого определителя.

Пример 14.1. Проверить с помощью критерия Рауса — Гурвица устойчивость системы, характеристическое уравнение которой имеет вид $p^3 + 2p^2 + 6p + 4 = 0$.

Убеждаемся, что $a_3 > 0$, $a_0 > 0$. Составляем определитель:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0; \text{ единственный главный минор } 2 > 0.$$

Таким образом, система устойчива.

▲ **решите задачу 6**

Достоинство критерия Рауса — Гурвица — относительная простота вычислений. Недостаток заключается в том, что область применимости этого критерия ограничена цепями с сосредоточенными параметрами, поскольку только в этом случае передаточная функция является частным двух многочленов.

Геометрические критерии устойчивости. Возвращаясь к характеристическому уравнению (14.18), заметим, что произведение $w(p) = \beta(p) K(p)$

$$(14.22)$$

есть не что иное, как передаточная функция каскадного соединения двух звеньев — основного звена и звена обратной связи. Обычно функцию $w(p)$ называют передаточной функцией системы с разомкнутой обратной связью.

Формула (14.22) описывает отображение комплексной плоскости p на другую комплексную плоскость w . Если

$p_1, p_2, \dots$ — корни характеристического уравнения $1 - \beta(p)K(p) = 0$, то, как легко видеть, на плоскости w всем этим точкам будет соответствовать единственная точка $w = 1$. Отсюда сразу вытекает принцип, позволяющий судить о возможности самовозбуждения системы с обратной связью: если образ правой полуплоскости переменной p при отображении вида (14.22) содержит точку $w = 1$, то система с замкнутой обратной связью неустойчива.

Важную роль играет кривая на плоскости w , являющаяся образом мнимой оси на плоскости p . Уравнение этой кривой в параметрической форме таково:

$$w(j\omega) = \beta(j\omega)K(j\omega). \quad (14.23)$$

Роль параметра играет частота ω , которая изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Данная кривая называется *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ) разомкнутой системы. Во всех случаях, представляющих практический интерес, модули частотных коэффициентов передачи звеньев стремятся к нулю с ростом частоты. Поэтому АФХ проходит через точку $w = 0$. Кроме того, АФХ симметрична относительно вещественной оси на плоскости w , поскольку $w(-j\omega) = w^*(j\omega)$. Ясно, что АФХ для рассматриваемых систем представляют собой замкнутые кривые в плоскости w .

В теории функций комплексного переменного показывается [14], что при отображении вида (14.22) образом правой полуплоскости оказывается *внутренняя область*, охватываемая кривой АФХ. Критерий устойчивости, вытекающий из описанного построения, известен под названием *критерия Найквиста*: если АФХ разомкнутой системы охватывает точку с координатами $(1, j0)$, то замкнутая система неустойчива.

●
амплитудно-фазовая характеристика

●
критерий Найквиста

Пример 14.2. Исследование устойчивости одноступенчатого усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой, выход которого непосредственно соединен со входом.

Здесь, очевидно, $\beta(p) = 1$, в то время как

$$K(p) = -K_0/(1 + p\tau),$$

где $K_0 = SR_{эк}$; $\tau = R_{эк}C_n$ (см. гл. 8).

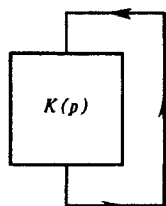
Уравнение АФХ имеет вид

$$w(j\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \exp[j(\pi - \arctg \omega\tau)]. \quad (14.24)$$

Вид амплитудно-фазовой характеристики, построенной в соответствии с уравнением (14.24), показан на рис. 14.5.

Как видно из рисунка, АФХ рассматриваемой системы представляет собой окружность с диаметром K_0 . Верхней полуокружности соответствует положительная часть оси $j\omega$; по мере роста частоты модуль частотного коэффициента передачи уменьшается, а фазовый угол стремится к 90° .

Замкнутая кривая АФХ целиком находится в левой полуплоскости и не охватывает точку $w = 1$. При соединении выхода данного усилителя со входом система устойчива.



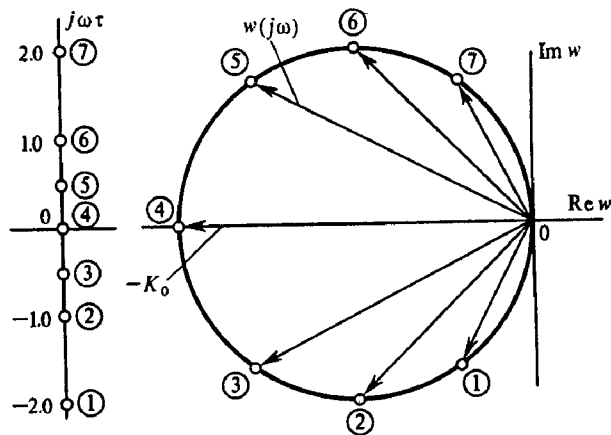


Рис. 14.5. Амплитудно-фазовая характеристика одноступенчатого усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой (номера указывают соответствие точек на оси $j\omega\tau$ и на АФХ усилителя)

Пример 14.3. Исследование устойчивости замкнутого кольца из двух усилительных звеньев с апериодическими нагрузками. Передаточная функция каскадного соединения звеньев

$$K(p) = K_1(p) K_2(p) = K_{01} K_{02} / (1 + p\tau)^2. \quad (14.25)$$

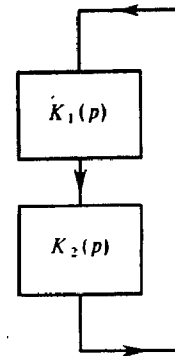
Здесь для простоты считается, что постоянные времени обоих звеньев одинаковы; коэффициенты усиления на нулевой частоте K_{01} и K_{02} в общем случае могут быть различными.

Проведя замену переменной $p = j\omega$ в (14.25), получаем уравнение АФХ:

$$w(j\omega) = K_{01} K_{02} / (1 + j\omega\tau)^2 = \frac{K_{01} K_{02}}{1 + \omega^2 \tau^2} \exp(-j2 \arctg \omega\tau). \quad (14.26)$$

Вид амплитудно-фазовой характеристики данного усилителя показан на рис. 14.6.

Если коэффициент усиления разомкнутой системы на нулевой частоте $K_0 = K_{01} K_{02} > 1$, то при замыкании цепи обратной связи система становится неустойчивой, так как точка $w = 1$ находится внутри замкнутой кривой АФХ.



▲ решите задачу 7

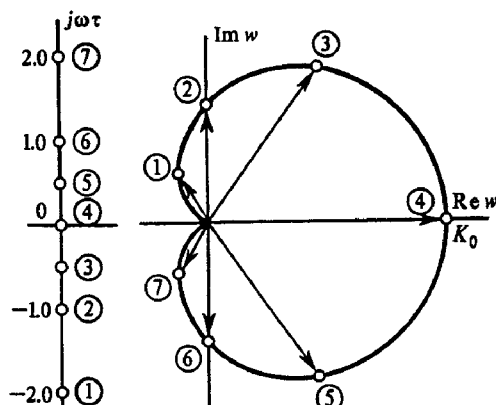


Рис. 14.6. Амплитудно-фазовая характеристика двухступенчатого усилителя с апериодическими нагрузками

Помимо критерия Найквиста известен ряд других геометрических методов исследования устойчивости линейных систем с обратной связью, например, критерий Михайлова и критерий пересечений. Они широко применяются при анализе систем автоматического регулирования.

▲
решите задачу 8

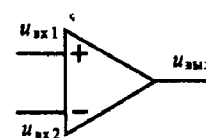
14.3. Активные RC-фильтры

На современном этапе развития радиотехники и радиоэлектроники многие схемные решения, ранее применявшиеся повсеместно, претерпели коренной пересмотр из-за широкого внедрения микроселектронных устройств. В значительной степени это коснулось теории и практики построения частотно-избирательных фильтров.

Было выяснено, что создать катушку индуктивности в микроселектронном исполнении практически невозможно. Однако для реализации обычных колебательных звеньев 2-го порядка необходимо располагать индуктивными элементами (см. гл. 13). Выходом из этого положения явилась разработка так называемых активных RC-фильтров. Они представляют собой комбинации пассивных RC-цепей и активных элементов — как правило, сложных транзисторных устройств, которые передают в пассивные цепи некоторую мощность от источника питания.

В этом параграфе будет рассмотрен один из возможных принципов построения активных RC-фильтров, когда в качестве активного элемента используется операционный усилитель.

Операционный усилитель. Так принято называть усилительное устройство с большим коэффициентом усиления K_0 в широкой полосе частот, начиная с нулевой частоты. Входное сопротивление операционного усилителя весьма велико (на практике 10^6 – 10^{12} Ом), а выходное сопротивление достаточно мало (десятки ом). Поэтому приблизительно операционный усилитель (ОУ) можно рассматривать как источник напряжения, управляемый напряжением. Такая модель активного управляемого элемента часто используется в теории цепей. Современные ОУ имеют значения $K_0 \approx 10^5 \div 10^6$. Как правило, микросхемы ОУ снабжены двумя входами: инвертирующим (–) и неинвертирующим (+). Если $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$ — напряжения входного сигнала на неинвертирующем и инвертирующем входах соответственно, то выходное напряжение

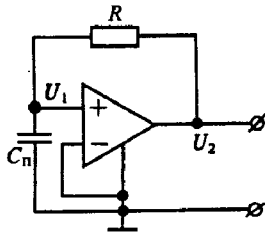


Операционный усилитель

$$u_{вых} = K_0 (u_{вх1} - u_{вх2}). \quad (14.27)$$

Операционный усилитель — одна из наиболее широко применяемых аналоговых интегральных микросхем.

Устойчивость систем с операционными усилителями. Если в системе, содержащей ОУ, имеется обратная связь, то возможно появление неустойчивых режимов. Рассмотрим, например, устройство, в котором выход ОУ соединен с неинвертирующим входом через резистор R . Пусть C_n — паразитная емкость входа усилителя. Поскольку влияние



Сигнал на инвертирующем входе равен нулю

входного сопротивления усилителя пренебрежимо мало, изображение входного напряжения $U_1(p)$ связано с изображением выходного напряжения $U_2(p)$ простым соотношением

$$U_1 = U_2 \frac{1/(pC_n)}{1/(pC_n) + R}.$$

Но в то же время $U_1 = U_2/K_0$. Одновременное выполнение этих двух равенств возможно лишь тогда, если p служит корнем характеристического уравнения

$$1 + pRC_n = K_0,$$

т. е. $p = (K_0 - 1)/(RC_n)$. Таким образом, при $K_0 > 1$ система неустойчива; напряжения в ней нарастают во времени по закону $\exp[(K_0 - 1)t/(RC_n)]$.

Ясно, что устройство, в котором выход ОУ соединен через резистор с инвертирующим входом, является устойчивым.

Активные RC-фильтры с однопетлевой обратной связью. Рассмотрим в общей постановке один из способов создания активных фильтров на базе операционных усилителей (рис. 14.7).

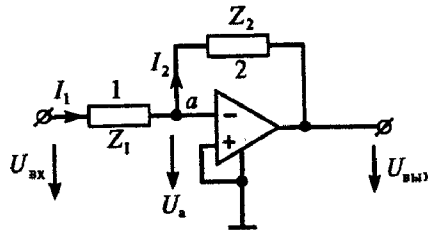


Рис. 14.7. Принципиальная схема активного фильтра с однопетлевой обратной связью

Здесь 1 и 2 — некоторые пассивные RC-двухполюсники, характеризующиеся операторными сопротивлениями $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ соответственно. Элемент Z_2 соединяет инвертирующий вход ОУ с его выходом, образуя петлю обратной связи. Состояние цепи описывается изображениями входного и выходного напряжения $U_{вх}(p)$ и $U_{вых}(p)$ соответственно.

Выведем формулу для передаточной функции фильтра $K(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p)$. Пусть узел a имеет напряжение с некоторым заранее неизвестным изображением $U_a(p)$. Учтем, что $I_1 = I_2$, поскольку входное сопротивление идеального ОУ бесконечно велико и инвертирующий вход усилителя не потребляет тока. Отсюда следует, что

$$(U_{вх} - U_a)/Z_1 = (U_a - U_{вых})/Z_2$$

или

$$\frac{U_{вх} + U_{вых}/K_0}{Z_1} = - \frac{U_{вых}(1/K_0 + 1)}{Z_2}.$$

Разделив обе части этого равенства на изображение $U_{вх}$, получаем

Здесь и в дальнейшем ОУ считается идеальным: его входное сопротивление неограниченно велико, а выходное сопротивление бесконечно мало

▲
решите задачу 9

$$\frac{1 + K(p)/K_0}{Z_1} = - \frac{K(p)(1/K_0 + 1)}{Z_2},$$

откуда

$$K(p) = \frac{-Z_2}{Z_2/K_0 + Z_1(1/K_0 + 1)}. \quad (14.28)$$

Считая $K_0 \gg 1$, получаем приближенное равенство

$$K(p) \approx -Z_2(p)/Z_1(p). \quad (14.29)$$

Масштабный усилитель. Рассмотрим простейшую цепь с ОУ, изображенную на рис. 14.8, а и называемую масштабным усилителем.

Здесь $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$ и по формуле (14.29) находим

$$K(p) = -R_2/R_1.$$

Последняя формула объясняет термин «масштабный усилитель»: оказывается, что подбором резисторов R_1 , R_2

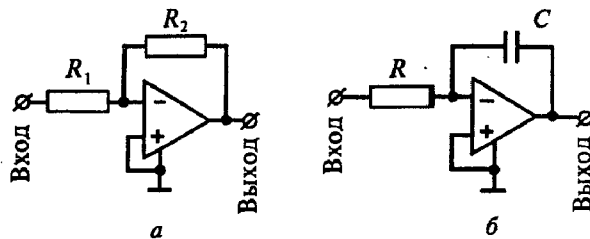


Рис. 14.8. Схемы масштабного усилителя (а) и аналогового интегратора (б)

можно обеспечить заданный коэффициент усиления, не зависящий от питающих напряжений и прочих дестабилизирующих факторов, свойственных активным элементам. Естественно, что коэффициент передачи этой цепи не зависит от частоты.

Аналоговый интегратор. Если резистор R_2 заменить на конденсатор C , то получим устройство, выполняющее операцию электрического интегрирования входного сигнала (рис. 14.8, б). Действительно, здесь $Z_1 = R$, $Z_2 = 1/(pC)$, поэтому $K(p) = -1/(pRC)$.

Данной передаточной функции отвечает следующая связь между мгновенными значениями напряжений на входе и выходе цепи:

$$u_{\text{вых}}(t) = - \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\xi) d\xi,$$

т. е. система действительно выполняет операцию интегрирования.

Активные RC-фильтры с двухпетлевой обратной связью. Рассмотренный однопетлевой активный фильтр не дает воз-

При достаточно большом коэффициенте усиления ОУ передаточная функция активного фильтра зависит исключительно от параметров пассивных элементов цепи

▲
решите задачу 10

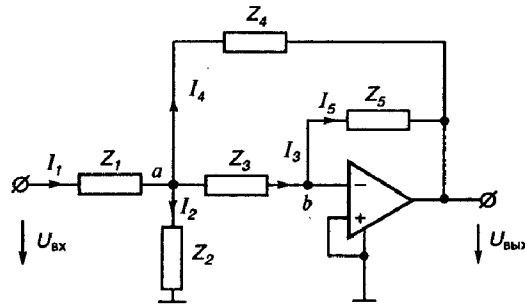


Рис. 14.9. Схема активного фильтра с двухпетлевой обратной связью

возможности получить цепь со свойствами колебательного звена 2-го порядка. Дело в том, что в соответствии с формулой (14.29) полюсы функций $K(p)$ совпадают либо с полюсами сопротивления $Z_2(p)$, либо с нулями сопротивления $Z_1(p)$. В то же время известно [35], что нули и полюсы пассивных RC-двухполюсников могут располагаться лишь на отрицательной вещественной полуоси.

Активный фильтр со свойствами колебательного звена 2-го порядка можно получить, соединив инвертирующий вход ОУ с выходом посредством двухпетлевой цепи обратной связи (рис. 14.9).

Здесь в соответствии с первым законом Кирхгофа для узла a имеем

$$I_1 = (U_{\text{вх}} - U_a)/Z_1 = I_2 + I_3 + I_4, \quad (14.30)$$

причем

$$I_2 = U_a/Z_2, \quad I_3 = (U_a - U_b)/Z_3 \approx U_a/Z_3, \\ I_4 = (U_a - U_{\text{вых}})/Z_4, \quad I_5 = (U_b - U_{\text{вых}})/Z_5 \approx -U_{\text{вых}}/Z_5. \quad (14.31)$$

Потенциал U_b значительно меньше, чем $U_{\text{вых}}$ и U_a , из-за высокого значения коэффициента усиления

При постановке выражений (14.31) в (14.30) следует учитывать, что $I_5 = I_3$. Кроме того, удобно перейти от сопротивлений Z к проводимостям $Y = 1/Z$. Тогда из формулы (14.30) следует, что

$$Y_1 U_{\text{вх}} = U_a(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) - Y_4 U_{\text{вых}}.$$

Исключив вспомогательную переменную U_a , приходим к следующему выражению для передаточной функции по напряжению в данной системе:

$$K(p) = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}. \quad (14.32)$$

По исходному условию все проводимости $Y_1 - Y_5$ должны быть реализованы с помощью пассивных RC-двухполюсников. В простейшем случае это либо проводимости резисторов G , либо проводимости конденсаторов pC .

Синтез активного ФНЧ 2-го порядка. Задача синтеза активной цепи с двухпетлевой обратной связью сводится к подбору проводимостей пассивных элементов, которые

обеспечивают заданный вид амплитудно-частотной характеристики. Рассмотрим эту процедуру подбора на примере синтеза активного колебательного звена 2-го порядка, имеющего частотные свойства ФНЧ.

Как известно (см. гл. 13), типичная передаточная функция ФНЧ 2-го порядка должна иметь вид

$$K(p) = A_0/(ap^2 + bp + c),$$

где A_0 , a , b , c — постоянные величины.

Обращаясь к формуле (14.32), видим, что для реализации такой функции необходимо, чтобы элементы Y_1 , Y_3 , Y_4 были резисторами, а элементы Y_2 , Y_5 — конденсаторами. При этом передаточная функция по напряжению

$$K(p) = \frac{-G_1 G_3}{p^2 C_2 C_5 + p(G_1 + G_3 + G_4)C_5 + G_3 G_4}. \quad (14.33)$$

Полюсы передаточной функции расположены в точках

$$p_{1,2} = -\frac{G_1 + G_3 + G_4}{2C_2} \pm j \sqrt{\frac{G_3 G_4}{C_2 C_5} - \frac{1}{4} \left(\frac{G_1 + G_3 + G_4}{C_2} \right)^2}. \quad (14.34)$$

Данная формула позволяет синтезировать колебательные звенья 2-го порядка с установленным заранее расположением полюсов.

Поскольку вещественные части координат полюсов отрицательны при любом выборе параметров, данная цепь устойчива

Пример 14.4. Синтезировать активный RC-фильтр нижних частот 2-го порядка с максимально-плоской характеристикой при частоте среза $\omega_c = 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Как известно из гл. 13, подобный фильтр должен иметь два полюса передаточной функции

$$p_{1,2} = \omega_c (-0.707 \pm j0.707). \quad (14.35)$$

Зададимся приемлемыми номиналами резисторов, положив их одинаковыми: $R_1 = R_3 = R_4 = 1.8 \text{ кОм}$, т. е. $G_1 = G_3 = G_4 = 5.55 \cdot 10^{-4} \text{ См}$.

Приравнявая вещественные части выражений (14.34) и (14.35), получаем формулу, определяющую емкость конденсатора C_2 :

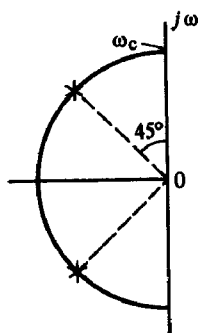
$$(G_1 + G_3 + G_4)/(2C_2) = 0.707\omega_c,$$

откуда, подставляя известные значения величин, находим, что $C_2 = 1.18 \text{ мкФ}$.

Чтобы найти емкость конденсатора C_5 , следует приравнять мнимые части выражений (14.34) и (14.35):

$$\frac{G_3 G_4}{C_2 C_5} - \frac{1}{4} \left(\frac{G_1 + G_3 + G_4}{C_2} \right)^2 = \frac{\omega_c^2}{2}.$$

Решив это уравнение, находим, что $C_5 = 0.26 \text{ мкФ}$. Принципиальная схема синтезированного активного фильтра изображена на рис. 14.10.



▲
решите задачу 11

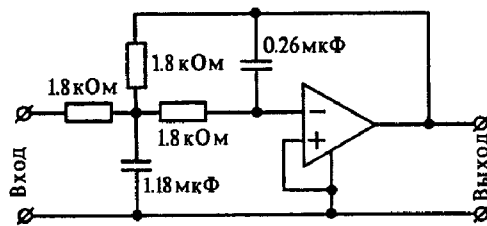


Рис. 14.10. Схема активного RC-фильтра, имеющего максимально-плоскую характеристику при частоте среза 10^3 с^{-1}

● гиратор

Заключительные замечания. В настоящем параграфе был изучен один из возможных принципов построения активных RC-фильтров, основанный на применении операционных усилителей, охваченных цепями отрицательной обратной связи. Перечень средств современной интегральной схемотехники далеко не исчерпывается этим принципом. Так, большой интерес представляют фильтры на основе *гираторов* — активных четырехполюсников, обладающих тем свойством, что при подключении к их выходным зажимам конденсатора реализуется чисто индуктивное входное сопротивление. Тем самым удастся создать фильтры, не содержащие физических индуктивных элементов.

Со свойствами гираторов, а также других устройств, применяемых в активных RC-фильтрах, читатель может ознакомиться самостоятельно [38].

14.4. Автогенераторы гармонических колебаний. Режим малого сигнала

Выдающийся вклад в теорию автоколебаний внесли советские ученые акад. Александр Александрович Андронов (1901–1952), акад. Леонид Исаакович Мандельштам (1879–1944), акад. Юрий Борисович Кобзарев и многие другие

Часто в активных радиотехнических цепях возникают периодические автоколебания. Так принято называть колебательные процессы, существующие без внешнего периодического воздействия. Устройства, генерирующие автоколебания, называют *автоколебательными системами*, или *автогенераторами*. Работа любого автогенератора основана на том, что энергия от источника питания через управляемый элемент, например транзистор, подается в колебательную систему. Сигнал, управляющий транзистором, снимается с этой же колебательной системой и подается на входной электрод транзистора через цепь обратной связи.

При соответствующем выборе параметров такая система становится неустойчивой. Амплитуды любых малых колебаний, вызванных, например, тепловыми шумами, неограниченно возрастают. Однако по мере роста амплитуды существенную роль начинают играть нелинейные свойства управляемого элемента. Это ведет к тому, что амплитуда автоколебаний достигает некоторого установившегося значения и в дальнейшем остается практически постоянной. Говорят, что при этом автогенератор работает в *стационарном режиме*.

При анализе и расчете автогенераторов возникают две

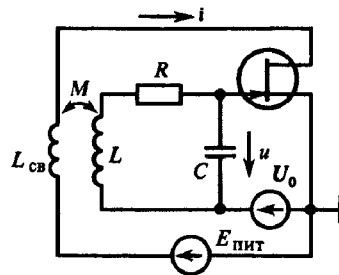


Рис. 14.11. Схема автогенератора с трансформаторной связью

основные задачи:

- 1) выяснить, при каких условиях устройство с обратной связью становится неустойчивым, т. е. самовозбуждается;
- 2) определить амплитуду и частоту автоколебаний в стационарном режиме.

Первую из этих задач решить относительно несложно, поскольку при малых амплитудах автоколебаний на начальном этапе процесса нелинейный управляемый элемент может быть эквивалентно заменен линейной схемой замещения. Намного сложнее решить вторую задачу, состоящую в исследовании системы с обратной связью при условии, что нелинейными эффектами пренебречь нельзя.

Самовозбуждение простейшего автогенератора. Исследование процессов в автогенераторах начнем с устройства (рис. 14.11), называемого автогенератором с трансформаторной связью.

Колебательной системой здесь служит LCR -контур, элементом обратной связи — катушка $L_{св}$, размещенная таким образом, что создаваемый ею магнитный поток частично пронизывает катушку L .

Пусть в устройстве каким-либо образом возбуждены малые колебания. Если u — напряжение на конденсаторе (и соответственно на управляющем электроде электронного прибора), то по второму закону Кирхгофа можно составить следующее дифференциальное уравнение, описывающее данную систему:

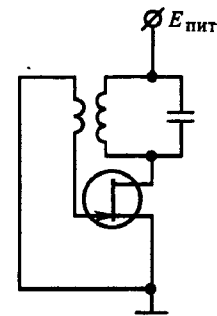
$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = \pm M \frac{di}{dt}, \quad (14.36)$$

где i — ток в цепи обратной связи. Знак в правой части (14.36) зависит от того, каким образом (встречно или согласно) включены катушки L и $L_{св}$.

Сделаем основное предположение — будем считать управляющее напряжение u столь малым, что электронный прибор вполне точно может быть заменен управляемым источником тока, выходной сигнал которого линейно зависит от управляющего напряжения:

$$i = i_0 + S_{диф} u. \quad (14.37)$$

В автогенераторе можно применить биполярный транзистор, учтя дополнительное затухание колебательной системы из-за меньшего входного сопротивления



Колебательный контур в схеме автогенератора с трансформаторной связью может включаться также в выходную цепь электронного прибора

Здесь i_0 — постоянная составляющая тока; $S_{\text{диф}}$ — дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики прибора в фиксированной рабочей точке.

Объединив выражения (14.36) и (14.37), получаем следующее уравнение системы:

Отметим важное обстоятельство — уравнение (14.38) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{MS_{\text{диф}}}{LC} \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (14.38)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — частота собственных колебаний контура без потерь.

Варьируя коэффициент взаимной индукции M , можно изменять коэффициент при производной du/dt . Знак и значение этого коэффициента, как известно, определяют характер свободных колебаний в такой динамической системе.

Если в уравнениях (14.36) и (14.38) выбраны верхние знаки, то за счет обратной связи будет наблюдаться регенерация. Если величина M достигает критического значения

критическое значение коэффициента взаимной индукции

$$M_{\text{кр}} = RC/S_{\text{диф}} = 1/(\omega_0 Q S_{\text{диф}}), \quad (14.39)$$

где Q — добротность контура без учета регенерации, то уравнение (14.38) приобретает вид $d^2 u/dt^2 + \omega_0^2 u = 0$, свойственный идеальной колебательной системе без потерь.

При $M > M_{\text{кр}}$ устройство становится неустойчивым. Введя параметр

$$\alpha = 1/2 [MS_{\text{диф}}/(LC) - R/L] > 0,$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

решение которого описывает гармонические колебания с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой:

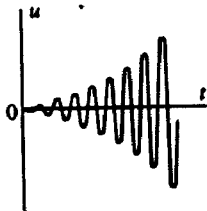
$$u(t) = Ae^{\alpha t} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t + Be^{\alpha t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t \quad (14.40)$$

(A и B — постоянные, зависящие от начальных условий).

Практически всегда $\alpha \ll \omega_0$ и в соответствии с (14.40) частота заполнения автоколебаний, возникающих в линейном режиме, близка к частоте собственных колебаний контура.

Подчеркнем физический смысл правильного выбора знака в уравнении (14.38), который обеспечивает неустойчивость начального состояния автогенератора: для самовозбуждения системы необходимо, чтобы любое возмущение колебательного контура приводило к появлению такого сигнала положительной обратной связи, который, складываясь с первоначальным возмущением, увеличивал бы его. Именно таким образом трактуется понятие положительной обратной связи в теории автоколебательных систем.

Трехточечные автогенераторы. На практике вместо автогенераторов с трансформаторной связью чаще используют так называемые автогенераторы-трехточки, в которых напряжение обратной связи снимается с части колебатель-



положительная обратная связь в теории автоколебательных систем

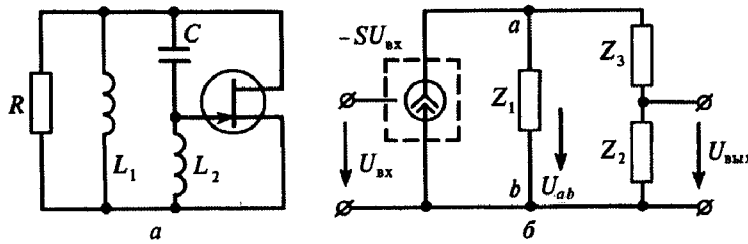


Рис. 14.12. Автогенератор по схеме индуктивной трехточки:
 а — принципиальная схема (источники питания и смещения не показаны);
 б — эквивалентная схема с разомкнутой цепью обратной связи

ного контура. На рис. 14.12, а, б изображены принципиальная и эквивалентная схемы индуктивной трехточки.

Наличие резистора R учитывает все виды потерь в системе — неидеальность реактивных элементов, конечное (хотя и достаточно большое) выходное сопротивление электронного прибора, а также влияние внешних цепей (нагрузок).

Найдем условия самовозбуждения индуктивной трехточки, исследуя характеристическое уравнение этой системы с замкнутой обратной связью.

Если $U_{вх}$ и $U_{вых}$ — изображения сигналов на входе и выходе при разомкнутой цепи обратной связи (рис. 14.12, б), так что известна передаточная функция $K(p) = U_{вых}/U_{вх}$, то характеристическое уравнение, описывающее замкнутую цепь, как было выяснено, имеет вид [см. формулу (14.18)]

$$K(p) = 1. \quad (14.41)$$

Для того чтобы найти функцию $K(p)$, учтем, что напряжение U_{ab} на зажимах контура возникает за счет тока $-S_{диф}U_{вх}$, проходящего через последовательно-параллельно соединенные элементы Z_1 , Z_2 и Z_3 :

$$U_{ab} = \frac{-S_{диф}U_{вх}Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}.$$

Поскольку $U_{вых} = U_{ab}Z_2/(Z_2 + Z_3)$, характеристическое уравнение (14.41) приобретает вид

$$-S_{диф}Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2 + Z_3) = 1. \quad (14.42)$$

В данном случае

$$Z_1 = pL_1R/(pL_1 + R), \quad Z_2 = pL_2, \quad Z_3 = 1/(pC).$$

Подставив эти выражения в (14.42) и выполнив несложные алгебраические преобразования, получим характеристические уравнения замкнутой системы:

$$p^3(S_{диф} + 1/R)L_1L_2C + p^2(L_1 + L_2)C + pL_1/R + 1 = 0. \quad (14.43)$$

Цепь будет неустойчивой, если определитель Гурвица отрицателен:

$$D_2 = \begin{vmatrix} (L_1 + L_2)C & (S_{диф} + 1/R)L_1L_2C \\ 1 & L_1/R \end{vmatrix} < 0$$

▲
 решите задачу 12

или

$$L_2(S_{\text{диф}} + 1/R) > (L_1 + L_2)/R.$$

Отсюда находим условие самовозбуждения данного автогенератора:

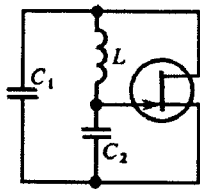
$$RS_{\text{диф}} > L_1/L_2. \quad (14.44)$$

Изменяя емкость контура, можно легко осуществить частотную или фазовую модуляцию колебаний, создаваемых автогенератором

Частота экспоненциально нарастающих собственных колебаний определяется корнями кубического уравнения (14.43). Аналитическое решение здесь довольно громоздко. Однако из физических соображений ясно, что трехточечный автогенератор самовозбуждается на резонансной частоте $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C}$. В самом деле, на этой частоте сопротивление нагрузки электронного прибора $Z_{ab} = R_{\text{рез}}$ вещественно; комплексная амплитуда напряжения $\dot{U}_{ab} = -S_{\text{диф}}\dot{U}_{\text{вх}}R_{\text{рез}}$ сдвинута по фазе на 180° относительно $\dot{U}_{\text{вх}}$. В контуре наблюдается резонанс токов, элементы L_1 и L_2 обтекаются одним и тем же контурным током, поэтому $\dot{U}_{\text{вых}} = -(L_2/L_1)\dot{U}_{ab} = (L_2/L_1)S_{\text{диф}}R_{\text{рез}}\dot{U}_{\text{вх}}$. Напряжения $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{U}_{\text{вых}}$ совпадают по фазе, так что при выполнении условия (14.44) автогенератор действительно самовозбуждается.

Пример 14.5. Трехточечный автогенератор имеет колебательный контур, настроенный на частоту $\omega_{\text{рез}} = 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Дифференциальная крутизна проходной характеристики электронного прибора в рабочей точке $S_{\text{диф}} = 7 \text{ мА/В}$. Добротность контура $Q = 40$, емкость конденсатора $C = 400 \text{ пФ}$. Найти значения индуктивностей L_1 и L_2 , обеспечивающие уверенное самовозбуждение автогенератора.

В данном автогенераторе роль шунтирующего резистора потерь R выполняет резонансное сопротивление контура $R_{\text{рез}}$. Характеристическое сопротивление $\rho = 1/(\omega_{\text{рез}}C) = 416.6 \text{ Ом}$, откуда $R_{\text{рез}} = \rho Q = 16.6 \text{ кОм}$. Произведение $RS_{\text{диф}} = 7 \cdot 16.6 = 116.2$, поэтому на основании формулы (14.44) с некоторым запасом положим $L_1/L_2 = 100$. Полная индуктивность контура $L_1 + L_2 = 1/(\omega_{\text{рез}}^2 C) = 69.4 \text{ мкГн}$. Из двух последних равенств получаем (округленно) $L_1 = 68.7 \text{ мкГн}$, $L_2 = 0.7 \text{ мкГн}$.



Другим вариантом схемы трехточечного автогенератора является так называемая емкостная трехточка, в которой напряжение обратной связи снимается с емкостного делителя, образованного конденсаторами C_1 и C_2 . Анализ условий самовозбуждения такой схемы проводится аналогично описанному ранее.

RC-автогенераторы гармонических колебаний. На частотах ниже нескольких десятков килогерц применять в качестве колебательных систем автогенераторов резонансные LC-конттуры становится затруднительным, главным образом из-за больших массогабаритных размеров индуктивных элементов. Поэтому на этих частотах, как правило, используют RC-автогенераторы, представляющие собой комбинации активных четырехполюсников (усилителей) и пассивных RC-цепей, играющих роль элементов обратной связи.

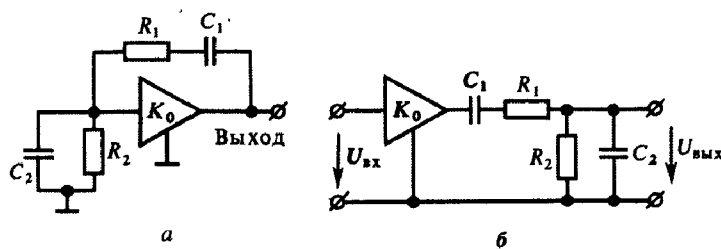


Рис. 14.13. Автогенератор с двумя RC-цепями:

а — принципиальная схема; б — схема с разомкнутой цепью обратной связи

Пусть $K(p)$ — передаточная функция некоторой разомкнутой цепи и $K(p) = 1$ — характеристическое уравнение, описывающее поведение системы с замкнутой обратной связью. Для того чтобы такая система была неустойчивой и могла генерировать гармонические колебания в стационарном режиме, характеристическое уравнение должно иметь, по крайней мере, одну пару комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью. Мнимая часть корней будет при этом определять генерируемую частоту.

Получим условие самовозбуждения часто используемого автогенератора с двумя RC-цепями (рис. 14.13, а).

Основой генератора является идеальный усилитель с вещественным и положительным коэффициентом усиления K_0 . Выход усилителя соединен с его входом через пассивный RC-четыреполюсник, передаточная функция которого по напряжению в соответствии с рис. 14.13, б имеет вид

$$\beta(p) = \frac{p\tau_1}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2) + p\tau'}, \quad (14.45)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$, $\tau' = R_2 C_1$. Характеристическое уравнение автогенератора $K_0 \beta_1(p) = 1$, очевидно, можно записать так:

$$p^2 \tau_1 \tau_2 + p[\tau_1 + \tau_2 - \tau'(K_0 - 1)] + 1 = 0. \quad (14.46)$$

Описываемая система становится неустойчивой при таком выборе параметров, когда коэффициент при первой степени p , проходя через нуль, меняет знак. Для самовозбуждения автогенератора необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\tau_1 + \tau_2 - \tau'(K_0 - 1) < 0$.

Отсюда получаем условие, налагаемое на коэффициент усиления активного звена:

$$K_0 > 1 + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_2 C_1}. \quad (14.47)$$

В частности, если обе RC-цепи идентичны, то система самовозбуждается, когда $K_0 > 3$.

Мнимая часть корней уравнения (14.46) зависит не только от параметров R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , но и от коэффициента усиления K_0 . Для оценки генерируемой частоты будем приближенно считать, что автогенератор работает на границе

● условие, налагаемое на корни характеристического уравнения

Таким свойством обладает усилитель с четным числом ступеней

Это условие следует из критерия Рауса — Гурвица

▲ решите задачу 13

самовозбуждения и поэтому коэффициент при первой степени p равен нулю. Тогда из характеристического уравнения $p^2\tau_1\tau_2 + 1 = 0$ находим значение генерируемой частоты:

$$\omega_{\text{ген}} = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}. \quad (14.48)$$

Строго говоря, генерируемая частота зависит от коэффициента усиления активного звена

Отметим в заключение, что RC -автогенератор существенно уступает LC -автогенераторам с точки зрения качества спектрального состава генерируемых колебаний. Это связано с тем, что в них цепь обратной связи не содержит колебательных контуров и не может в достаточной мере отфильтровать нежелательные высшие гармоники. Удовлетворительная форма генерируемых колебаний достигается специальными схемотехническими мерами, например за счет использования дополнительной цепи нелинейной инерционной обратной связи.

Автогенераторы с внутренней обратной связью. Рассмотренные ранее схемы автогенераторов содержат специально созданные цепи положительной обратной связи. Однако возможен и другой принцип построения автогенераторов, когда в колебательный контур вводится отрицательная активная проводимость.

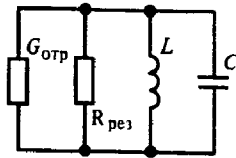
Если, например, $R_{\text{рез}}$ — активная составляющая входного сопротивления контура при резонансе, а $G_{\text{отр}} = S_{\text{диф}} < 0$ — параллельно включенная отрицательная проводимость, вносимая электронным прибором, то условие самовозбуждения системы заключается в компенсации потерь контура (см. гл. 8):

$$-S_{\text{диф}} > 1/R_{\text{рез}}.$$

Если это условие выполняется, то с ростом амплитуды автоколебаний за счет нелинейности характеристики электронного прибора будет наблюдаться постепенное уменьшение скорости нарастания колебаний. В стационарном режиме энергия, рассеиваемая в контуре за период собственных колебаний, в точности равна энергии, которая поступает в контур от внешних источников за данный отрезок времени. Такой механизм самовозбуждения и автоматического регулирования стационарной амплитуды получил в радиотехнике название *внутренней обратной связи*.

Автогенераторы с распределенной колебательной системой. Очень важной в практическом отношении разновидностью генератора с внутренней обратной связью является автоколебательное устройство, в котором использован отрезок линии передачи с распределенными параметрами. Типичным примером служит *лазер* — автогенератор гармонических колебаний в оптическом и инфракрасном диапазонах (рис. 14.14).

Лазер обычно состоит из двух плоскопараллельных полупрозрачных зеркал, образующих распределенную колебательную систему, так называемый резонатор Фабри — Перо. Пространство между зеркалами заполнено активной средой, например смесью газов He и Ne . За счет внешней накачки в среде создается избыточная концентрация атомов, находя-



● энергетический баланс в автогенераторе

● внутренняя обратная связь

● лазер



Рис. 14.14. Устройство лазера:

1 — полупрозрачное зеркало; 2 — активная среда; 3 — генерируемый пучок света

щихся в возбужденном состоянии. Эти атомы переходят в более низкое энергетическое состояние не спонтанно, а под воздействием электромагнитного поля в резонаторе. Поле в резонаторе, в свою очередь, есть результат суммирования индуцированных излучений огромного числа атомов. Подобный способ взаимодействия поля и активной среды приводит к высокой степени пространственно-временной когерентности излучения лазера.

Для того чтобы лазер самовозбудился, мощность, излучаемая в резонатор активной средой, должна компенсировать суммарную мощность потерь в системе.

Рассмотрим модельную задачу о гармонических волнах в активной линии передачи. Известно [34], что комплексные амплитуды напряжения и тока волны, распространяющейся в сторону возрастания координаты z , описываются функцией вида $\exp(\gamma z)$, где комплексный коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (14.49)$$

зависит от погонных активных (R_1 и G_1) и реактивных (L_1 и C_1) параметров линии. Действие активной среды в рамках теории распределенных цепей принято учитывать тем, что погонная шунтирующая проводимость становится отрицательной: $G_1 = -g_1$.

Будем полагать, что параметры R_1 и g_1 лишь незначительно изменяют фазовую скорость волны, т.е. на рабочей частоте ω справедливы неравенства $R_1 \ll \omega L_1$, $g_1 \ll \omega C_1$. Тогда, переписав формулу (14.49) в эквивалентном виде:

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[\sqrt{1 + j \left(\frac{g_1}{\omega C_1} - \frac{R_1}{\omega L_1} \right) + \frac{R_1 g_1}{\omega^2 L_1 C_1}} \right],$$

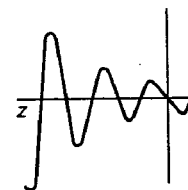
можно пренебречь третьим слагаемым подкоренного выражения, малым по сравнению с первыми двумя, и получить приближенное выражение

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{j}{2} \left(\frac{g_1}{\omega C_1} - \frac{R_1}{\omega L_1} \right) \right].$$

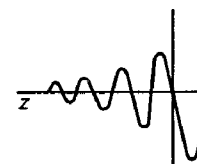
Коэффициент фазы β в силу сделанных допущений оказывается таким же, как и в идеальной линии без потерь: $\beta = j\omega \sqrt{L_1 C_1}$. Однако коэффициент ослабления α существенно

■ принцип работы лазера

Волна в линии с положительным



и с отрицательным затуханием



зависит от модуля отрицательной погонной проводимости g_1 :

$$\alpha = 1/2 \sqrt{L_1 C_1 (R_1/L_1 - g_1/C_1)}. \quad (14.50)$$

●
условие самовоз-
буждения распре-
деленного автоге-
нератора

Очевидно, самовозбуждение системы наступит при некотором критическом значении $g_{1кр}$, таком, что $\alpha = 0$, откуда

$$g_{1кр} = R_1 C_1 / L_1 = R_1 / Z_b^2, \quad (14.51)$$

где $Z_b = \sqrt{L_1 / C_1}$ — волновое сопротивление линии.

Из последней формулы следует, в частности, что чем меньше волновое сопротивление, тем больше модуль отрицательной активной проводимости, необходимый для самовозбуждения распределенного автогенератора.

14.5. Автогенераторы гармонических колебаний. Режим большого сигнала

Данный параграф посвящен основам теории автоколебательных систем, работающих в режиме большого сигнала, когда уже нельзя пренебречь нелинейностью характеристики электронного прибора. Метод исследования основан на приближенном решении нелинейного дифференциального уравнения автогенератора.

Выбранный знак
величины M обес-
печивает возмож-
ность самовозбуж-
дения системы

Метод укороченного уравнения. Обратимся вновь к простейшей схеме автогенератора с трансформаторной связью и будем считать заданной вольт-амперную характеристику активного элемента $i = f(u)$. Поскольку $di/dt = df/du \cdot du/dt$, запишем нелинейное дифференциальное уравнение (14.36), характеризующее поведение автогенератора при любых режимах, в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{df}{du} \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \quad (14.52)$$

Способов точного решения таких уравнений при любой функции $f(u)$ не существует. Приходится использовать те или иные дополнительные соображения физического характера и отыскивать приближенные решения. В данном случае следует принять во внимание, что автогенератор содержит высокочастотный колебательный контур. Поэтому, несмотря на присутствие нелинейного элемента, напряжение на контуре должно мало отличаться от гармонического колебания с частотой ω_0 .

Будем искать приближенное решение уравнения (14.52) в виде

$$u(t) = U(t) \cos \omega_0 t,$$

предполагая амплитуду $U(t)$ медленной функцией времени в том смысле, что $|dU/dt| \ll \omega_0 |U|$. На этом основании в выражении первой производной

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0 U \sin \omega_0 t$$

сохраним только второе слагаемое:

$$\frac{du}{dt} \approx -\omega_0 U \sin \omega_0 t. \quad (14.53)$$

Таким же образом вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{d^2 U}{dt^2} \cos \omega_0 t - 2\omega_0 \frac{dU}{dt} \sin \omega_0 t - \omega_0^2 U \cos \omega_0 t \approx \\ &\approx -2\omega_0 \frac{dU}{dt} \sin \omega_0 t - \omega_0^2 U \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (14.54)$$

Подставив выражения (14.53) и (14.54) в уравнение (14.52), получим так называемое *укороченное дифференциальное уравнение*

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{df}{du} \right) U = 0, \quad (14.55)$$

приближенно описывающее процессы в автогенераторе с высокодобротным колебательным контуром.

Переход к укороченному уравнению значительно упрощает последующие этапы анализа, так как при этом порядок дифференциального уравнения снижается на единицу.

Средняя крутизна. Производная df/du , входящая во второе слагаемое уравнения (14.55), является дифференциальной проводимостью нелинейного элемента.

Ток $i(t)$ есть периодическая функция времени, представляемая рядом Фурье

$$i = f(u) = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + \dots$$

Поскольку выходной сигнал автогенератора лишь в малой степени отличается от гармонических колебаний с частотой ω_0 , отбросив все высшие гармоники, получим приближенно $f \approx I_0 + I_1 \cos \omega_0 t$. В то же время $u(t) = U \cos \omega_0 t$, поэтому

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dt} / \frac{du}{dt} = \frac{I_1}{U}.$$

По определению, коэффициент пропорциональности S_1 между амплитудой первой гармоники тока и амплитудой напряжения на управляющем электроде есть *средняя крутизна* или *крутизна по первой гармонике*:

$$S_1(U) = \frac{I_1(U)}{U}. \quad (14.56)$$

Введя среднюю крутизну, запишем укороченное уравнение (14.55) в виде

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1(U)}{LC} \right] U = 0. \quad (14.57)$$

Для аналитического рассмотрения удобен случай, когда вольт-амперная характеристика имеет форму степенного ряда:

$$i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

Производная $d^2 U/dt^2$ мала в силу предположения о медленности изменения амплитуды

укороченное дифференциальное уравнение автогенератора

средняя крутизна

▲

решите задачу 14

Как известно (см. гл. 11), при этом

$$I_1(U) = a_1 U + \frac{3}{4} a_3 U^3 + \frac{5}{8} a_5 U^5 + \dots,$$

так что

$$S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2 + \frac{5}{8} a_5 U^4 + \dots \quad (14.58)$$

Подставляя данное выражение средней крутизны в укороченное уравнение (14.57), получаем нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, которое всегда можно решить методом разделения переменных.

Стационарный режим автогенератора. По определению, в стационарном режиме амплитуда колебаний автогенератора постоянна. Положив $dU/dt = 0$, из (14.57) получаем уравнение

$$S_1(U) = RC/M, \quad (14.59)$$

положительные корни которого определяют стационарные значения $U_{ст}$ амплитуды автоколебаний.

уравнение для определения стационарной амплитуды автоколебаний

Пример 14.6. В автогенераторе использован активный элемент со средней крутизной $S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2$, где $a_1 = S_{лиф} = 15$ мА/В, $a_3 = -4$ мА/В³. Автогенератор имеет параметры: $\omega_0 = 10^7$ с⁻¹, $Q = 30$, $M = 1$ мкГн. Найти стационарную амплитуду автоколебаний.

Вычислим прежде всего величину

$$\xi = RC/M = 1/(\omega_0 Q M) = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

На основании (14.59) стационарная амплитуда в данном случае удовлетворяет квадратному уравнению

$$a_1 + \frac{3}{4} a_3 U_{ст}^2 = \xi,$$

решив которое получаем

$$U_{ст} = 2 \sqrt{(\xi - a_1)/(3a_3)} = 1.97 \text{ В.}$$

▲

решите задачу 15

мягкий и жесткий режимы самовозбуждения автогенератора

В зависимости от того, в какой области ВАХ располагается рабочая точка нелинейного элемента, характеристика $S_1(U)$ имеет одну из двух форм, изображенных на рис. 14.15.

Если средняя крутизна монотонно убывает с увеличением амплитуды управляющего напряжения, то говорят, что автогенератор работает в *мягком режиме самовозбуждения*. Соответствующая зависимость изображена на рис. 14.15, а. Здесь же проведена так называемая *прямая обратной связи* — горизонтальная линия с ординатой RC/M . Точка пересечения кривой $S_1(U)$ и прямой обратной связи определяет единственную амплитуду стационарных автоколебаний $U_{ст}$.

Сложнее обстоит дело, если автогенератор работает в *жестком режиме самовозбуждения*. Здесь, как видно из рис. 14.15, б, возможны два стационарных режима с различными амплитудами $U_{ст1}$ и $U_{ст2}$.

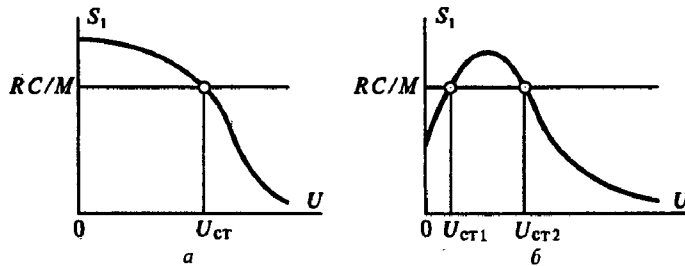


Рис. 14.15. Типичные зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения:

a — характеристика мягкого режима; b — характеристика жесткого режима

Устойчивость стационарных режимов. Говорят, что стационарный режим автоколебательной системы устойчив, если при малых отклонениях амплитуды гармонических колебаний от стационарного значения система стремится вновь вернуться к состоянию с той же стационарной амплитудой. Наоборот, система, оказавшаяся в неустойчивой стационарной точке, стремится так изменить свою амплитуду, чтобы перейти в ту или иную устойчивую стационарную точку.

Устойчивость стационарного режима — понятие, специфическое для нелинейных автоколебательных систем. Напомним, что применительно к линейной динамической системе речь может идти только об устойчивости или неустойчивости состояния покоя (режим малых колебаний).

Рассмотрим укороченное уравнение автогенератора (14.57) и предположим, что амплитуда автоколебаний U получила малое отклонение V от стационарной точки:

$$U = U_{ст} + V. \quad (14.60)$$

При этом

$$S_1(U) \approx S_1(U_{ст}) + AV,$$

где $A = dS_1/dU$ — коэффициент наклона средней крутизны в стационарной точке.

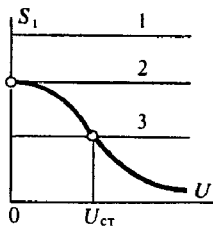
Подставив равенство (14.60) в (14.57), находим с учетом (14.59) дифференциальное уравнение относительно приращения амплитуды:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{AM}{2LC}(V^2 + VU_{ст}) \approx \frac{AMU_{ст}}{2LC}V. \quad (14.61)$$

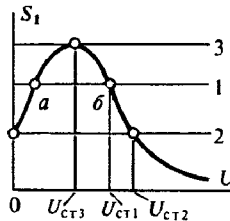
Из этого простого линейного дифференциального уравнения следует, что знак производной dV/dt зависит лишь от знака величины A . Так, если $A < 0$, то V и dV/dt имеют разные знаки. Поэтому если по тем или иным причинам амплитуда автоколебаний U стала больше $U_{ст}$, т. е. $V > 0$, то в силу уравнения (14.61) производная $dV/dt < 0$. Это означает, что с течением времени автоколебательная система вернется в стационарное состояние.

■ различие между понятиями устойчивости линейных и нелинейных автоколебательных систем

■ критерий устойчивости стационарного режима



Легко видеть, что описанным свойством устойчивости обладает автогенератор, работающий в мягком режиме самовозбуждения. Пусть коэффициент взаимной индукции M мал настолько, что прямая обратной связи 1 не пересекает кривую $S_1(U)$. Единственное устойчивое состояние системы при этом — состояние покоя с нулевой амплитудой автоколебаний. Если коэффициент M увеличивать, то при $M_{кр} = RC/S_{диф}$ (прямая 2) автогенератор самовозбудится при сколь угодно малой амплитуде стационарных автоколебаний. Дальнейший рост M приведет к плавному увеличению амплитуды генерируемых автоколебаний, так как прямая 3 будет перемещаться вниз.



По-иному протекают процессы в автогенераторе, работающем в жестком режиме самовозбуждения. Если система первоначально находится в состоянии покоя, а прямая обратной связи занимает положение 1 , то автоколебания не возникают, несмотря на то, что имеются две точки стационарного режима — неустойчивая точка a и устойчивая точка $б$. Однако если с помощью каких-либо внешних источников в системе возбуждены гармонические колебания с резонансной частотой и амплитудой, соответствующей точке a , то, поскольку здесь $A > 0$ (средняя крутизна возрастает с увеличением амплитуды), возникшие автоколебания будут неустойчивыми. Амплитуда их будет нарастать до тех пор, пока система не перейдет в устойчивую точку $б$, характеризующуюся постоянной стационарной амплитудой $U_{ст1}$.

Автогенератор с такой характеристикой способен также и к самовозбуждению. Для этого прямая обратной связи должна занять положение 2 , при котором неустойчивым является стационарный режим с бесконечно малой амплитудой колебаний. Как следует из сказанного ранее, возбужденные автоколебания будут нарастать до тех пор, пока их амплитуда не достигнет в пределе стационарного уровня $U_{ст2}$. Если же теперь уменьшать M , то амплитуда автоколебаний будет плавно падать до тех пор, пока не станет равной $U_{ст3}$ и прямая обратной связи 3 не займет положение касательной к характеристике $S_1(U)$. Дальнейшее уменьшение M приводит к срыву автогенерации; амплитуда колебаний скачком падает до нуля.

Таким образом, в автогенераторе с жестким режимом самовозбуждения колебания возникают и исчезают при различных значениях коэффициента обратной связи. Говорят, что в таком автогенераторе имеет место *колебательный гистерезис*.

Зависимость режима автогенератора от выбора рабочей точки. Как отмечалось, мягкий режим самовозбуждения отличается от жесткого тем, что в первом случае средняя крутизна $S_1(U)$ при малых амплитудах падает с ростом U , а во втором — растет.

Пусть вольт-амперная характеристика нелинейного элемента описывается степенным рядом, и поэтому [см. формулу

▲
решите задачу 16

●
колебательный
гистерезис

(14.58)] при малых U имеет место зависимость

$$S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2.$$

Очевидно, автогенератор работает в мягком режиме самовозбуждения, если $a_3 < 0$, и в жестком режиме, если $a_3 > 0$.

Как известно,

$$a_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3 i}{du^3},$$

причем производная вычисляется в точке, отвечающей начальному напряжению смещения, поданному на нелинейный элемент. Обычно зависимость $i(u)$ представляется гладкой кривой, которая монотонно возрастает от нулевого до некоторого постоянного уровня. Проведя трехкратное дифференцирование этой зависимости графическим способом, убеждаемся, что мягкий режим самовозбуждения будет реализован в тех случаях, когда рабочая точка выбрана в средней части характеристики.

Процесс установления стационарной амплитуды. Метод укороченного уравнения позволяет не только находить стационарные режимы и исследовать их устойчивость, но также изучать динамику процесса установления стационарной амплитуды автоколебаний. В качестве примера найдем закон изменения во времени амплитуды $U(t)$ в автогенераторе с мягким режимом самовозбуждения, полагая, что при $t = 0$ в системе существуют гармонические колебания с резонансной частотой и с некоторой известной амплитудой U_0 .

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{a_1 M}{LC} - \frac{3a_3 M U^2}{4LC} \right) U = 0$$

с начальным условием $U(0) = U_0$.

Введем сокращенные обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 M}{LC} - \frac{R}{L} \right) > 0, \quad \beta = \frac{3a_3 M}{8LC} < 0.$$

Обе части укороченного уравнения

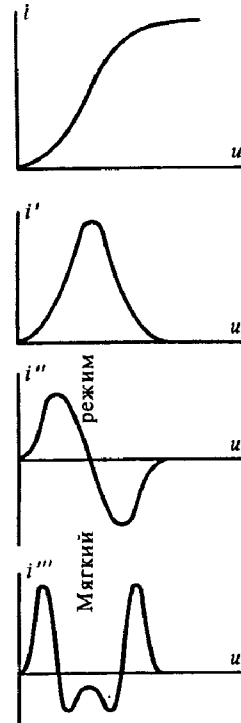
$$\frac{dU}{dt} = (\alpha + \beta U^2) U \quad (14.62)$$

можно умножить на U и получить эквивалентную форму

$$\frac{dU^2}{2(\alpha + \beta U^2)U^2} = dt. \quad (14.63)$$

Разлагая левую часть равенства (14.63) на элементарные дроби, имеем

$$-\frac{\beta}{2\alpha} \frac{dU^2}{\alpha + \beta U^2} + \frac{1}{2\alpha} \frac{dU^2}{U^2} = dt. \quad (14.64)$$



Определение границ мягкого и жесткого режимов самовозбуждения

Данное нелинейное дифференциальное уравнение имеет первый порядок и может быть решено аналитически

Аналогичным способом рассматривают процессы в автогенераторе с жестким режимом самовозбуждения

Наконец, интегрируя и принимая во внимание начальное условие, получаем решение задачи в виде

$$\frac{1}{2\alpha} \ln \frac{U^2(\alpha + \beta U_0^2)}{U_0^2(\alpha + \beta U^2)} = t,$$

откуда следует окончательный результат:

$$U(t) = \frac{U_0 \sqrt{\alpha \exp(\alpha t)}}{\sqrt{\alpha + \beta U_0^2 [1 - \exp(2\alpha t)]}}. \quad (14.65)$$

При $t \rightarrow \infty$ амплитуда автоколебаний стремится к постоянному стационарному уровню

$$U_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}} = \sqrt{\frac{RC/M - a_1}{3/4 a_3}}, \quad (14.66)$$

что совпадает с выводом, полученным в примере 14.6.

Важно отметить следующее: стационарная амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий. Если $U_0 = 0$, то в соответствии с выражением (14.65) амплитуда $U(t)$ равна нулю при любых $t > 0$. Однако, поскольку при $\alpha > 0$ режим малых колебаний неустойчив, при любой сколь угодно малой величине U_0 , возникающей, например, из-за тепловых шумов, самовозбуждение автогенератора всегда будет иметь место.

Наконец, обратим внимание на то, что с повышением добротности колебательной системы, когда $R \rightarrow 0$, параметр α увеличивается. Это, в свою очередь, означает, что установление стационарной амплитуды происходит тем быстрее, чем выше добротность колебательного контура [см. формулу (14.65)]. Полезно вспомнить, что пассивные узкополосные системы, изученные в гл. 9, имеют диаметрально противоположное свойство — при нестационарных процессах огибающая в них изменяется тем медленнее, чем больше добротность системы.

■
различие между активными и пассивными колебательными системами

Результаты

- ◇◇ Введение обратной связи является широко распространенным способом создания динамических систем с заданными частотными или импульсными характеристиками.
- ◇◇ Различают системы с положительной и отрицательной обратными связями.
- ◇◇ Введя в усилитель отрицательную обратную связь, можно создать систему с высокой стабильностью коэффициента усиления.
- ◇◇ Отрицательная обратная связь уменьшает уровень нелинейных искажений, возникающих из-за нелинейности вольт-амперных характеристик активных элементов.
- ◇◇ Применение отрицательной обратной связи дает возможность за счет снижения уровня усиления расширять полосу пропускания усилителя.
- ◇◇ Для анализа устойчивости малых колебаний в системах с обратной связью используют критерии устойчивости. Наиболее распространены критерии устойчивости Рауса — Гурвица и Найквиста.

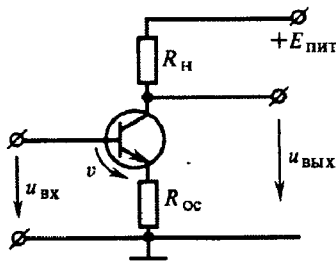
- ◇◇ Активные RC-фильтры являются частотно-избирательными устройствами, не содержащими индуктивных элементов.
- ◇◇ При введении в усилитель положительной обратной связи возможно возникновение неустойчивости. Если в подобном устройстве содержится колебательная система, то неустойчивый усилитель с положительной обратной связью является автогенератором гармонических колебаний.
- ◇◇ Для генерирования гармонических колебаний в низкочастотной области находят применение RC-автогенераторы, не содержащие колебательных контуров.
- ◇◇ Установившаяся амплитуда колебаний в автогенераторе определяется видом нелинейной характеристики электронного прибора, входящего в автогенератор.
- ◇◇ Различают устойчивые и неустойчивые стационарные режимы автогенераторов, а также жесткий и мягкий режимы самовозбуждения.

Вопросы

1. Сформулируйте принцип классификации обратных связей в динамических системах. Возможен ли случай, когда в одной и той же системе обратная связь на одной частоте будет положительной, а на другой — отрицательной?
2. Перечислите некоторые технические применения отрицательной обратной связи в усилительных устройствах.
3. Какова особенность частотных характеристик усилителя, охваченного обратной связью с запаздыванием?
4. Приведите формулировки критериев устойчивости Рауса — Гурвица и Найквиста.
5. Перечислите характерные свойства операционных усилителей.
6. Почему соединение выхода операционного усилителя с его неинвертирующим входом приводит к неустойчивости усилителя?
7. Изобразите принципиальные схемы масштабного усилителя и аналогового интегратора, построенных на базе операционного усилителя.
8. Имеется экспериментальный макет автогенератора с трансформаторной связью. Автогенератор не возбуждается, несмотря на то, что он собран из заведомо исправных деталей. С чего следует начать налаживание такого устройства?
9. Изобразите принципиальные схемы автогенераторов, собранных по схемам индуктивной и емкостной трехточек.
10. Зависит ли частота автоколебаний, генерируемых RC-автогенератором, от коэффициента усиления активного звена?
11. Каково условие самовозбуждения автогенератора с внутренней обратной связью?
12. Как определяется понятие средней крутизны электронного прибора?
13. В чем заключается принципиальное отличие мягкого и жесткого режимов самовозбуждения автогенератора?
14. Как, зная вольт-амперную характеристику нелинейного активного элемента, определить границу между мягким и жестким режимами самовозбуждения?

Задачи

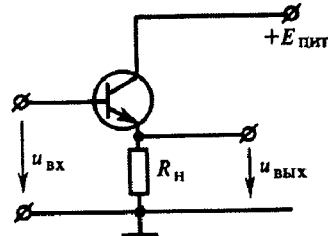
1. В системе с обратной связью основной элемент имеет коэффициент усиления $K_0 = 1000$, не зависящий от частоты. Цепь обратной связи имеет постоянный коэффициент передачи $\beta_0 = 5 \cdot 10^{-4} \exp(-j45^\circ)$. Какой (положительной или отрицательной) является обратная связь в данной системе?
2. Усилительное устройство имеет не зависящий от частоты коэффициент усиления $K_0 = 10\,000$. При изменении внешних условий, например температуры окружающей среды, наблюдается значительное изменение коэффициента усиления, такое, что $\Delta K_0/K_0 = 0.2$. Для стабилизации параметров системы решено использовать отрицательную обратную связь. Выберите величину β , при которой нестabilityность коэффициента усиления снизится в 10 раз, т. е. $\Delta K_{OC}/K_{OC} = 0.02$. Каково при этом значение коэффициента усиления системы с замкнутой обратной связью?
3. Покажите, что в усилителе, собранном по схеме



существует отрицательная обратная связь с параметром $\beta_0 = -R_{OC}/R_H$.

Указание. Введите вспомогательное напряжение v между базой и эмиттером (см. рис.) и учтите, что переменная составляющая тока эмиттера $i_s = Sv$.

4. Найдите коэффициент усиления напряжения $K = u_{вых}/u_{вх}$ эмиттерного повторителя:



Крутизна характеристики S транзистора считается известной.

5. Одноступенчатый усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой имеет активное сопротивление нагрузки $R_H = 1.6$ кОм. Паразитная емкость C_n , подключенная к коллектору транзистора, равна 50 пФ. Крутизна характеристики транзистора $S = 30$ мА/В. В цепь эмиттера включен резистор обратной связи $R_{OC} = 27$ Ом (см. условие задачи 3). Найдите граничные частоты усиления при наличии и при отсутствии отрицательной обратной связи.

6. Используя критерий Рауса – Гурвица, исследуйте устойчивость малых колебаний в динамических системах, описываемых характеристическими уравнениями вида:

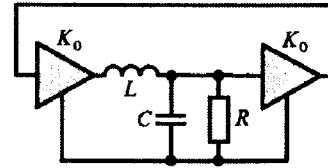
а) $p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$,

б) $p^4 + 2p^3 + 3p^2 + p + 1 = 0$.

7. Используя критерий Найквиста, исследуйте устойчивость системы с запаздывающей обратной связью (см. рис. 14.4).

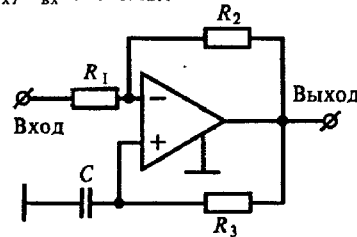
Указание. При построении годографа используйте безразмерную частотную переменную $\omega\tau_0$. Цель исследования – найти предельно допустимое значение произведения $\beta_0 K_0$.

8. С помощью критерия Найквиста исследуйте устойчивость замкнутой системы:



содержащей два идеальных усилительных элемента с коэффициентами усиления напряжения K_0 каждый.

9. Найдите передаточную функцию $K(p) = U_{вых}/U_{вх}$ системы:



Предположите, что операционный усилитель на всех частотах имеет постоянный вещественный коэффициент усиления напряжения K_0 . Входное сопротивление усилителя со стороны инвертирующего и неинвертирующего входов неограниченно велико; выходное сопротивление пренебрежимо мало.

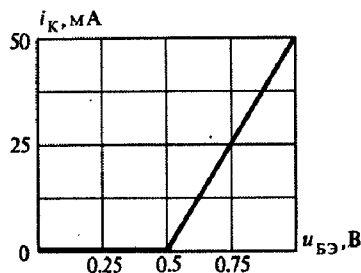
10. Аналоговый интегратор, собранный на операционном усилителе (см. рис. 14.8), имеет следующие параметры: $R = 2.7$ кОм, $C = 1.8$ нФ. Усилитель питается от источника с напряжением 12 В. На вход интегратора подается сигнал $u_{вх}(t) = 0.1\sigma(t)$ В. Вычислите сигнал на выходе и определите, через какой промежуток времени выходное напряжение достигнет уровня напряжения источника питания.

11. Синтезируйте активный RC-фильтр нижних частот с чебышевской характеристикой 2-го порядка при следующих исходных данных: $\omega_c = 1.5 \cdot 10^2$ с⁻¹, $\varepsilon = 0.75$.

12. В автогенераторе с трансформаторной связью (см. рис. 14.11) колебательный контур настроен на частоту $f_{рез} = 400$ кГц. Параметры контура: $L = 15$ мкГн, $R = 8$ Ом. Дифференциальная крутизна характеристики транзистора $S_{диф} = 1.5$ мА/В. Определите критическое значение коэффициента взаимной индукции M , обеспечивающее самовозбуждение системы.

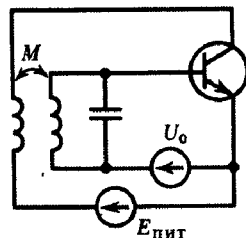
13. RC-автогенератор (см. рис. 14.13) генерирует гармонические колебания на частоте 250 Гц. Выберите параметры устройства, обеспечивающие указанную частоту колебаний.

14. Характеристика транзистора аппроксимирована двумя отрезками прямых:



Постройте график зависимости средней крутизны от амплитуды высокочастотного напряжения U , полагая, что напряжение смещения $U_0 = 0.75$ В.

15. Автогенератор гармонических колебаний собран по схеме



Более сложные задания

18. Покажите, что система с обратной связью, изображенная на рис. 14.1, может быть описана бесконечным соотношением вида

$$U_{\text{вых}} = KU_{\text{вх}} + \beta(KU_{\text{вх}} + \beta(KU_{\text{вх}} + \beta(KU_{\text{вх}} + \dots$$

связывающим изображения входного и выходного сигналов. Исследуйте вопрос об эквивалентности такого представления и формулы (14.2). Рассмотрите трактовку процессов в системе с обратной связью как циркуляцию сигналов по петле обратной связи.

19. Построив амплитудно-фазовую характеристику, исследуйте с помощью критерия Найквиста устойчивость трехзвенного усилителя с резистивно-емкостными нагрузками, предполагая, что выход системы непосредственно соединен с ее входом.

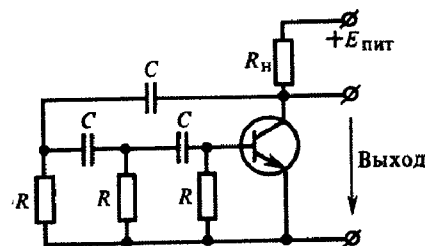
20. Исследуйте условия самовозбуждения автоколебаний в RC-генераторе, собранном по схеме

Использован транзистор с характеристикой, приведенной в задаче 14. Параметры автогенератора: $\omega_0 = 10^6$ с⁻¹, $Q = 50$, $M = 0.2$ мГн, $U_0 = 0.75$ В. Определите стационарную амплитуду автоколебаний.

16. В автогенераторе, схема которого приведена в условии предыдущей задачи, напряжение смещения выбрано равным 0.25 В. Покажите, что система будет работать в жестком режиме самовозбуждения.

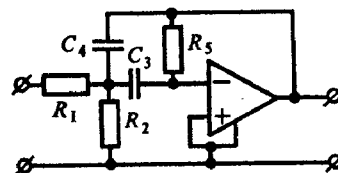
17. В автогенераторе с трансформаторной связью применен электронный прибор, у которого зависимость средней крутизны S_1 (мА/В) от управляющего напряжения U (В) аппроксимирована многочленом 2-й степени $S_1(U) = a_1 + (3/4)a_3U^2$,

где $a_1 = 1$ мА/В, $a_3 = -2.5$ мА/В³. Колебательный контур генератора имеет параметры: $\omega_0 = 6 \cdot 10^8$ с⁻¹, $Q = 25$. Определите, при каком минимальном значении коэффициента взаимной индукции $M_{\min}$ в системе возникнут автоколебания. Вычислите амплитуду $U_{\text{ст}}$ в стационарном режиме, если $M = 3M_{\min}$. Проанализируйте, как зависит стационарная амплитуда автоколебаний от добротности колебательного контура.



Найдите выражение для расчета генерируемой частоты.

21. Покажите, что передаточная функция, отвечающая полосовому фильтру, реализуется схемой цепи вида



Глава 15

Дискретные сигналы. Принципы цифровой фильтрации

Техника дискретных сигналов служит основой таких перспективных областей, как цифровое радиовещание, цифровое телевидение, цифровая звукозапись и т. д.

Дискретные сигналы естественно возникают в тех случаях, когда источник сообщений выдает информацию в фиксированные моменты времени. Примером могут служить сведения о температуре воздуха, передаваемые радиовещательными станциями несколько раз в сутки. Свойство дискретного сигнала проявляется здесь предельно ярко: в паузах между сообщениями никаких сведений о температуре нет. Фактически же температура воздуха изменяется во времени плавно, так что результаты измерения возникают за счет дискретизации непрерывного сигнала — операции, которая фиксирует отсчетные значения.

Дискретные сигналы приобрели особое значение в последние десятилетия под влиянием совершенствования техники связи и развития способов обработки информации быстродействующими вычислительными устройствами. Большие успехи достигнуты в разработке и использовании специализированных устройств для обработки дискретных сигналов, так называемых цифровых фильтров.

Настоящая глава посвящена рассмотрению принципов математического описания дискретных сигналов, а также теоретических основ построения линейных устройств для их обработки.

15.1. Модели дискретных сигналов

Различие между дискретными и аналоговыми (непрерывными) сигналами подчеркивалось в гл. 1 при классификации радиотехнических сигналов. Напомним основное свойство дискретного сигнала: его значения определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек. Если аналоговый сигнал имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно-непрерывной функции, то отвечающий ему дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой последовательность $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ отсчетных значений сигнала $x(t)$ в точках $(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$ соответственно.

● интервал дискретизации

Дискретизирующая последовательность. На практике, как правило, отсчеты дискретных сигналов берут во времени через равный промежуток Δ , называемый *интервалом (шагом) дискретизации*:

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \dots \quad (15.1)$$

Операцию дискретизации, т. е. переход от аналогового сигнала $x(t)$ к дискретному сигналу $x_d(t)$, можно описать,

введя в рассмотрение обобщенную функцию

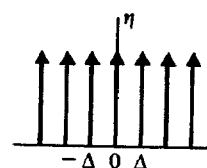
$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta), \quad (15.2)$$

называемую *дискретизирующей последовательностью*.

Очевидно, дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой функционал (см. гл. 1), определенный на множестве всевозможных аналоговых сигналов $x(t)$ и равный скалярному произведению функции $x(t)$ и $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} x_d(t) = (x, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) dt = \\ &= (\dots, x(-2\Delta), x(-\Delta), x(0), x(\Delta), x(2\Delta), \dots) \end{aligned} \quad (15.3)$$

Формула (15.3) указывает путь практической реализации устройства для дискретизации аналогового сигнала. Работа дискретизатора основана на операции стробирования (см. гл. 12) — перемножения обрабатываемого сигнала $x(t)$ и «гребенчатой» функции $\eta(t)$. Поскольку длительность отдельных импульсов, из которых складывается дискретизирующая последовательность, равна нулю, на выходе идеального дискретизатора в равноотстоящие моменты времени возникают отсчетные значения обрабатываемого аналогового сигнала.



● дискретизирующая последовательность

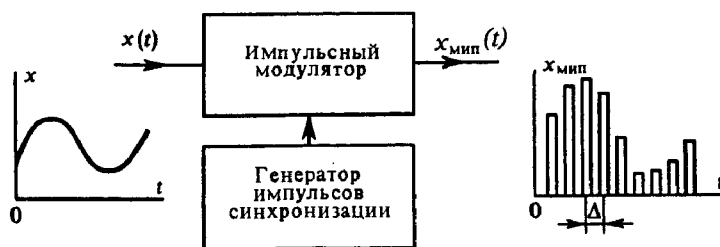
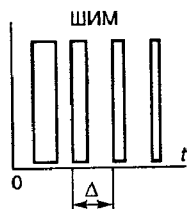
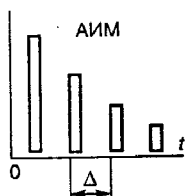


Рис. 15.1. Структурная схема импульсного модулятора

Модулированные импульсные последовательности. Дискретные сигналы начали использовать еще в 40-х годах при создании радиотехнических систем с импульсной модуляцией. Этот вид модуляции отличается тем, что в качестве «несущего колебания» вместо гармонического сигнала служит периодическая последовательность коротких импульсов.

Импульсный модулятор (рис. 15.1) представляет собой устройство с двумя входами, на один из которых подается исходный аналоговый сигнал $x(t)$. На другой вход поступают короткие синхронизирующие импульсы с интервалом повторения Δ . Модулятор построен таким образом, что в момент подачи каждого синхронизирующего импульса происходит измерение мгновенного значения сигнала $x(t)$. На выходе модулятора возникает последовательность импульсов, каждый из которых имеет площадь, пропорциональную соответствующему отсчетному значению аналогового сигнала. Сигнал $x_{\text{мип}}(t)$ на выходе импульсного модулятора будем

●
модулированная
импульсная последовательность



Важнейшее применение импульсно-модулированных сигналов — создание многоканальных систем связи с временным разделением каналов. В ряде случаев системы с импульсной модуляцией позволяют добиться большей помехоустойчивости по сравнению с той, которая может быть достигнута при использовании в качестве несущего колебания простого гармонического сигнала

называть *модулированной импульсной последовательностью* (МИП). Естественно, что дискретный сигнал является математической моделью МИП.

Отметим, что с принципиальной точки зрения характер импульсов, из которых складывается МИП, безразличен. В частности, эти импульсы могут иметь одинаковую длительность, в то время как их амплитуда пропорциональна отсчетным значениям дискретизируемого сигнала. Такой вид преобразования непрерывного сигнала получил название *амплитудно-импульсной модуляции* (АИМ). Возможен другой способ — *широтно-импульсная модуляция* (ШИМ). Здесь амплитуды импульсов на выходе модулятора постоянны, а их длительность (ширина) пропорциональна мгновенным значениям аналогового колебания.

Выбор того или иного способа импульсной модуляции диктуется рядом технических соображений, удобством схемной реализации, а также характерными особенностями передаваемых сигналов. Например, нецелесообразно использовать АИМ в случае, если полезный сигнал изменяется в очень широких пределах, т. е., как часто говорят, имеет широкий динамический диапазон. Для неискаженной передачи такого сигнала требуется передатчик со строго линейной амплитудной характеристикой. Создание такого передатчика — самостоятельная, технически сложная проблема. Системы ШИМ не предъявляют требований к линейности амплитудных характеристик передающего устройства. Однако их схемная реализация может оказаться несколько сложнее по сравнению с системами АИМ.

Математическую модель идеальной МИП можно получить следующим образом. Рассмотрим формулу динамического представления сигнала $x(t)$ (см. гл. 1):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (15.4)$$

Поскольку МИП определена лишь в точках $t_k = k\Delta$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), интегрирование в формуле (15.4) следует заменить суммированием по индексу k . Роль дифференциала $d\tau$ будет играть интервал (шаг) дискретизации Δ . Тогда математическая модель модулированной импульсной последовательности, образованной бесконечно короткими импульсами, окажется заданной выражением

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta), \quad (15.5)$$

где $x_k = x(k\Delta)$ — выборочные значения аналогового сигнала.

Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности. Исследуем спектр сигнала, возникающего на выходе идеального импульсного модулятора и описываемого выражением (15.5). Заметим, что сигнал вида МИП с точностью до коэффициента пропорциональности Δ равен произведению функции $x(t)$ и дискретизирующей последователь-

ности $\eta(t)$:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta x(t) \eta(t). \quad (15.6)$$

Известно, что спектр произведения двух сигналов пропорционален свертке их спектральных плотностей (см. гл. 2). Поэтому если известны законы соответствия сигналов и спектров:

$$x(t) \leftrightarrow S_x(\omega), \quad \eta(t) \leftrightarrow S_\eta(\omega),$$

то спектральная плотность МИП-сигнала

$$S_{\text{МИП}}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\xi) S_x(\omega - \xi) d\xi. \quad (15.7)$$

Чтобы найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ дискретизирующей последовательности, разложим периодическую функцию $\eta(t)$ в комплексный ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/\Delta}.$$

Коэффициенты этого ряда ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$C_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-j2\pi nt/\Delta} dt = \frac{1}{\Delta}.$$

Обратившись к формуле (2.44), получаем

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/\Delta), \quad (15.8)$$

т. е. спектр дискретизирующей последовательности состоит из бесконечной совокупности дельта-импульсов в частотной области. Данная спектральная плотность является периодической функцией с периодом $2\pi/\Delta \text{ с}^{-1}$.

Наконец, подставив формулу (15.8) в (15.7) и изменив порядок следования операций интегрирования и суммирования, находим

$$S_{\text{МИП}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\omega - 2\pi n/\Delta). \quad (15.9)$$

Итак, спектр сигнала, полученного в результате идеальной дискретизации бесконечно короткими стробирующими импульсами, представляет собой сумму бесконечного числа «копий» спектра исходного аналогового сигнала. Копии располагаются на оси частот через одинаковые интервалы $2\pi/\Delta$, равные значению угловой частоты первой гармоники дискретизирующей импульсной последовательности (рис. 15.2, а, б).

Согласно данной модели, значения сигнала в паузах условно считаются равными нулю

Заметим, что модулированная импульсная последовательность является предельным случаем стробированного сигнала (см. гл. 12). Здесь длительность прямоугольных импульсов, формирующих выборки, стремится к нулю

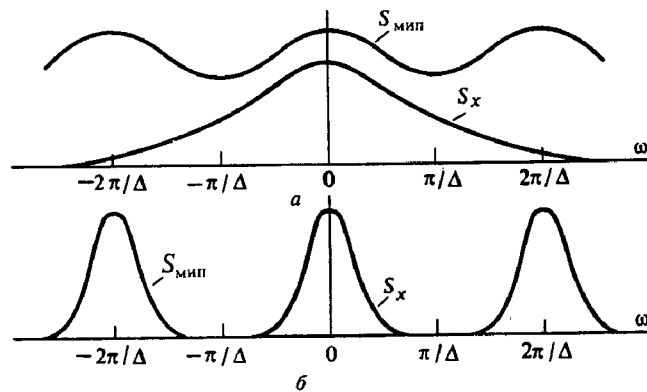


Рис. 15.2. Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности при различных значениях верхней граничной частоты:

a — верхняя граничная частота велика; *б* — верхняя граничная частота мала (цветом обозначена спектральная плотность исходного сигнала, подвергнутого дискретизации)

Восстановление непрерывного сигнала по модулированной импульсной последовательности. В дальнейшем будем полагать, что вещественный сигнал $x(t)$ имеет низкочастотный спектр, симметричный относительно точки $\omega = 0$ и ограниченный верхней граничной частотой ω_b . Из рис. 15.2, *б* следует, что если $\omega_b \leq \pi/\Delta$, то отдельные копии спектра $S_x(\omega)$ не накладываются друг на друга.

Поэтому аналоговый сигнал с таким спектром, подвергнутый импульсной дискретизации, может быть совершенно точно восстановлен с помощью идеального ФНЧ, на вход которого подана импульсная последовательность вида (15.5). При этом наибольший допустимый интервал дискретизации $\Delta = \pi/\omega_b = 1/(2f_b)$, что согласуется с теоремой Котельникова.

Действительно, пусть фильтр, восстанавливающий непрерывный сигнал, имеет частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ K_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases}$$

Импульсная характеристика этого фильтра описывается выражением

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}.$$

Принимая во внимание, что МИП-сигнал вида (15.5) есть взвешенная сумма дельта-импульсов, находим отклик на выходе восстанавливающего фильтра

$$y(t) = \frac{K_0 \omega_b \Delta}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin \omega_b (t - k\Delta)}{\omega_b (t - k\Delta)}. \quad (15.10)$$

Данный сигнал с точностью до масштабного коэффициента повторяет исходное колебание с ограниченным спектром.

Идеальный ФНЧ физически нереализуем и может служить лишь теоретической моделью для объяснения принципа восстановления сообщения по его дискретным импульсным отсчетам. Реальный фильтр нижних частот имеет АЧХ, которая либо охватывает несколько лепестков спектральной диаграммы МИП, либо, концентрируясь вблизи нулевой частоты, оказывается значительно уже центрального лепестка спектра. Для примера на рис. 15.3, б–е приведены кривые, характеризующие сигнал на выходе RC-цепи, используемой в качестве восстанавливающего фильтра (рис. 15.3, а).

Удовлетворительные результаты можно получить, используя в качестве восстанавливающего фильтра ФНЧ с характеристикой Баттерворта достаточно высокого порядка ($n > 5$)

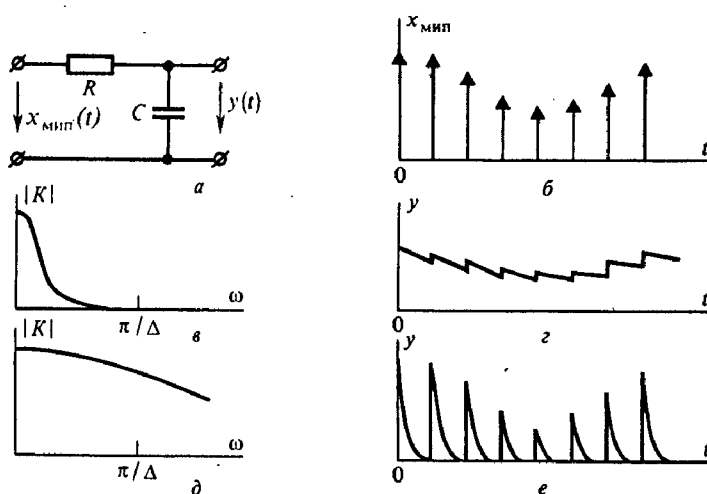


Рис. 15.3. Восстановление непрерывного сигнала по его импульсным отсчетам с помощью RC-цепи:

а – схема фильтра; б – дискретный входной сигнал; в, г – АЧХ фильтра и сигнал на его выходе в случае $RC \gg \Delta$; д, е – то же, для случая $RC \ll \Delta$

Из приведенных графиков видно, что реальный восстанавливающий фильтр неизбежно искажает входное колебание.

Заметим, что для восстановления сигнала можно использовать как центральный, так и любой боковой лепесток спектральной диаграммы.

Определение спектра аналогового сигнала по совокупности отсчетов. Располагая МИП-представлением, можно не только восстановить аналоговый сигнал, но и найти его спектральную плотность. Для этого следует прежде всего непосредственно связать спектральную плотность МИП с отсчетными значениями:

$$S_{\text{МИП}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{МИП}}(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta) e^{-j\omega t} dt = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k\Delta}. \quad (15.11)$$

С другой стороны, спектральная плотность $S_{\text{мип}}(\omega)$ была найдена ранее другим способом [см. формулу (15.9)]. Поэтому справедливо соотношение

$$\Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k \Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\omega - 2\pi n/\Delta), \quad (15.12)$$

●
формула суммирования Пуассона

известное в математике как *формула суммирования Пуассона*.

Однозначно найти функцию $S_x(\omega)$, зная левую часть равенства (15.12) из результатов измерений, вообще говоря, невозможно ввиду эффекта наложения копий спектра. Исключение составляет случай, когда заранее известно, что исходный сигнал $x(t)$ имеет спектр низкочастотного вида, удовлетворяющий условию теоремы Котельникова. Тогда очевидно, что спектр аналогового сигнала

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\pi/\Delta, \\ \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k \Delta}, & -\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta, \\ 0, & \omega > \pi/\Delta. \end{cases} \quad (15.13)$$

Данная формула исчерпывающе решает поставленную задачу при указанном выше ограничении.

15.2. Дискретизация периодических сигналов

Модель дискретного сигнала вида (15.5) предполагает, что отсчетные значения аналогового колебания $x(t)$ могут быть получены в неограниченном числе точек на оси времени. Практически получить столь обширные сведения о сигнале, безусловно, невозможно, поскольку обработка всегда ведется на конечном интервале времени.

Изучим особенности спектрального представления дискретного сигнала, который задан на отрезке $[0, T]$ своими отсчетами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$, взятыми соответственно в моменты времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta$; полное число отсчетов $N = T/\Delta$. Массив этих чисел, вещественных или комплексных, является единственным источником сведений о спектральных свойствах сигнала $x(t)$.

Методика изучения таких дискретных сигналов состоит в том, что полученная выборка отсчетных значений мысленно повторяется бесконечное число раз. В результате сигнал становится периодическим (рис. 15.4).

Выделенные отсчеты относятся к интервалу периодичности

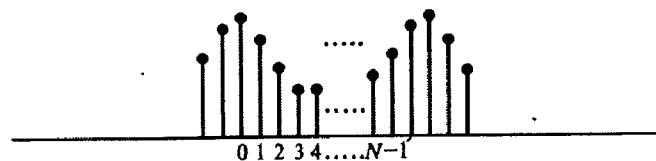


Рис. 15.4. Дискретное представление периодического сигнала

Сопоставив такому сигналу некоторую математическую модель, можно воспользоваться разложением в ряд Фурье и найти соответствующие амплитудные коэффициенты. Совокупность этих коэффициентов образует спектр дискретного периодического сигнала.

Дискретное преобразование Фурье. Воспользуемся моделью в виде последовательности дельта-импульсов и сопоставим исходному колебанию $x(t)$ его дискретное МИП-представление:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta). \quad (15.14)$$

Представим дискретную модель (15.14) комплексным рядом Фурье:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T} \quad (15.15)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T\Delta} \int_0^T x_{\text{МИП}}(t) e^{-j2\pi nt/T} dt. \quad (15.16)$$

Подставляя формулу (15.14) в (15.16) и вводя безразмерную переменную $\xi = t/\Delta$, получим

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta) e^{-j2\pi nt/T} dt = \\ &= \frac{1}{N} \int_0^N \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(\xi - k) e^{-j2\pi n\xi/N} d\xi = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^N \delta(\xi - k) e^{-j2\pi n\xi/N} d\xi. \end{aligned}$$

Наконец, используя фильтрующее свойство дельта-функции, имеем

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi nk/N}. \quad (15.17)$$

Формула (15.17) определяет последовательность коэффициентов, образующих *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ) рассматриваемого сигнала. Отметим некоторые очевидные свойства ДПФ.

▲ решите задачу 2

1. Дискретное преобразование Фурье есть линейное преобразование, т. е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.

2. Число различных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$, вычисляемых по формуле (15.17), равно числу N отсчетов за период; при $n = N$ коэффициент $C_N = C_0$.

3. Коэффициент C_0 (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k.$$

свойства дискретного преобразования Фурье

4. Если N — четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^k.$$

5. Пусть отсчетные значения x_k — вещественные числа. Тогда коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi(N-n)k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j2\pi nk/N} = C_n^*.$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты $C_{N/2+1}, \dots, C_{N-1}$ отвечают отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра сигнала они не дают новых сведений.

Пример 15.1. Дискретный сигнал на интервале своей периодичности задан шестью равноотстоящими отсчетами $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Найти коэффициенты ДПФ этого сигнала.

Используя основную формулу (15.17), непосредственно вычисляем:

$$C_0 = 3/6 = 0.5,$$

$$C_1 = 1/6 (1 + e^{-j\pi/3} + e^{-j2\pi/3}) = 1/6 (1 - j\sqrt{3}),$$

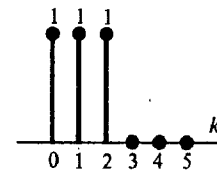
$$C_2 = 1/6 (1 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}) = 0,$$

$$C_3 = 1/6 (1 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}) = 1/6.$$

Последующие коэффициенты находят на основании свойства 5:

$$C_4 = C_2^* = 0, \quad C_5 = C_1^* = 1/6 (1 + j\sqrt{3}).$$

Итак, располагая дискретным сигналом с числом отсчетов $N = 6$, можно найти постоянную составляющую, а также комплексные амплитуды первой, второй и третьей гармоник исходного непрерывного сигнала. Ясно, что при любом четном N число найденных гармоник составляет половину числа отсчетов. Это положение непосредственно вытекает из теоремы Котельникова. Действительно, верхнюю граничную частоту в спектре дискретизируемого сигнала следует находить из соотношения $f_b = 1/(2\Delta) = (N/2)f_1$, где $f_1 = 1/T$ — частота первой гармоники.



Заранее предполагается, что исходный сигнал удовлетворяет условиям теоремы Котельникова

число вычисляемых гармоник

Восстановление исходного сигнала по ДПФ. Если на основании совокупности отсчетов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ некоторого сигнала найдены коэффициенты ДПФ $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$, то по ним всегда можно восстановить исходный сигнал $x(t)$ с ограниченным спектром, который был подвергнут дискретизации. Ряд Фурье такого сигнала принимает, очевидно, вид конечной суммы:

$$x(t) = C_0 + 2|C_1|\cos(2\pi t/T + \varphi_1) + 2|C_2|\cos(4\pi t/T + \varphi_2) + \dots + |C_{N/2}|\cos(N\pi t/T + \varphi_{N/2}), \quad (15.18)$$

где $\varphi_i = \arg C_i$ — фазовый угол коэффициента ДПФ.

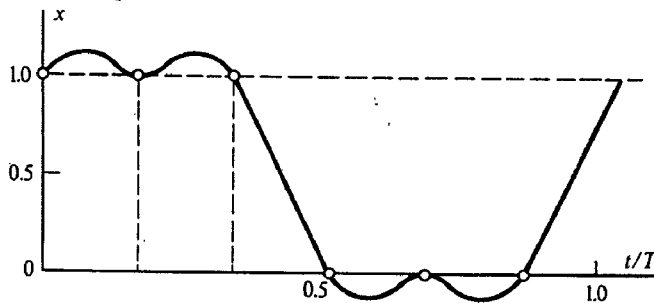


Рис. 15.5. Сигнал, восстановленный по коэффициентам ДПФ

В качестве примера на рис. 15.5 изображен сигнал $x(t)$, восстановленный по своим отсчетам в соответствии с данными примера 15.1. На основании формулы (15.18) этот сигнал имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos(2\pi t/T - \pi/3) + \frac{1}{6}\cos(6\pi t/T).$$

Следует подчеркнуть, что восстановление непрерывного сигнала по формуле (15.18) есть не приближенная, а точная операция, полностью эквивалентная получению текущих значений сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам. Однако процедура, использующая ДПФ, в ряде случаев предпочтительна. Она приводит к конечным суммам гармоник, в то время как ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально должен содержать бесконечное число членов.

Обратное дискретное преобразование Фурье. Задача дискретного спектрального анализа может быть поставлена и по-иному. Допустим, что коэффициенты C_n , образующие ДПФ, заданы. Положим в формуле (15.15) $t = k\Delta$ и учтем, что суммируется лишь конечное число членов ряда, которые отвечают гармоникам, содержащимся в спектре исходного сигнала. Таким образом, получаем формулу для вычисления отсчетных значений:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j2\pi nk/N}, \quad (15.19)$$

▲
решите задачу 3

ОДПФ последовательности из N элементов, требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Если длины обрабатываемых массивов имеют порядок тысячи или более, то использовать эти алгоритмы дискретного спектрального анализа в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного быстродействия вычислительных устройств.

Выходом из положения явился алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), предложенный в 60-х годах. Существенно сократить число выполняемых операций здесь удается за счет того, что обработка входного массива сводится к нахождению ДПФ (или ОДПФ) массивов с меньшим числом членов.

Будем предполагать, и это существенно для метода БПФ, что число отсчетов $N = 2^p$, где p — целое число.

Разобьем входную последовательность $\{x_k\}$ на две части с четными и нечетными номерами:

$$\begin{aligned} \{x_k\}_{\text{ЧТ}} &= \{x_{2k}\}, \quad \{x_k\}_{\text{НЧ}} = \{x_{2k+1}\}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \end{aligned} \quad (15.25)$$

и представим n -й коэффициент ДПФ в виде

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \left(x_{2k} e^{-j \frac{4\pi nk}{N}} + x_{2k+1} e^{-j \frac{2\pi n(2k+1)}{N}} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} x_{k\text{ЧТ}} e^{-j \frac{2\pi nk}{N/2}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{k\text{НЧ}} e^{-j \frac{2\pi nk}{N/2}} \right). \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до $N/2 - 1$ выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$C_n = C_{n\text{ЧТ}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{НЧ}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

(15.26)

Теперь учтем, что последовательности коэффициентов, относящихся к четной и нечетной частям входного массива, являются периодическими с периодом $N/2$:

$$C_{n\text{ЧТ}} = C_{n+N/2\text{ЧТ}}, \quad C_{n\text{НЧ}} = C_{n+N/2\text{НЧ}}.$$

Кроме того, входящий в формулу (15.26) множитель при $n \geq N/2$ можно преобразовать так:

$$e^{-j \frac{2\pi (N/2 + n)}{N}} = e^{-j\pi} e^{-j \frac{2\pi n}{N}} = -e^{-j \frac{2\pi n}{N}}.$$

■
принцип разбиения
входной последо-
вательности

Отсюда находим выражение для второй половины множества коэффициентов ДПФ:

$$C_{N/2+n} = C_{n\text{чт}} - e^{-j\frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{нч}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1. \quad (15.27)'$$

Формулы (15.26) и (15.27) лежат в основе алгоритма БПФ. Далее вычисления строят по итерационному принципу: последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами вновь разбивают на две части. Процесс продолжают до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из единственного элемента. Легко видеть, что ДПФ этого элемента совпадает с ним самим.

Можно показать, что число операций, необходимых для вычисления БПФ, оценивается как $N \log_2 N$.

Дискретная свертка. По аналогии с обычной сверткой двух сигналов

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

вводят дискретную свертку — сигнал, отсчеты которого связаны с отсчетами дискретных сигналов $x_d(t)$ и $y_d(t)$ соотношением

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (15.28)$$

Найдем связь между коэффициентами дискретной свертки и ДПФ сигналов $x_d(t)$, $y_d(t)$. Для этого выразим текущие значения отсчетов x_k и y_{m-k} как ОДПФ от соответствующих спектров:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} e^{j2\pi nk/N},$$

$$y_{m-k} = \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl} e^{j2\pi l(m-k)/N},$$

а затем подставим эти величины в формулу (15.28):

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} e^{j2\pi nk/N} \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl} e^{j2\pi l(m-k)/N}.$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_{xn} C_{yl} e^{j2\pi lm/N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-l)k/N}. \quad (15.29)$$

Выигрыш в скорости вычислений по сравнению с традиционным ДПФ достигает сотен и даже тысяч при достаточных длинах входных массивов

Описанный здесь алгоритм свертки периодических сигналов иногда называют круговой или циклической сверткой

Нетрудно заметить, что внутренняя сумма может быть вычислена на основании формулы (15.22), отображающей свойство ортогональности элементов базиса Фурье. Воспользовавшись этим, получаем

$$f_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} C_{yn} e^{j2\pi mn/N}. \quad (15.30)$$

Поскольку формула (15.30) есть ОДПФ, приходим к выводу, что коэффициенты преобразования Фурье свертки являются произведениями коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов:

$$C_{fk} = C_{xk} C_{yk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (15.31)$$

Этот результат имеет большое значение в теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. Оказывается, что если сигналы достаточно длинны (например, содержат несколько тысяч отсчетов), то для вычисления свертки целесообразно вначале найти их ДПФ, перемножить коэффициенты, а затем воспользоваться формулой (15.30), применив алгоритм БПФ. Такой способ вычислений часто более экономичен, чем прямое использование формулы (15.28).

15.3. Теория z -преобразования

При анализе и синтезе дискретных и цифровых устройств широко используют так называемое z -преобразование, играющее по отношению к дискретным сигналам такую же роль, как интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к непрерывным сигналам. В данном параграфе излагаются основы теории этого функционального преобразования и некоторые его свойства.

Определение z -преобразования. Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ — числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчетные значения некоторого сигнала. Поставим ей в однозначное соответствие сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной z :

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k}. \quad (15.32)$$

В математике z -преобразование называют также производящей функцией исходной последовательности

Назовем эту сумму, если она существует, z -преобразованием последовательности $\{x_k\}$. Целесообразность введения такого математического объекта связана с тем, что свойства дискретных последовательностей чисел можно изучать, исследуя их z -преобразования обычными методами математического анализа.

На основании формулы (15.32) можно непосредственно найти z -преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу с единственным отсчетом $\{x_k\} = (1, 0, 0, \dots)$ соответствует

$X(z) = 1$. Если же, например, $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, то

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}.$$

▲
решите задачу 5

Сходимость ряда. Если в ряде (15.32) число слагаемых бесконечно велико, то необходимо исследовать его сходимость. Из теории функций комплексного переменного [14] известно следующее. Пусть коэффициенты рассматриваемого ряда удовлетворяют условию

$$|x_k| < MR_0^k \quad (15.33)$$

при любых $k \geq 0$. Здесь $M > 0$ и $R_0 > 0$ — постоянные вещественные числа. Тогда ряд (15.32) сходится при всех значениях z , таких, что $|z| > R_0$. В этой области сходимости сумма ряда представляет собой аналитическую функцию переменной z , не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек.

Рассмотрим, например, дискретный сигнал $\{x_k\} = (1, 1, 1, \dots)$, образованный одинаковыми единичными отсчетами и служащий моделью обычной функции включения. Бесконечный ряд $X(z) = 1 + 1/z + 1/z^2 + \dots$ является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых z в кольце $|z| > 1$. Суммируя прогрессию, получаем

$$X(z) = 1/(1 - 1/z) = z/(z - 1).$$

На границе области аналитичности при $z = 1$ эта функция имеет единственный простой полюс.

Аналогично получается z-преобразование бесконечного дискретного сигнала $\{x_k\} = (1, a, a^2, \dots)$, где a — некоторое вещественное число. Здесь

$$X(z) = 1/(1 - a/z) = z/(z - a).$$

Данное выражение имеет смысл в кольцевой области $|z| > a$.

▲
решите задачу 6

z-преобразование непрерывных функций. Полагая, что отсчеты $\{x_k\}$ есть значения непрерывной функции $x(t)$ в точках $t = k\Delta$, любому сигналу $x(t)$ можно сопоставить его z-преобразование при выбранном шаге дискретизации:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta) z^{-k}. \quad (15.34)$$

Например, если $x(t) = \exp(\alpha t)$, то соответствующее z-преобразование

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\alpha k\Delta) z^{-k} = \frac{z}{z - \exp(\alpha\Delta)}$$

является аналитической функцией при $|z| > \exp(\alpha\Delta)$.

Обратное z-преобразование. Пусть $X(z)$ — функция комплексной переменной z , аналитическая в кольцевой области $|z| > R_0$. Замечательное свойство z-преобразования состоит

в том, что функция $X(z)$ определяет всю бесконечную совокупность отсчетов $(x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Действительно, умножим обе части ряда (15.32) на множитель z^{m-1} ;

$$z^{m-1}X(z) = x_0z^{m-1} + x_1z^{m-2} + \dots + x_mz^{-1} + \dots, \quad (15.35)$$

Обход контура интегрирования проводится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки

а затем вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции $X(z)$. При этом воспользуемся фундаментальным положением, вытекающим из теоремы Коши:

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если } n = -1, \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

Очевидно, интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером m , поэтому

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} X(z) dz. \quad (15.36)$$

● обратное z -преобразование

Данная формула называется обратным z -преобразованием.

Пример 15.2. Задано z -преобразование вида $X(z) = (z+1)/z$. Найти коэффициенты дискретного сигнала $\{x_k\}$, отвечающего этой функции.

Прежде всего отметим, что функция $X(z)$ аналитична во всей плоскости, за исключением точки $z=0$, поэтому она действительно может быть z -преобразованием некоторого дискретного сигнала.

Обращаясь к формуле (15.36), находим, что

$$x_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z+1}{z^2} dz = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z+1}{z} dz = 1,$$

.....

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-2}(z+1) dz = 0$$

при любых $m \geq 2$. Таким образом, исходный дискретный сигнал имеет вид $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

▲ решите задачу 7

Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье. Определим при $t \geq 0$ сигнал вида идеальной МИП:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta).$$

Преобразовав его по Лапласу, получим изображение

$$F(p) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \exp(-pk\Delta), \quad (15.37)$$

которое непосредственно переходит в z-преобразование, если выполнить подстановку $z = \exp(p\Delta)$. Если же положить $z = \exp(j\omega\Delta)$, то выражение

$$S(\omega) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \exp(-j\omega k\Delta) \quad (15.38)$$

будет преобразованием Фурье импульсной последовательности.

Установленный здесь факт дает возможность проводить формальную аналогию между спектральными свойствами непрерывных и дискретных сигналов.

Важнейшие свойства z-преобразования. Рассмотрим некоторые свойства z-преобразования.

1. *Линейность.* Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — некоторые дискретные сигналы, причем известны соответствующие z-преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\} = \{\alpha x_k + \beta y_k\}$ будет отвечать преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ при любых постоянных α и β . Доказательство проводится путем подстановки суммы в формулу (15.32).

2. *z-преобразование смещенного сигнала.* Рассмотрим дискретный сигнал $\{y_k\}$, получающийся из дискретного сигнала $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т. е. когда $y_k = x_{k-1}$. Непосредственно вычисляя z-преобразование, получаем следующий результат:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z). \quad (15.39)$$

Таким образом, символ z^{-1} служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации) в z-области.

3. *z-преобразование свертки.* Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные сигналы, для которых определена свертка

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (15.40)$$

Применительно к дискретным сигналам по аналогии с (15.40) принято вводить дискретную свертку $\{f_k\}$ — последовательность чисел, общий член которой

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15.41)$$

Вычислим z-преобразование дискретной свертки:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = X(z) Y(z). \end{aligned} \quad (15.42)$$

Итак, свертке двух дискретных сигналов отвечает произведение z-преобразований.

Перечисленные здесь свойства имеют прямую аналогию со свойствами преобразований Фурье и Лапласа аналоговых сигналов

Подобную дискретную свертку в отличие от круговой иногда называют линейной сверткой

● свойство дискретной свертки

15.4. Цифровые фильтры

В настоящее время широко используются методы обработки радиотехнических сигналов с помощью микроэлектронных вычислительных устройств и систем. В данном параграфе рассматривается простейший, наиболее изученный и внедренный класс систем дискретной обработки сигналов — так называемые *линейные стационарные цифровые фильтры*. Выполняя, подобно аналоговым цепям, операцию частотной фильтрации, цифровые фильтры (ЦФ) обладают рядом существенных преимуществ. Сюда относятся, например, высокая стабильность параметров, возможность получать самые разнообразные формы АЧХ и ФЧХ. Цифровые фильтры не требуют настройки и легко реализуются на ЭВМ программными методами.

Принцип цифровой обработки сигналов. На рис. 15.6 приведена основная структурная схема цифровой обработки сигналов.

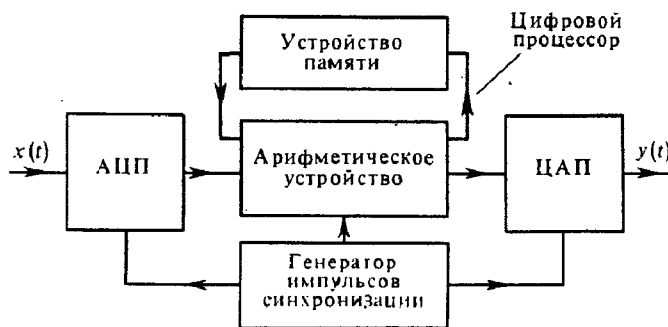


Рис. 15.6. Структурная схема цифровой обработки непрерывных сигналов

●
аналого-цифровой преобразователь

●
цифровой процессор

Непрерывный входной сигнал $x(t)$ поступает в аналого-цифровой преобразователь (АЦП), управляемый синхронизирующими импульсами от генератора, задающего частоту дискретизации. В момент подачи синхронизирующего импульса на выходе АЦП возникает сигнал, отображающий результат измерения мгновенного значения входного колебания в виде двоичного числа с фиксированным количеством разрядов. В зависимости от особенности построения устройства этому числу соответствует либо последовательность коротких импульсов (передача в последовательном коде), либо совокупность уровней напряжений на сигнальных шинах отдельных разрядов (передача в параллельном коде). Преобразованный таким образом сигнал поступает в основной блок устройства, так называемый *цифровой процессор*, состоящий из арифметического устройства и устройства памяти. Арифметическое устройство выполняет над цифрами ряд операций, таких, как умножение, сложение и сдвиг во времени на заданное число интервалов дискретизации. В устройстве памяти может храниться некоторое число предшествующих

отсчетов входного и выходного сигналов, которые необходимы для выполнения операций обработки.

Цифровой процессор преобразует поступающие в него числа в соответствии с заданным алгоритмом фильтрации и создает на выходе последовательность двоичных чисел, представляющих выходной сигнал. Если в дальнейшем необходимо иметь информацию в аналоговой форме, то используется цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП). Однако это устройство может и отсутствовать, если сигналы подвергаются только цифровым преобразованиям.

Основной технический показатель ЦФ — быстродействие — зависит как от скорости протекания переходных процессов в микроэлектронных компонентах, так и от сложности алгоритма фильтрации.

Если в начале 70-х годов предельные частоты сигналов, обрабатываемых с помощью ЦФ, составляли несколько килогерц, то достижения современной микроэлектроники непрерывно расширяют этот диапазон. Цифровая фильтрация сигналов получила новый стимул развития с появлением относительно недорогих и надежных микропроцессоров, а также устройств памяти, выполненных по технологии больших интегральных схем (БИС).

Квантование сигналов в ЦФ. Специфика любого цифрового устройства — представление сигналов в виде последовательности чисел с ограниченной разрядностью. Поэтому мгновенное значение сигнала дискретизируется по уровню таким образом, что интервалом дискретизации (минимальной разностью между двумя соседними уровнями) служит единица младшего двоичного разряда.

Точное значение отсчета сигнала в двоичной форме имеет вид

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}, \quad (15.43)$$

где $\alpha_n = 0$ или 1. При ограничении длины числа x некоторым количеством разрядов N вместо точного значения получается его округленное (машинное) представление:

$$\tilde{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n 2^{-n} + \beta_N 2^{-N}, \quad (15.44)$$

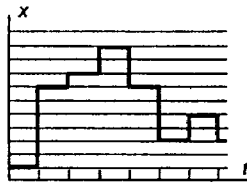
причем коэффициент β_N равен либо α_n , либо $\alpha_n + 1$ в зависимости от того, нуль или единица содержится в $(N + 1)$ -м разряде.

В радиотехнике дискретные сигналы, уровни которых могут принимать лишь счетное множество значений, называют *квантованными сигналами*. Квантование сигналов приводит к специфической погрешности при обработке, которая получила название *шума квантования*. Прямой путь снижения этой погрешности — использование двоичных чисел с большим количеством разрядов. Однако при этом неизбежно снижается быстродействие ЦФ из-за увеличения времени выполнения

●
цифро-аналоговый
преобразователь

●
машинное пред-
ставление чисел в
цифровом фильтре

●
квантованные
сигналы



Квантование уровней находит применение и в аналоговой технике, особенно при создании систем помехоустойчивой импульсной модуляции

операций над многоразрядными числами. Поэтому на практике в микропроцессорных системах для цифровой обработки сигналов и дискретного управления обычно применяют двоичные числа с количеством разрядов от 4 до 16.

Алгоритм линейной цифровой фильтрации. Математическая теория цифровых фильтров переносит на случай дискретных сигналов все основные положения теории линейных систем, преобразующих непрерывные сигналы.

Как известно, линейная стационарная система преобразует непрерывный входной сигнал $x(t)$ таким образом, что на ее выходе возникает колебание $y(t)$, равное свертке функции $x(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (15.45)$$

Линейный цифровой фильтр, по определению, есть дискретная система (физическое устройство или программа для компьютера), которая преобразует последовательность $\{x_k\}$ числовых отсчетов входного сигнала в последовательность $\{y_k\}$ отсчетов выходного сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots), \quad (15.46)$$

или сокращенно

$$\{x_k\} \Rightarrow \{y_k\}.$$

Линейный цифровой фильтр обладает тем свойством, что сумма любого числа входных сигналов, умноженных на произвольные коэффициенты, преобразуется в сумму его откликов на отдельные слагаемые, т. е. из соответствий

$$\{x_k^{(1)}\} \Rightarrow \{y_k^{(1)}\}, \dots, \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{y_k^{(N)}\}$$

следует, что

$$\alpha_1 \{x_k^{(1)}\} + \dots + \alpha_N \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{\alpha_1 y_k^{(1)} + \dots + \alpha_N y_k^{(N)}\} \quad (15.47)$$

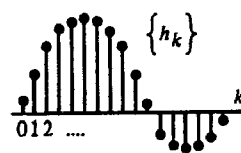
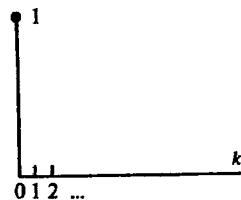
при любых коэффициентах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

Для того чтобы обобщить формулу (15.45) на случай дискретных сигналов, вводят понятие *импульсной характеристики ЦФ*. По определению, она представляет собой дискретный сигнал $\{h_k\}$, который является реакцией ЦФ на «единичный импульс» $(1, 0, 0, 0, \dots)$:

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots). \quad (15.48)$$

Линейный ЦФ стационарен, если при смещении входного единичного импульса на любое число интервалов дискретизации импульсная характеристика смещается таким же образом, не изменяясь по форме. Например:

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0, \dots) &\Rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \dots), \\ (0, 0, 1, 0, \dots) &\Rightarrow (0, 0, h_0, h_1, \dots), \\ &\dots \end{aligned} \quad (15.49)$$



Рассмотрим, каким образом из свойств линейности и стационарности вытекает наиболее общий алгоритм линейной цифровой фильтрации. Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ — некоторый сигнал на входе ЦФ с известной импульсной характеристикой. Используя соотношения (15.47) и (15.49), можно записать m -й отсчет выходного сигнала $\{y_k\}$:

$$y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}. \quad (15.50)$$

Формула (15.50), играющая ведущую роль в теории линейной цифровой фильтрации, показывает, что выходная последовательность есть *дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики фильтра*. Смысл этой формулы прост и нагляден: в момент каждого отсчета ЦФ проводит операцию взвешенного суммирования всех предыдущих значений входного сигнала, причем роль последовательности весовых коэффициентов играют отсчеты импульсной характеристики. Иными словами, ЦФ обладает некоторой «памятью» по отношению к прошлым входным воздействиям.

Практический интерес представляют лишь физически реализуемые ЦФ, импульсная характеристика которых не может стать отличной от нуля в отсчетных точках, предшествующих моменту подачи входного импульса. Поэтому для физически реализуемых фильтров коэффициенты $h_{-1}, h_{-2}, \dots$ обращаются в нуль и суммирование в (15.50) можно распространить на все положительные значения индекса k :

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15.51)$$

Дискретные гармонические последовательности. Как известно, в теории линейных систем особую роль играют комплексные сигналы вида $x(t) = A \exp[j(\omega t + \varphi)]$, отображающие гармонические колебания. При дискретизации такого сигнала по времени получается так называемая *гармоническая последовательность*

$$\{x_k\} = \{A \exp[j(\omega k \Delta + \varphi)]\}, \quad (15.52)$$

такая, что

$$\operatorname{Re} \{x_k\} = \{A \cos(\omega k \Delta + \varphi)\}. \quad (15.53)$$

Следует иметь в виду, что последовательности (15.52) и (15.53) представляют дискретизированные гармонические сигналы неоднозначно. Действительно, эти последовательности не изменятся при замене частоты ω на $\omega + 2\pi n/\Delta = \omega + n\omega_d$, где n — любое целое число, ω_d — угловая частота дискретизации.

Частотный коэффициент передачи ЦФ. Предположим, что на вход линейного стационарного цифрового фильтра подана гармоническая последовательность $\{x_k\}$ вида (15.52), неограниченно протяженная во времени, т. е. с индексом k , прини-

● импульсная характеристика цифрового фильтра

● общий алгоритм цифровой фильтрации

■ принцип физической реализуемости цифрового фильтра

● гармоническая последовательность

● неоднозначный характер дискретного представления гармонических сигналов

Принципиально невозможно отличить два дискретизированных гармонических колебания, разность частот которых находится в целократном отношении с частотой дискретизации

структура выходного сигнала цифрового фильтра

периодический характер частотного коэффициента передачи цифрового фильтра

связь между системной функцией и импульсной характеристикой

мающим значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для того чтобы вычислить выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$, воспользуемся формулой свертки (15.50) и найдем m -й отсчет на выходе:

$$y_m = \sum_{k=-\infty}^m x_k h_{m-k} = A e^{j\varphi} \sum_{k=-\infty}^m e^{j\omega k \Delta} h_{m-k}.$$

Выполнив тождественные преобразования, получим

$$y_m = A e^{j(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{k=-\infty}^m e^{j\omega(k-m)\Delta} h_{m-k}.$$

Введем новый индекс суммирования $n = m - k$. Тогда

$$y_m = A e^{j(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n \Delta} h_n. \quad (15.54)$$

В соответствии с формулой (15.54) выходной сигнал имеет структуру дискретной гармонической последовательности с той же частотой, что и входной сигнал. Выходные отсчеты получаются из входных умножением на комплексную величину

$$K(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n \Delta} h_n, \quad (15.55)$$

называемую *частотным коэффициентом передачи ЦФ*, зависящую от частоты ω , а также от шага дискретизации Δ и от совокупности коэффициентов $\{h_n\}$ импульсной характеристики ЦФ. Формула (15.55) позволяет сделать выводы:

1. Частотный коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$.

2. Функция $K(j\omega)$ есть преобразование Фурье импульсной характеристики ЦФ, представленной в форме последовательности дельта-импульсов:

$$h_d(t) = h_0 \delta(t) + h_1 \delta(t - \Delta) + \dots$$

[ср. с формулой (15.38)].

Системная функция ЦФ. Расчет важнейшей характеристики ЦФ — частотного коэффициента передачи — удобно проводить, используя методы z -преобразований. Сопоставим дискретным сигналам $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{h_k\}$ их z -преобразования $X(z)$, $Y(z)$, $H(z)$ соответственно. Выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$ есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики, поэтому [см. формулы (15.42), (15.50)] выходному сигналу отвечает функция

$$Y(z) = H(z) X(z). \quad (15.56)$$

Системной функцией стационарного линейного ЦФ называют отношение z -преобразования выходного сигнала к z -преобразованию сигнала на входе. Соотношение (15.56) устанавливает, что системная функция фильтра

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}. \quad (15.57)$$

есть z -преобразование импульсной характеристики. Сравнивая выражения (15.55) и (15.57), приходим к следующему выводу: чтобы получить частотный коэффициент передачи ЦФ из его системной функции, в последней нужно сделать подстановку $z = \exp(j\omega\Delta)$.

Пример 15.3. Цифровой фильтр имеет импульсную характеристику, состоящую из двух ненулевых отсчетов: $\{h_k\} = (1, -1, 0, 0, \dots)$. Вычислить частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ фильтра.

Здесь системная функция

$$H(z) = 1 - z^{-1},$$

откуда

$$K(j\omega) = 1 - e^{-j\omega\Delta} = (1 - \cos \omega\Delta) + j \sin \omega\Delta.$$

Уравнение АЧХ фильтра имеет вид

$$|K(j\omega)| = \sqrt{(1 - \cos \omega\Delta)^2 + \sin^2 \omega\Delta} = 2 |\sin(\omega\Delta/2)|,$$

в то время как ФЧХ описывается выражением

$$\varphi_K(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega\Delta}{1 - \cos \omega\Delta} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\Delta}{2}.$$

▲

решите задачу 8

Амплитудно-частотная характеристика фильтра является периодической функцией, но практически она имеет смысл лишь в интервале частот от 0 до $\omega = \pi/\Delta$. На верхней частоте этого интервала каждому периоду дискретизированного гармонического сигнала соответствуют два отсчета. По теореме Котельникова, это есть предельное значение частоты сигнала, который может быть однозначно восстановлен по своим отсчетам.

Заметим, что если на вход такого фильтра поступает гармонический сигнал с частотой, значительно более низкой, чем частота дискретизации, так что $\omega\Delta \ll 1$, то

$$K(j\omega) \approx [1 - 1/2 (\omega\Delta)^2 - \dots] + j [\omega\Delta - 1/6 (\omega\Delta)^3 + \dots] \approx j\omega\Delta.$$

Поэтому такая система приближенно выполняет операцию дифференцирования относительно медленных входных сигналов.

15.5. Реализация алгоритмов цифровой фильтрации

Физически осуществимые ЦФ, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в i -й дискретный момент времени могут использовать следующие данные: а) значение входного сигнала в момент i -го отсчета, а также некоторое число «прошлых» входных отсчетов $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$; б) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$. Целые числа m и n определяют порядок ЦФ. Классификация ЦФ проводится по-разному в зависимости от того, как используется информация о прошлых состояниях системы.

Трансверсальные ЦФ. Так принято называть фильтры, которые работают в соответствии с алгоритмом

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m}, \quad (15.58)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ — последовательность коэффициентов.

●
порядок цифрового
фильтра

Число m является порядком трансверсального цифрового фильтра. Как видно из формулы (15.58), трансверсальный фильтр проводит взвешенное суммирование предшествующих отсчетов входного сигнала и не использует прошлые отсчеты выходного сигнала. Применяв z -преобразование к обеим частям выражения (15.58), убеждаемся, что

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) X(z).$$

Отсюда следует, что системная функция

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} = \\ &= \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{z^m} \end{aligned} \quad (15.59)$$

■
вид системной функции трансверсального цифрового фильтра

является дробно-рациональной функцией z , имеющей m -кратный полюс при $z=0$ и m нулей, координаты которых определяются коэффициентами фильтра.

Алгоритм функционирования трансверсального ЦФ поясняется структурной схемой, приведенной на рис. 15.7.

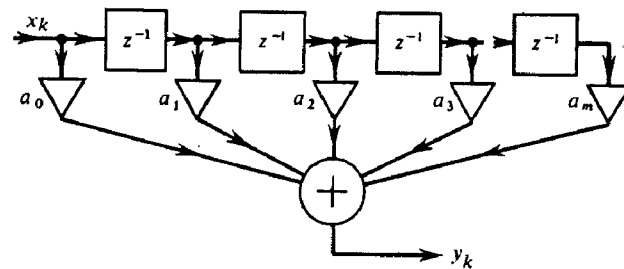


Рис. 15.7. Схема построения трансверсального ЦФ

В цифровом процессоре операция задержки выполняется особым блоком — так называемым регистром сдвига

Основными элементами фильтра служат блоки задержки отсчетных значений на один интервал дискретизации (прямоугольники с символами z^{-1}), а также масштабные блоки, выполняющие в цифровой форме операции умножения на соответствующие коэффициенты. С выходов масштабных блоков сигналы поступают в сумматор, где, складываясь, образуют отсчет выходного сигнала.

Вид представленной здесь схемы объясняет смысл термина «трансверсальный фильтр» (от англ. *transverse* — поперечный).

Программная реализация трансверсального ЦФ. Следует иметь в виду, что структурная схема, изображенная на рис. 15.7, не является принципиальной схемой электрической цепи, а служит лишь графическим изображением алгоритма обработки сигнала. Используя средства языка ФОРТРАН, рассмотрим фрагмент программы, реализующей трансверсальную цифровую фильтрацию.

Пусть в оперативной памяти компьютера образованы два одномерных массива длиной M ячеек каждый: массив с именем X , в котором хранятся значения входного сигнала, и массив с именем A , содержащий значения коэффициентов фильтра.

Содержимое ячеек массива X меняется каждый раз с получением нового отсчета входного сигнала. Предположим, что

этот массив заполнен предыдущими отсчетами входной последовательности, и рассмотрим ситуацию, возникающую в момент прихода очередного отсчета, которому в программе присвоено имя S . Данный отсчет должен разместиться в ячейке с номером 1, но лишь после того, как предыдущая запись будет сдвинута на одну позицию вправо, т. е. в сторону запаздывания.

Элементы сформированного таким образом массива X почленно умножаются на элементы массива A и результат заносится в ячейку с именем Y , где накапливается отсчетное значение выходного сигнала. Ниже приводится текст программы трансверсальной цифровой фильтрации:

```

DO1 K = 1, M - 1
1  X(M - K + 1) = X(M - K)
   X(1) = S
C   МАССИВ X СФОРМИРОВАН
   Y = 0.
DO2 K = 1, M
2  Y = Y + X(K) * A(K)

```

Предполагается, что отсчеты входного сигнала и коэффициенты фильтра представляются вещественными числами

Импульсная характеристика. Вернемся к формуле (15.59) и вычислим импульсную характеристику трансверсального ЦФ, осуществив обратное z -преобразование. Легко видеть, что каждое слагаемое функции $H(z)$ дает вклад, равный соответствующему коэффициенту a_n , смещенному на n позиций в сторону запаздывания. Таким образом, здесь

$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (15.60)$$

К такому выводу можно прийти и непосредственно, рассматривая структурную схему фильтра (см. рис. 15.7) и полагая, что на его вход подан «единичный импульс» (1, 0, 0, 0, ...).

Важно отметить, что импульсная характеристика трансверсального фильтра содержит конечное число членов.

Частотная характеристика. Если в формуле (15.59) провести замену переменной $z = \exp(j\omega\Delta)$, то получим частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-j2\omega\Delta} + \dots + a_m e^{-jm\omega\Delta}. \quad (15.61)$$

При заданном шаге дискретизации Δ можно реализовать самые разнообразные формы АЧХ, подбирая должным образом весовые коэффициенты фильтра.

■ вид импульсной характеристики трансверсального цифрового фильтра

Говорят, что подобный фильтр выполняет операцию «сглаживания тройками»

Пример 15.4. Исследовать частотные характеристики трансверсального цифрового фильтра 2-го порядка, выполняющего усреднение текущего значения входного сигнала и двух предшествующих отсчетов по формуле

$$y_i = 1/3 (x_i + x_{i-1} + x_{i-2}). \quad (15.62)$$

Системная функция этого фильтра

$$H(z) = 1/3 (1 + z^{-1} + z^{-2}),$$

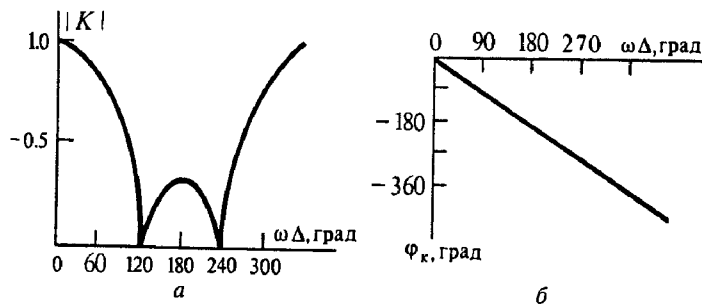


Рис. 15.8. Частотные характеристики трансверсального ЦФ из примера 15.4:
а – АЧХ; б – ФЧХ

откуда находим частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{1}{3} (1 + e^{-j\omega\Delta} + e^{-j2\omega\Delta}) = \\ = \frac{1}{3} [(1 + \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta) - j(\sin \omega\Delta + \sin 2\omega\Delta)].$$

Элементарные преобразования приводят к следующим выражениям для АЧХ и ФЧХ данной системы:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{3} \sqrt{3 + 4 \cos \omega\Delta + 2 \cos 2\omega\Delta}, \\ \varphi_K(\omega) = -\arctg \frac{\sin \omega\Delta + \sin 2\omega\Delta}{1 + \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta} = -\omega\Delta.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 15.8, а, б, где по горизонтальным осям отложена величина $\omega\Delta$ – фазовый угол интервала дискретизации при текущем значении частоты.

Предположим, например, что $\omega\Delta = 60^\circ$, т. е. на один период гармонического входного колебания приходится шесть отсчетов. При этом входная последовательность будет иметь вид

$$\dots, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots$$

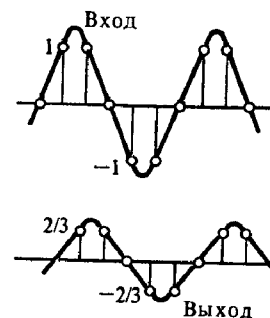
(абсолютные значения отсчетов не играют роли, поскольку фильтр линейен). Используя алгоритм (15.62), находим выходную последовательность:

$$\dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \dots$$

Можно заметить, что ей отвечает гармонический выходной сигнал той же частоты, что и на входе, с амплитудой, равной $\frac{2}{3} = 0.66$ от амплитуды входного колебания и с начальной фазой, смещенной на 60° в сторону запаздывания.

При $\omega\Delta < 120^\circ$ рассматриваемый фильтр сглаживает входную последовательность и может играть роль ФНЧ. Однако частотная характеристика фильтра периодична и немонотонна. Если исходный аналоговый сигнал не был подвергнут предварительной частотной фильтрации и в нем присутствуют составляющие, для которых $\omega\Delta > 180^\circ$ (условия теоремы Котельникова не выполняются), то они не будут ослабляться данным ЦФ. Более того, из-за наличия высокочастотных составляющих цифро-аналоговый преобразователь восстановит некоторое низкочастотное колебание, которое совсем не содержалось во входном сигнале. Это паразитное явление (эффект «наложения» или «маскировки» высокочастотных составляющих спектра) в принципе присуще любым дискретным системам. Оно заставляет уделять серьезное внимание предварительной обработке сигнала, подвергаемого цифровой фильтрации.

▲
решите задачу 9



●
эффект наложения