

А.Н. ЯКОВЛЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ В ПРИМЕРАХ, УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАНИЯХ

Рекомендовано Сибирским региональным отделением
Учебно-методического объединения высших учебных заведений РФ
по образованию в области радиотехники, электроники,
биомедицинской техники и автоматизации
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов
радиотехнических направлений и специальностей

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 621.372(075.8)
Я 474

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *С.П. Новицкий* (НГТУ);
д-р техн. наук, проф. *В.П. Разинкин* (НГТУ);
д-р техн. наук, проф. *А.К. Дмитриев* (НГТУ);
канд. техн. наук, д-р электротехники *С.Ю. Матвеев*
(директор ООО «НПО-Триада-ТВ»);
канд. техн. наук, проф. *Б.И. Филиппов* (зав. каф. радиотехнических систем
Сибирского гос. ун-та телекоммуникаций и информатики – СибГУТИ);
д-р техн. наук, проф. *В.Г. Патюков* (каф. радиотехники ИИФирЭ ФГАОУ ВПО
«Сибирский федеральный университет»)

Яковлев А.Н.

Я 474 Основы теории сигналов в примерах, упражнениях и заданиях : учеб. пособие / А.Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 472 с.

ISBN 978-5-7782-1995-3

Пособие содержит 16 глав по основополагающим разделам теории сигналов: сигналы и их основные характеристики, динамическое, корреляционное и геометрическое представления сигналов, представление сигналов ортогональными функциями (Радемахера, Уолша, рядами Фурье и Котельникова и др.), спектральное представление периодических и непериодических сигналов (преобразования Фурье и Лапласа), вейвлет-преобразования сигналов, модулированные сигналы и случайные процессы, дискретные сигналы, дискретное и быстрое преобразования Фурье и вейвлет-преобразования последовательностей, кепстральный анализ и др.

В каждой из 16 глав даны краткие теоретические сведения (определения, расчетные формулы и т.п.) в объеме, необходимом для решения приводимых примеров и упражнений. Затем предложены примеры и упражнения (с ответами) для закрепления теоретического материала и выработки навыков творческого мышления, переноса знаний на решение более сложных ситуаций. Книга содержит 132 примера и 252 упражнения (с ответами). Далее почти по каждой теме следует задание, которое может быть составной частью расчетно-графической и/или курсовой работы и содержит от 1 до 3 задач, составленных в 10 вариантах и 10 подвариантах. В качестве средства создания иллюстрационных примеров использованы широко распространенные системы компьютерной математики: Mathcad и MATLAB.

В приложении представлен обширный справочный материал.

Предлагаемое пособие, в котором обобщен многолетний опыт автора, предназначено для практических и самостоятельных занятий, для расчетно-графических заданий, для контроля знаний и умений, а также для занятий в рамках модульно-рейтинговой системы образования и может быть полезно студентам и преподавателям радиотехнических специальностей и лицам, занимающимся самообразованием (или в системе дистанционного обучения).

УДК 621.372(075.8)

ISBN 978-5-7782-1995-3

© Яковлев А.Н., 2012
© Новосибирский государственный
технический университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений	15
Предисловие	17
ВВЕДЕНИЕ	19
В.1. Общие сведения	19
В.2. Классификация сигналов.....	21
В.3. Структурная схема ЦОС	27
<i>Глава 1. СИГНАЛЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ</i>	29
1.1. Краткие теоретические сведения	29
1.1.1. Модель сигнала	29
1.1.2. Некоторые физические характеристики	30
1.1.3. Энергетические характеристики сигнала.....	33
1.2. Примеры	35
1. Гармоническое колебание.....	35
2. Единичная функция	36
3. Дельта-функция.....	38
4. Прямоугольный импульс.....	40
5. Сигнум-функция	41
6. Энергия и мощность гармонического колебания за период	41
7. Энергия бигармонического сигнала.....	42
8. Телевизионный сигнал изображения	42
1.3. Упражнения.....	43
1.3.1. Модели сигналов.....	43
1.3.2. Характеристики сигналов.....	45
1.4. Задание. Модель и основные характеристики сигнала	46
<i>Глава 2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ</i>	49
2.1. Краткие теоретические сведения	49
2.1.1. Представление с помощью функций включения	49
2.1.2. Представление с помощью дельта-функций	51
2.2. Примеры	52
1. Линейно нарастающее напряжение.....	52
2. Прямоугольный импульс.....	53
3. Производная прямоугольного импульса.....	53
4. Сигнал линейного перехода из состояния 0 в состояние U_0	53
5. Нарастающая экспонента	54
6. Фильтрующее действие дельта-функции на экспоненциальный сигнал.....	54

2.3. Упражнения.....	55
2.4. Задание. Динамическое представление импульсного сигнала.....	56
Глава 3. КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ	57
3.1. Краткие теоретические сведения	57
3.1.1. АКФ непериодического сигнала и ее свойства	57
3.1.2. АКФ периодического сигнала и ее свойства	60
3.1.3. ВКФ непериодического сигнала и ее свойства	61
3.1.4. ВКФ периодического сигнала и ее свойства	62
3.2. Примеры	62
1. АКФ прямоугольного импульса	62
2. АКФ пары импульсов	64
3. АКФ гармонического колебания	65
4. АКФ периодической последовательности прямоугольных импульсов	66
5. ВКФ двух прямоугольных импульсов	66
6. ВКФ прямоугольного и несимметричного треугольного импульсов	67
7. ВКФ двух несимметричных треугольных импульсов	69
8. ВКФ двух гармонических колебаний	69
3.3. Упражнения.....	70
3.4. Задание. Корреляционное представление сигналов.....	72
Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ	73
4.1. Краткие теоретические сведения	73
4.1.1. Пространство сигналов.....	73
4.1.2. Линейное пространство	75
4.1.3. Нормированное пространство.....	75
4.1.4. Метрическое пространство	76
4.1.5. Пространство со скалярным произведением.....	77
4.2. Примеры	79
1. Множество сигналов с ограничением их амплитуды.....	79
2. Энергия и норма косинусоидального импульса.....	79
3. Метрика двух сигналов	80
4. Минимальное расстояние между сигналами.....	81
5. Скалярное произведение двух импульсов	81
4.3. Упражнения.....	82
Глава 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ.....	85
5.1. Краткие теоретические сведения	85
5.1.1. Обобщенный ряд Фурье	85
5.1.2. Спектральный анализ	86

5.1.3. Синтез сигналов	87
5.1.4. Выбор рациональной системы функций	88
5.1.5. Функции Уолша и Радемахера.....	89
5.1.6. Ортогональные системы специальных функций	93
5.2. Примеры	94
5.2.1. Ортогональные функции	94
1. Гармонические базисные функции	94
2. Комплексные экспоненциальные функции	94
3. Формирование ФУ с помощью матриц Адамара.....	95
4. Перемножение ФУ.....	96
5. Формирование ФУ с помощью функций Радемахера	96
5.2.2. Анализ и синтез сигналов в базисе функций Радемахера и Уолша	97
6. Аппроксимация сигнала функциями Радемахера	97
7. Спектр гармонического сигнала в базисе ФУ	99
8. Синтез гармонического сигнала в базисе ФУ	101
5.2.3. Синтез (аппроксимация) сигнала в базисе функций Лагерра.....	102
9. Аппроксимация импульсного сигнала.....	102
5.3. Упражнения.....	104
5.3.1. Представление сигналов в базисе функций Радемахера	104
5.3.2. Функции Уолша	105
5.3.3. Представление сигналов в базисе функций Уолша	105
5.3.4. Представление сигналов в базисе функций Лежандра и Лагерра	108
5.4. Задание. Представление сигнала в базисе функций Уолша	109
<i>Глава 6. ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. РЯД ФУРЬЕ</i>	<i>111</i>
6.1. Краткие теоретические сведения	111
6.1.1. Гармонические базисные функции.....	111
6.1.2. Формы ряда Фурье.....	113
6.1.3. Распределение мощности в спектре сигнала.....	116
6.1.4. Задачи анализа и синтеза.....	117
6.2. Примеры	118
1. Гармоническое колебание.....	118
2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.....	120
3. Меандр и его спектр	122
4. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, представленной рядом Фурье в комплексной форме.....	124
5. Синтез периодической последовательности прямоугольных импульсов	124
6. Пилообразный сигнал.....	127

7. Последовательность треугольных импульсов.....	129
6.3. Упражнения.....	130
<i>Глава 7. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА.....</i>	<i>133</i>
7.1. Краткие теоретические сведения	133
7.1.1. Преобразования Фурье	133
7.1.2. Энергетический спектр сигнала и его связь с АКФ.....	137
7.1.3. Определение активной длительности сигнала и ширины его спектра	139
7.1.4. Преобразования Лапласа	141
7.2. Примеры	142
7.2.1. Спектральная плотность интегрируемых сигналов	142
1. Прямоугольный импульс	142
2. Экспоненциальный импульс	144
3. Колокольный (гауссовский) импульс	145
4. Импульс вида $\sin(x)/x$	146
5. Спектр пары импульсов прямоугольной формы.....	148
6. «Пачка» импульсов.....	150
7. Симметричный треугольный импульс.....	151
8. Затухающее гармоническое колебание.....	153
9. Свертка сигналов. Связь с ВКФ	154
7.2.2. Спектральная плотность неинтегрируемых сигналов	157
10. Функция включения (Хевисайда).....	157
11. Дельта-функция (Дирака).....	159
12. Гармоническое колебание	159
13. Постоянное напряжение	160
14. Комплексная экспонента.....	160
15. Периодический сигнал	161
7.2.3. Преобразования Лапласа	161
16. Изображение функций Хевисайда и Дирака	161
17. Изображение прямоугольного импульса	162
18. Определение оригинала по изображению	162
7.3. Упражнения.....	163
7.3.1. Спектральный анализ и синтез сигналов	163
7.3.2. Спектр, АКФ и свертка сигналов	167
7.3.3. Преобразования Лапласа	168
7.4. Задание. Спектральный анализ сигналов	169

<i>Глава 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ</i>	
РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА	171
8.1. Краткие теоретические сведения	171
8.1.1. Ряд и теорема Котельникова	171
8.1.2. Базисные функции и их свойства	172
8.1.3. Коэффициенты ряда Котельникова. Спектральный анализ	174
8.1.4. База, энергия и мощность сигнала, ошибка аппроксимации	175
8.1.5. Дискретизация непрерывных сигналов	177
8.1.6. Связь между спектрами непрерывных и дискретных сигналов	179
8.1.7. Восстановление непрерывного сигнала	181
8.1.8. Теорема отсчетов в частотной области	183
8.2. Примеры	185
1. Гармоническое колебание	185
2. Бигармонический сигнал	187
3. Прямоугольный видеоимпульс	188
4. Экспоненциальный импульс	191
8.3. Упражнения	193
8.4. Задание. Представление сигналов рядом Котельникова	196
<i>Глава 9. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ</i>	197
9.1. Краткие теоретические сведения	197
9.1.1. Вейвлеты. Главные признаки	197
9.1.2. Примеры материнских вейвлетов	200
9.1.3. Непрерывное вейвлет-преобразование	202
9.1.4. Свойства вейвлет-анализа	203
9.1.5. Сопоставление с преобразованием Фурье	205
9.2. Примеры	207
9.2.1. Определение вейвлет-спектра в системе Mathcad	207
1. Гармоническое колебание	208
2. Сумма двух гармонических колебаний	209
3. Прямоугольный импульс	212
9.2.2. Вейвлет-анализ в системе MATLAB	213
4. Гармоническое колебание	214
5. Сумма двух гармонических колебаний	215
6. Бигармонический импульсный сигнал с шумом	216
7. Прямоугольный импульс с шумом	217
8. Звуковой сигнал	218
9. Доступ к демонстрационным примерам	219
10. Треугольный сигнал (демонстрационный)	220

9.3. Задания	221
9.3.1. Вейвлет-анализ в пакете Mathcad на основе МНАТ-вейвлета.....	221
9.3.2. Вейвлет-представление в пакете MATLAB.....	222
<i>Глава 10. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ</i>	<i>225</i>
10.1. Краткие теоретические сведения	225
10.1.1. Общие сведения	225
10.1.2. Амплитудно-модулированное колебание (АМК)	227
10.1.3. Сигналы угловой модуляции	231
10.1.4. Узкополосные, комплексные и аналитические сигналы	237
10.2. Примеры	241
10.2.1. Амплитудно-модулированный сигнал (АМС)	241
1. Спектр многокомпонентного АМС.....	241
2. Спектр АМС непериодического (импульсного) сигнала	242
3. Автокорреляционная функция АМК.....	243
4. АКФ импульсного АМС.....	245
10.2.2. Сигнал угловой модуляции (УМС)	246
5. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией	246
6. АКФ ЛЧМ-импульса	247
7. Преобразования Гильберта для гармонических колебаний.....	248
10.3. Упражнения.....	249
10.3.1. Амплитудно-модулированные сигналы.....	249
10.3.2. Сигналы с угловой модуляцией.....	252
10.3.3. ЛЧМ-импульсы	254
10.3.4. Комплексные и аналитические сигналы	255
10.4. Задания	256
10.4.1. Амплитудно-модулированное колебание	256
10.4.2. Последовательность прямоугольных радиоимпульсов	258
10.4.3. Частотно-модулированное колебание.....	259
<i>Глава 11. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ</i>	<i>261</i>
11.1. Краткие теоретические сведения	261
11.1.1. Вероятностное описание СП.....	261
11.1.2. Моментные функции. Стационарные и эргодические процессы	266
11.1.3. Корреляционно-спектральное представление СП	269
11.2. Примеры	274
11.2.1. Параметры и характеристики СП в сечении.....	274
1. Определение вероятности событий.....	274
2. Математическое ожидание и дисперсия экспоненциального распределе- ния.....	274

3. Характеристическая функция и энтропия равномерного закона	275
4. Определение моментов СП по кумулянтным функциям	276
5. ПРВ функции случайной величины	277
6. Функциональное преобразование СП	278
11.2.2. Различные СП	279
7. Гармоническое колебание со случайной начальной фазой	279
8. Производная от эргодического СП.	281
9. Узкополосный СП	282
10. Распределение огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного нормального шума	284
11.3. Упражнения	287
11.3.1. Вероятностные характеристики в сечении	287
11.3.2. Характеристические функции. Энтропия	291
11.3.3. Моментные функции. Стационарные и эргодические процессы	292
11.3.4. Спектральный и корреляционный анализ	294
11.3.5. Узкополосные случайные процессы	294
11.4. Задания	296
11.4.1. Вероятность превышения заданного уровня	296
11.4.2. Закон распределения	297
11.4.3. Моментные функции. Стационарность и эргодичность	299
<i>Глава 12. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ</i>	301
12.1. Краткие теоретические сведения	301
12.1.1. Общие сведения	301
12.1.2. Оценка числовых характеристик	302
12.1.3. Оценка плотности вероятности	304
12.1.4. Оценка АКФ	305
12.1.5. Оценка СПМ	306
12.1.6. Вычисления в пакете Mathcad	307
12.2. Примеры	307
1. Числовые характеристики последовательности	307
2. То же, но с использованием встроенных функций Mathcad	309
3. Расчет и построение гистограммы	309
4. Вычисление АКФ	312
5. Вычисление СПМ	313
6. АКФ и СПМ коррелированной последовательности	313
7. Корреляционная функция и СПМ двух коррелированных последова- тельств	316

12.3. Задание. Определение основных характеристик случайной последовательности	317
<i>Глава 13. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ</i>	319
13.1. Краткие теоретические сведения	319
13.1.1. Способы представления дискретных сигналов	319
13.1.2. Преобразования Фурье и Лапласа	322
13.1.3. Z-преобразование	323
13.2. Примеры	329
1. Единичный дискретный скачок	329
2. Экспоненциальная дискретная последовательность	331
3. Косинусоидальная последовательность	332
4. Свертка последовательностей	332
5. Вычисление ОЗП с использованием теоремы Коши	333
6. Определение ОЗП разложением Z-образа в степенной ряд	334
7. Вычисление $x[n]$ с помощью вычетов	334
8. Вычисление ОЗП разложением функции $X(z)$ на простые дроби	335
9. Нахождение последовательности делением числителя ее Z-образа на знаменатель	336
13.3. Упражнения	337
13.3.1. Дискретная последовательность. Преобразования Фурье и Лапласа	337
13.3.2. Прямое Z-преобразование	337
13.3.3. Обратное Z-преобразование	339
<i>Глава 14. ДИСКРЕТНОЕ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ</i>	341
14.1. Краткие теоретические сведения	341
14.1.1. Дискретное преобразование Фурье	341
14.1.2. Восстановление аналогового сигнала по ДПФ	345
14.1.3. Быстрое преобразование Фурье	346
14.1.4. Вычисление БПФ в пакете Mathcad	349
14.1.5. MATLAB для вычислений БПФ	349
14.2. Примеры	350
14.2.1. Вычисление ДПФ	350
1. Экспоненциальная дискретная последовательность	350
2. Вычисление коэффициентов ДПФ	352
3. Выполнение обратного ДПФ	353
14.2.2. Вычисление БПФ в пакете Mathcad	353
4. Прямое и обратное БПФ для векторов	353
5. Синусоида как вектор	354

6. Сумма трех синусоидальных составляющих	355
7. Разложение и последующий синтез прямоугольного импульса	356
14.2.3. Вычисление БПФ в пакете MATLAB	357
8. Прямое и обратное БПФ для векторов.....	357
9. Сумма трех синусоид.....	358
10. АМК на фоне шума.....	358
11. Прямоугольный импульс. Добавление нулей к набору отсчетов.....	360
14.3. Упражнения.....	362
14.3.1. Вычисления ДПФ.....	362
14.3.2. Вычисления БПФ	363
14.4. Задание. Дискретные сигналы. Прямое и обратное БПФ	364
<i>Глава 15. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ</i>	<i>367</i>
15.1. Краткие теоретические сведения	367
15.1.1. Диадное вейвлет-преобразование.....	367
15.1.2. Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП)	369
15.2. Примеры	370
15.2.1. ДВП в пакете Mathcad	370
1. Прямоугольный импульс с шумом.....	370
2. Вейвлет-фильтрация бигармонического импульсного сигнала с шумом.....	375
15.2.2. ДВП в пакете MATLAB.....	377
3. Бигармонический импульсный сигнал с шумом.....	377
4. Звуковой сигнал	379
<i>Глава 16. КЕПСТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ.....</i>	<i>381</i>
16.1. Краткие теоретические сведения	381
16.1.1. Комплексный кепстр.....	381
16.1.2. Кепстр мощности (энергетический кепстр).....	383
16.1.3. Кепстральный анализ.....	384
16.2. Примеры	384
1. Кепстр дельта-импульса.....	384
2. Кепстр дискретного прямоугольного импульса.....	384
3. Комплексный кепстр АМК	386
4. Комплексный кепстр свертки двух сигналов	386
5. «Развертка» свернутых сигналов.....	387
6. Анализ речевого сигнала [1].	388
7. Определение задержки сигналов.....	389
8. Влияние шума	391
9. Статистические свойства кепстра	393

16.3. Упражнения.....	395
16.3.1. Комплексный кепстр.....	395
16.3.2. Кепстр мощности. Кепстральный анализ	396
ОТВЕТЫ	397
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	434
П.1. Некоторые тригонометрические формулы.....	434
П.2. Производные элементарных функций	435
П.3. Некоторые интегралы.....	436
П.4. Некоторые специальные полиномы и функции, используемые для пред- ставления сигналов обобщенным рядом Фурье	440
П.5. Основные теоремы о спектрах	444
П.6. Об активной длительности и ширине спектра импульсного сигнала.....	444
П.7. Связь между изображением по Лапласу и оригиналом	446
П.8. Изображение и спектральная плотность некоторых сигналов	448
П.9. Функции Бесселя	453
П.10. Законы распределения.....	455
П.11. Функции формирования и обработки случайных последовательностей в пакете Mathcad [7, 30, 31].....	464
П.12. Команды и функции пакета WAVELET TOOLBOX MATLAB	466
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	469

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

А	– антенна	ОСП	– отношение сигнал/помеха
АИМ	– амплитудно-импульсная модуляция	ОСШ	– отношение сигнал/шум
АКФ	– автокорреляционная функция	ПВ	– плотность вероятности
АМ	– амплитудная модуляция	ПИ	– получатель информации
АМК	– амплитудно-модулированное колебание	ПНВП	– прямое непрерывное вейвлет-преобразование
АМС	– амплитудно-модулированный сигнал	ППФ	– прямое преобразование Фурье
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика	ПРФ	– плотность распределения вероятностей
АЦП	– аналого-цифровой преобразователь	ПС	– перемножитель сигналов
БВП	– быстрое вейвлет-преобразование	ПФ	– преобразование Фурье
БПФ	– быстрое преобразование Фурье	РТЦиС	– радиотехнические цепи и сигналы
ВКФ	– взаимная корреляционная функция	СВ	– случайная величина
ВП	– вейвлет-преобразование	СВЧ	– сверхвысокие частоты
ВСПЭ	– взаимная спектральная плотность энергии	СКО	– среднеквадратическое отклонение
ВЧ	– высокая частота	СП	– случайный процесс
Г	– генератор	СПИ	– система передачи информации
ГНЧ	– генератор несущей частоты	СПМ	– спектральная плотность мощности
Д	– дискретизация, дискретизатор	СПЭ	– спектральная плотность энергии
ДВП	– дискретное вейвлет-преобразование	УКВ	– ультракороткие волны
ДК	– декодер	УМК	– колебание угловой модуляции
ДМ	– демодулятор	УМС	– сигнал угловой модуляции
ДПФ	– дискретное преобразование Фурье	Ф	– фильтрация, фильтр
ИГ	– импульсный генератор	ФМ	– фазовая модуляция
ИИ	– источник информации	ФМК	– фазомодулированное колебание
ИКМ	– импульсно-кодовая модуляция	ФМС	– фазомодулированный сигнал
ИМ	– импульсный модулятор	ФНЧ	– фильтр нижних частот
ИУ	– избирательный усилитель	ФР	– функция Радемахера
К	– кодирование, кодер	ФРВ	– функция распределения вероятностей
КВ	– квантование, квантователь	ФУ	– функция Уолша
КИМ	– кодово-импульсная модуляция	ФЧХ	– фазочастотная характеристика

ЛЧМ	– линейно-частотная модуляция	ЦАП	– цифроаналоговый преобразователь
М	– модуляция, модулятор	ЦК	– цифровое кодирование
НВП	– непрерывное вейвлет-преобразование	ЦОС	– цифровая обработка сигналов
ОДПФ	– обратное ДПФ	ЦФ	– цифровой фильтр
ОПФ	– обратное преобразование Фурье	ЧМ	– частотная модуляция
ОНВП	– обратное непрерывное вейвлет-преобразование	ЧМК	– частотно-модулированное колебание
		ЧМС	– частотно-модулированный сигнал

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры, упражнения и задания по «Основам теории сигналов» – одному из важнейших разделов таких курсов, как «Радиотехнические цепи и сигналы», «Основы теории цепей и сигналов», «Теоретические основы радиотехники», «Основы радиотехники», «Теория передачи сигналов», «Теория электрической связи», и другим, включающим в свою программу теорию детерминированных и случайных процессов, модулированных, дискретных и цифровых сигналов и др. Оно восполняет недостаток учебной литературы по практическим и расчетно-графическим работам для указанных дисциплин.

Пособие состоит из основной части, ответов, приложений и библиографии.

Основная часть включает 16 глав, в каждой из которых даны краткие теоретические сведения (определения, обозначения, расчетные формулы и пояснения) в объеме, необходимом для решения рассматриваемых примеров и упражнений. Приведены примеры и предложены упражнения для закрепления теоретического материала и выработки навыков творческого мышления, использования знаний в более сложных ситуациях. Почти по каждой теме следует задание, которое может быть составной частью расчетно-графической и/или курсовой работы, содержит от 1 до 3 задач и используется для аттестации знаний и умений студентов. Задачи составлены в 10 вариантах, каждый из которых, в свою очередь, включает в себя 10 подвариантов. В качестве средства создания иллюстрационных примеров использованы широко распространенные системы компьютерной математики: Mathcad и MATLAB.

Наряду с традиционными включены новые разделы, такие как непрерывное, дискретное и быстрое вейвлет-преобразования, кепстральное представление сигналов. Материал подготовлен с использованием современных методик инженерных расчетов. Автор стремился к изложению материала в лаконичной и доступной форме, но с сохранением высокого научного и должного методического уровня. Большое количество иллюстраций, типовых решений, приме-

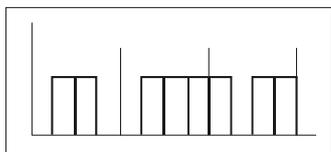
ров, упражнений (подкрепленных ответами) и заданий направлено на глубину освоения теории сигналов и качество обучения.

В приложениях представлен обширный справочный материал (формулы, таблицы, графики), облегчающий и ускоряющий решение упражнений и заданий.

В пособии обобщены многолетний опыт автора и материалы других работ. Книга написана на основе практических занятий, курсовых и дипломных работ по теории сигналов. Однако круг вопросов был расширен, а число примеров и упражнений в несколько раз увеличено. Всего книга содержит 132 примера, 252 упражнения (с ответами) и 13 заданий по 9 темам.

Автор выражает благодарность рецензентам профессорам: С.П. Новицкому, В.П. Разинкину и А.К. Дмитриеву (НГТУ), Б.И. Филиппову (СибГУТИ), В.Г. Патюкову (ИИФиРЭ ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»); канд. техн. наук, доктору электротехники С.Ю. Матвееву (директору ООО «НПО-Триада-ТВ») за сделанные критические замечания и полезные советы.

ВВЕДЕНИЕ



О, сколько нам открытий чудных
Готовят просвещения дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений парадоксов друг...

Александр Пушкин

В.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Потоки информации для деятельности современного общества в различных областях непрерывно нарастают. Наша жизнь уже немыслима без таких телекоммуникационных систем, как Интернет, мобильная и спутниковая связь, связь с космическими аппаратами, локация, телеизмерение и управление на расстоянии и т. п.

Когда говорят об *информации*, то имеют в виду совокупность *сведений* о некотором событии или состоянии какой-либо системы. Форма представления информации – *сообщение* – может быть весьма различной: речь, музыка, текст, цифровые данные, неподвижное (фототелеграмма) и подвижное (телевидение) изображение, команды в системах телеуправления, эхосигналы от цели в локации и т. п.

Структурная схема простейшей системы передачи информации (СПИ) или системы связи показана на рис. В.1. Она содержит источник информации (ИИ), передатчик, линию связи (среду распространения), приемник и получатель информации (ПИ), источники помех. Канал передачи информации (КПИ), или иначе канал связи, – это совокупность технических средств между ИИ и ПИ.

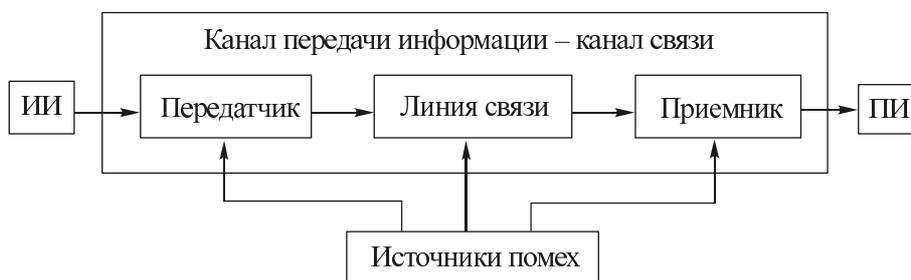


Рис. В.1

Для передачи сообщений от источника к получателю используются *сигналы* – физические процессы, отображающие сообщения в процессе передачи и приема.

Структурные схемы передающей (а) и приемной частей (б) радиотехнической СПИ приведены на рис. В.2.

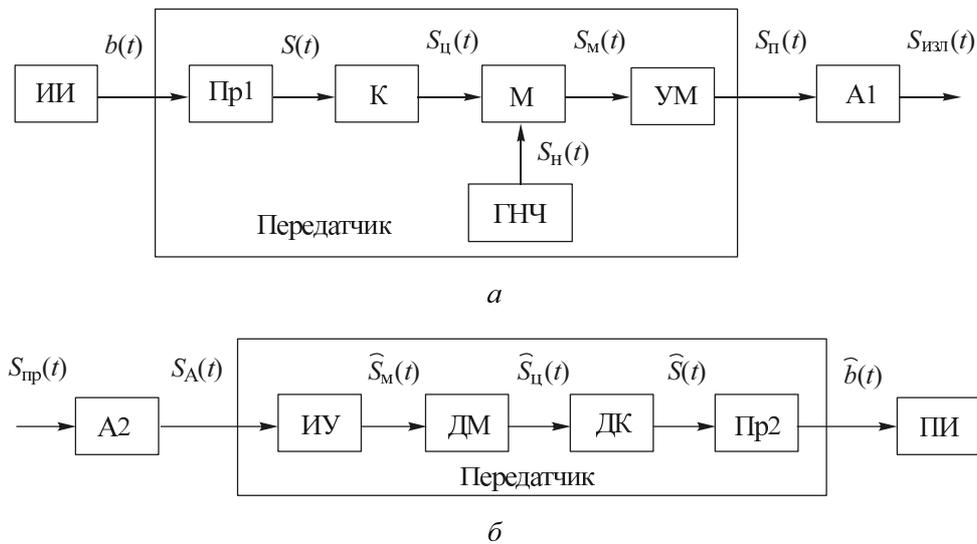


Рис. В.2

Источник информации ИИ порождает сообщение $b(t)$, которое преобразуется в преобразователе Пр1 (микрофон – в радиовещании, видеочамера – в телевидении) в первичный электрический сигнал $S(t)$, далее в кодере К этот сигнал превращается в цифровой $S_{ц}(t)$. В модуляторе М сигнал $S_{ц}(t)$ изменяет один из параметров высокочастотного несущего колебания $S_{н}(t)$, которое формируется в генераторе несущей частоты (ГНЧ). Модулированный сигнал $S_{м}(t)$ усиливается в усилителе мощности УМ, с выхода которого передаваемый сигнал $S_{п}(t)$ поступает в передающую антенну А1 и излучается в виде электромагнитного колебания $S_{изл}(t)$. Заметим, что чем выше несущая частота $f_{н}$ ГНЧ, тем меньше длина волны λ ($\lambda = c / f_{н}$, c – скорость распространения волн в линии связи) колебания $S_{изл}(t)$ и тем меньше размеры (апертура) антенны А1.

На приемную часть СПИ поступает электромагнитное колебание $S_{пр}(t)$, которое преобразуется в антенне А2 в электрический сигнал $S_{А}(t)$. Избирательный усилитель ИУ выделяет и усиливает из множества сигналов, принятых антенной А2, модулированный сигнал $\hat{S}_{м}(t)$. Демодулятор (детектор) ДМ осуществляет преобразование,

обратное модуляции, т. е. превращает высокочастотный модулированный сигнал $\hat{S}_M(t)$ в сигнал $\hat{S}_Ц(t)$, аналогичный модулирующему сигналу $S_Ц(t)$ в передатчике. Декодер ДК преобразует закодированный сигнал $\hat{S}_Ц(t)$ в первичный сигнал $\hat{S}(t)$. И, наконец, преобразователь Пр2 (громкоговоритель – в радиовещании, кинескоп или монитор – в телевидении) преобразует сигнал $\hat{S}(t)$ в сообщение $\hat{b}(t)$, которое поступает к получателю информации ПИ.

Следует отметить, что сигналы $\hat{S}_M(t)$, $\hat{S}_Ц(t)$, $\hat{S}(t)$ и сообщение $\hat{b}(t)$ в приемнике в общем случае отличаются от сигналов $S_M(t)$, $S_Ц(t)$, $S(t)$ и сообщения $b(t)$ передающей части СПИ из-за влияния помех и искажений в линии связи и приемнике. Помехи, которые суммируются с сигналом, называются аддитивными, а перемножающиеся с сигналом – *мультипликативными*.

В СПИ сигналы подвергаются различным преобразованиям, некоторые из них обязательны для всех систем, независимо от вида и назначения передаваемой информации.

Физическая природа сигналов может быть различной, но для общего подхода к их изучению и анализу им ставят в соответствие определенную математическую функцию – *математическую модель*, позволяющую выделить наиболее существенные свойства изучаемых реальных сигналов.

Основной задачей изучения и анализа сигналов становится определение их свойств: числовых параметров и характеристик, а также количественная оценка схожести (корреляции) различных сигналов.

Приступая к изучению сигналов, дадим предварительную их классификацию, что важно для последующего использования соответствующей терминологии.

В.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

В зависимости от поставленной задачи и критерия сигналы можно классифицировать по-разному.

Наиболее общий принцип (критерий) классификации – это возможность точно предсказывать мгновенные значения сигнала в любые моменты времени. По этому принципу сигналы подразделяются на детерминированные и случайные.

Детерминированные (регулярные) сигналы – это полностью известные сигналы в любой момент времени.

Случайные (нерегулярные) сигналы – это сигналы, которые в любой момент времени представляют собой случайную величину. Поэтому их значения невозможно точно предсказать.

Поскольку детерминированные сигналы полностью известны, они не несут информации для получателя (но представляют собой удобную модель при исследовании

сигналов и радицепей). Поэтому все полезные сигналы, несущие информацию получателю, будут случайными.

С информационной точки зрения случайные сигналы можно подразделить на **полезные сигналы и помехи**. Полезные сигналы используются для передачи информации, помехи же мешают приему сигналов. Но в зависимости от получателя информации одни и те же колебания могут быть сигналами или помехами. Например, две радиостанции работают на соседних частотах. Если принимается первая радиостанция, то вторая становится помехой и наоборот.

При передаче сообщений на расстояние в канале связи используются сигналы трех основных классов: управляющие (информационные), высокочастотные немодулированные и модулированные (информационные) или радиосигналы.

Управляющие (модулирующие) сигналы, или видеосигналы, представляют собой сообщения, преобразованные в электрическую форму. Это сравнительно низкочастотные сигналы, и они не могут быть непосредственно переданы на большие расстояния с помощью электромагнитных колебаний.

Немодулированные высокочастотные сигналы – это высокочастотные колебания, используемые для переноса информации, которая содержится в управляющих сигналах. Поэтому колебания называются *переносчиками* или *несущими* колебаниями. Они могут распространяться на большие расстояния в виде электромагнитных волн.

Аналитическое выражение для высокочастотного колебания имеет вид

$$S_H(t) = S_m \cos(\omega_H t + \varphi) = S_m \cos(2\pi f_H t + \varphi). \quad (\text{B.1})$$

Оно характеризуется тремя параметрами: амплитудой S_m , частотой f_H и начальной фазой φ .

Известно, что эффективное излучение электромагнитных колебаний происходит тогда, когда размеры антенны соизмеримы с длиной волны. Длина волны λ связана с периодом T_H и частотой f_H колебания

$$\lambda = cT_H = c / f_H,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных колебаний в свободном пространстве (вакууме).

Подразделение радиоволн на диапазоны приведено в табл. В.1 [1–3, 10, 41]. В скобках даны нерекомендуемые, но широко используемые термины.

Таблица В.1

Волны	Диапазон волн	Диапазон частот	Частоты	Использование	Вид распространения
Метровые	10 000...1000 км	30...3000 Гц	Сверхнизкие (СНЧ)		
Гектокилометровые	1000...100 км	300...3000 Гц	Инфранизкие (ИНЧ)		
Мириаметровые (сверхдлинные, СДВ)	100...10 км	3...30 Гц	Очень низкие (ОНЧ)	Связь по всему миру и на большие расстояния. Навигация. Подводная связь	Поверхностная волна
Километровые (длинные, ДВ)	10...1 км	30...300 кГц	Низкие (НЧ)	Связь на большие расстояния. Длинноволновое вещание	Околосветовая волна
Гектометровые (средние, СВ)	1000...100 м	300...3000 кГц	Средние (СЧ)	Средневолновое местное и региональное вещание. Суточная связь	Околосветовая волна (днем). Ионосферная волна (ночью)
Декаметровые (короткие, КВ)	100...10 м	3...30 МГц	Высокие (ВЧ)	Связь на большие расстояния и коротковолновое вещание	Ионосферная волна
Метровые	10...1 м	30...300 МГц	Очень высокие (ОВЧ)	Связь в пределах прямой видимости. Мобильная связь. Телевизионное и ЧМ вещание	Пространственная волна
Дециметровые	100...10 см	300...3000 МГц	Ультравысокие (УВЧ)	Связь в пределах прямой видимости и мобильная связь. Телевизионное вещание. Радиорелейные линии	Пространственная волна
Сантиметровые	10...1 см	3...30 ГГц	Сверхвысокие (СВЧ)	Радиорелейные линии. Локаторы. Спутниковая связь	Пространственная волна
Миллиметровые	10...1 мм	30...300 МГц	Крайне высокие (КВЧ)	Межспутниковая связь. Микросотовая радиотелефонная связь	Пространственная волна
Децимиллиметровые (субмиллиметровые)	1...0.1 мм	300...3000 МГц	Гипервысокие (ГВЧ)		

Модулированные сигналы формируются на выходе модулятора и представляют собой радиосигналы. Они несут в себе информацию, которая содержится в управляющем сигнале и, следовательно, в передаваемом сообщении.

В зависимости от того, какой параметр (амплитуда, частота, фаза) высокочастотного колебания-переносчика изменяется в соответствии с законом управляющего сигнала, различают амплитудно-модулированные сигналы (АМС) и сигналы с угловой модуляцией (УМС), которые подразделяются на частотно-модулированные сигналы (ЧМС) и фазомодулированные сигналы (ФМС).

Следует заметить, что переносчиком может быть не только гармоническое колебание, поэтому используются другие виды модуляции и модулированные сигналы.

В зависимости от того, *непрерывны* или *дискретны* сигналы по величине и времени, их подразделяют на следующие классы.

Аналоговые (континуальные, непрерывные) сигналы – произвольные по величине и непрерывные по времени (рис. В.3, а). Так как эти сигналы могут иметь разрывы, то более корректно такие сигналы называть континуальными.

Дискретные сигналы – произвольные по величине и дискретные по времени (рис. В.3, б). Они представляют собой последовательность импульсов, амплитуды которых соответствуют аналоговым сигналам в дискретные моменты времени, т. е. *решетчатую функцию*. Эти сигналы образуются в результате *дискретизации* континуальных сигналов, но могут создаваться непосредственно источником информации. Простейшая модель дискретного сигнала $S_d(t) = S(k\Delta t)$ – это счетное множество точек $\{t_k = k\Delta t\}$ на оси времени. В каждой из них определено отсчетное значение (выборка) сигнала S_k . Шаг дискретизации $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ обычно постоянен и выбирается в соответствии с теоремой Котельникова (гл. 8, $\Delta t \leq 1/2F_{\max}$, где F_{\max} – максимальная частота в спектре сигнала). Для звукового (аудио) сигнала (20...20 000 Гц) частота дискретизации должна быть не менее 40 кГц.

Квантованные по величине сигналы – это сигналы, дискретные по величине (уровню) и непрерывные по времени (рис. В.3, в). Диапазон изменения сигнала от S_{\min} до S_{\max} заменяется счетным множеством значений его уровней S_0, S_1, \dots, S_N . Эта замена называется *квантованием* сигнала по уровню. Отсчеты отстоят друг от друга на *шаг квантования* $\Delta S = (S_{\max} - S_{\min}) / N$.

В результате квантования сигнала $S(t)$ получается квантованный сигнал $S_k(t)$, имеющий ступенчатую форму. При этом возникает ошибка квантования $\delta \leq \Delta S / 2$, определяемая шагом квантования, поскольку мгновенное значение квантуемой величины может оказаться между соседними уровнями квантования.

Цифровые сигналы – это сигналы, дискретные (квантованные) по величине и дискретные по времени (рис. В.3, г). Так как уровни квантования можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов (n_0, n_k), то квантованный по уровню и дискретный по времени сигнал принято называть цифровым.

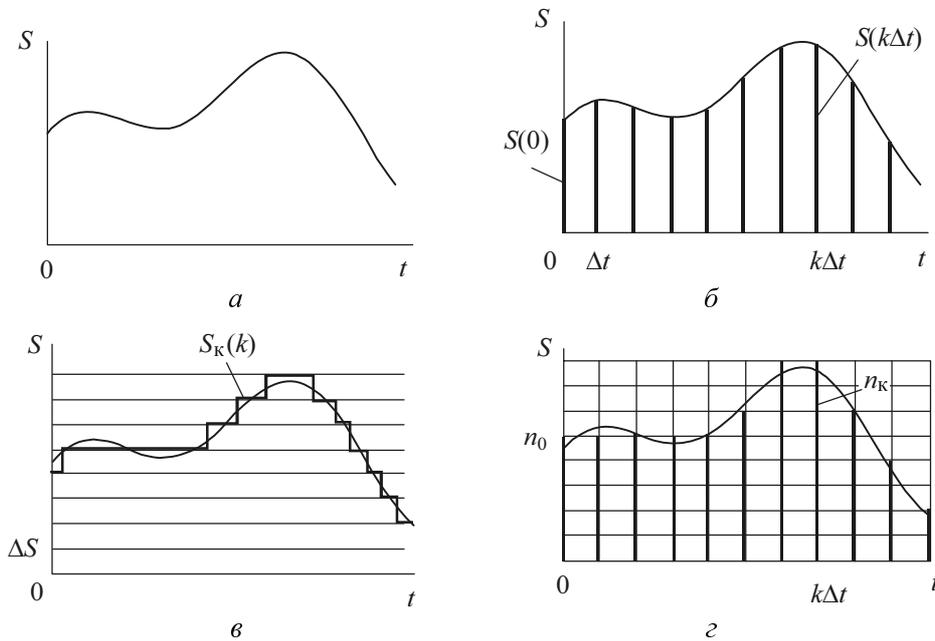


Рис. В.3

Обе процедуры – дискретизация и квантование – выполняются, как правило, в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). При этом квантование осуществляется в двоичной системе счисления. АЦП, имеющий n двоичных разрядов, обеспечивает $N = 2^n$ уровней квантования; размах сигнала не должен превышать полного рабочего диапазона АЦП: $S_{\max} - S_{\min} \leq N \cdot \Delta S$.

Некоторое число M в этой системе счисления можно представить суммой

$$M = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n = (a_n, \dots, a_2 a_1 a_0)_2, \quad (\text{В.2})$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ могут принимать одно из двух возможных значений: 0 или 1. Показатель степени в (В.2) означает разряд числа. Для определения положения единицы в кодовой комбинации необходимо к показателю степени прибавить единицу, а отсчет производить справа налево. Например, $8 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = (1000)_2$. Нули слева от последней цифры не играют никакой роли.

Чем больше число уровней N , тем меньше отличие квантованного сигнала $S_k(t)$ от исходного $S(t)$ и тем больше должно быть число разрядов $n = \log_2 N$. Это приводит к усложнению аппаратуры для обработки сигналов.

Каждому отсчету сигнала (числу) ставится в соответствие кодовая комбинация. При этом нулю соответствует отсутствие импульса, а единице – импульс прямоугольной формы. Пояснение дано на рис. В.4.

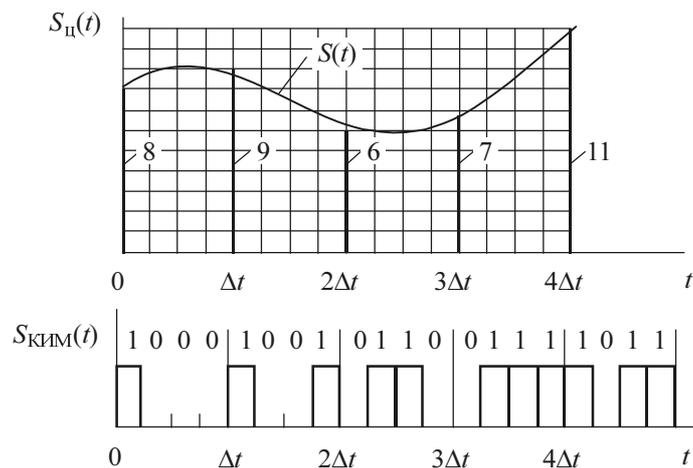


Рис. В.4

Такая процедура оцифровки сигнала называется *импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ)* или *кодowo-импульсной модуляцией (КИМ)*.

Детерминированные сигналы принято различать по признаку *периодичности*. Для **периодического** сигнала с периодом T справедливо выражение

$$S(t) = S(t + kT) \text{ при любом } t, \quad (\text{В.3})$$

где k – произвольное целое число. Величина $F_{\text{п}}$, обратная периоду T , т. е. $F_{\text{п}} = 1/T$, называется частотой повторения сигнала ($\Gamma_{\text{ц}}$).

Другой класс – сигналы **конечной длительности**. Их еще принято называть *финитными* сигналами. Эти сигналы отличны от нуля на конечном отрезке времени. Следовательно, энергия таких сигналов конечна (если они не содержат разрывов второго рода – уходящих в бесконечность ветвями функции).

Импульсные сигналы – это частный случай сигналов конечной длительности. Они характеризуются такими числовыми параметрами, как длительность $\tau_{\text{и}}$, амплитуда (высота) $A_{\text{и}}$, длительность фронта $\tau_{\text{ф}}$, длительность среза $\tau_{\text{с}}$ и др. (рис. В.5, а). При этом импульсы подразделяются на видеоимпульсы (немодулированные) (рис. В.5, а) и радиоимпульсы (с высокочастотным заполнением) (рис. В.5, б). $S_{\text{ог}}(t)$ – *оглабающая* радиоимпульса, $\cos(\omega_{\text{н}}t + \varphi)$ – его *заполнение*. При этом $S_{\text{ог}}(t)$ повторяет форму видеосигнала $S_{\text{в}}(t)$.

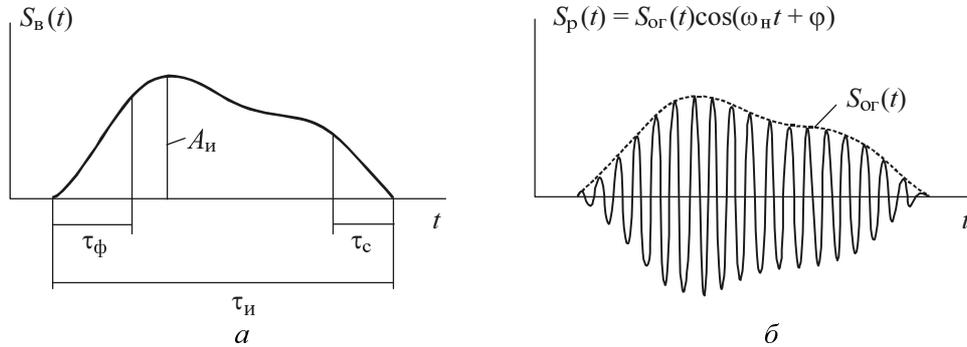


Рис. В.5

Приведенная здесь классификация не претендует на полноту и в последующих разделах будет дополнена.

В.3. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ЦОС

Она показана на рис. В.6. Аналоговый сигнал $x(t)$ подвергается в АЦП дискретизации по времени (Д) $x_d(t) = x(n\Delta t)$, квантованию (КВ) по уровню $x_{кв}(t)$ и цифровому кодированию (ЦК) $x_{ц}(t)$ (см. рис. В.4).

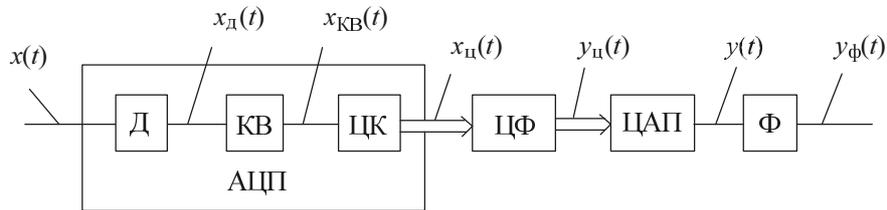


Рис. В.6

Цифровой сигнал $x_{ц}(t)$ поступает на цифровой фильтр (ЦФ), где и происходит его обработка по заданному алгоритму. Обработка каждого отсчета цифрового кодированного сигнала сводится к операциям над двоичным кодом. Сигнал $y_{ц}(t)$ с выхода ЦФ подается на цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), в котором преобразуется в последовательность «ступенек» $y(t) = y_{ЦАП}(t)$; их амплитуды пропорциональны соответствующим значениям квантованного сигнала $y_{кв}(t) = y(nT)$. Аналоговый фильтр сглаживает напряжение $y(t)$ и формирует на своем выходе аналоговый сигнал $y_{\phi}(t)$ (рис. В.7).

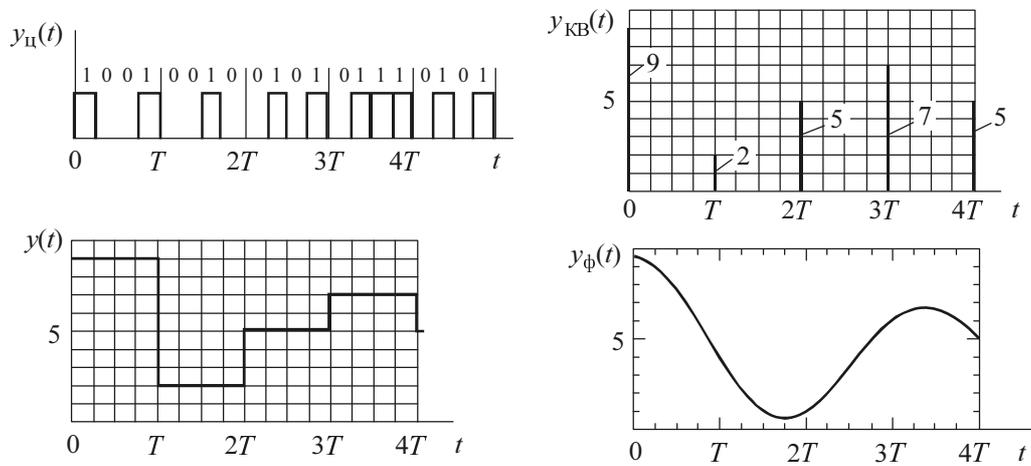


Рис. В.7

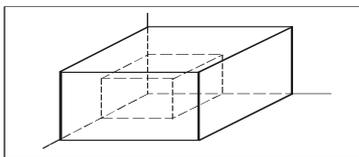
Все коэффициенты математических операций, описывающих обработку квантованных сигналов, тоже квантованы. Это усложняет анализ функционирования ЦФ. Поэтому анализ разбивается обычно на два этапа:

- на первом этапе сигнал считается просто дискретным (т. е. неквантованным) и коэффициенты ЦФ также неквантованные;
- на втором этапе учитывается квантованность дискретного сигнала и коэффициентов ЦФ, при этом определяются погрешности из-за квантования и округления.

В последующих главах сигналы считаются неквантованными.

Глава 1

СИГНАЛЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ



Исследуй всё, пусть для тебя
на первом месте будет разум.

Пифагор

1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1.1. МОДЕЛЬ СИГНАЛА

Сигнал (лат. *Signum* – знак) – физический процесс или явление, несущий сообщение о каком-либо событии, состоянии объекта и его режиме либо передающий команды управлений и т. п.

Физическая природа сигнала может быть самой разнообразной. Это напряжение, ток, заряд, интенсивность электромагнитного колебания, в частности света, давление звуковой волны и т. п.

Для теоретического изучения реальные сигналы идеализируют, ставят им в соответствие определенные функции времени $S(t)$, $u(t)$, ..., которые называются **математическими моделями** сигналов. Но зависимость может быть не только от времени. Это может быть зависимость интенсивности света от пространственных координат в устройствах оптической обработки сигналов и др.

Математическую модель можно задать в виде аналитических выражений, графиков, таблиц. При этом в качестве аналитических выражений наиболее часто используют комбинации заданных элементарных функций. Для практических приложений особый интерес имеет представление сигнала в виде суммы элементарных сигналов.

Некоторые элементарные функции рассмотрены в примерах 1.1–1.5.

1.1.2. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Время действия (существования) сигнала

$$T_c = t_2 - t_1,$$

где t_1 и t_2 – время начала и конца сигнала, измеряемое в секундах (с).

2. Полоса частот сигнала

$$F_c = f_{\max} - f_{\min},$$

где f_{\max} и f_{\min} – максимальная (наивысшая) и минимальная (низшая) частоты в спектре сигнала, измеряемые в герцах (Гц).

Полоса частот, занимаемых основными видами радиосистем, приведена в табл. 1.1 [41].

Таблица 1.1

Применение	Полоса частот, Гц
<i>Речь, музыка</i>	
Мобильная радиосвязь (разделение канала 12.5 кГц)	300...2700
Качественная радиосвязь	300...3000
Качественная междугородная телефонная связь	300...3400
Система с ограничением низких и высоких частот	500...4000
Система громкой связи	200...5000
Хорошее звуковоспроизведение	150...7000
Музыка (для ЧМ радиостанций)	30...15 000
Высококачественное звуковоспроизведение	15...15 000
<i>Видео</i>	От 60 Гц до 4.2 МГц
<i>Телевидение</i>	Порядка 6,5 МГц

Радиочастотный спектр. Для радиосвязи используется диапазон от 10 кГц до 100 ГГц (см. табл. В.1).

Кроме радиоволн спектр электромагнитных колебаний включает инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое и рентгеновское излучение, гамма- и космические лучи (рис. 1.1) [41].

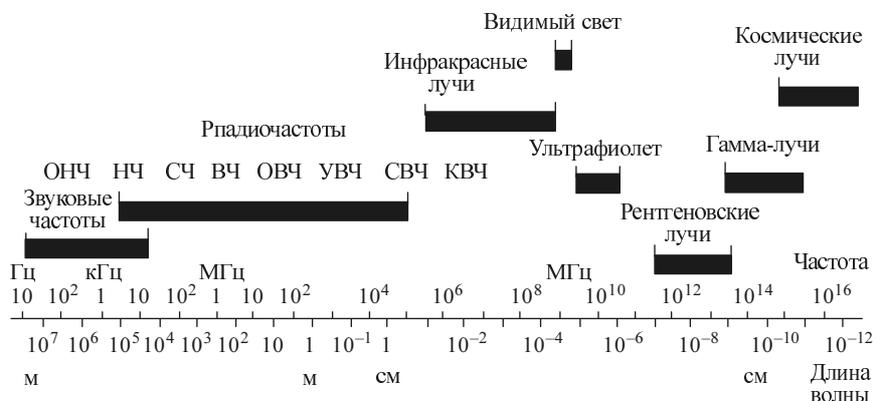


Рис. 1.1

3. База сигнала (безразмерная величина)

$$B_c = T_c F_c. \quad (1.1)$$

4. Динамический диапазон сигнала (измеряемый в децибелах, дБ)

$$D_c = 20 \lg(S_{\max} / S_{\min}) = 10 \lg(P_{\max} / P_{\min}), \quad (1.2)$$

где S_{\max} , P_{\max} и S_{\min} , P_{\min} – максимальное и минимальное значения соответственно сигнала и его мощности.

В табл. 1.2 приведен динамический диапазон сигналов некоторых каналов [10].

Таблица 1.2

Каналы связи	Динамический диапазон, дБ
Телефонный	20
Фототелеграфный	30...35
Радиовещательный:	
шелест листьев	10
речь диктора	30
художественное чтение	50
громкий разговор	до 60
симфонический оркестр	95
громкая музыка	120
Телевизионный (изображения)	48

Динамический диапазон звуковых сигналов (соответственно напряжения на выходе микрофона) определяется уровнем звука L :

$$D = L = 20 \lg(p_{\text{эф}} / p_0), \quad (1.3)$$

где $p_0 = 20$ мкПа – стандартный порог слышимости; $p_{\text{эф}}$ – эффективное звуковое давление. Болевой порог $p_6 = 20$ Па (120 дБ).

5. Объем сигнала

$$V_c = T_c F_c D_c. \quad (1.4)$$

Для передачи сигнала без потерь через канал связи необходимо, чтобы объем канала был не меньше объема сигнала

$$V_k = T_k F_k D_k \geq V_c. \quad (1.5)$$

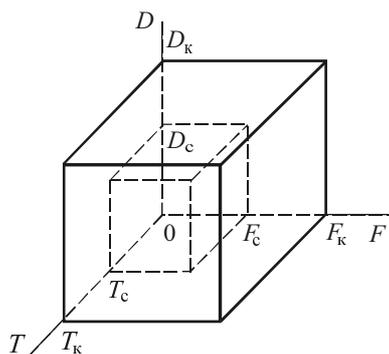


Рис. 1.2

На практике передаваемый сигнал согласован с каналом по всем трем характеристикам (рис. 1.2): $T_c \leq T_k$, $F_c \leq F_k$ и $D_c \leq D_k$. В принципе не обязательно выполнять соответствующие неравенства по каждой из характеристик сигнала и канала – можно «сжать» одни характеристики за счет «расширения» других. В дальнейшем рассмотрим примеры такого «сжатия» характеристик сигнала.

6. Отношение сигнал/шум (ОСШ). Минимальное значение мощности сигнала в канале связи определяется средней мощностью шумов $P_{\text{ш}}$. Отношение средних мощностей сигнала P_c и шума $P_{\text{ш}}$ называется отношением сигнал/шум (ОСШ):

$$\text{ОСШ} = P_c / P_{\text{ш}}. \quad (1.6)$$

Шумы

Шумы являются одним из источников помех, которые ухудшают качество передачи и приема сигналов в канале связи. Шумы бывают искусственными (включая преднамеренные помехи) и естественными, внешними и внутренними.

Один из источников естественных внешних шумов – это атмосферный шум, обусловленный разрядами статического электричества и молниями. Гро-

зовые разряды влияют на сигналы с частотами до 30 МГц. Шумы космического происхождения создают помехи в диапазоне частот от 8 МГц до 1.5 ГГц.

Внутренние шумы возникают во всех электронных компонентах устройств и систем. В электронных и электровакуумных приборах имеет место дробовый шум (похожий на падение дробинок), обусловленный дискретным характером тока (например, потока электронов в транзисторе и др.).

Все электронные компоненты, содержащие активное сопротивление, генерируют тепловой шум. Среднеквадратическое напряжение и мощность шума резистора с сопротивлением R в полосе частот F соответственно определяются:

$$U_{\text{ш}} = \sqrt{4kT_0FR} \text{ и } P_{\text{ш}} = 4kT_0F, \quad (1.7)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ – постоянная Больцмана, Дж/К; T_0 – абсолютная температура, К; F – полоса частот, Гц; R – сопротивление, Ом.

1.1.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА

Если $S(t)$ – напряжение или ток, то мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении R , будет

$$P = u^2(t) / R = i^2(t)R.$$

В теории сигналов мгновенная мощность интересует исследователя не как физическая величина, а как **средство сравнения** сигналов. Поэтому сопротивление из этой формулы можно исключить (приравнять единице, т. е. $R = 1$). Тогда независимо от того, будет ли $S(t)$ напряжением или током, получим следующее выражение для определения мгновенной мощности сигнала:

$$P = S^2(t).$$

Полученный таким образом результат численно равен мгновенной мощности на сопротивлении в 1 Ом.

Энергию сигнала на интервале $T = t_2 - t_1$ можно определить интегрированием мгновенной мощности:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt = \int_0^T S^2(t) dt. \quad (1.8)$$

Введем понятие средней мощности за рассматриваемый интервал времени:

$$P_{\text{ср}} = \frac{E}{T} = \overline{S^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt. \quad (1.9)$$

Если $S(t) = u(t)$, то мощность здесь имеет размерность $[B^2]$, а энергия – $[B^2 \cdot c]$.

Рассмотрим сигнал $S(t)$, состоящий из суммы двух сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Энергия этого сигнала определится как

$$E = \int_0^T S^2(t) dt = \int_0^T S_1^2(t) dt + \int_0^T S_2^2(t) dt + 2 \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt = E_1 + E_2 + 2E_{12}. \quad (1.10)$$

В этом выражении E_1 и E_2 – соответственно энергия первого и второго сигналов, а E_{12} – **энергия взаимодействия** первого и второго сигнала:

$$E_{12} = \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt. \quad (1.11)$$

Таким образом, в общем случае энергия суммы двух сигналов не равна сумме энергий составляющих сигналов: $E \neq E_1 + E_2$. Принцип аддитивности не соблюдается.

Если энергия взаимодействия двух сигналов на интервале T равна нулю, то такие сигналы называются **ортогональными**, а интервал T – **интервалом ортогональности**.

Аналогично вводим понятия средней мощности взаимодействия двух сигналов:

$$P_{\text{ср.12}} = \frac{1}{T} \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt. \quad (1.12)$$

Для **комплексного** сигнала также применяют понятия мгновенной мощности, энергии и средней мощности. Эти понятия вводят так, чтобы перечисленные характеристики комплексного сигнала $\dot{S}(t)$ оставались действительными величинами.

Мгновенная мощность такого сигнала – это произведение комплексного сигнала $\dot{S}(t)$ на комплексно-сопряженный сигнал $\dot{S}^*(t)$:

$$P = \dot{S}(t)\dot{S}^*(t). \quad (1.13)$$

Энергия и средняя мощность сигнала на интервале $T = t_2 - t_1$ будет

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t)dt, \quad P_{cp} = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t)dt. \quad (1.14)$$

Два комплексных сигнала, заданных на интервале $T = t_2 - t_1$, будут ортогональными, если их энергия (или мощность) взаимодействия

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}_1(t)\dot{S}_2^*(t)dt \quad (1.15)$$

равна нулю.

1.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Гармоническое колебание – самое распространенное колебание, используемое в технике обработки сигналов. В измерительной технике оно служит испытательным сигналом как для спектрального (гармонического) анализа сложных сигналов, так и анализа частотных свойств радиотехнических цепей и устройств. В общем виде (рис. 1.3, а) его записывают следующим образом:

$$S(t) = S_m \cos \Omega(t - t_0) = S_m \cos(\Omega t - \varphi_0), \quad (1.16)$$

где S_m , $\varphi_0 = \Omega t_0$ и $\Omega = 2\pi F$ – амплитуда, начальная фаза, рад, и круговая (циклическая) частота, рад/с; $F = 1/T$ – частота колебания, Гц; T – период колебания, с. Можно задать это колебание в частотной области – на оси частот (рис. 1.3, б).

Во многих приложениях рассматривается комплексное гармоническое колебание вида

$$\dot{S}(t) = S_m e^{j(\Omega t + \varphi_0)} = S_m e^{j\varphi_0} e^{j\Omega t} = \dot{S}_m e^{j\Omega t}, \quad (1.17)$$

где $\dot{S}_m = S_m e^{j\varphi_0}$ – комплексная амплитуда колебаний; $j = \sqrt{-1}$. Используя формулу Эйлера, его можно записать

$$\dot{S}(t) = S_m \cos(\Omega t + \varphi_0) + j S_m \sin(\Omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[\dot{S}(t)] + j \operatorname{Im}[\dot{S}(t)]. \quad (1.18)$$

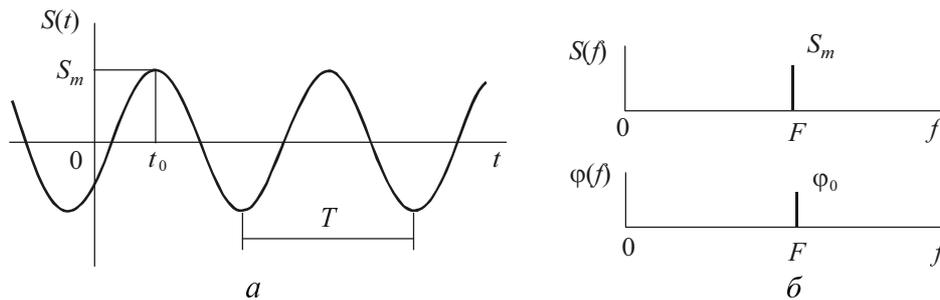


Рис. 1.3

Гармоническое колебание можно представить также в векторной форме. На рис. 1.4, *а* вектор неподвижен, а ось OA вращается по часовой стрелке; на рис. 1.4, *б*, наоборот, ось неподвижна, а вектор вращается против часовой стрелки.

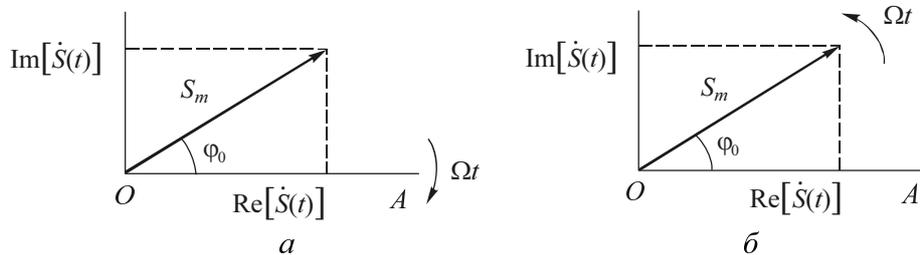


Рис. 1.4

Вещественное колебание $S(t)$ представляет собой реальную часть комплексного колебания $\dot{S}(t)$, т. е. $S(t) = \operatorname{Re}[\dot{S}(t)] = S_m \cos(\Omega t + \varphi_0)$.

Пример 2. Единичная функция. Иначе функция Хевисайда, или единичный скачок. Рассмотрим сначала сигнал, изображенный на рис. 1.5. Этот сигнал описывает переход из состояния 0 в состояние 1. При этом переход осуществляется по линейному закону за время τ .

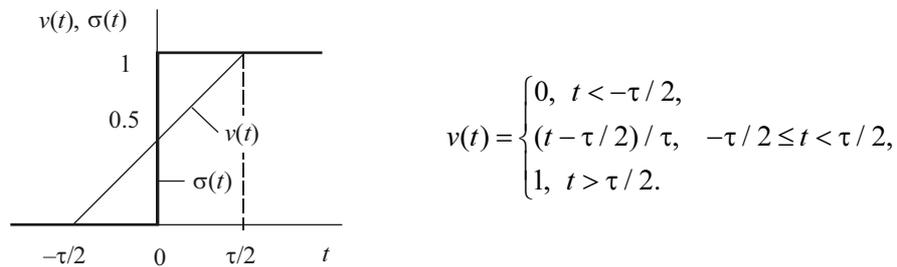


Рис. 1.5

Если время перехода τ устремить к нулю, то в пределе переход будет совершаться скачком (мгновенно):

$$\sigma(t) = 1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0.5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Поскольку функция $\sigma(t) = 1(t)$ безразмерна, умножение сигнала на единичную функцию равносильно включению сигнала в момент $t = 0$

$$S(t)\sigma(t) = \begin{cases} S(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Функция включения может быть смещена относительно начала отсчета на величину t_0 :

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 0.5, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

На рис. 1.6 показаны функции $\sigma(x)$ для различных аргументов x . В программе Mathcad единичная функция обозначена как $\Phi(x)$. Эта математическая модель получила название единичной функции или единичного скачка, или функции Хевисайда. Она очень широко используется для динамического описания сигналов, а также описания разнообразных процессов коммутации в радиоцепях и др.

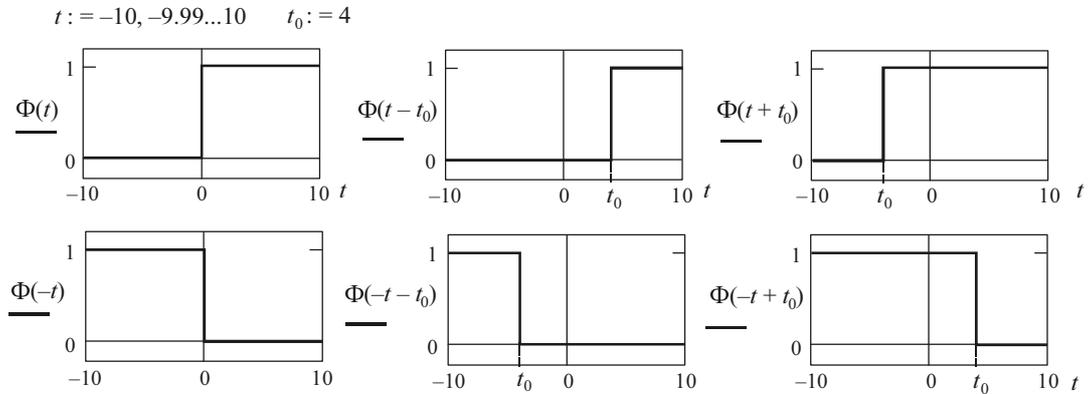


Рис. 1.6

Пример 3. Дельта-функция. Продифференцируем функцию $v(t)$. Тогда получим прямоугольный импульс (рис. 1.7, линия 1). Площадь этого импульса, равная произведению основания τ на высоту $1/\tau$, будет равна единице. По мере уменьшения времени перехода τ основание импульса будет сужаться, а высота увеличиваться (рис. 1.7, линия 2), но площадь импульса по-прежнему будет равна единице. При устремлении времени перехода к нулю высота импульса устремляется в бесконечность (рис. 1.7, линия 3), а площадь остается прежней, т. е. равной единице. На графиках дельта-функция $\delta(t)$ изображается жирной стрелкой, рядом с которой указывается весовой коэффициент (множитель).

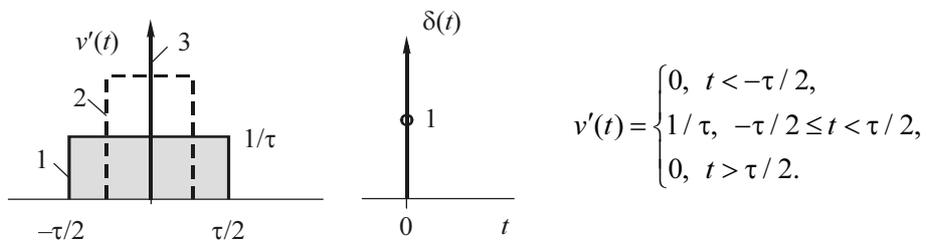


Рис. 1.7

Полученная таким образом функция называется *функцией Дирака, дельта-функцией или единичным импульсом* [1]:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}. \quad (1.21)$$

Отметим следующие важные свойства дельта-функции.

1. Это бесконечно узкий импульс бесконечно большой амплитуды, площадь которого равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.22)$$

2. δ -функция является четной функцией

$$\delta(t) = \delta(-t). \quad (1.23)$$

Из (1.20) и (1.22) следует, что

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1/2.$$

3. Энергия дельта-импульса бесконечна велика. Обратимся к прямоугольному импульсу (рис. 1.7). Его энергия $E = A^2 \tau = (1/\tau)^2 \tau = 1/\tau$. При $\tau \rightarrow 0$ прямоугольный импульс превращается в дельта-импульс с бесконечно большой энергией.

4. Перемножение произвольного сигнала $S(t)$ с дельта-функцией $\delta(t-t_0)$ дает дельта-функцию с весовым коэффициентом, равным значению сигнала $S(t_0)$ в момент $t = t_0$:

$$S(t)\delta(t-t_0) = S(t_0)\delta(t-t_0). \quad (1.24)$$

5. Она обладает фильтрующим (стробирующим) свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t_0)\delta(t-t_0) dt = S(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = S(t_0). \quad (1.25)$$

По определению дельта-функция $\delta(t-t_0)$ равна нулю на всей оси времени t , кроме точки $t = t_0$. Поэтому интервал интегрирования может быть сколь угодно малым, но включающим в себя момент t_0 . В этом промежутке сигнал принимает постоянное значение $S(t_0)$ и его можно вынести за знак интеграла, а интеграл обращается в единицу. Поэтому интеграл от произведения сигнала $S(t)$ на дельта-функцию $\delta(t-t_0)$ равен значению сигнала в точке $t = t_0$. Иными словами, дельта-функция $\delta(t-t_0)$ действует на сигнал $S(t)$ как

временной фильтр, т. е. из всех его возможных значений выбирает лишь одно в точке $t = t_0$.

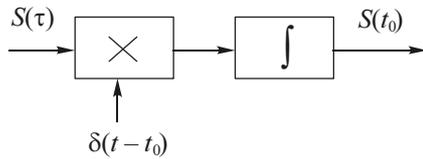


Рис. 1.8

Из этого свойства следует структурная схема (рис. 1.8) устройства, измеряющего сигнал $S(t)$ в некоторый момент времени t_0 . Она должна состоять из перемножителя сигналов и интегратора.

В математическом смысле дельта-функция $\delta(t)$ – не обычная функция. Она относится к классу *обобщенных функций* и определяется выражениями (1.21) и (1.25).

В теории обобщенных функций показано, что свойствами дельта-функций обладают последовательности обычных (классических функций). В учебниках [1, 2] есть и такие определения $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} e^{-t^2/2a^2}, \quad \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nt}{\pi t}. \quad (1.26)$$

Естественно, что сигнал в виде дельта-функции нельзя реализовать физически. Тем не менее эта функция очень важна в теории сигналов, цепей, устройств и систем. В частности, она используется при измерении мгновенных значений аналогового сигнала в некоторый момент времени t_0 , дискретизации аналоговых сигналов, воздействии на линейные цепи для нахождения импульсных характеристик цепей. При этом достаточно, чтобы длительность реального импульса была мала по сравнению с постоянной времени исследуемой цепи.

Пример 4. Прямоугольный импульс. Часто также используется в теории сигналов как элементарная разрывная функция. На рис 1.9 показаны график и математическая модель симметричного прямоугольного импульса с единичной амплитудой. Аналитическая запись этого импульса через функции включения

$$\text{rect}(t / \tau) = \sigma(t + \tau / 2) - \sigma(t - \tau / 2).$$

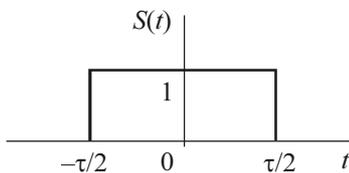


Рис. 1.9

$$S(t) = \text{rect}(t / \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq \tau / 2, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau / 2. \end{cases} \quad (1.27)$$

Пример 5. Сигнум-функция. Эта функция имеет значение ± 1 . Знак скачком изменяется при переходе аргумента через нуль (рис. 1.10).

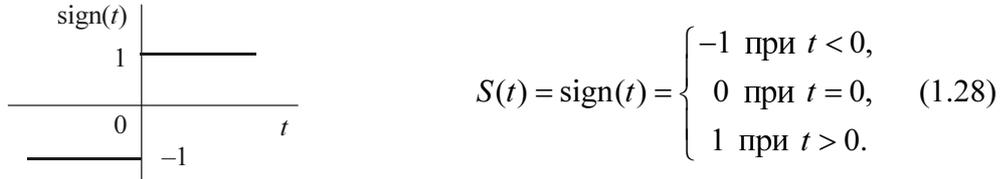


Рис. 1.10

Связь этой функции с функцией включения

$$\text{sign}(t) = 2\sigma(t) - 1, \quad \sigma(t) = 0.5 + 0.5 \text{sign}(t). \quad (1.29)$$

Умножение произвольного сигнала $S(t)$ на сигнум-функцию приводит к изменению знака в момент времени $t = 0$.

Преобразование гармонического сигнала $S(t) = S_m \sin(\Omega t)$ в периодическую последовательность знакопеременных прямоугольных импульсов с помощью сигнум-функции иллюстрирует рис. 1.11.

$$S1(t) = S_m \text{sign}(\sin(\Omega t)). \quad (1.30)$$

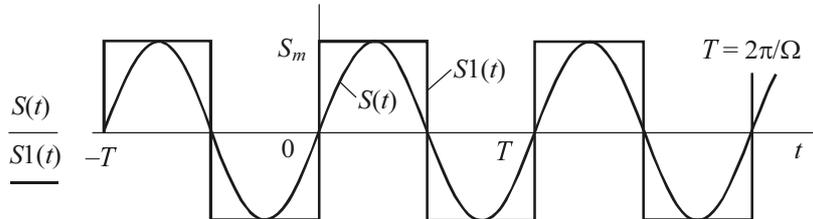


Рис. 1.11

Пример 6. Энергия и мощность гармонического колебания за период. Гармоническое колебание описывается выражением (1.16). По формулам (1.10) и (1.11) получаем

$$E = \int_0^T S^2(t) dt = \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = S_m^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right) dt = \frac{S_m^2}{2} T,$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{E}{T} = \int_0^T S^2(t) dt = \frac{S_m^2}{2} = S_{\text{эф}}^2,$$

где $S_{\text{эф}} = \sqrt{P_{\text{ср}}} = S_m / \sqrt{2} = 0.707 S_m$ – эффективное значение колебания.

Пример 7. Энергия бигармонического сигнала. Требуется определить энергию за период суммы двух гармонических колебаний $S_1(t) = S_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ и $S_2(t) = S_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$. По формуле (1.10) имеем $E = E_1 + E_2 + 2E_{12}$. Энергия каждого сигнала находится аналогично предыдущему примеру: $E_1 = 0.5 S_1^2 T$ и $E_2 = 0.5 S_2^2 T$. Энергия взаимодействия сигналов E_{12} согласно формуле (1.11):

$$E_{12} = \int_0^T S_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) S_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) dt = \frac{1}{2} S_1 S_2 \int_0^T \cos(\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1) dt + \\ + \frac{1}{2} S_1 S_2 \int_0^T \cos(3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1) dt = 0.$$

Здесь каждый из интегралов – это площадь гармонического колебания за период T , равная нулю (если изменить интервал интегрирования, то энергия взаимодействия может быть не равна нулю).

Так как энергия взаимодействия равна нулю, то колебания $S_1(t)$ и $S_2(t)$ ортогональные. Поэтому окончательно получаем, что энергия суммарного колебания равна сумме энергий слагаемых колебаний:

$$E = E_1 + E_2 = 0.5 S_1^2 T + 0.5 S_2^2 T.$$

Пример 8. Телевизионный сигнал изображения

Полоса частот. Согласно стандарту телевизионный кадр имеет $m = 625$ строк. Высота кадра относится к его ширине как $3/4$. Следовательно, число элементов изображения в строке будет $n = 4m/3$, а в кадре – $n_{\text{к}} = 4m^2/3 = (4/3)(625)^2$. Как и в кино, для непрерывного восприятия изображения требуется 25 кадров в секунду. Таким образом, за одну секунду должно быть передано $N_{\text{э}} = 25(4/3)(625)^2 \approx 13 \cdot 10^6$ элементов. Если считать кадр

состоящим из чередования белых и черных элементов, т. е. сигнал скачкообразно изменяется при переходе от белого к черному элементу (что повлечет за собой максимальную полосу частот), то число периодов сигнала в одну секунду составит

$$N = F = N_{\text{г}} / 2 \approx 6.5 \cdot 10^6 \text{ Гц.}$$

Динамический диапазон. Сигнал изображения имеет уровни яркости от 1 до 256; следовательно, динамический диапазон составляет 48 дБ ($D_c = 20 \lg 256 = 48.165$ дБ).

Объем сигнала за одну секунду. В соответствии с формулой (1.4) получаем

$$V_c = T_c F_c D_c = 1 \cdot 6.5 \cdot 10^6 \cdot 48 = 3.12 \cdot 10^8 .$$

Определим время, которое необходимо для передачи этого объема сигнала по радиовещательному каналу с полосой частот 300...3000 Гц и динамическим диапазоном 30 дБ.

Из условия равенства объемов канала и сигнала, т. е. из соотношения (1.5), получаем

$$T_k = \frac{V_c}{F_k D_k} = \frac{3.12 \cdot 10^8}{2700 \cdot 30} \approx 3.85 \cdot 10^3 \text{ с } (>1 \text{ ч}).$$

Таким образом, для телевизионного кадра, длящегося 1/25 с, для передачи по радиовещательному каналу потребуется время, превышающее 1 ч.

1.3. УПРАЖНЕНИЯ

1.3.1. МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

1. Изобразите графики следующих сигналов:

а) $S_1(t) = U\sigma(t - \tau_1)$; б) $S_2(t) = U\sigma(\tau_1 - t)$;

в) $S_3(t) = U\sigma(-t - \tau_1)$; г) $S_4(t) = U\sigma(t + \tau_1)$.

2. Как изменится вид сигналов $S_1(t) - S_4(t)$ из упражнения 1, если вместо U взять $-U$?

3. Постройте графики функций Дирака:

$$\text{а) } S_1(t) = U\delta(t - \tau_1); \quad \text{б) } S_2(t) = U\delta(\tau_1 - t);$$

$$\text{в) } S_3(t) = U\delta(-t - \tau_1); \quad \text{г) } S_4(t) = U\delta(t + \tau_1).$$

4. Изобразите график сигнала, математическая модель которого имеет вид

$$S(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \tau_{\text{и}}/2; \\ 2U_m |t|/\tau_{\text{и}}, & |t| < \tau_{\text{и}}/2. \end{cases} \quad (1.31)$$

Запишите математическую модель сигнала с помощью суммы и произведений функций Хевисайда.

5. Импульсы напряжения показаны на рис. 1.12. Запишите математическую модель сигналов двумя способами: а) на временных интервалах аналогично выражению (1.31); б) с помощью комбинаций функций Хевисайда.

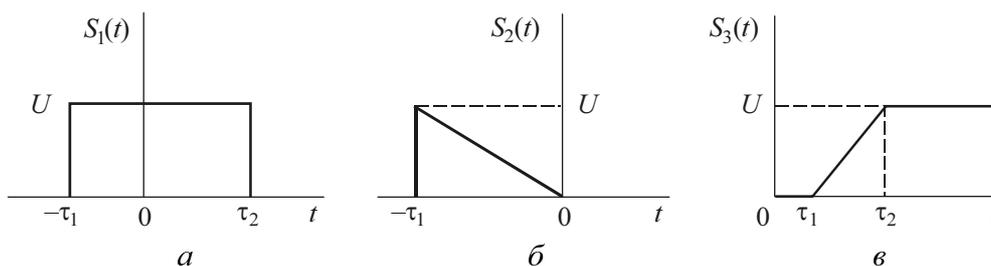


Рис. 1.12

6. Изобразите графически сигналы, полученные дифференцированием видеоимпульсов, показанных на рис. 1.12. Запишите математические модели на временных интервалах и с помощью функций Хевисайда.

7. Представьте графики радиоимпульсов, образованных произведением соответствующих видеоимпульсов $S_1(t) - S_3(t)$ (рис. 1.12) и гармонического колебания с единичной амплитудой $1 \cos \omega_0 t$.

8. Представьте математическую модель видеоимпульса (рис. 1.12, а) в виде суммы четной и нечетной частей (графически и аналитически).

9. Составьте математическую модель для описания бесконечной последовательности одинаковых импульсов прямоугольной (рис. 1.12, а) и треугольной (рис. 1.12, б) формы с периодом $T = 2\tau_{\text{и}}$.

10. Изобразите график сигнала

$$S_4(t) = U(1 - e^{-\alpha t})[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_1)] + Ue^{-\alpha(t - \tau_1)}\sigma(t - \tau_1),$$

где $\alpha = 1/t_0$, $t_0 < \tau_1/3$.

11. Представьте сигнал $S_5(t)$ (рис. 1.13) суммой интегралов от функций включения.

12. Сигнал $S_3(t)$ (рис. 1.12) имеет математическую модель

$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ U(t - \tau_1) / (\tau_2 - \tau_1), & \tau_1 < t < \tau_2, \\ U, & t > \tau_2. \end{cases}$$

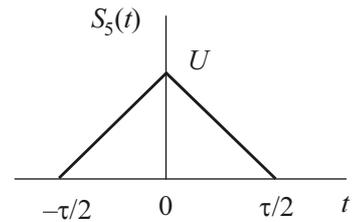


Рис. 1.13

Представьте этот сигнал в виде суммы кусочно-линейных функций.

1.3.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ

13. В табл. 1.2 приведены уровни звуковых сигналов радиовещательного канала. Вычислите эффективное звуковое давление соответствующих звуковых сигналов.

14. Определите максимальный объем непрерывного сигнала, переданного по телефонной связи за 20 минут.

15. Речевой сигнал занимает полосу от 50 до 5000 Гц. Определите его длительность T_c , если он передан за одну секунду по каналу с полосой частот $F_k = 1$ МГц. Динамические диапазоны сигнала и канала одинаковы.

16. Записан 20-минутный телефонный разговор. Каковы должны быть база B_k и полоса частот F_k канала, чтобы передать эту запись без искажений в течение 1 минуты? Динамические диапазоны сигнала и канала одинаковы.

17. Рассчитайте число каналов n радиовещательных ($F_1 = 5$ кГц) и телевизионных ($F_2 \approx 6.5$ МГц) сигналов в диапазоне длин волн $\lambda = 1 \dots 10$ м. Предусмотрите защитные интервалы шириной 10 % от максимальной частоты сигнала.

18. Определите число телевизионных программ, которое можно разместить в диапазоне световых волн (0.85...1.8 мкм) оптоволоконной линии связи. Максимальная полоса частот одной программы 8 МГц.

19. Вычислите энергию видеоимпульсов:

а) экспоненциального $u_1(t) = U_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$,

б) прямоугольного $u_2(t) = U_0, 0 < t < \tau_{\text{и}}$.

Здесь $U_0 = 10 \text{ В}$, $\alpha = 10^5 \text{ 1/с}$, $\tau_{\text{и}} = 1 \text{ мс}$.

20. По данным предыдущего упражнения вычислите энергию взаимодействия импульсов $u_1(t)$ и $u_2(t)$, а также энергию их суммы.

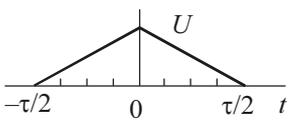
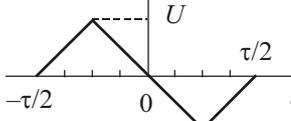
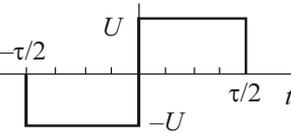
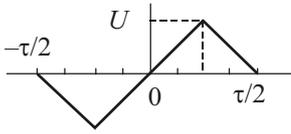
21. Определите энергию взаимодействия двух комплексных экспоненциальных сигналов $\dot{S}_1(t) = S_1 e^{j\omega_0 t}$ и $\dot{S}_2(t) = S_2 e^{-j\omega_0 t}$ на интервале времен T , который равен периоду их колебаний, т. е. $T = 2\pi / \omega_0$. Ортогональны или нет эти сигналы?

1.4. ЗАДАНИЕ

МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА

В табл. 1.3 и 1.4 заданы варианты и подварианты импульсного сигнала.

Таблица 1.3

Вариант	Сигнал $S(t)$	Вариант	Сигнал $S(t)$
0		5	
1		6	

Окончание табл. 1.3

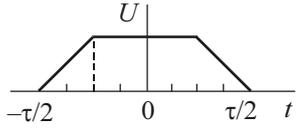
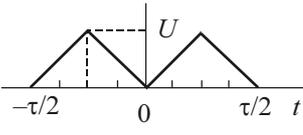
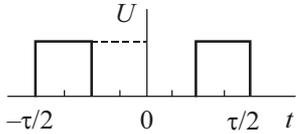
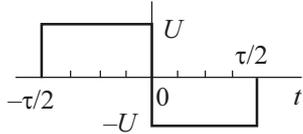
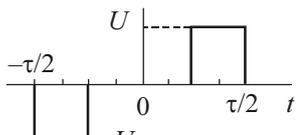
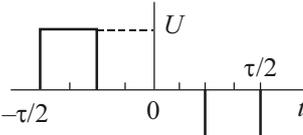
Вариант	Сигнал $S(t)$	Вариант	Сигнал $S(t)$
2		7	
3		8	
4		9	

Таблица 1.4

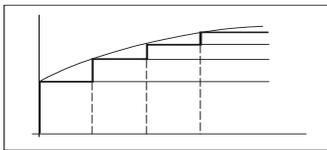
Подвариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U, \text{ В}$	10	8	4	2	1	10	8	4	2	1
$\tau, \text{ мс}$	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1
$T, \text{ мс}$	3	6	9	12	15	20	16	12	8	4

Требуется:

- а) записать математическую модель сигнала $S(t)$ через временные интервалы;
- б) построить сигнал графически с помощью программы Mathcad;
- в) рассчитать энергию E сигнала;
- г) вычислить среднюю мощность $P_{\text{ср}}$ сигнала, представляющего собой периодическую последовательность (с периодом T) исходного сигнала.

Глава 2

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ



Все, что нельзя выразить в цифрах, – не наука; это – мнение.

Лазарус Лонг

2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ВКЛЮЧЕНИЯ

Принцип динамического представления состоит в том, что реальный сигнал записывается не на отдельных временных интервалах, а совокупностью элементарных сигналов на всей оси времени. В качестве элементарных сигналов часто используются функции включения (Хевисайда) и дельта-функции (функции Дирака).

Рассмотрим импульс, показанный на рис. 2.1. Его можно записать на временных интервалах следующим образом:

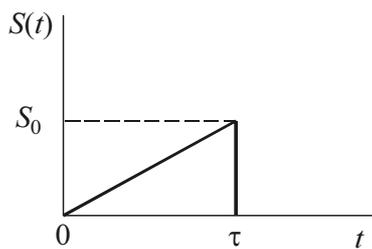


Рис. 2.1

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ S_0 t / \tau & 0 < t \leq \tau, \\ 0, & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (2.1)$$

Можно также записать его на всем бесконечном временном интервале с помощью комбинаций функций включения. Воспользуемся суммой этих функций. Тогда

$$S(t) = (S_0 t / \tau) [\sigma(t) - \sigma(t - \tau)]. \quad (2.2)$$

Следовательно, сумма функций включения «вырезает окно» (рис. 2.2, *a*) из сигнала $S(t)$, который теперь простирается на бесконечной оси времени, т. е. она описывает интервал $0 < t \leq \tau$ в выражении (2.1).

«Окно» можно задать и **произведением** функций включения $\sigma(t)\sigma(\tau-t)$ (рис. 2.2, *б*):

$$S(t) = (S_0 t / \tau) [\sigma(t)\sigma(\tau-t)]. \quad (2.3)$$

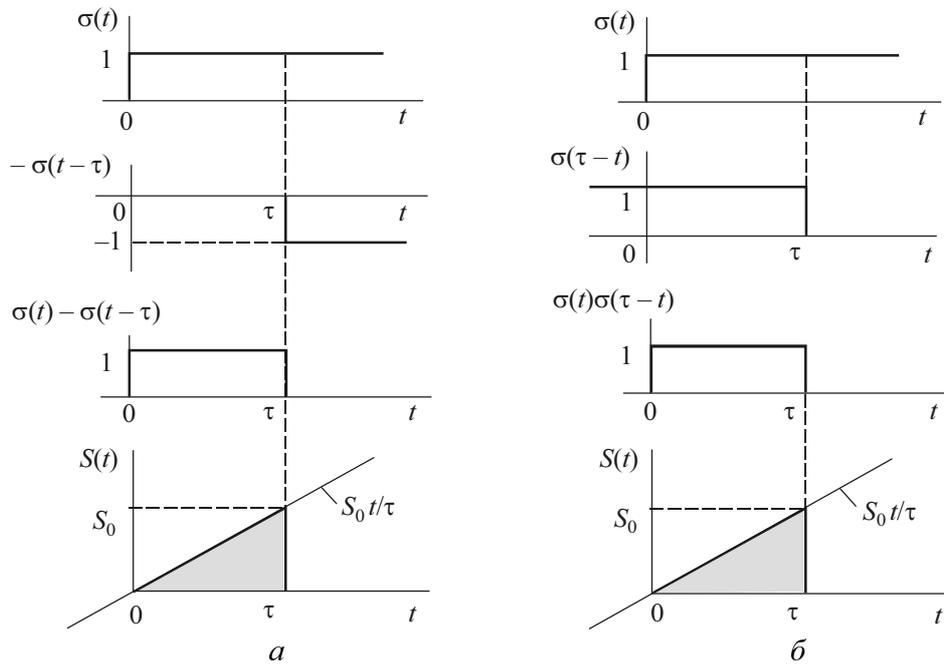


Рис. 2.2

Общий случай. Рассмотрим сигнал $S(t)$ (рис. 2.3, *a*), начинающийся с момента времени $t=0$. Представим его суммой ступенчатых функций, следующих во времени одна за другой с интервалом Δt .

Из построения очевидно, что при любом t текущее значение приблизительно равно

$$S(t) \approx \tilde{S}(t) = S_0 \sigma(t) + (S_1 - S_0) \sigma(t - \Delta t) + (S_2 - S_1) \sigma(t - 2\Delta t) + \dots, \quad (2.4)$$

$$S(t) \approx S_0 \sigma(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) \sigma(t - n\Delta t).$$

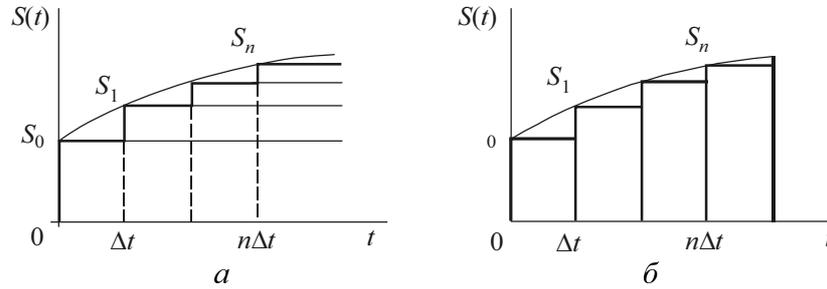


Рис. 2.3

Чем меньше интервал Δt , тем меньше будут приращения $(S_n - S_{n-1})$ и тем меньше будет различие между $S(t)$ и $\tilde{S}(t)$. При устремлении Δt к нулю дискретная переменная $n\Delta t$ превратится в непрерывную переменную t , а малые приращения $(S_n - S_{n-1})$ – в дифференциалы $ds = (dS/d\tau)d\tau$. При этом суммирование заменим интегрированием по формальной переменной τ . Тогда

$$S(t) = S_0\sigma(t) + \int_0^{\infty} S'(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau, \quad (2.5)$$

где $S'(\tau) = dS(\tau)/d\tau$ – производная сигнала.

2.1.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ

Представим рассмотренный ранее сигнал $S(t)$ в виде суммы прямоугольных импульсов длительностью Δt , примыкающих друг к другу (рис. 2.3, б). Первый импульс, начинающийся с момента $t=0$, запишем как $S_0(t) = S_0[\sigma(t) - \sigma(t - \Delta t)]$. На n -м отсчете элементарный импульс будет $S_n(t) = S_n[\sigma(t - n\Delta t) - \sigma(t - n\Delta t - \Delta t)]$. Тогда исходный сигнал, рассматриваемый как сумма примыкающих элементарных импульсов, примет вид

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n[\sigma(t - t_n) - \sigma(t - t_n - \Delta t)]. \quad (2.6)$$

Умножим и разделим правую часть формулы (2.6) на величину интервала Δt :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{[\sigma(t - t_n) - \sigma(t - t_n - \Delta t)]}{\Delta t} \Delta t. \quad (2.6')$$

Точность представления возрастает при $\Delta t \rightarrow 0$. При этом суммирование опять заменим интегрированием по формальной переменной τ , дифференциал которой $d\tau$ будет аналогичен Δt . Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\sigma(t - t_n) - \sigma(t - t_n - \Delta t)] / \Delta t = \delta(t - \tau),$$

то с учетом перечисленного выше формула (2.6') примет вид

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) идентична выражению (1.25), и, следовательно, как было показано в примере 3 главы 1, дельта-функция $\delta(t - \tau)$ действует на сигнал $S(t)$ как временной фильтр, т. е. результат интегрирования даст значение сигнала в той точке $t = \tau$, где находится дельта-импульс.

2.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Линейно нарастающее напряжение (рис. 2.4). Его можно задать выражением

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^t U \sigma(t) dt.$$

Так как функция включения $\sigma(t)$ существует только при $t \geq 0$, то нижний предел интегрирования будет равен нулю и

$$S_1(t) = U \int_0^t dt = Ut \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{или } S_1(t) = Ut \sigma(t).$$

На рис. 2.4 показаны сигнал $S_1(t)$ и подынтегральное выражение $U\sigma(t)$.

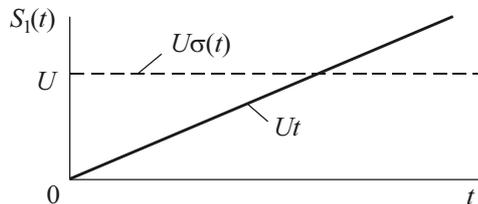


Рис. 2.4

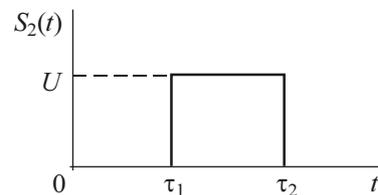


Рис. 2.5

Пример 2. Прямоугольный импульс. С помощью функций включения сигнал запишем в виде

$$S_2(t) = U[\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)].$$

Здесь разность функций включения задает «окно» (интервал) на оси времени $[\tau_1, \tau_2]$. Так как функция включения $\sigma(t)$ связана с дельта-функцией $\delta(t)$ через интеграл, то

$$S_2(t) = U \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - \tau_1) - \delta(t - \tau_2)] dt.$$

Пример 3. Производная прямоугольного импульса. Исходный сигнал показан на рис. 2.5. С помощью функций включения исходный сигнал запишем

$$S_2(t) = U[\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)].$$

Тогда после дифференцирования получим

$$S_2'(t) = U[\sigma'(t - \tau_1) - \sigma'(t - \tau_2)] = U[\delta(t - \tau_1) - \delta(t - \tau_2)].$$

График $S_2'(t)$ приведен на рис. 2.6.

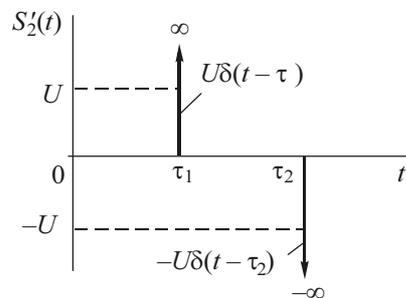


Рис. 2.6

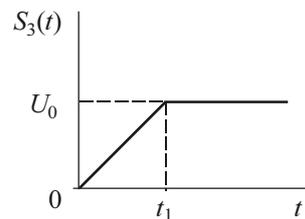


Рис. 2.7

Пример 4. Сигнал линейного перехода из состояния 0 в состояние U_0 (рис. 2.7).

$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0(t/t_1), & 0 < t < t_1, \\ U_0, & t > t_1. \end{cases}$$

Используем функцию Хевисайда и согласно (2.5) запишем

$$S_3(t) = S_0\sigma(t) + \int_0^{\infty} S'(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} \frac{U_0}{t_1} \sigma(t-\tau)d\tau = \frac{U_0}{t_1} \int_0^{t_1} \sigma(t-\tau)d\tau.$$

Здесь $S_0 = 0$, а $S'(\tau) = dS/d\tau = U_0/t_1$, и суть полученной формулы состоит в том, что высота элементарных ступенек, из которых суммируется сигнал на участке от 0 до t_1 , постоянна во времени.

Пример 5. Нарастающая экспонента

$$S_4(t) = U(2 - e^{-\alpha t}), \quad 0 \leq t < t_1 = 5 \text{ мс},$$

где $U = 2$ В, $\alpha = 2$ 1/мс. Рассматривая его как сумму примыкающих прямоугольных импульсов длительностью $\tau_{\text{и}} = \Delta t = 0.5$ мс, определим количество импульсов и их амплитуды.

Согласно (2.6) сигнал можно записать

$$S(t) = \sum_{n=0}^N S_n(t) = \sum_{n=0}^N S_n[\sigma(t-t_n) - \sigma(t-t_n - \Delta t)].$$

Количество импульсов: $N = t_1 / \tau_{\text{и}} + 1 = 11$. Подставляя соответствующие интервалы времени в формулу $S_4(t) = U(2 - e^{-\alpha t})$, получим

$n\tau_{\text{и}}, \text{ мс}$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$S_n, \text{ В}$	2.0	2.79	3.26	3.55	3.73	3.84	3.90	3.94	3.96	3.98	3.99

Пример 6. Фильтрующее действие дельта-функции на экспоненциальный сигнал. Определим значение сигнала $S(t) = Ue^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$, в момент времени t_0 . Тогда

$$S_5(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ue^{-\alpha t} \delta(t) dt.$$

Дельта-функция существует только в точке $t = t_0$.

$$S_5(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ue^{-\alpha t} \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ue^{-\alpha t_0} \delta(t-t_0) dt = Ue^{-\alpha t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = Ue^{-\alpha t_0}.$$

Поэтому она окажет на сигнал фильтрующее действие.

2.3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Представьте сигнал $S_3(t)$, показанный на рис. 2.7, суммой ступенчатых функций вида (2.4), следующих во времени одна за другой с интервалом Δt ; при этом $U_0 = 10$ В, $t_1 = 10$ мс и $\Delta t = 1$ мс.

2. Запишите математическую модель и дайте динамическое представление производной сигнала $S_3(t)$ (рис. 2.7), воспользовавшись функциями $\sigma(t)$ и $\delta(t)$.

3. Графики функций показаны на рис. 2.8. Дайте динамическое представление сигналов $u(t)$ и $u_1(t)$, используя функцию Хевисайда $\sigma(t)$.

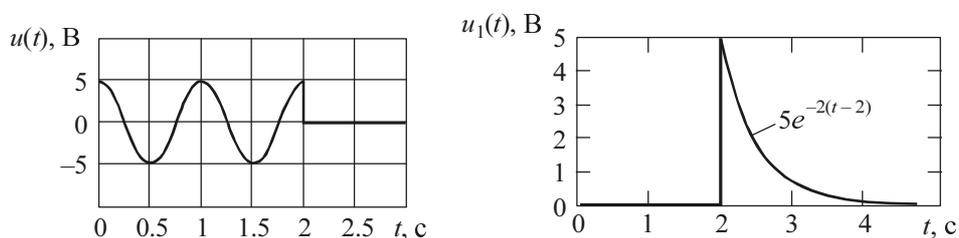


Рис. 2.8

4. Воспользовавшись формулой (2.5), дайте динамическое представление сигналов:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ut^2, & t > 0, \end{cases} \quad u_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ue^{-\alpha t}, & t > 0. \end{cases}$$

Поясните суть результата.

5. На рис. 2.9 приведены импульсные сигналы $u_4(t)$ и $u_5(t)$. Определите амплитуду и площадь этих импульсов при $\alpha \rightarrow \infty$ и убедитесь, что в пределе эти импульсы описываются дельта-функцией $\delta(t)$.

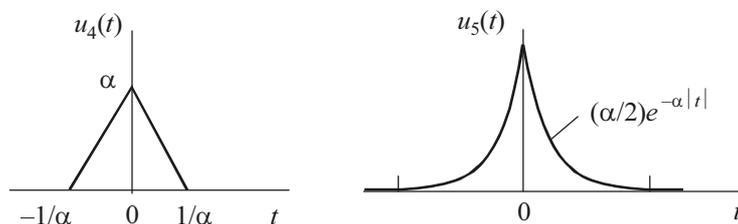


Рис. 2.9

6. Вычислите

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)] dt; \quad S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \tau_1) \sigma(\tau_2 - t) dt;$$

$$S_3 = \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)]^2 dt,$$

где $\tau_2 > \tau_1 > 0$.

7. Вычислите интегралы и изобразите графически следующие сигналы:

$$S_1(t) = \int_0^t [\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)] dt; \quad S_2(t) = \int_0^t \sigma(t - \tau_1) \sigma(\tau_2 - t) dt;$$

$$S_3(t) = \int_0^t [\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)]^2 dt,$$

где $\tau_2 > \tau_1 > 0$.

8. Найдите

$$u_1(t) = \int_0^{\infty} [\delta(t - \tau_1) - \delta(t - \tau_2)] dt; \quad u_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \delta(t) dt.$$

2.4. ЗАДАНИЕ

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

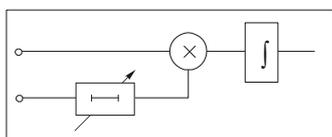
В табл. 1.3 и 1.4 заданы варианты и подварианты импульсных сигналов.

Требуется:

- дать динамическое представление сигнала прямыми линиями и суммой функций Хевисайда;
- то же, но с помощью произведений функций Хевисайда.

Глава 3

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ



Дело науки – возведение всего
сущего в мысль.

Александр Герцен

3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1.1. АКФ НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

Корреляционное представление, или *корреляционный анализ*, состоит в количественном выражении *степени сходства* различных сигналов. Для этого служат *корреляционные функции*.

Для вещественного сигнала $S(t)$ с конечной энергией автокорреляционная функция (АКФ) выражает степень связи между сигналом и его сдвинутой на время τ копией $S(t - \tau)$ и определяется выражением

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t - \tau)dt . \quad (3.1)$$

Структурная схема устройства – *коррелометра*, реализующего алгоритм (3.1), показана на рис. 3.1 и содержит: перемножитель сигналов ПС, цепь временной задержки ЦЗ и интегратор И.

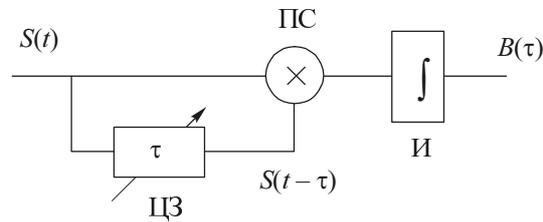


Рис. 3.1

Свойства АКФ

1. Она максимальна при $\tau = 0$ (любой сигнал полностью коррелирован с самим собой) и равна энергии сигнала

$$B(0) = E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt. \quad (3.2)$$

Если размерность сигнала – напряжение, то размерность АКФ будет $[B^2 \cdot c]$.

2. АКФ – четная функция своего аргумента

$$B(\tau) = B(-\tau). \quad (3.3)$$

Следовательно, безразлично, сдвигать копию относительно сигнала вправо на величину τ или сигнал влево относительно своей копии. Поэтому выражение (3.1) можно записать в общем виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t+\tau)S(t)dt. \quad (3.4)$$

3. С увеличением абсолютного значения τ АКФ убывает $B(\tau) < B(0)$ и при $\tau \rightarrow \infty$ (или $\tau > \tau_{\text{и}}$ для импульсного сигнала длительностью $\tau_{\text{и}}$) $B(\infty) = 0$.

4. Если сигнал не содержит дельта-функций, то его АКФ будет непрерывной.

5. АКФ не несет информации о начальном положении t_0 сигнала на временной оси, а зависит лишь от взаимного сдвига τ сигнала и копии.

6. АКФ может быть введена и для комплексного сигнала $\dot{S}(t)$ и сопряженного с ним $\dot{S}^*(t)$:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau) dt, \quad (3.5)$$

а также через их спектры $\dot{S}(\omega)$ и $\dot{S}^*(\omega)$ (спектральное представление дано в главе 7)

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad (3.6)$$

где $|S(\omega)|^2$ – энергетический спектр сигнала. Если задана АКФ $B(\tau)$, то энергетический спектр определяется через прямое преобразование Фурье от АКФ:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.6')$$

АКФ часто нормируют по энергии сигнала. Такая функция называется *нормированной АКФ*

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{E} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-\tau)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt}. \quad (3.7)$$

Нормированная АКФ обладает всеми ранее перечисленными свойствами за исключением размерности, и она равна единице при нулевом сдвиге (рис. 3.2).

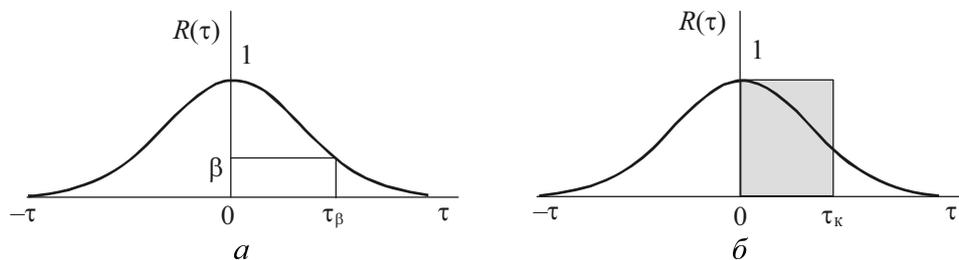


Рис. 3.2

Можно указать такой временной интервал, называемый **интервалом корреляции** τ_k , что при $\tau > \tau_k$ значения $S(t)$ и $S(t-\tau)$ практически **не коррелированы**, т. е. $B(\tau = \tau_k) = 0$ и $R(\tau = \tau_k) = 0$.

Если $R(\tau)$ проходит через нуль, то интервал корреляции τ_k определяется координатой τ_0 , где $R(\tau = \tau_0) = 0$. Если нормированная АКФ не пересекает ось абсцисс, то интервал корреляции определяется либо долей β от $R(0) = 1$,

либо полушириной основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой $R(\tau)$. В первом случае для нахождения τ_β (рис. 3.2, а) нужно решить уравнение

$$R(\tau_\beta) = \beta, \quad (3.8)$$

а во втором для τ_k (рис. 3.2, б) необходимо вычислить интеграл

$$\tau_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

3.1.2. АКФ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

У периодического сигнала с периодом T энергия бесконечна, а потому АКФ вычисляются усреднением за период произведения сигнала и его копии:

$$K(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t-\tau)dt = \frac{1}{T} B_T(\tau), \quad (3.10)$$

где $B_T(\tau)$ – АКФ с размерностью энергии, вычисленной за период колебания T :

$$B_T(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t-\tau)dt.$$

При этом АКФ (3.10) имеет размерность мощности.

Свойства АКФ

1. Она периодическая функция с периодом T сигнала:

$$K(\tau) = K(\tau + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.11)$$

2. АКФ обладает ранее перечисленными свойствами для непериодического сигнала (за исключением третьего), но с тем отличием, что имеет иную размерность – мощности. В частности, при $\tau = 0$ это *средняя мощность* сигнала

$$K(0) = P_{\text{cp}} = B(0)/T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t)dt. \quad (3.12)$$

Если размерность сигнала – напряжение [В], то размерность АКФ будет [В²].

3.1.3. ВКФ НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) определяет степень сходства двух различных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, сдвинутых на интервал τ :

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t-\tau)dt. \quad (3.13)$$

Структурная схема устройства, реализующего алгоритм (3.13), показана на рис. 3.3. Здесь обозначения элементов те же, что и на рис. 3.1.

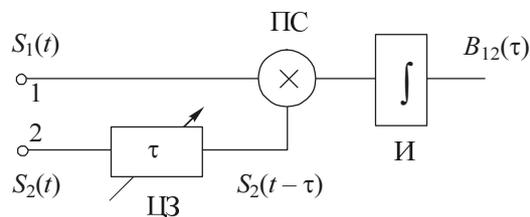


Рис. 3.3

Если на входах 1 и 2 рис. 3.3 сигналы поменять местами, то устройство будет измерять $B_{21}(\tau)$ – степень сходства второго сигнала $S_2(t)$ с первым $S_1(t)$:

$$B_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t)S_1(t-\tau)dt. \quad (3.14)$$

Очевидно, что АКФ лишь частный случай взаимной корреляционной функции (ВКФ), когда сигналы одинаковы, т. е. $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$.

Свойства ВКФ

1. ВКФ содержит информацию о начальном положении t_0 (взаимном смещении) сигналов (см. рис. 3.8).
2. $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, где E_1 и E_2 – энергии сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.
3. $B_{21}(\tau) = B_{12}(-\tau)$, взаимная перестановка сигналов равносильна изменению знака τ .

4. При $\tau = 0$ ВКФ не обязательно максимальна (см. рис. 3.11, б) и определяет взаимную энергию (энергию взаимодействия) E_{12} сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$:

$$B_{12}(0) = E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t)dt. \quad (3.15)$$

5. С ростом абсолютного значения τ ВКФ стремится к нулю:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_{12}(\tau) = 0.$$

3.1.4. ВКФ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

Для периодических сигналов понятие ВКФ используется только тогда, когда сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ имеют один и тот же период.

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t)S_2(t-\tau)dt. \quad (3.16)$$

Свойства ВКФ

1. Она так же, как и АКФ, – *периодическая функция* с периодом T сигнала

$$K(\tau) = K(\tau + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.17)$$

2. ВКФ обладает ранее перечисленными свойствами ВКФ непериодических сигналов (за исключением пятого), но с тем отличием, что имеет иную размерность – мощности.

3.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. АКФ прямоугольного импульса. На рис. 3.4 пояснено построение АКФ: рис. 3.4, а – сигнал; рис. 3.4, б – запаздывающая на τ копия; рис. 3.4, в – произведение сигнала и копии, при этом через «П» обозначена площадь произведения; рис. 3.4, г – АКФ, численно равная площади под $S(t)S(t-\tau)$ для каждого значения сдвига τ .

Вычислим АКФ. Для $\tau = 0$

$$B(0) = E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau_{\text{и}}} S_0^2 dt = S_0^2(t_0 + \tau_{\text{и}} - t_0) = S_0^2 \tau_{\text{и}}.$$

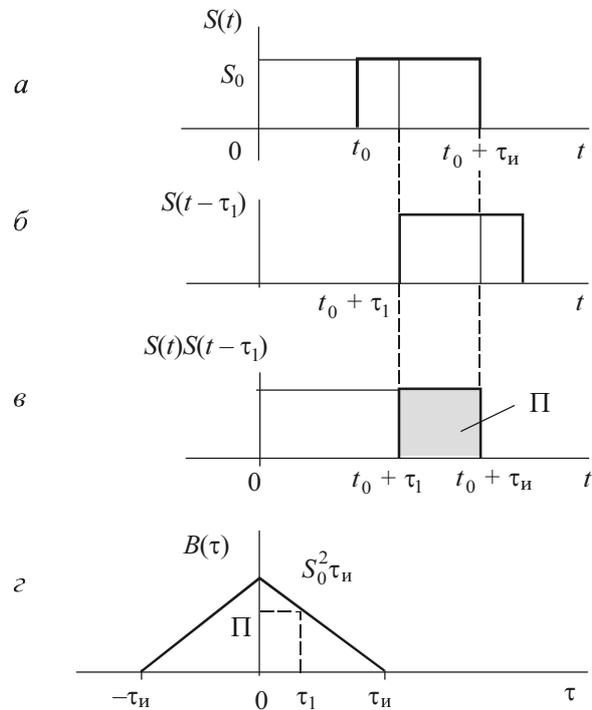


Рис. 3.4

Интеграл от произведения сигнала на сдвинутую вправо копию будет

$$B(\tau) = \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau_n} S_0^2 dt = S_0^2(t_0 + \tau_n - t_0 - \tau) = S_0^2(\tau_n - \tau).$$

Интеграл от произведения сигнала на сдвинутую влево копию будет

$$B(\tau) = \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau_n} S_0^2 dt = S_0^2(t_0 + \tau_n - t_0 - \tau) = S_0^2(\tau_n - \tau).$$

Окончательно можно записать

$$B(\tau) = \begin{cases} S_0^2(\tau_n - |\tau|), & |\tau| \leq \tau_n, \\ 0, & |\tau| > \tau_n. \end{cases} \quad (3.18)$$

Таким образом, АКФ прямоугольного импульса имеет вид треугольника с основанием $2\tau_{\text{и}}$ и высотой, равной энергии сигнала. Интервал корреляции $\tau_{\text{к}}$ равен длительности импульса $\tau_{\text{и}}$.

Пример 2. АКФ пары импульсов. Рис. 3.5 поясняет построение АКФ в этом случае. Импульсы сдвинуты между собой на время T_1 .

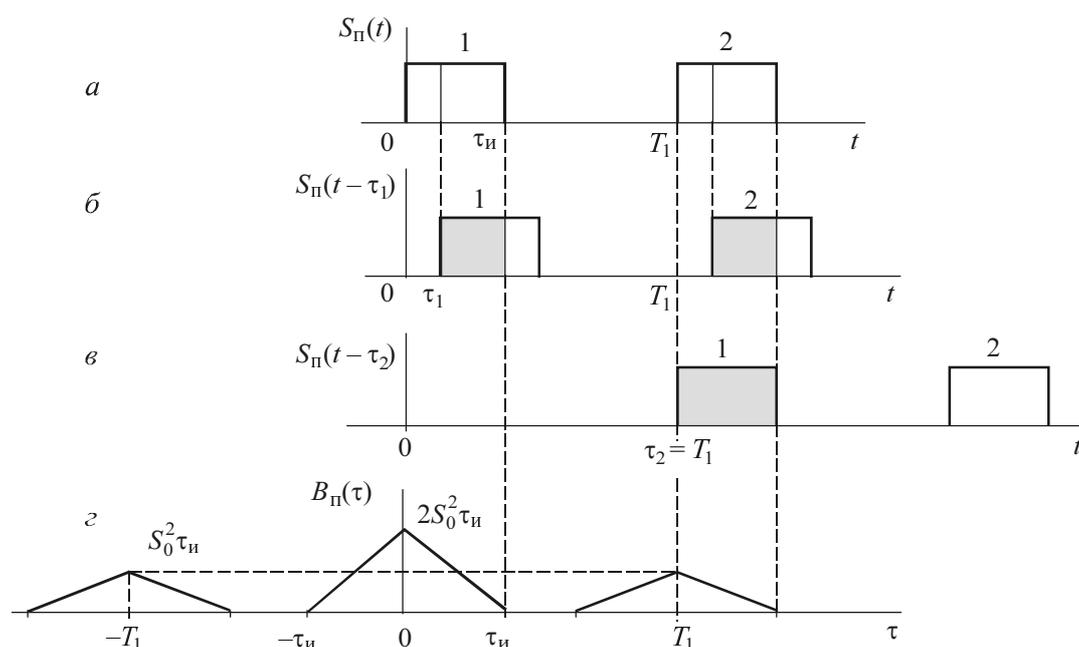


Рис. 3.5

При $\tau = 0$ перекрываются полностью оба импульса (1 и 2) сигнала $S_{\text{п}}(t)$ и его копии $S_{\text{п}}(t - \tau)$. Поэтому энергия увеличивается вдвое по сравнению с одиночным импульсом. С ростом τ площадь перекрытия $S_{\text{п}}(t)$ и $S_{\text{п}}(t - \tau)$ уменьшается и при $\tau = \tau_{\text{и}}$ импульсы не перекрываются и $B(\tau) = 0$. При $\tau = T_1$ полностью перекрываются второй импульс сигнала и первый импульс копии, поэтому АКФ максимальна, но максимум вдвое меньше, чем при $\tau = \tau_0$. При дальнейшем увеличении сдвига АКФ уменьшается и при $\tau = \tau_{\text{к}} = T_1 + \tau_{\text{и}}$ обращается в нуль. Аналогичный результат получаем и при смещении копии сигнала влево.

Предлагается самостоятельно проанализировать случай, когда $T_1 < 2\tau_{\text{и}}$.

Пример 3. АКФ гармонического колебания. Рассмотрим гармоническое колебание с амплитудой S_m , частотой ω_0 (периодом $T = 2\pi/\Omega$) и начальной фазой φ_0 (рис. 3.6, а):

$$S(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

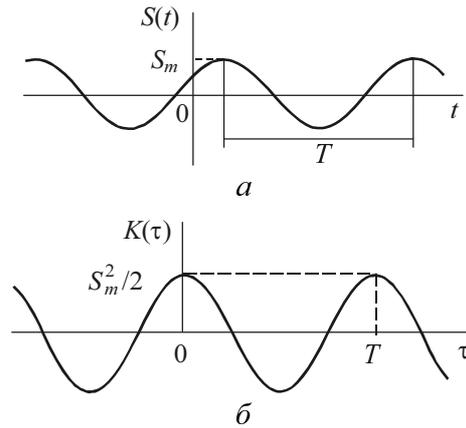


Рис. 3.6

Вычислим АКФ по формуле (3.10):

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) S_m \cos(\omega_0(t - \tau) + \varphi_0) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \frac{1}{2} S_m \cos(\omega_0 + \varphi_0) \cos \omega_0 \tau dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \frac{1}{2} S_m \sin(\omega_0 + \varphi_0) \sin \omega_0 \tau dt = \\ &= \frac{1}{2} S_m^2 \cos \omega_0 \tau \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \frac{1}{2} S_m^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) dt + \\ &+ \frac{1}{2} S_m^2 \sin \omega_0 \tau \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2(\omega_0 t + \varphi_0) dt . \end{aligned}$$

Два последних интеграла обращаются в нуль, и потому окончательно имеем

$$K(\tau) = \frac{S_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) проиллюстрировано графически на рис. 3.6, б.

Таким образом, АКФ обладает перечисленными ранее свойствами. Подчеркнем еще тот факт, что в выражение (3.19) не вошла начальная фаза φ_0 – АКФ от нее не зависит. При $\tau = 0$ $K(0) = S_m^2 / 2$ – это средняя мощность гармонического колебания.

Пример 4. АКФ периодической последовательности прямоугольных импульсов. На рис. 3.7, а показана последовательность импульсов, а на рис. 3.7, б – ее АКФ. Согласно (3.10) каждый импульс $K(\tau)$ совпадает по форме с АКФ одиночного импульса $B(\tau)$, но имеет различия по величине и размерности. В данном случае при $\tau = 0$ АКФ $K(0) = B(0) / T = S_0^2 \tau_{и} / T$ – это средняя мощность сигнала за период.

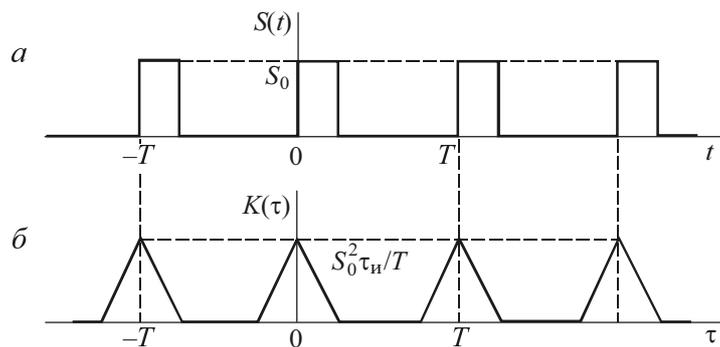


Рис. 3.7

Пример 5. ВКФ двух прямоугольных импульсов. Рис. 3.8 поясняет построение ВКФ. При сдвиге второго импульса на $\tau_1 = t_0 - \tau_{и2}$ его задний фронт «коснется» переднего фронта первого импульса и площадь перекрытия импульсов будет нарастать. При сдвиге $\tau_2 = t_0 + \tau_{и1} - \tau_{и2}$, когда задние фронты импульсов совпадут, площадь перекрытия будет наибольшей (на рисунке окрашена серым). Такой же она остается до смещения $\tau = t_0$, при этом задний фронт второго импульса «касается» переднего фронта первого импульса. При $\tau = \tau_3 = t_0 + \tau_{и1}$ второй импульс «сползает» с первого и ВКФ будет равна нулю.

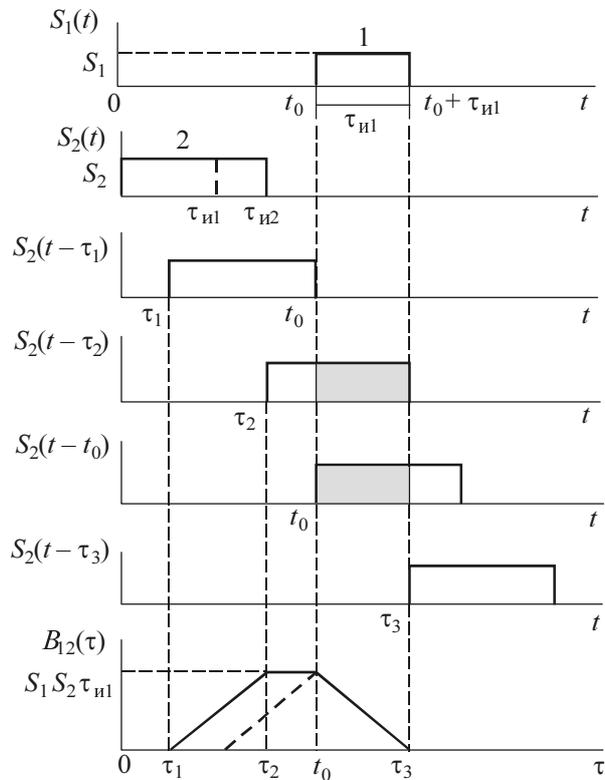


Рис. 3.8

На нижнем графике рис. 3.8 штрихпунктирной линией показана ВКФ для случая, когда длительность второго импульса равна длительности первого.

Пример 6. ВКФ прямоугольного и несимметричного треугольного импульсов. Импульсы и их математические модели приведены на рис. 3.9.

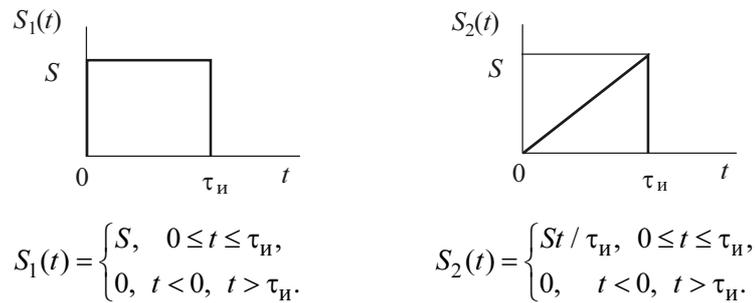


Рис. 3.9

Рассчитаем ВКФ:

- на интервале $0 \leq \tau \leq \tau_n$

$$B_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_n} S^2 \frac{t-\tau}{\tau_n} dt = \frac{S^2}{2\tau_n} (\tau_n - \tau)^2;$$

- на интервале $-\tau_n \leq \tau \leq 0$

$$B_{12}(\tau) = \int_0^{\tau_n+\tau} S^2 \frac{t-\tau}{\tau_n} dt = \frac{S^2}{2\tau_n} (\tau_n^2 - \tau^2);$$

- при $|\tau| \geq \tau_n$ $B_{12}(\tau) = 0$.

Объединив результаты, окончательно запишем

$$B_{12}(\tau) = \begin{cases} S^2(\tau_n - \tau)^2 / 2\tau_n, & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ S^2(\tau_n^2 - \tau^2) / 2\tau_n, & -\tau_n \leq \tau \leq 0, \\ 0, & |\tau| \geq \tau_n. \end{cases} \quad (3.20)$$

График ВКФ $B_{12}(\tau)$, построенный по выражению (3.20), показан на рис. 3.10, а; на рис. 3.10, б дан график ВКФ $B_{21}(\tau)$. Если проделать аналогичный расчет по формуле (3.13), то можно убедиться, что $B_{21}(\tau) = B_{12}(-\tau)$.

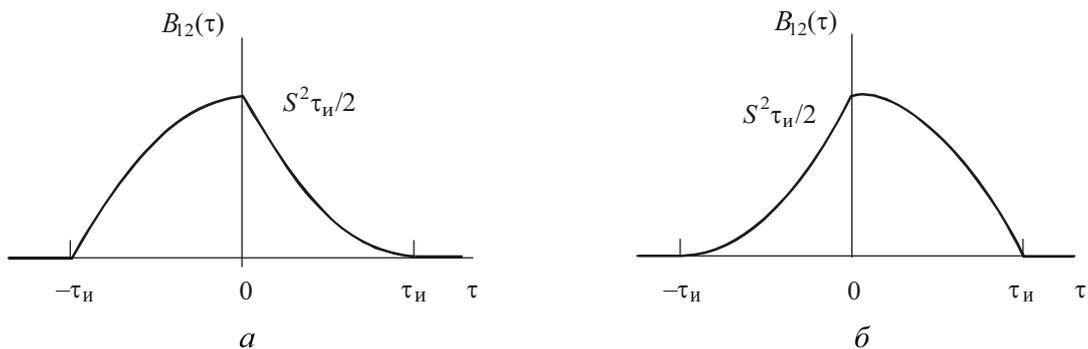


Рис. 3.10

Пример 7. ВКФ двух несимметричных треугольных импульсов. Решим этот пример с помощью Mathcad:

$$t := -2, -1.99 \dots 2 \quad \tau := -2, -1.99 \dots 2 \quad S := 2 \quad \tau_{\text{и}} := 1.$$

$$S_1(t) := \begin{cases} S \frac{t}{\tau_{\text{и}}} & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad S_2(t) := S \cdot [\Phi(t) - \Phi(t - \tau_{\text{и}})] - S_1(t).$$

$$B_{12}(\tau) := \int_{\tau}^2 S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) dt \quad B_{21}(\tau) := B_{12}(\tau).$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ – функция Хевисайда (так она обозначается в Mathcad).

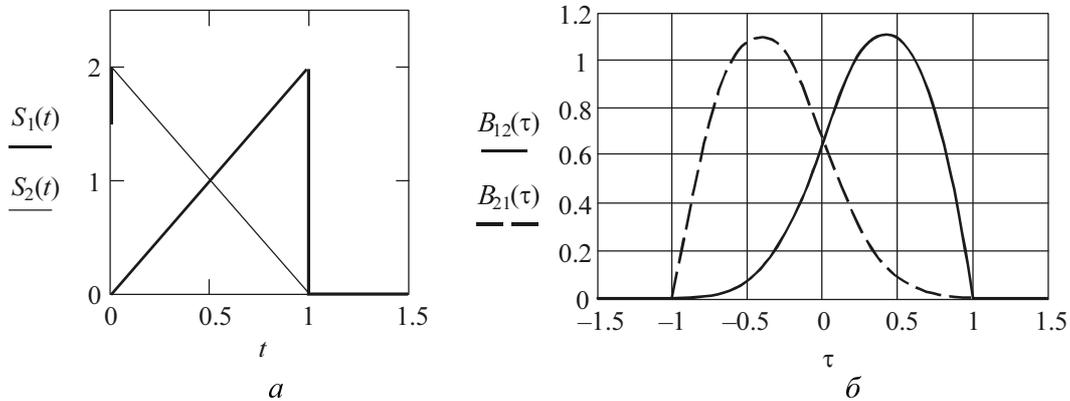


Рис. 3.11

Результаты расчетов приведены на рис. 3.11, *a* – сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$; рис. 3.11, *б* – ВКФ $B_{12}(\tau)$ и $B_{21}(\tau)$.

Пример 8. ВКФ двух гармонических колебаний

$$S_1(t) = S_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1), \quad S_2(t) = S_2 \cos(\omega_0 t - \varphi_2),$$

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1) S_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi_2] dt =$$

$$= \frac{S_1 S_2}{2} \cos[\omega_0 \tau - (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (3.21)$$

При $S_2(t) = S_1(t)$ ВКФ превращается в АКФ:

$$K_{12}(\tau) = K(\tau) = \frac{S_1^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (3.22)$$

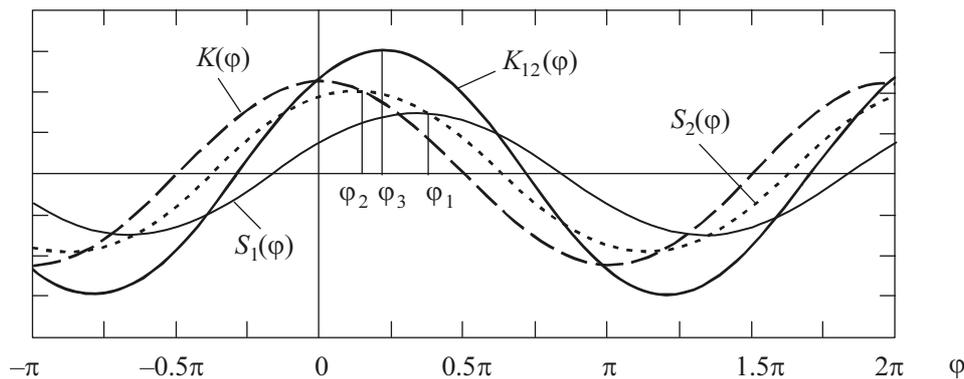


Рис. 3.12

Сигналы и корреляционные функции показаны на рис. 3.12. Здесь φ – это аргумент косинуса: $\varphi = \omega_0 t - \varphi_1$ – для $S_1(\varphi)$; $\varphi = \omega_0 t - \varphi_2$ – для $S_2(\varphi)$; $\varphi = \omega_0 \tau - \varphi_3$ – для $K_{12}(\varphi)$, где $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi = \omega_0 \tau - K(\varphi)$. ВКФ несет информацию о начальных сдвигах сигналов.

3.3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите АКФ ограниченных во времени сигналов:

$$S_1(t) = U_m [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})]; \quad S_2(t) = U_m \cos(\omega_0 t) [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})];$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0, \quad T_0 = \tau_{\text{и}} / 2.$$

Постройте графики $K(\tau)$.

2. Рассчитайте АКФ периодических сигналов:

$$S_3(t) = U_m \sin \omega_0 t; \quad S_4(t) = U_m \sum_{-\infty}^{\infty} [\sigma(t - nT) - \sigma(t - \tau_{\text{и}} - nT)].$$

3. Сравните АКФ сигналов $S_2(t)$ и $S_5(t)$; $S_3(t)$ и $S_4(t)$. Поясните различие АКФ периодических и финитных сигналов.

4. Как изменится АКФ сигналов $S_1(t)$, ..., $S_5(t)$, если вместо τ взять $-\tau$?

5. Вычислите, используя АКФ, полную энергию сигналов $S_1(t)$, $S_2(t)$ и среднюю мощность сигналов $S_3(t)$, $S_4(t)$.

6. Найдите и изобразите АКФ пары прямоугольных импульсов (рис. 3.13, а).

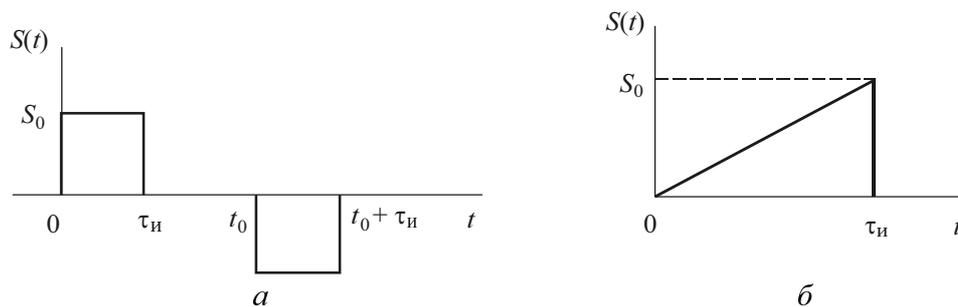


Рис. 3.13

7. Найдите выражение для АКФ несимметричного треугольного импульса (рис. 3.13, б). Постройте график.

8. Определите и постройте АКФ экспоненциального импульса:

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t} \quad \text{при } t > 0, \alpha > 0.$$

9. По найденному в предыдущем упражнении выражению АКФ определите энергетический спектр импульса.

10. Как связан интервал корреляции τ_k сигнала $S_1(t)$ с длительностью импульса τ_n и шириной первого лепестка Δf его спектра?

11. По условию упражнения 9 определите интервал корреляции τ_k .

12. Определите ВКФ сигналов: $u_1(t) = U_1 e^{-\alpha t}$ и $u_2(t) = U_2 \sigma(t)$.

13. Вычислите ВКФ сигналов: $u_1(t) = U_m \cos \omega_0 t$; $u_2(t) = U_m \sin \omega_0 t$.

Определите, при каком временном сдвиге обеспечивается наибольшее сходство $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

14. Определите и постройте ВКФ прямоугольного и несимметричного треугольного (рис. 3.13, б) импульсов с амплитудой S_0 и длительностью τ_n .

3.4. ЗАДАНИЕ

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

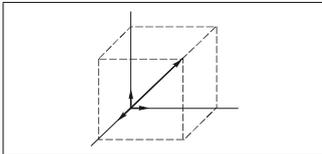
В табл. 1.3 и 1.4 заданы варианты и подварианты импульсных сигналов $S(t)$.

Требуется:

- а) вывести выражение для вычисления АКФ;
- б) построить график $B(\tau)$;
- в) рассчитать энергию сигнала.

Глава 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ



А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит.

М.В. Ломоносов

4.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

4.1.1. ПРОСТРАНСТВО СИГНАЛОВ

Временное представление сигналов в виде графиков и осциллограмм стало привычным, для него предназначены осциллографы. С одной стороны, оно наглядно, но, с другой стороны, на плоскости сигналу соответствует сложная функция времени. В современной теории [1–3, 7, 8, 10] сигналы удобно изображать как векторы или точки в функциональном пространстве – пространстве сигналов. Такое представление базируется на функциональном анализе – разделе математики, обобщающем представления о геометрической структуре пространства и позволяющем создать стройную теорию сигналов.

В обычном трехмерном пространстве вектор S можно выразить его составляющими по координатному базису единичных векторов i, j, k (рис. 4.1):

$$S = s_1 i + s_2 j + s_3 k. \quad (4.1)$$

Коэффициенты s_1, s_2, s_3 представляют собой проекции вектора S на координатные оси (базис) i, j, k и называются *координатами* вектора S . Таким образом, вектор S в трехмерном пространстве целиком определяется совокупностью своих координат $S = (s_1, s_2, s_3)$.

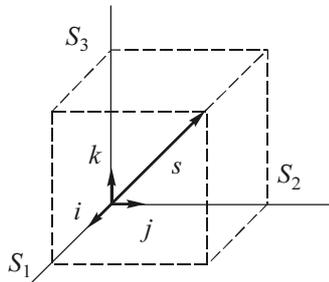


Рис. 4.1

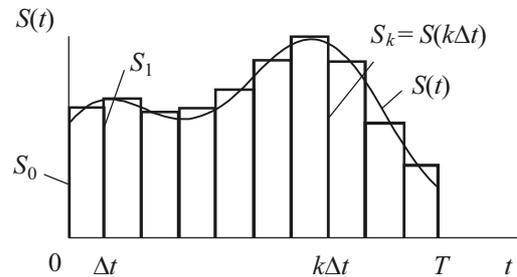


Рис. 4.2

Для случая n -мерного пространства сигналов обратимся к ранее рассмотренному динамическому представлению сигналов последовательностью прямоугольных импульсов, имеющих на интервалах $n\Delta t$ значения $S_n = S(n\Delta t)$ (рис. 4.2). Теперь представим условно $S(t)$ вектором S , для определения которого потребуется $n = T / \Delta t$ координат:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \varphi_k(t),$$

где s_k – проекции вектора S на координатные оси; $\varphi_k(t) = \varphi(t - k\Delta t)$ – элементарные базисные функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \Delta t], \\ 0, & t \notin [0, \Delta t], \end{cases} \quad \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi^2(t) dt = 1.$$

Вектор S в n -мерном пространстве единичных ортов φ_k полностью определяется его проекциями (координатами)

$$S = (s_0, s_1, \dots, s_k, \dots, s_{n-1}).$$

Принято различать следующие пространства сигналов [1–3, 7, 8, 10]:

- линейное,
- нормированное,
- метрическое,
- со скалярным произведением.

4.1.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть имеется некоторое множество сигналов

$$M = \{S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t), \dots\} = \{S_0, S_1, \dots, S_n, \dots\}.$$

Эти сигналы объединены некоторыми общими свойствами.

Множество M образует *вещественное линейное пространство*, если для его элементов (сигналов) выполняются следующие аксиомы.

1. Любой сигнал $S_k \in M$ при любых t принимает вещественные значения.

2. Если $S_k \in M$ и $S_n \in M$, то $S_k + S_n \in M$, т. е. при суммировании общие свойства сохраняются. Операция суммирования коммутативна: $S_k + S_n = S_n + S_k$ и ассоциативна: $S_k + (S_m + S_n) = (S_k + S_m) + S_n$.

3. Для любого сигнала $S_k \in M$ и вещественного числа α определен сигнал $\alpha S_k \in M$.

4. Множество M содержит нулевой элемент \emptyset , такой что $S_k + \emptyset = S_k$ для всех $S_k \in M$.

Если число n членов множества стремится к бесконечности, то принято говорить о *бесконечном* пространстве L .

В случае, когда математические модели – комплексные функции, то, допуская в аксиоме 3 умножение на комплексное число, приходим к *комплексному линейному пространству*.

4.1.3. НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пространство L называется *нормированным*, если введено понятие *нормы*, т. е. расстояния между началом координат и какой-либо точкой пространства. Каждому вектору $S_k \in M$ однозначно ставится в соответствие число $\|S_k\|$. При этом должны выполняться следующие аксиомы нормированного пространства.

1. Норма положительна, т. е. $\|S_k\| \geq 0$; нулю она равна тогда, когда $S_k = \emptyset$.

2. Для любого α справедливо равенство $\|\alpha S_k\| = |\alpha| \|S_k\|$.

3. Если S_k и S_n – два вектора из L , то выполняется неравенство треугольника: $\|S_k + S_n\| \leq \|S_k\| + \|S_n\|$.

Для аналоговых вещественных и комплексных сигналов норму соответственно запишем

$$\|S\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt} = \sqrt{E}; \quad \|S\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S(t)S^*(t) dt} = \sqrt{E}, \quad (4.2)$$

где $*$ – символ комплексно-сопряженной величины; E – энергия сигнала;

$$E = \|S\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt. \quad (4.3)$$

Пространство L , образованное множеством сигналов с конечной нормой (энергией), называется *пространством* L_2 . Если такие сигналы определены на интервале $(0, T)$, то используем обозначение $L_2(0, T)$ или $L_2(T)$, если определены на бесконечном интервале – то обозначение $L_2(-\infty, \infty)$ или $L_2(\infty)$.

4.1.4. МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пространство называется *метрическим*, если введен способ определения *метрики* – расстояния $d(S_k, S_n)$ (или $d_{k,n}$) между его двумя точками, т. е. между элементами $S_k, S_n \in L$. Метрика – неотрицательное число $d_{k,n}$, которое независимо от способа задания должно удовлетворять следующим аксиомам:

- 1) $d(S_k, S_n) = d(S_n, S_k)$ – симметричность метрики;
- 2) $d(S_k, S_k) = 0$ при любых $S_k \in L$;
- 3) для любого элемента $S_m \in L$ всегда

$$d(S_k, S_n) \leq d(S_k, S_m) + d(S_m, S_n).$$

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:

$$d(S_k, S_n) = \|S_k - S_n\|. \quad (4.4)$$

4.1.5. ПРОСТРАНСТВО СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Кроме нормы и метрики вводится скалярное произведение:

$$(S_k, S_n) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t)S_n(t)dt, \quad (4.5)$$

позволяющее найти угол между векторами

$$\cos \psi_{k,n} = \frac{(S_k, S_n)}{\|S_k\| \|S_n\|}. \quad (4.6)$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

- 1) $(S_k, S_n) \geq 0$;
- 2) $(S_k, S_n) = (S_n, S_k)$;
- 3) $(\alpha S_k, S_n) = \alpha(S_k, S_n)$, где α – вещественное число;
- 4) $(S_k + S_n, S_m) = (S_k, S_m) + (S_n, S_m)$.

Линейное пространство со скалярным произведением называют *унитарным* или *предгильбертовым*. Полное пространство с указанными свойствами называется *вещественным гильбертовым пространством H* .

Справедливо фундаментальное неравенство Коши–Буняковского (иначе неравенство Шварца) [2]

$$|(S_k, S_n)| \leq \|S_k\| \|S_n\|. \quad (4.7)$$

Два сигнала $S_k(t)$ и $S_n(t)$ называются *ортгоналными*, если их скалярное произведение, описываемое (4.5), равно нулю. При этом $\psi_{k,n} = 90^\circ$.

Для комплексных сигналов можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в нем скалярное произведение

$$(S_k, S_n) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t)S_n^*(t)dt, \quad (4.8)$$

такое, что $(S_k, S_n) = (S_n, S_k)^*$.

Некоторые *аналогии* между элементарными геометрическими понятиями и соответствующими им понятиями в теории сигналов даны в табл. 4.1 [7].

Таблица 4.1

В геометрии	В теории сигналов
<p>Длина (l) вектора S (модуль, норма):</p> $l = S = \ S\ = \sqrt{\sum_i S_i^2},$ <p>где S_i – координата вектора по i-й оси</p>	<p>Норма сигнала $S(t)$:</p> $\ S(t)\ = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt} = \sqrt{E},$ <p>где E – энергия сигнала</p>
<p>Скалярное произведение векторов S, U:</p> $(S, U) = S U \cos(\varphi_{s,u}),$ <p>где $\varphi_{s,u}$ – угол между векторами</p>	<p>Скалярное произведение сигналов $S(t), U(t)$:</p> $(S(t), U(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)U(t) dt = E_{s,u}$ <p>$E_{s,u}$ – взаимная энергия сигналов, или энергия взаимодействия сигналов</p>
<p>Расстояние ($d_{s,u}$) между векторами S, U:</p> $d_{s,u} = S - U = \sqrt{((S - U), (S - U))} = \sqrt{\sum_i (S_i - U_i)^2}$	<p>Метрика (расстояние) между сигналами $S(t), U(t)$:</p> $\ S(t) - U(t)\ = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [S(t) - U(t)]^2 dt}$
<p>Вектор единичной длины (орт) l:</p> $l = \frac{S}{ S }$	<p>Нормированный сигнал:</p> $\frac{S(t)}{\ S(t)\ } = \frac{S(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt}}$
<p>Ортогональные векторы S, U:</p> $(S, U) = 0, \varphi_{s,u} = 90^\circ$	<p>Ортогональные сигналы $S(t), U(t)$:</p> $(S(t), U(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)U(t) dt = 0$

4.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Множество сигналов с ограничением их амплитуды. Множество M образовано сигналами

$$S_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

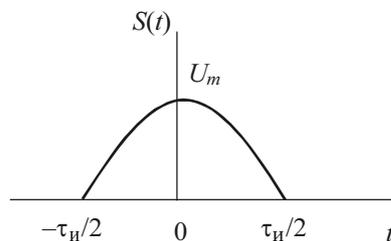
– гармоническими колебаниями, отличающимися своими амплитудами A_n , частотами ω_n и начальными фазами φ_n ; при этом амплитуды колебаний не превышают 20 В. Найдем амплитуду суммарного колебания $S(t) = 15 \cos \omega_1 t + 10 \cos \omega_3 t$, где $\omega_3 = 3\omega_1$. Можно ли считать заданное множество линейным пространством?

Амплитуда суммарного колебания

$$S_m = S(0) + 15 + 10 = 25 \text{ В.}$$

Это колебание не содержится в множестве M . Не выполняется одна из аксиом (вторая) линейного пространства. Следовательно, множество M не образует линейное пространство.

Пример 2. Энергия и норма косинусоидального импульса (рис. 4.3).



$$S(t) = U_m \cos(\pi t / \tau_n),$$

$$-\tau_n / 2 \leq t \leq \tau_n,$$

$$U_m = 10 \text{ В}, \tau_n = 1 \text{ мс.}$$

Рис. 4.3

По определению энергия сигнала

$$E = \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} S^2(t) dt = U_m^2 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \cos^2(\pi t / \tau_n) dt = U_m^2 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\pi t / \tau_n) \right) dt =$$

$$= \frac{U_m^2}{2} \tau_n + \frac{U_m^2}{2} [\cos \pi - \cos(-\pi)] = \frac{U_m^2}{2} \tau_n. \quad (4.9)$$

Подставим численные значения

$$E = \frac{U_m^2}{2} \tau_{\text{и}} = \frac{10^2}{2} 10^{-3} = 0.05 \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Норма сигнала

$$\|S\| = \sqrt{E} = \sqrt{0.05} = 0.224 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}.$$

Пример 3. Метрика двух сигналов. Определим метрику сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ (рис. 4.4), при этом $U_1 = U_2 = 10 \text{ В}$, $\tau_{\text{и}} = 1 \text{ мс}$.

$$S_1(t) = U_1, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}.$$

$$S_2(t) = (U_2 / \tau_{\text{и}})t, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}.$$

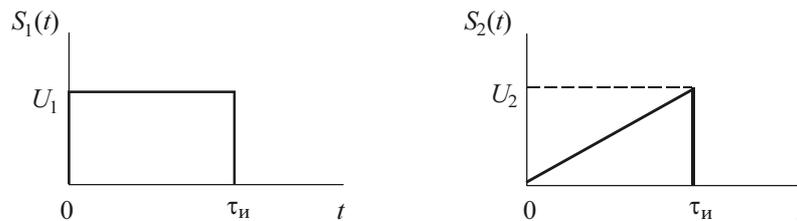


Рис. 4.4

Первоначально найдем квадрат нормы разности сигналов, т. е. квадрат расстояния между сигналами:

$$\begin{aligned} d^2(S_1, S_2) &= \|S_1(t) - S_2(t)\|^2 = \int_0^{\tau_{\text{и}}} ((U_2 / \tau_{\text{и}})t - U_1)^2 dt = \\ &= \int_0^{\tau_{\text{и}}} \left((U_2^2 / \tau_{\text{и}}^2) t^2 - (2U_2 U_1 / \tau_{\text{и}}) t + U_1^2 \right) dt = \frac{U_2^2}{3} \tau_{\text{и}} - U_2 U_1 \tau_{\text{и}} + U_1^2 \tau_{\text{и}}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Подставим численные значения и получим

$$d^2(S_1, S_2) = \frac{100}{3} 10^{-3} - 100 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 10^{-3} = 0.0333 \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Метрика сигнала – это норма разности сигналов

$$d(S_1, S_2) = \|S_1(t) - S_2(t)\| = \sqrt{\frac{U_2^2}{3} \tau_{\text{и}} - U_2 U_1 \tau_{\text{и}} + U_1^2 \tau_{\text{и}}} = 0.183 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}.$$

Пример 4. Минимальное расстояние между сигналами (из примера 3).

По результатам предыдущего примера требуется вычислить амплитуду U_1 прямоугольного импульса так, чтобы было минимальным расстояние между сигналами $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Надо найти также это минимальное расстояние.

В предыдущем примере был найден квадрат расстояния между сигналами (4.10):

$$d^2(S_1, S_2) = \frac{U_2^2}{3} \tau_{\text{и}} - U_2 U_1 \tau_{\text{и}} + U_1^2 \tau_{\text{и}}.$$

Исследуем это выражение на экстремум

$$\left(d^2(S_1, S_2)\right)' = 0 \Rightarrow -U_2 \tau_{\text{и}} + 2U_1 \tau_{\text{и}} = 0.$$

Отсюда $U_1 = U_2 / 2$. При этом

$$d^2(S_1, S_2)_{\min} = \frac{U_2^2}{3} \tau_{\text{и}} - \frac{U_2 U_2}{2} \tau_{\text{и}} + \frac{U_2^2}{4} \tau_{\text{и}} = \frac{U_2^2 \tau_{\text{и}}}{12}. \quad (4.11)$$

Минимальное расстояние между сигналами $S_1(t)$ и $S_2(t)$ будет

$$d(S_1, S_2)_{\min} = \sqrt{U_2^2 \tau_{\text{и}} / 12} = 0.0913 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}.$$

Пример 5. Скалярное произведение двух импульсов. Заданы два смещенных во времени на величину τ прямоугольных импульса: $S_1(t) = U$, $0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$; $S_2(t) = S_1(t - \tau) = U$, $\tau \leq t \leq \tau_{\text{и}} + \tau$. Найдём скалярное произведение этих импульсов и угол между ними в зависимости от параметра τ .

Скалярное произведение (энергия взаимодействия сигналов)

$$E_{12}(\tau) = (S_1, S_2) = \int_{\tau}^{\tau_{\text{и}}} S_1(t) S_2(t) dt = \int_{\tau}^{\tau_{\text{и}}} U^2 dt = U^2 (\tau_{\text{и}} - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\text{и}}. \quad (4.12)$$

При $\tau = 0$ формула (4.12) даёт энергию импульса $E_{12}(0) = E = U^2 \tau_{\text{и}}$.

Косинус угла между импульсами

$$\cos \psi_{1,2} = \frac{(S_1, S_2)}{\|S_1\| \|S_2\|} = \frac{(S_1, S_2)}{E} = \frac{U^2(\tau_{\text{и}} - \tau)}{U^2 \tau_{\text{и}}} = 1 - \tau / \tau_{\text{и}}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\text{и}}.$$

Следовательно,

$$\psi_{1,2} = \arccos(1 - \tau / \tau_{\text{и}}). \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) видно, что при $\tau = \tau_{\text{и}}$ энергия взаимодействия импульсов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ равна нулю, а угол $\psi_{1,2} = 90^\circ$, т. е. сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ становятся ортогональными.

4.3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Множество M образовано прямоугольными импульсами напряжения на интервале $[0, 50 \text{ мкс}]$. Амплитуды импульсов не превышают 15 В. Покажите, что данное множество не будет линейным пространством сигналов.

2. Определите энергию и норму импульса с амплитудой U_n и длительностью $\tau_{\text{и}}$. Форма импульса (рис. 4.5):

а) прямоугольная $S_1(t) = U_1, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$;

б) треугольная $S_2(t) = (U_2 / \tau_{\text{и}})t, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$;

в) экспоненциальная $S_3(t) = U_3 \exp(-at), \quad t > 0, \quad a > 0$;

г) синусоидальная $S_4(t) = U_4 \sin(\pi t / \tau_{\text{и}}), \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$.

3. Вычислите энергию и норму сигналов по результатам решения упражнения 2, если $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 10 \text{ В}$, $\tau_{\text{и}} = 1 \text{ мс}$, $a = 3 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$.

4. Определите в общем виде метрику сигналов $S_1(t)$ и $S_4(t)$. Вычислите ее для $U_1 = U_4 = 10 \text{ В}$, $\tau_{\text{и}} = 1 \text{ мс}$.

5. По данным предыдущего упражнения вычислите амплитуду U_1 прямоугольного импульса так, чтобы было минимальным расстояние между импульсами $S_1(t)$ и $S_4(t)$.

6. Сигнал $U_1(t) = 1t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$, аппроксимирован линейной функцией $U_2(t) = at + b$. Найдите коэффициенты a и b , потребовав наименьшей метрики $d(U_1(t), U_2(t))$.

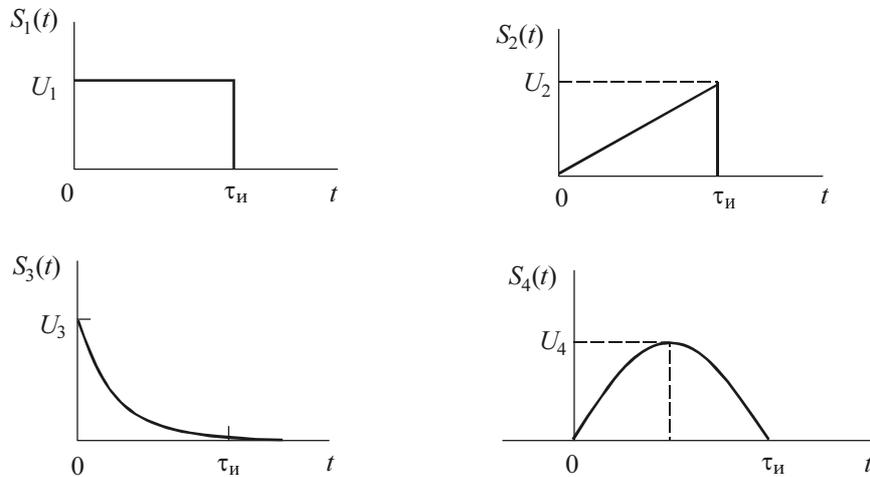


Рис. 4.5

7. Заданы два смещенных во времени на величину τ экспоненциальных импульса: $S_3(t) = U_3 \exp(-at)$, $t > 0$, $a > 0$, и $S_{3\tau}(t) = S_3(t - \tau)$. Найдите скалярное произведение этих импульсов и угол между ними в зависимости от параметра τ .

8. Заданы два смещенных во времени на величину $\tau_n/2$ синусоидальных импульса: $S_4(t) = U_4 \sin(\pi t / \tau_n)$, $0 \leq t \leq \tau_n$, и $S_{4,\tau}(t) = S_4(t - \tau_n/2)$. Найдите скалярное произведение этих импульсов и угол между ними.

9. Радиоимпульс с прямоугольной огибающей (рис. 4.6) описывается выражением

$$S_5(t) = U_5 \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_n,$$

где $\tau_n = nT = n2\pi / \omega_0$ – длительность импульса, равная целому числу n периодов гармонического колебания. Вычислите энергию и норму сигнала.

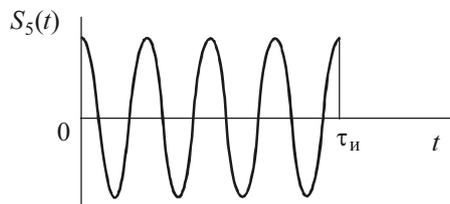


Рис. 4.6

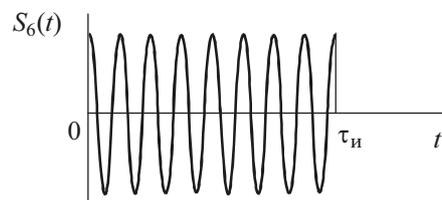


Рис. 4.7

10. На рис. 4.7 приведен радиоимпульс с прямоугольной огибающей

$$S_6(t) = U_6 \cos 2\omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}.$$

Определите скалярное произведение $(S_5(t), S_6(t))$ (т. е. энергию взаимодействия $E_{5,6}$) сигналов $S_5(t)$ и $S_6(t)$, имеющих одинаковую длительность $\tau_{\text{и}}$, а также определите угол $\psi_{5,6}$ между векторами S_5 и S_6 .

11. Найдите метрику $d_{5,6} = d(S_5, S_6)$ (т. е. норму разности) сигналов $S_5(t)$ и $S_6(t)$, представленных на рис. 4.6 и 4.7. Чему равна метрика, если $S_6(t) = S_5(t)$?

12. На рис. 4.8 даны сигналы $S_7(t)$ и $S_8(t)$. Определите скалярное произведение этих сигналов.

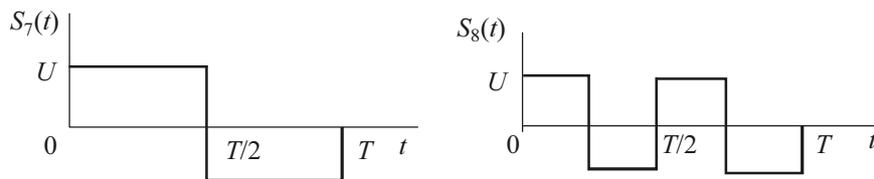


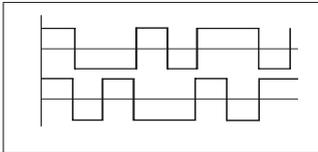
Рис. 4.8

13. Определите скалярные произведения $(S_2(t), S(t)_7)$ и $(S_2(t), S_8(t))$, считая $\tau_{\text{и}} = T$.

14. Вычислите скалярные произведения $(S_4(t), S(t)_7)$ и $(S_4(t), S_8(t))$, считая $\tau_{\text{и}} = T$.

Глава 5

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ



Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов.

Исаак Ньютон

5.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

5.1.1. ОБОБЩЕННЫЙ РЯД ФУРЬЕ

\mathcal{P} усть имеется гильбертово пространство сигналов, определенных на отрезке времени (t_1, t_2) , конечном или бесконечном. Пусть также на этом отрезке задана бесконечная система (подмножество) функций

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots,$$

попарно ортогональных

$$(\varphi_k(t), \varphi_n(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt = \begin{cases} \|\varphi_n\|^2, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t) dt = E_\varphi \quad (5.2)$$

– квадрат нормы или энергия базисной функции $\varphi_n(t)$.

Говорят, что таким образом в гильбертовом пространстве сигналов задан *ортогональный координатный базис*, т. е. система ортогональных базисных функций.

Базисная функция $\varphi_n(t)$, для которой квадрат нормы равен единице $\|\varphi_n\|^2 = 1$, называется нормированной, а вся система функций $\{\varphi_n(t)\}$ – ортонормированной или ортонормальной. В этом случае говорят, что задан ортонормированный базис.

Проецирование произвольного сигнала $S(t) \in H$ на оси координатного базиса называется разложением в обобщенный ряд Фурье. Это разложение имеет вид

$$S(t) = C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_n(t). \quad (5.3)$$

Коэффициенты C_n , представляющие собой проекции сигнала $S(t)$ относительно выбранного базиса, определяются из соотношения

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} (S(t), \varphi_n(t)) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} S(t)\varphi_n(t) dt \quad (5.4)$$

– для ортогональных, но ненормированных функций $\varphi_n(t)$;

$$C_n = (S(t), \varphi_n(t)) = \int_{t_1}^{t_2} S(t)\varphi_n(t) dt \quad (5.4')$$

– для ортонормированных функций $\varphi_n(t)$.

5.1.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Произведение вида $C_n\varphi_n(t)$, входящее в ряд (5.3), представляет собой спектральную составляющую сигнала $S(t)$, а совокупность коэффициентов

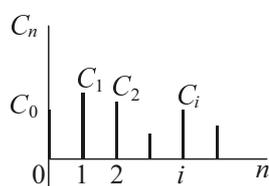


Рис. 5.1

(проекций сигнала) $\{C_0, \dots, C_n, \dots\}$ называется спектром сигнала. Графическое изображение $\{C_0, \dots, C_n, \dots\}$ в виде вертикальных отрезков, называемое спектральной диаграммой, дает наглядное представление о спектре сигнала. Сигнал обладает дискретным спектром (рис. 5.1).

Суть *спектрального анализа* сигнала $S(t)$ состоит в определении коэффициентов C_n (экспериментально или аналитически) в соответствии с (5.4).

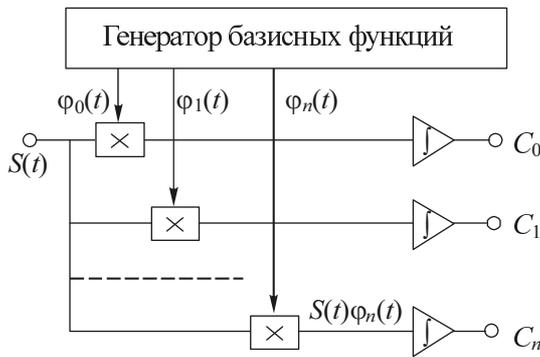


Рис. 5.2

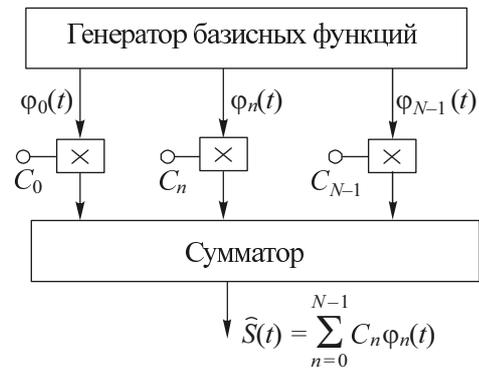


Рис. 5.3

Аппаратурная реализация спектрального анализа продемонстрирована на структурной схеме рис. 5.2. Основным элементом анализатора – генератор базисных функций. Сигнал и базисные функции подаются на входы перемножителей, затем результат перемножения интегрируется и на выходе интеграторов получают постоянные напряжения – соответствующие коэффициенты C_0, \dots, C_n, \dots

5.1.3. СИНТЕЗ СИГНАЛОВ

На основе ряда (5.3) возможен *синтез (аппроксимация)* сигналов при фиксированном числе N ряда

$$\tilde{S}(t) = C_0\varphi_0(t) + \dots + C_N\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n\varphi_n(t). \quad (5.5)$$

На рис. 5.3 показана структурная схема синтезатора. В него, как и в анализатор, входит генератор базисных функций, а также блоки весовых коэффициентов (C_0, \dots, C_n, \dots) (резистивные регулируемые делители) и сумматор (операционный усилитель с N входами).

При этом обобщенный ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$ и числе слагаемых N

он обеспечивает наилучший синтез (аппроксимацию), давая минимум средне-квадратической ошибки ε , под которой понимается величина

$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} [S(t) - \tilde{S}(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n \varphi_n(t) \right]^2 dt = E - E_a, \quad (5.6)$$

где

$$E_a = T \sum_{n=0}^{N-1} C_n^2 \quad \text{и} \quad E = \int_0^T S^2(t) dt \quad (5.7)$$

– энергии аппроксимированного (синтезированного) и исходного сигналов.

Относительная ошибка μ синтеза определяется по формуле

$$\mu = \varepsilon / E = 1 - E_a / E. \quad (5.8)$$

Ортогональная система называется *полной*, если увеличением N можно сделать ε сколь угодно малой. Ряд (5.3) называется в этом случае *сходящимся в среднем*. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$E = \int_{t_1}^{t_2} [S(t)]^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2. \quad (5.9)$$

Очевидно, что средняя за период $T = t_2 - t_1$ мощность сигнала

$$P_{\text{ср}} = P = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [S(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2. \quad (5.10)$$

Выражение вида (5.9) или (5.10) называется *равенством Парсеваля*.

5.1.4. ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Он зависит от поставленной задачи. Так, при анализе и синтезе сигналов, воздействующих на линейные цепи, наибольшее распространение получила система гармонических функций. Во-первых, гармонические колебания в отличие от других сохраняют свою форму при прохождении через эти цепи: изменяются лишь амплитуда и начальная фаза. Во-вторых, широко

используется хорошо разработанный в теории цепей символический метод. Представление сигналов в базисе гармонических функций рассмотрено в главах 6 и 7.

Особая роль отводится представлению сигналов в базисе функций $\sin x / x$ (ряд Котельникова), что служит основой для дискретизации сигналов и последующего перехода от аналоговых сигналов к дискретным и цифровым (см. главу 8).

Для ступенчатых сигналов используются кусочно-постоянные функции Уолша, Радемахера, Хаара. Ниже рассмотрены функции Уолша (ФУ), которые также широко применяются [13, 14].

Из множества других задач наиболее важна задача приближенного разложения сложных сигналов, в которой требуемая точность обеспечивается при минимуме членов ряда. Для разложения непрерывных сигналов применяются полиномы и функции Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита и др. Системы этих функций рассмотрены в [1, 3], а задачи приведены в [6].

В последние годы широко применяют базисные функции типа вейвлетов [7, 15–19] (см. главу 9).

5.1.5. ФУНКЦИИ УОЛША И РАДЕМАХЕРА

Способ аналитического задания и нумерации (упорядочения) функций Уолша (ФУ) может быть различным [1]. Их можно сформировать, например, с помощью матриц Адамара. Матрицей Адамара H_N порядка $N = 2^n$ называется квадратная матрица размера $N \times N$ с элементами ± 1 такая, что

$$H_1 = 1, H_2 = \begin{vmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \dots, H_N = \begin{vmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

ФУ, упорядоченная по Адамару ($\text{had}(n, T)$ с номером n), будет последовательностью прямоугольных импульсов с единичными амплитудами и полярностями, соответствующими знакам n -й строки матрицы. Под длительностью импульсов подразумевается $(1/N)$ -я доля интервала ортогональности $[0, T]$, или при введении безразмерного (нормированного) времени $\theta = t/T$ – это доля безразмерного интервала $[0, 1]$.

Упорядочение по Уолшу характерно тем, что номер k функции $\text{wal}(k, \theta)$ равен числу перемен знака на интервале ее существования (рис. 5.4).

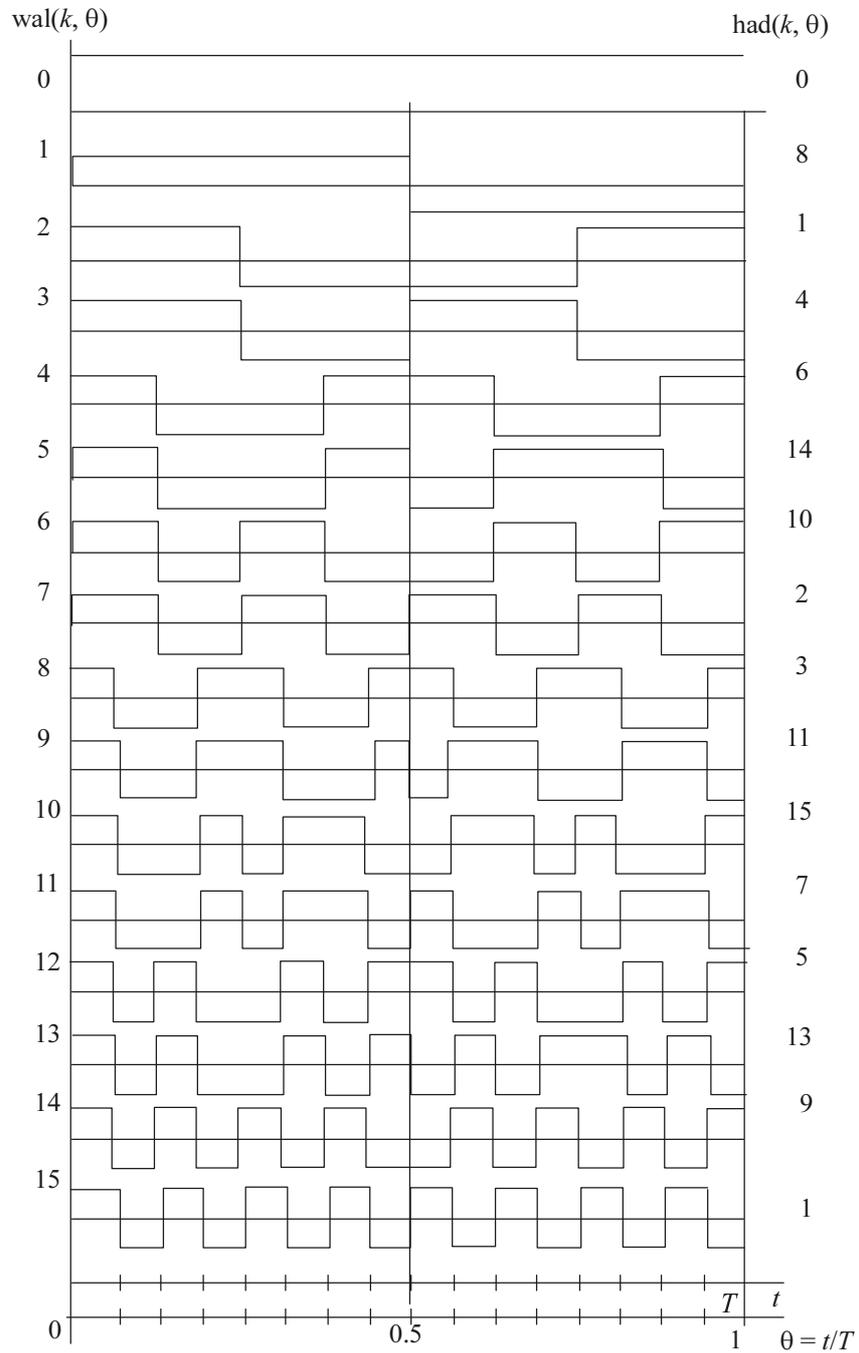


Рис. 5.4

Основные свойства функций Уолша

1. ФУ ортонормированные.
2. Перемножение двух ФУ дает также ФУ (свойство мультипликативности)

$$\text{wal}(k, \theta)\text{wal}(l, \theta) = \text{wal}(m, \theta), \quad (5.12)$$

где $m = k \oplus l$, \oplus – символ поразрядного суммирования по модулю два: $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$; $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. При этом число N в двоичной системе счисления запишется как $N = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n = (a_n, \dots, a_2 a_1 a_0)_2$.

3. Умножение ФУ самой на себя дает (как следует из предыдущего) ФУ с нулевым номером $\text{wal}(0, \theta)$.

4. Умножение ФУ $\text{wal}(k, \theta)$ на $\text{wal}(0, \theta)$ не изменяет исходную функцию.

5. Площадь ФУ на интервале ортогональности

$$\int_0^1 \text{wal}(k, \theta) d\theta = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

6. Четным относительно середины интервала ($\theta = 0.5$) функциям соответствуют четные значения k и наоборот.

Формулы (5.4) и (5.5) для анализа и синтеза сигнала при использовании ФУ в качестве базисных функций примут вид

$$B_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \text{wal}(n, T) dt = \int_0^1 S(\theta) \text{wal}(n, \theta) d\theta, \quad (5.13)$$

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} B_n \text{wal}(n, \theta). \quad (5.14)$$

Вопросы использования ортогональных функций, в частности ФУ, в радиотехнике подробно изложены в [13, 14]. Практическая реализация генератора шестнадцати ФУ, анализатора и синтезатора сигналов в базисе ФУ дана в учебном пособии [12].

При компьютерном анализе и аппроксимации сигналов должны быть заданы математические модели ФУ. Это можно выполнить с помощью: а) использования $+1$ или -1 на соответствующих временных интервалах; б) функций Хевисайда; в) функций Радемахера.

Функции Радемахера принимают одно из двух значений ± 1 , имеют вид меандра (рис. 5.5) и получаются из синусоидальных функций по формуле

$$r(k, \theta) = \text{sign}[\sin(2^k \pi \theta)], \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (5.15)$$

где k – порядок функции, $\text{sign}[x]$ – сигнум-функция (см. пример 5 главы 1), равная 1 при $x > 0$ и -1 при $x < 0$. Функции Радемахера ортонормированы на интервале $0 \leq \theta \leq 1$:

$$\int_0^1 r(k, \theta)r(n, \theta)d\theta = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (5.16)$$

Эти функции оказываются нечетными относительно середины интервала определения (рис. 5.5), а потому не могут быть использованы для аппроксимации четных (относительно $\theta = 0.5$) сигналов. Следовательно, система функций Радемахера будет неполной.

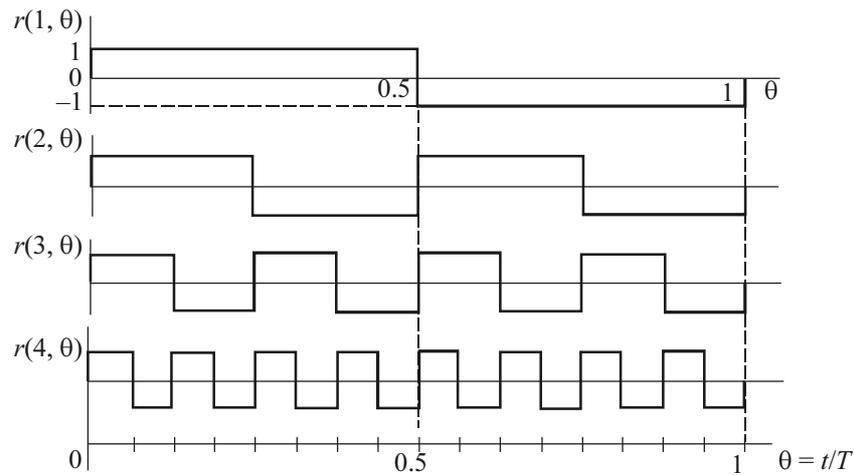


Рис. 5.5

ФУ связаны с функциями Радемахера соотношением

$$\text{wal}(m, \theta) = r(k, \theta), \quad (5.17)$$

где $m = 2^k - 1$. Остальные ФУ, недостаточные для образования полной ортонормированной системы, можно сформировать на основе свойства мультипликативности (5.12).

5.1.6. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Из наиболее часто применяемых специальных функций перечислим полиномы Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита. Эти функции табулированы и, как уже ранее отмечалось, позволяют производить точное представление сигналов при ограниченном числе членов ряда (5.3).

В приложении П.4 приведены основные соотношения для названных функций, с помощью которых сигнал представляется обобщенным рядом Фурье. Подробные таблицы полиномов приведены, например, в книгах [35, 36].

Условие ортогональности функций на заданном интервале (a, b) имеет вид

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ E_n, & k = n, \end{cases} \quad (5.18)$$

где $\rho(x)$ – весовая функция (или функция веса); $\psi_n(x)$ – полиномы, лежащие в основе формирования базисных функций $\varphi_n(x)$,

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\rho(x)} \psi_n(x); \quad (5.19)$$

$$E_n = \|\varphi_n\|^2 = \|\psi_n \sqrt{\rho}\|^2 = \int_a^b \psi_n^2(x) \rho(x) dx \quad (5.20)$$

– квадрат нормы (энергия) функции $\varphi_n(x) = \sqrt{\rho(x)} \psi_n(x)$.

От выражения (5.1) определение (5.18) отличается весовой функцией $\rho(x)$. Изменится и вид выражения (5.4) для определения коэффициентов обобщенного ряда Фурье:

$$C_n = \frac{1}{\|\sqrt{\rho} \cdot \psi_n\|^2} \int_a^b S(x) \psi_n(x) \rho(x) dx. \quad (5.21)$$

Выбор весовой функции $\rho(x)$ определяется видом полинома, и она должна быть максимальной на том участке, на котором необходима наилучшая аппроксимация сигнала.

5.2. ПРИМЕРЫ

5.2.1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Пример 1. Гармонические базисные функции. Докажем, что гармонические функции $\varphi_k(t) = \cos k\Omega t$ и $\varphi_n(t) = \cos n\Omega t$ (где $\Omega = 2\pi/T$, T – период функции, k и n – целые числа, при этом $k \neq n$) ортогональны на интервале $[0, T]$. Найдем квадрат нормы функции $\varphi_n(t)$.

Запишем скалярное произведение

$$(\varphi_k(t), \varphi_n(t)) = \int_0^T \cos k\Omega t \cos n\Omega t dt = \int_0^T 0.5 \cos(k-n)\Omega t dt + \int_0^T 0.5 \cos(k+n)\Omega t dt.$$

Интеграл за период T гармонической функции с кратными частотами $(k \pm n)\Omega$ равен нулю, следовательно, скалярное произведение равно нулю и функции $\varphi_k(t)$ и $\varphi_n(t)$ ортогональны.

Если $n = k$, то косинус в первом интеграле обращается в единицу и интеграл представляет собой квадрат нормы функции $\varphi_n(t)$:

$$(\varphi_n(t), \varphi_n(t)) = \|\varphi_n\|^2 = \int_0^T 0.5 \cdot 1 dt = \frac{T}{2}.$$

Пример 2. Комплексные экспоненциальные функции. Покажем, что комплексные экспоненциальные функции

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

на интервале $[-T/2, T/2]$ образуют ортонормированный базис.

Воспользуемся формулой скалярного произведения комплексных сигналов:

$$(\dot{\varphi}_k(t), \dot{\varphi}_n(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\varphi}_k(t) \dot{\varphi}_n^*(t) dt.$$

Тогда

$$(\dot{\varphi}_n(t), \dot{\varphi}_k(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} e^{jn \cdot 2\pi t/T} e^{-jk \cdot 2\pi t/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-k)2\pi t/T} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n-k)} \frac{1}{2j} \left[e^{j(n-k)\pi} - e^{-j(n-k)\pi} \right] = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)}.$$

Таким образом,

$$(\phi_k(t), \phi_n(t)) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

т. е. комплексные экспоненциальные функции образуют ортонормированный базис.

Пример. 3. Формирование ФУ с помощью матриц Адамара. Сформируем с помощью матриц Адамара функции Уолша (ФУ) при базисе: а) $N = 2$, б) $N = 4$, в) $N = 8$. Выполним упорядочение по Адамару и Уолшу. Отметим недостаток упорядочения по Адамару. Изобразим ФУ wal(3, θ).

Воспользуемся выражением (5.11) для матриц Адамара. Тогда

а) $H_1 = 1, H_2 = \begin{vmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ б) $H_4 = \begin{vmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

в) $H_8 = \begin{vmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_2 & H_2 & H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 & H_2 & -H_2 \\ H_2 & H_2 & -H_2 & -H_2 \\ H_2 & -H_2 & -H_2 & H_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_2 & H_2 & H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 & H_2 & -H_2 \\ H_2 & H_2 & -H_2 & -H_2 \\ H_2 & -H_2 & -H_2 & H_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \\ 6 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

Упорядочение по Адамару – это последовательность импульсов с амплитудой ± 1 соответствующей строки матрицы Адамара. Недостаток такого упорядочения: функция $had(n, \theta)$ для одного и того же номера n различна для разного порядка N . Например, функции $had(1, \theta)$ для $N = 2$, $N = 4$ и $N = 8$ имеют различное число и чередование 1 и -1 .

Упорядочение по Уолшу характерно тем, что номер n ФУ равен числу перемен знаков на интервале определения $0 < \theta < 1$. Справа от матриц Адамара указаны номера ФУ, упорядоченных соответственно по Адамару и Уолшу.

На рис. 5.6 показан график третьей ФУ.

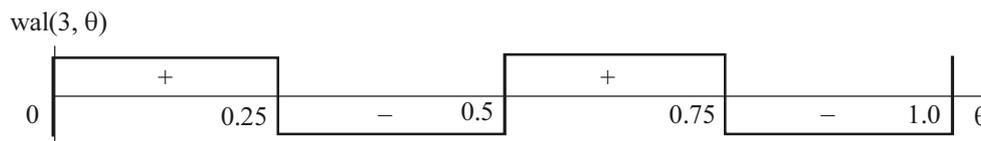


Рис. 5.6

Пример 4. Перемножение ФУ. Определим номер m ФУ, полученной в результате перемножения k -й и l -й ФУ, если $k = 9$ и $l = 7$.

На основе свойства мультипликативности ФУ, описываемого выражением (5.12), имеем $m = k \oplus l$, где \oplus – символ поразрядного суммирования по модулю два: $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$; $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Представим $k = 9$ и $l = 7$ в двоичной системе, при этом остаток от первого деления записывается крайней правой цифрой и т. д. Затем просуммируем по модулю два:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 9 \\
 \hline
 8 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 4 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 6 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 3 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 k = 9 \rightarrow 1001 \\
 l = 7 \rightarrow 0111 \\
 \oplus \\
 \hline
 1110 \rightarrow 14 = m
 \end{array}
 \end{array}$$

Ответ: четырнадцатая ФУ.

Пример 5. Формирование ФУ с помощью функций Радемахера. Используя выражения для функций Радемахера, запишем математические модели первых восьми ФУ (т. е. для $N = 8$).

На основе (5.15) и (5.17) получаем следующие выражения для ФУ на интервале $[0, T]$:

$$\text{wal}(1, \theta) = r(1, \theta) = \text{sign}[\sin(2^1 \pi \theta)],$$

$$\text{wal}(3, \theta) = r(2, \theta) = \text{sign}[\sin(2^2 \pi \theta)],$$

$$\text{wal}(7, \theta) = r(3, \theta) = \text{sign}[\sin(2^3 \pi \theta)].$$

Остальные пять ФУ запишем через найденные, используя свойство мультипликативности:

$$\text{wal}(0, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(1, \theta), \quad \text{wal}(2, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(3, \theta),$$

$$\text{wal}(4, \theta) = \text{wal}(3, \theta)\text{wal}(7, \theta), \quad \text{wal}(5, \theta) = \text{wal}(2, \theta)\text{wal}(7, \theta),$$

$$\text{wal}(6, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(7, \theta).$$

На рис. 5.7 показана схема генератора первых восьми ФУ.

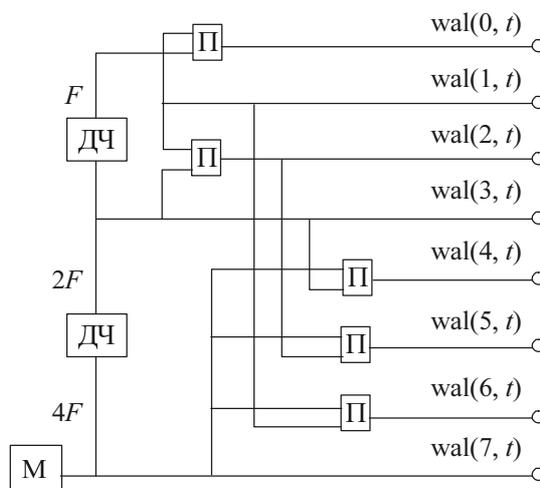


Рис. 5.7

На схеме обозначены: М – мультивибратор, генерирующий меандр с частотой 4F; ДЧ – делитель частоты в два раза; П – перемножитель сигналов – сумматор по модулю два. Мультивибратор выполнен на четырех логических элементах 2ИЛИ-НЕ, содержащихся в одном корпусе микросхемы К175ЛЕ5. Делитель частоты реализован на D-триггере. Микросхема К176ТМ2 содержит два триггера в одном корпусе. Перемножитель сигналов – это логический элемент «исключающее ИЛИ». Микросхема К176ЛП2 содержит четыре таких элемента в одном корпусе.

5.2.2. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА И УОЛША

Пример 6. Аппроксимация сигнала функциями Радемахера. Аппроксимируем сигнал $S(\theta) = S_0(0.5 - \theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$ (рис. 5.8, линия 1) двумя первыми функциями Радемахера. Вычислим относительную ошибку аппроксимации.

В соответствии с выражением (5.5) имеем

$$\tilde{S}(\theta) = C_1 r(1, \theta) + C_2 r(2, \theta).$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определим по формуле (5.4'):

$$C_k = (S(\theta), r(k, \theta)) = \int_0^1 S(\theta) r(k, \theta) d\theta,$$

если $k = 1$, то
$$C_1 = \int_0^1 S_0(0.5 - \theta) \text{sign}[\sin(2^1 \pi \theta)] d\theta = S_0 / 2,$$

если $k = 2$, то
$$C_2 = \int_0^1 S_0(0.5 - \theta) \text{sign}[\sin(2^2 \pi \theta)] d\theta = S_0 / 4.$$

Аппроксимированный сигнал

$$\tilde{S}(\theta) = S_1(\theta) + S_2(\theta) = C_1 r(1, \theta) + C_2 r(2, \theta).$$

На рис. 5.8 приведены: исходный сигнал $S(\theta)$ – линия 1, аппроксимированный сигнал $\tilde{S}(\theta)$ – линия 2, первое слагаемое $S_1(\theta)$ аппроксимированного сигнала (т. е. аппроксимация только первой функцией Радемахера) – линия 3.

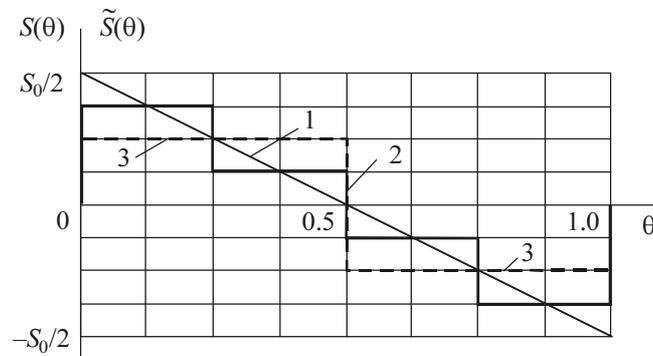


Рис. 5.8

Мощности исходного и аппроксимированного сигналов:

$$P = \int_0^1 [S(\theta)]^2 d\theta = 0.083 S_0^2, \quad P_a = C_1^2 + C_2^2 = 0.078 S_0^2.$$

Относительная ошибка аппроксимации

$$\mu = 1 - P_a / P = 1 - 0.078 / 0.083 = 0.063 \text{ (6.3 \%)}.$$

Пример 7. Спектр гармонического сигнала в базисе ФУ. Рассчитаем спектр гармонического сигнала

$$S(t) = S_m \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi / T$$

в базисе шестнадцати ФУ; при этом построим временные диаграммы результата перемножения сигнала с каждой из шестнадцати ФУ.

Интервал ортогональности (разложения) в данном примере следует приравнять периоду синусоиды T . При переходе к безразмерному времени $\theta = t / T$ имеем

$$S(\theta) = S_m \sin 2\pi\theta.$$

Как следует из формулы (5.13), коэффициент B_n – это площадь подынтегральной функции, представляющей собой произведение сигнала $S(\theta)$ на ФУ $\text{wal}(n, \theta)$. Само же произведение $S(\theta)\text{wal}(n, \theta)$ – это стробирование синусоиды n -й функцией Уолша.

Для шестнадцати ФУ произведения вида $S(\theta)\text{wal}(n, \theta)$ показаны на рис. 5.9. Поскольку синусоида нечетна относительно точки $\theta = 0.5$, площади и, следовательно, коэффициенты при всех четных ФУ равны нулю. Далее из оставшихся восьми произведений четыре также дадут нулевые площади и коэффициенты. Это соответствует ФУ $\text{wal}(3, \theta)$, $\text{wal}(7, \theta)$, $\text{wal}(11, \theta)$ и $\text{wal}(15, \theta)$ из-за их нечетности и четности $S(\theta)$ относительно точек $\theta = 0.25$ и $\theta = 0.75$.

Таким образом, лишь четыре коэффициента B_1 , B_5 , B_9 и B_{13} не равны нулю. Определим эти коэффициенты по формуле (5.4') с учетом рис. 5.9:

$$\begin{aligned} B_1 &= 2 \int_0^{1/2} S_m \sin 2\pi\theta d\theta = 2S_m / \pi = 0.636S_m, \\ B_5 &= 4 \int_0^{2/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta - 2 \int_{2/16}^{6/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta = \\ &= - \frac{2S_m}{\pi} \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) = - 0.265 S_m, \end{aligned}$$

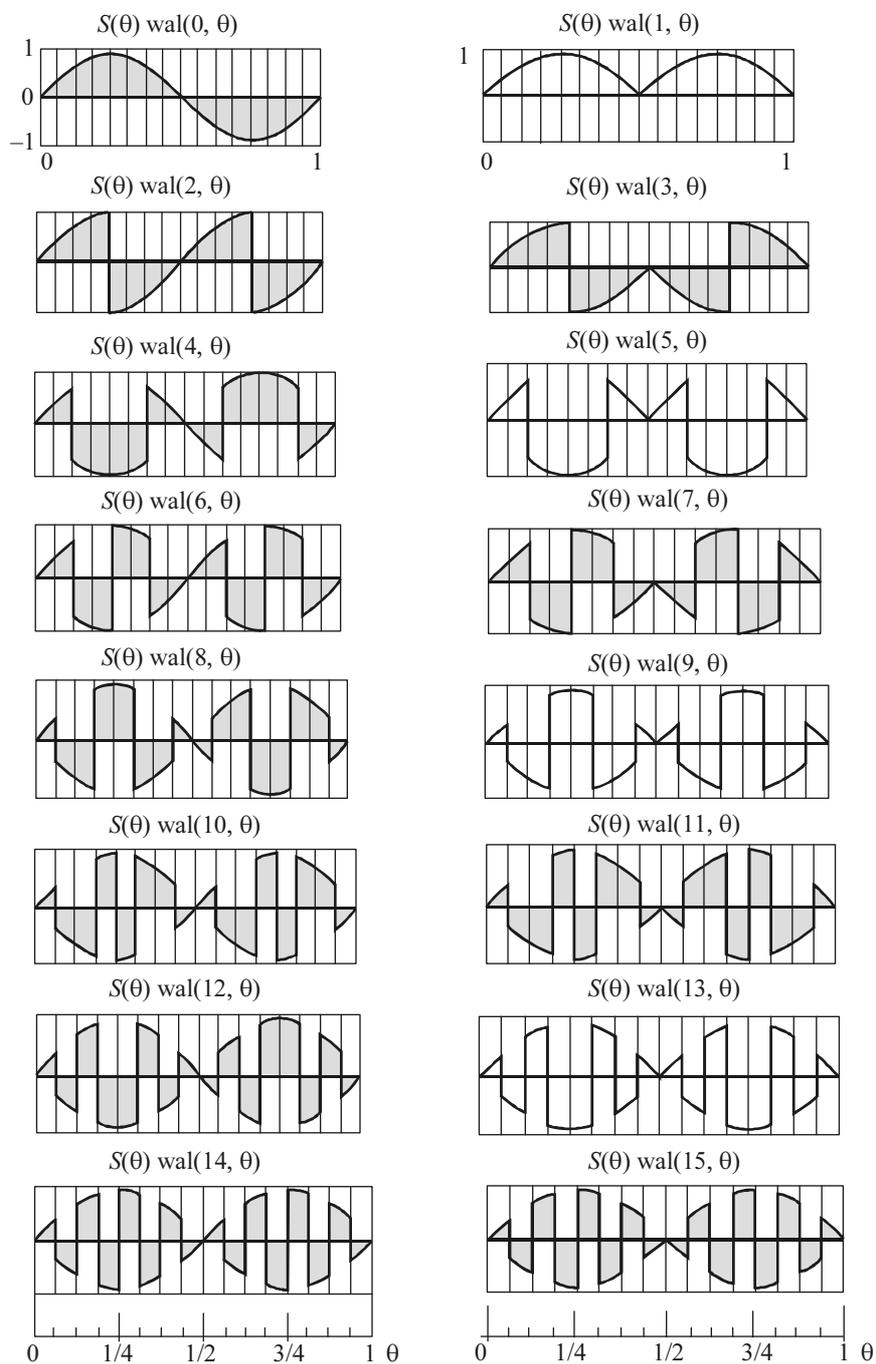


Рис. 5.9

$$\begin{aligned}
 B_9 &= 4 \int_0^{1/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta - 4 \int_{1/16}^{3/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta + \\
 &\quad + 2 \int_{3/16}^{5/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta = -0.052 S_m, \\
 B_{13} &= 4 \int_0^{1/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta - 4 \int_{1/16}^{2/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta + \\
 &\quad + 4 \int_{2/16}^{3/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta - 2 \int_{3/16}^{5/16} S_m \sin 2\pi\theta d\theta = -0.128 S_m.
 \end{aligned}$$

Спектр синусоиды (для $S_m = 10$ В) в базисе шестнадцати ФУ представлен на рис. 5.10.

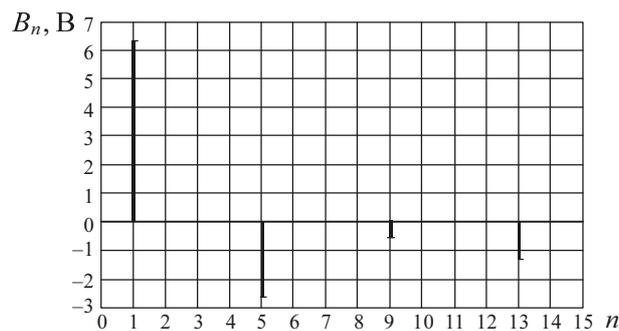


Рис. 5.10

Пример 8. Синтез гармонического сигнала в базисе ФУ. По результатам примера 7 аппроксимируем (синтезируем) синусоидальный сигнал в базисе шестнадцати ФУ. Вычислим относительную ошибку синтеза.

В соответствии с формулой (5.14) и найденными в предыдущем примере коэффициентами B_n имеем (для $S_m = 10$ В):

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(\theta) &= B_1 \text{wal}(1, \theta) + B_5 \text{wal}(5, \theta) + B_9 \text{wal}(9, \theta) + B_{13} \text{wal}(13, \theta) = \\
 &= 6.36 \text{wal}(1, \theta) - 2.65 \text{wal}(5, \theta) - 0.52 \text{wal}(9, \theta) - 1.28 \text{wal}(13, \theta).
 \end{aligned}$$

На рис. 5.11 приведены графики исходного сигнала (штриховая линия) и синтезированного в базисе восьми (пунктирная) и шестнадцати ФУ (сплошная).

Мощность исходного сигнала

$$P = \int_0^1 S^2(\theta) d\theta = \int_0^1 S_m^2 \sin^2(2\pi\theta) d\theta = S_m^2 / 2 = 50 \text{ В}^2.$$

Мощность синтезированного (аппроксимированного) сигнала

$$P_a = \sum_{n=0}^{N-1} B_n^2 = B_1^2 + B_5^2 + B_9^2 + B_{13}^2 = 49.3809 \text{ В}^2.$$

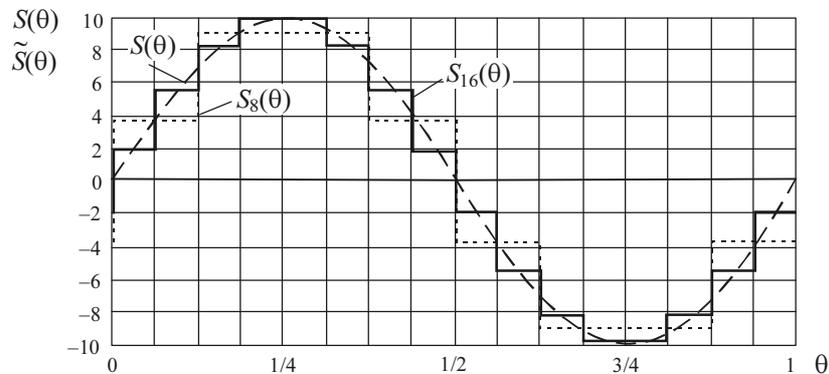


Рис. 5.12

Относительная ошибка синтеза

$$\mu = 1 - P_a / P = 1 - 0.9876 = 0.0124 \text{ (1.24 \%)}.$$

При синтезе в базисе восьми ФУ относительная ошибка синтеза составила бы всего 5.06 %.

5.2.3. СИНТЕЗ (АППРОКСИМАЦИЯ) СИГНАЛА В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА

Пример .9. Аппроксимация импульсного сигнала

$$u(t) = U_1 e^{-\alpha t} - U_2 e^{-\beta t}, \quad 0 < t < \infty,$$

где $U_1 = U_2 = 1 \text{ В}$, $\alpha = 2 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$, $\beta = 2\alpha$, тремя слагаемыми обобщенного ряда Фурье в базисе функций Лагерра.

Заменим переменную t новой переменной $x = 2\alpha t$. После этой замены напряжение примет вид (сплошная линия на рис. 5.13):

$$u(x) = 1 \exp(-x/2) - 1 \exp[-(\beta/\alpha)x/2], \quad 0 < x < \infty.$$

Обратимся к прил. П.4, в котором приведены основные соотношения для функций Лагерра и обобщенного ряда Фурье в базисе этих функций.

Определим коэффициенты C_n ряда (5.21):

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^{\infty} u(x) l_0(x) dx = \int_0^{\infty} u(x) e^{-x/2} L_0(x) dx = \int_0^{\infty} (e^{-x/2} - e^{-(\beta/\alpha)x/2}) e^{-x/2} dx = \\ &= 1 - \frac{2}{1 + \beta/\alpha} = 1 - \frac{2}{1 + 2} = 1/3 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^{\infty} u(x) e^{-x/2} L_1(x) dx = \int_0^{\infty} (e^{-x/2} - e^{-(\beta/\alpha)x/2}) e^{-x/2} (-x + 1) dx = \\ &= \frac{4}{(1 + \beta/\alpha)^2} - \frac{2}{1 + \beta/\alpha} = -2/9 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^{\infty} u(x) e^{-x/2} L_2(x) dx = \int_0^{\infty} (e^{-x/2} - e^{-(\beta/\alpha)x/2}) e^{-x/2} (x^2 - 2x + 1) dx = \\ &= \frac{2}{1 + \beta/\alpha} + \frac{8}{(1 + \beta/\alpha)^2} - \frac{8}{(1 + \beta/\alpha)^3} = -2/27 \text{ В}. \end{aligned}$$

Обобщенный ряд Фурье запишется как

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= C_0 l_0(x) + C_1 l_1(x) + C_2 l_2(x) = [C_0 L_0(x) + C_1 L_1(x) + C_2 L_2(x)] e^{-x/2} = \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9}(-x + 1) - \frac{2}{27}(x^2/2 - 2x + 1) \right] e^{-x/2} \text{ В}. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{u}(x)$ изображена графически пунктирной линией на рис. 5.13.

После обратной замены переменной аппроксимирующая функция примет вид

$$\tilde{u}(t) = \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9}(1 - 2\alpha t) - \frac{2}{27}(2\alpha^2 t^2 - 4\alpha t + 1) \right] e^{-\alpha t} = \frac{1}{27} (1 + 20\alpha t - 4\alpha^2 t^2) e^{-\alpha t}.$$

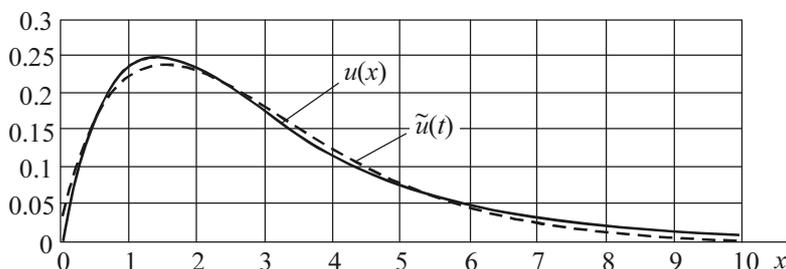


Рис. 5.13

Квадрат нормы исходного сигнала

$$\|u\|^2 = \int_0^{\infty} \left(e^{-x/2} - \exp[-(\beta/\alpha)x/2] \right)^2 dx = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{4}{1 + \beta/\alpha} \right) = 0.16(6) \text{ В}^2.$$

Квадрат нормы аппроксимированного сигнала

$$\|\tilde{u}\|^2 = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = (1/3)^2 + (-2/9)^2 + (-2/27)^2 = 0.166 \text{ В}^2.$$

Относительная ошибка аппроксимации

$$\mu = 1 - E_a / E = 1 - \|\tilde{u}\|^2 / \|u\|^2 = 1 - 0.166 / 0.166(6) = 0.0039(9) \approx 0.4 \text{ \%}.$$

Таким образом, всего лишь три члена ряда Фурье–Лагерра дают довольно точную аппроксимацию исходного сигнала.

5.3. УПРАЖНЕНИЯ

5.3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА

1. Аппроксимируйте сигнал $S_1(\theta)$, изображенный на рис. 5.13, функциями Радемахера (ФР). Вычислите относительную ошибку аппроксимации.

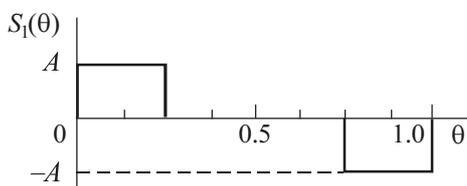


Рис. 5.13

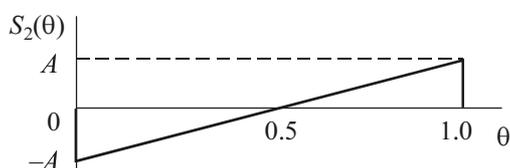


Рис. 5.14

2. Найдите спектр сигнала $S_2(\theta)$, показанного на рис. 5.14 в базисе первых трех ФР; при этом постройте временные диаграммы результата перемножения сигнала с каждой из ФР. Постройте спектральную диаграмму.

3. По результатам решения предыдущего упражнения аппроксимируйте сигнал $S_2(\theta)$ ФР. Вычислите мощность исходного $S_2(\theta)$ и аппроксимированного $\tilde{S}_2(\theta)$ сигналов и относительную ошибку μ аппроксимации.

5.3.2. ФУНКЦИИ УОЛША

4. Сформируйте с помощью матриц Адамара функции Уолша (ФУ) при базисе $N = 16$. Упорядочите функции по Адамару и Уолшу.

5. Перемножение двух ФУ дает также ФУ:

$$\text{wal}(k, \theta) \text{wal}(i, \theta) = \text{wal}(m, \theta).$$

Определите номер m результирующей функции, если: а) $k = 3, i = 7$; б) $k = 8, i = 5$; в) $k = 6, i = 12$.

6. Используя выражения для функций Радемахера и свойство ортогональности ФУ, запишите математические модели первых шестнадцати ФУ (т. е. для $N = 16$).

5.3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

7. Дана периодическая последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой S_0 , длительностью τ_n и периодом повторения T :

$$S(t) = S_0, \quad 0 \leq t \leq \tau_n.$$

Определите спектр в базисе ФУ на интервале $[0, T]$ для следующих значений скважности ($q = T / \tau_n$): а) 2; б) 4; в) 8.

8. Сигнал $S_1(\theta)$ имеет спектр $\{B_{1,n}\} = B_{0,1}, \dots, B_{1,n}$. Чем отличается спектр сигнала $S_2(\theta)$, связанного с сигналом $S_1(\theta)$ соотношением: а) $S_2(\theta) = S_0 S_1(\theta)$; б) $S_2(\theta) = S_0 + S_1(\theta)$; в) $S_2(\theta) = S_0 - S_1(\theta)$?

9. Как изменится спектр меандра ($\tau_n = T / 2$) при задержке на $\tau_3 = \tau_n / 2$?

10. Один период T колебания треугольной формы $S(\theta) = S_0 \theta$ при $0 \leq \theta = t / T \leq 1$ (рис. 5.15) аппроксимируется пятью членами ряда:

$$\tilde{S}(\theta) = \frac{S_0}{2} \text{wal}(0, \theta) - \frac{S_0}{4} \text{wal}(1, \theta) - \frac{S_0}{8} \text{wal}(3, \theta) - \frac{S_0}{16} \text{wal}(7, \theta) - \frac{S_0}{32} \text{wal}(15, \theta).$$

Определите энергию и среднюю мощность колебаний $\tilde{S}(\theta)$ и $S(\theta)$. $S_0 = 1$ В, $T = 1$ мс. Рассчитайте относительную среднеквадратическую ошибку аппроксимации.

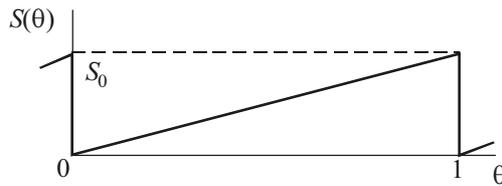


Рис. 5.15

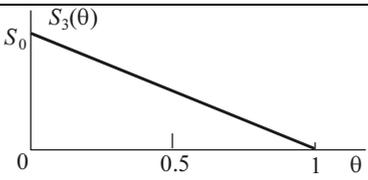
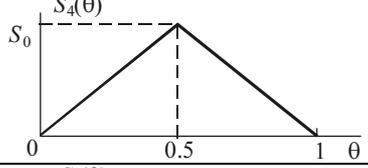
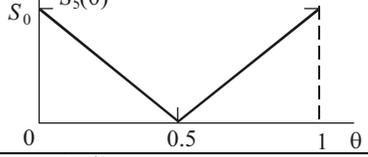
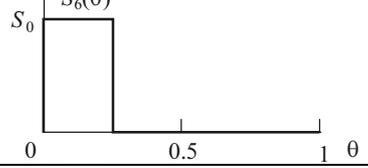
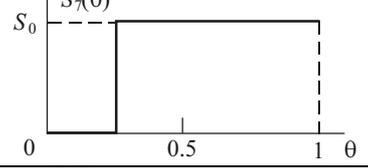
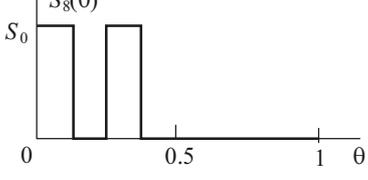
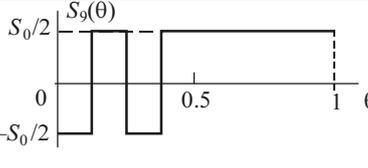
11. По данным предыдущего упражнения изобразите аппроксимированный (синтезированный) сигнал $\tilde{S}(\theta)$ и определите относительную среднеквадратическую ошибку аппроксимации μ для случаев, когда $\tilde{S}(\theta)$ содержит: а) два члена ряда ($N = 2$), б) три члена ($N = 4$), в) четыре члена ($N = 8$), г) пять членов ($N = 16$). Амплитуду S_0 принять равной 32 В.

12. Определите спектр сигнала $S(\theta)$, приведенного в табл. 5.1, в базисе восьми ФУ.

Таблица 5.1

Вариант	Сигнал $S_n(\theta)$	Аналитическая запись
0		$A \cos 2\pi\theta, 0 \leq \theta \leq 1.0$
1		$A \sin 2\pi\theta, 0 \leq \theta \leq 1.0$
2		$S_0\theta, 0 \leq \theta \leq 1.0$

Окончание табл. 5.1

Вариант	Сигнал $S_n(\theta)$	Аналитическая запись
3		$S_0(1-\theta), 0 \leq \theta \leq 1.0$
4		$\begin{cases} 2S_0\theta, & 0 \leq \theta \leq 0.5, \\ 2S_0(1-\theta), & 0.5 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$
5		$\begin{cases} S_0(1-2\theta), & 0 \leq \theta \leq 0.5, \\ S_0(2\theta-1), & 0.5 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$
6		$\begin{cases} S_0, & 0 \leq \theta \leq 0.25, \\ 0, & 0.25 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$
7		$\begin{cases} S_0, & 0.25 \leq \theta \leq 1.0, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq 0.25 \end{cases}$
8		$\begin{cases} S_0, & 0 \leq \theta \leq 0.125, \\ 0, & 0.125 \leq \theta \leq 0.25, \\ S_0, & 0.25 \leq \theta \leq 0.375, \\ 0, & 0.375 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$
9		$\begin{cases} -S_0/2, & 0 \leq \theta \leq 0.125, \\ S_0/2, & 0.125 \leq \theta \leq 0.25, \\ -S_0/2, & 0.25 \leq \theta \leq 0.375, \\ S_0/2, & 0.375 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$

13. По результатам предыдущего упражнения синтезируйте сигнал на интервале $[0, 1]$ и постройте на одном графике исходный $S(\theta)$ и синтезированный $\tilde{S}(\theta)$ сигналы.

14. По данным упражнений 12 и 13 рассчитайте мощности P и P_a исходного и аппроксимированного (синтезированного) сигналов и определите относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации (синтеза).

5.3.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА И ЛАГЕРРА

15. Симметричный импульс $S(t)$ прямоугольной формы имеет амплитуду S_0 , длительность τ и задан на интервале $(-T/2, T/2)$. Аппроксимируйте его тремя слагаемыми обобщенного ряда Фурье в базисе полиномов Лежандра.

16. Аппроксимируйте прямоугольный разнополярный импульс $f(x)$ (рис. 5.16) полиномами Лежандра первых четырех порядков.

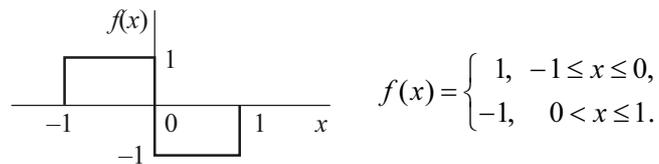


Рис. 5.16

17. Рассчитайте значения первых трех коэффициентов разложения в ряд Фурье–Лагерра для экспоненциального импульса

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad 0 < t < \infty.$$

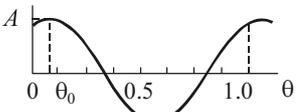
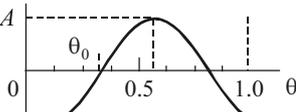
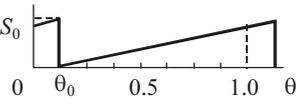
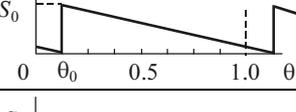
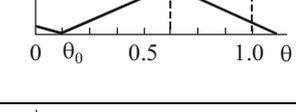
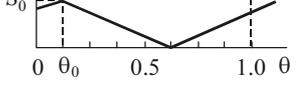
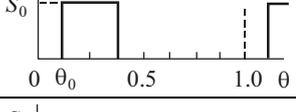
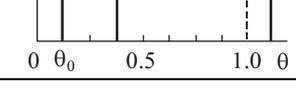
18. Прямоугольный импульс $S(t) = S_0$, $0 < t < \tau$ аппроксимируйте на интервале $(0, \infty)$ тремя членами обобщенного ряда Фурье в базисе функций Лагерра. Вычислите относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации.

5.4. ЗАДАНИЕ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛА В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Аппроксимируйте сигнал $S(\theta)$ в базисе восьми ФУ $wal(n, \theta)$, $n = 0, \dots, 7$. Форма сигнала задана в табл. 5.2, а параметры приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.2

Вариант	Сигнал $S(\theta)$	
	График	Аналитическая запись
0		$A \cos[2\pi(\theta - \theta_0)]$
1		$A \sin[2\pi(\theta - \theta_0)]$
2		$\begin{cases} S_0(\theta + 1 - \theta_0), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ S_0(\theta - \theta_0), & \theta_0 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$
3		$\begin{cases} S_0(\theta_0 - \theta), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ S_0[1 - (\theta - \theta_0)], & \theta_0 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$
4		$\begin{cases} 2S_0(\theta_0 - \theta), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ 2S_0(\theta - \theta_0), & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 0.5, \\ 2S_0[1 - (\theta - \theta_0)], & 0.5 + \theta_0 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$
5		$\begin{cases} S_0(1 - 2(\theta_0 - \theta)), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ S_0(1 - 2(\theta - \theta_0)), & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 0.5, \\ S_0[2(\theta - \theta_0) - 1], & 0.5 + \theta_0 \leq \theta \leq 1.0 \end{cases}$
6		$\begin{cases} S_0, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \theta_n, \quad \theta_n = 1/4, \\ 0, & \text{вне этого интервала} \end{cases}$
7		$\begin{cases} 0, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \theta_n, \quad \theta_n = 1/4, \\ S_0, & \text{вне этого интервала} \end{cases}$

Окончание табл. 5.2

Вариант	Сигнал $S(\theta)$	
	График	Аналитическая запись
8		$\begin{cases} S_0, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \theta_n, & \theta_n = 1/8, \\ S_0, & \theta_0 + 2\theta_n \leq \theta \leq \theta_0 + 3\theta_n, \\ 0, & \text{вне этих интервалов} \end{cases}$
9		$\begin{cases} -S_0/2, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \theta_n, & \theta_n = 1/8, \\ -S_0/2, & \theta_0 + 2\theta_n \leq \theta \leq \theta_0 + 3\theta_n, \\ S_0/2, & \text{вне этих интервалов} \end{cases}$

Таблица 5.3

Подвариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ_0	1/16	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16	9/16	10/16
A или S_0, B	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Требуется:

а) определить спектр и построить спектральную диаграмму для заданного θ_0 и $\theta_0 = 0$;

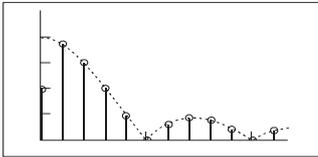
б) синтезировать сигнал на интервале $[0, 1]$ и построить на одном графике заданную и аппроксимированную функцию для $\theta_0 = 0$;

в) рассчитать норму и энергию (на сопротивлении 1 Ом) исходного и аппроксимированного сигнала;

г) определить относительную среднеквадратическую ошибку аппроксимации.

Глава 6

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. РЯД ФУРЬЕ



В научном мышлении всегда присутствует элемент поэзии. Настоящая наука и настоящая музыка требуют однородного мыслительного процесса.

Альберт Эйнштейн

6.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

6.1.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

\mathcal{P} редставление периодического сигнала (с периодом T), т. е. сигнала $S(t)$, для которого справедливо соотношение

$$S(t) = S(t + nT), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (6.1.)$$

обобщенным рядом Фурье (5.3) в базисе гармонических функций или комплексных экспонент называется **гармоническим** представлением; при этом частоты этих функций образуют арифметическую прогрессию, а сам ряд называется просто **рядом Фурье**.

Ряд Фурье применим, когда сигнал на интервале в один период удовлетворяет **условиям Дирихле**: а) отсутствие разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции); б) конечное число разрывов первого рода (скачков функции); в) конечное число экстремумов.

Примечание. Рядом Фурье может быть представлен также сигнал с ограниченной областью определения $[t_1 \leq T_{\text{опр}} \leq t_2]$. В остальные моменты анализируемый сигнал равен нулю. В результате представления рядом Фурье этот сигнал становится периодическим с периодом $T = T_{\text{опр}}$.

Рассмотрим в качестве системы базисных функций

$$\{\varphi_n(t)\} = \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$$

обобщенного ряда Фурье (5.3) систему гармонических функций

$$\begin{aligned} & \{\cos n\Omega t, \sin n\Omega t\} = \\ & = 1, \cos \Omega t, \sin \Omega t, \cos 2\Omega t, \sin 2\Omega t, \dots, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\Omega = 2\pi F = 2\pi / T$ – круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала T .

Система гармонических базисных функций получила наибольшее распространение.

Во-первых, гармонические колебания в отличие от других сохраняют свою форму при прохождении через линейные цепи; изменяются лишь амплитуда и начальная фаза. Во-вторых, широко используется хорошо разработанный в теории цепей символический метод.

Гармонические функции попарно ортогональны. Условие ортогональности (5.1) выполняется. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos n\Omega t \sin n\Omega t dt = \int_0^T \sin 2n\Omega t dt = 0, \\ & \int_0^T \cos n\Omega t \cos k\Omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n-k)\Omega t dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n+k)\Omega t dt = 0 \text{ при } n \neq k, \\ & \int_0^T \sin n\Omega t \sin k\Omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n-k)\Omega t dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n+k)\Omega t dt = 0 \text{ при } n \neq k. \end{aligned}$$

Квадрат нормы базисных функций:

$$\|\varphi_0\|^2 = \int_0^T \varphi_0^2(t) dt = \int_0^T 1^2 dt = T, \quad (6.3)$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^T \varphi_n^2(t) dt = \int_0^T \cos^2 n\Omega t dt = \int_0^T (1/2 + \cos 2n\Omega t) dt = T/2. \quad (6.4)$$

6.1.2. ФОРМЫ РЯДА ФУРЬЕ

1. Синусно-косинусная форма. Если в выражение обобщенного ряда Фурье (5.3) подставим гармонические базисные функции (6.2), то получим следующее выражение:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)). \quad (6.5)$$

Частоты $n\Omega$ называются гармониками сигнала. Коэффициенты ряда (6.5) рассчитываются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (6.6)$$

Если сигнал $S(t)$ – четная функция $S_{\text{ч}}(t)$ аргумента t , то все коэффициенты b_n будут равны нулю и в формуле (6.6) будут отсутствовать синусные слагаемые, т. е. ряд Фурье примет вид

$$S(t) = S_{\text{ч}}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t). \quad (6.6')$$

Если сигнал $S(t)$ – нечетная функция $S_{\text{н}}(t)$ аргумента t , то, наоборот, все коэффициенты a_n будут равны нулю и ряд Фурье примет вид

$$S(t) = S_{\text{н}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t). \quad (6.6'')$$

Недостаток, точнее, неудобство ряда (6.5) заключается в том, что для каждой гармоники $n\Omega$ требуется использовать два слагаемых: косинус и синус.

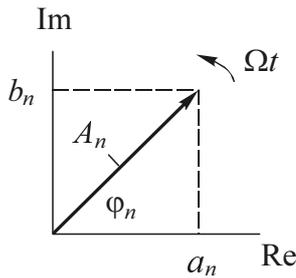
2. Вещественная форма. Она свободна от неудобства предыдущей формы. Сумма двух гармонических составляющих преобразуется в косинус той же частоты $n\Omega$ с амплитудой A_n и начальной фазой φ_n , т. е.

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n), \quad (6.7)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg(b_n / a_n). \quad (6.8)$$

Слагаемое вида $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ называется n -й спектральной составляющей сигнала. Эту составляющую можно представить как проекцию вектора \dot{A}_n на ось действительных значений (рис. 6.1), т. е.



$$A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = \operatorname{Re} \left\{ A_n e^{j\varphi_n} e^{j\Omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{A}_n e^{j\Omega t} \right\}.$$

Рис. 6.1

Совокупность коэффициентов A_n и φ_n образует **дискретный спектр** периодического колебания. Изображение коэффициентов в координатах амплитуда–частота и фаза–частота называется соответственно *амплитудными* и *фазовыми спектральными диаграммами* или *амплитудным* и *фазовым спектром* (рис. 6.2, а).

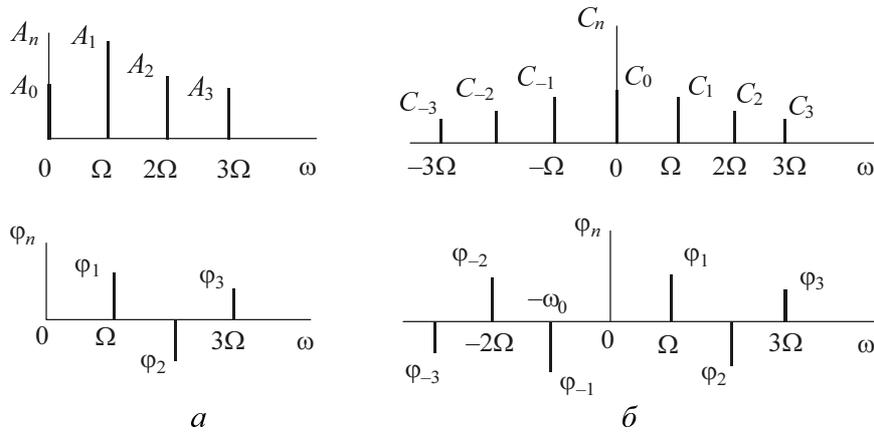


Рис. 6.2

Если сигнал $S(t)$ – *четная* функция $S_c(t)$ аргумента t , то фазы φ_n могут принимать только значения 0 или π . Если сигнал $S(t)$ – *нечетная* функция $S_n(t)$, то $\varphi_n = \pm\pi/2$.

Таким образом, периодический сигнал в общем случае содержит постоянную составляющую a_n (не зависящую от времени) и бесконечную сумму гар-

монических составляющих с амплитудами A_n , частотами $\omega_n = n\Omega$ и начальными фазами φ_n .

3. Комплексная форма. Она соответствует разложению сигнала $S(t)$ в обобщенный ряд Фурье (5.3) по системе ортогональных комплексных экспоненциальных функций

$$\dots, e^{-j2\Omega t}, e^{-j\Omega t}, 1, e^{j\Omega t}, e^{j2\Omega t}, \dots, e^{jn\Omega t} = \cos n\Omega t + j \sin n\Omega t; \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и имеет вид

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t}, \quad (6.9)$$

где

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-jn\Omega t} dt = |\dot{C}_n| e^{j\varphi_n}. \quad (6.10)$$

Выражение (6.9) можно получить из вещественной формы разложением косинуса на комплексные экспоненты $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$. Тогда

$$A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = \frac{A_n}{2} \left(e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)} \right) \quad (6.11)$$

и

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n / 2 \left[\exp(jn\Omega t + j\varphi_n) + \exp(-jn\Omega t - j\varphi_n) \right].$$

Если экспоненты со знаком «минус» в показателе рассматривать как члены ряда с отрицательными номерами, то

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2} e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t},$$

где

$$\dot{C}_n = 0.5 A_n e^{j\varphi_n}, \quad A_n = 2|C_n|, \quad \varphi_n = \arg(\dot{C}_n), \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(\dot{C}_n), \quad b_n = 2 \operatorname{Im}(\dot{C}_n). \quad (6.12)$$

Для вещественных сигналов амплитудный и фазовый спектры обладают соответственно четной и нечетной симметрией:

$$C_{-n} = C_n, \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n.$$

На рис. 6.2, б показаны спектральные диаграммы в случае комплексного ряда Фурье. Изображение отрицательных частот нуждается в пояснении. Понятие «отрицательная частота» – это понятие не физическое, а математическое, связанное с представлением гармонического колебания двумя комплексными экспонентами (6.11).

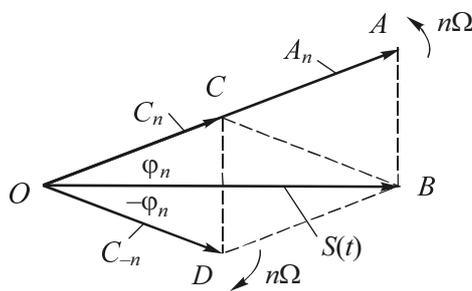


Рис. 6.3

Обратимся к векторным диаграммам на рис. 6.3. Сигнал $S(t)$ – проекция OB вектора OA , вращающегося с угловой частотой $n\Omega$ против часовой стрелки (положительное направление) относительно горизонтальной оси. Но этот же сигнал равен геометрической сумме векторов OC и OD , вращающихся в противоположные стороны с угловыми частотами $n\Omega$ и $-n\Omega$ соответственно. Вектор OC , вращающийся против часовой стрелки, соответствует положительной частоте $\omega_n = n\Omega$, а вектор OD – отрицательной $-\omega_n = -n\Omega$. При рассмотрении вещественной формы ряда Фурье понятие «отрицательная частота» просто теряет смысл.

Если сигнал $S(t)$ – четная функция $S_c(t)$, то коэффициенты \dot{C}_n будут вещественными, а если сигнал $S(t)$ – нечетная функция, то коэффициенты ряда будут мнимыми.

Если сигнал $S(t)$ – четная функция $S_c(t)$, то коэффициенты \dot{C}_n будут вещественными, а если сигнал $S(t)$ – нечетная функция, то коэффициенты ряда будут мнимыми.

6.1.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ В СПЕКТРЕ СИГНАЛА

Для периодических сигналов, а также для сигналов с ограниченной областью определения в качестве энергетической характеристики используется средняя мощность, которую можно вычислить по формулам:

- для временной области

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt; \tag{6.13}$$

- для частотной области

$$\bar{P} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 / 2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n|^2. \quad (6.14)$$

Из (6.14) следует, что средняя мощность сигнала равна сумме мощностей его спектральных составляющих. Мощности взаимодействия составляющих равны нулю, что вытекает из свойства их ортогональности.

Совокупность коэффициентов $A_n^2 / 2$ и $C_n^2 = |\dot{C}_n|^2$ образует дискретный спектр мощности периодического сигнала (рис. 6.4).

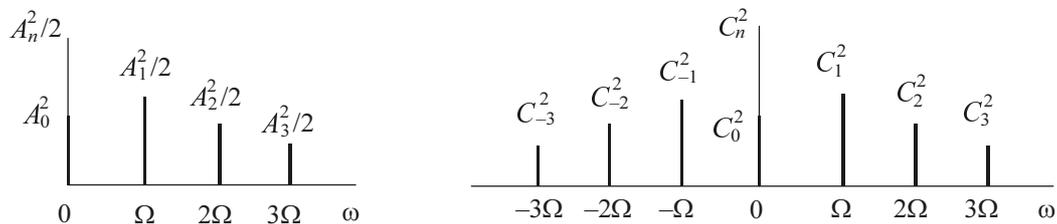


Рис. 6.4

Важно отметить, что при переходе от амплитудного спектра к спектру мощности *теряется информация о фазе* спектральных составляющих.

В выражениях (6.13) и (6.14) размерность \bar{P} определяется как квадрат размерности сигнала. Если $S(t)$ – ток или напряжение, то \bar{P} есть средняя мощность сигнала, выделяемая на сопротивлении 1 Ом. Например, если $S(t)$ представляет собой ток $I(t)$, то при прохождении его через сопротивление R выделяется мощность

$$P = R\bar{P} = \overline{RI^2(t)} = R(I_0^2 + I_1^2 / 2 + \dots + I_n^2 / 2 + \dots).$$

6.1.4. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА

Задача спектрального анализа сигналов – это определение совокупности амплитуд $\{A_n\}$ и фаз $\{\varphi_n\}$ гармоник сигнала. Важно отметить, что коэффициенты A_n , φ_n и \dot{C}_n могут быть вычислены двумя способами:

- непосредственно по (6.6), (6.8) и (6.10);
- с использованием спектральной плотности (см. главу 7).

Задача синтеза (аппроксимации) сигнала – это восстановление сигнала по совокупности конечного числа N его спектральных составляющих $\{A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)\}$:

$$\tilde{S}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n). \quad (6.15)$$

Абсолютная ε и относительная μ ошибки синтеза могут быть рассчитаны по формулам (5.6) и (5.8), которые в рассматриваемом случае примут вид

$$\mu = 1 - P_a / P, \quad (6.16)$$

где

$$P_a = A_0^2 + \sum_{n=1}^N A_n^2 \quad \text{и} \quad P = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt \quad (6.17)$$

– мощности синтезированного (аппроксимированного) $\tilde{S}(t)$ и исходного $S(t)$ сигналов.

6.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Гармоническое колебание

А) Рассмотрим **косинусоидальное** колебание $S_1(t) = U_m \cos \omega_0 t$ (рис. 6.5, а). Для определения спектра воспользуемся синусно-косинусной формой ряда Фурье (6.5):

$$S_1(t) = U_m \cos \omega_0 t = a_0 + a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \dots$$

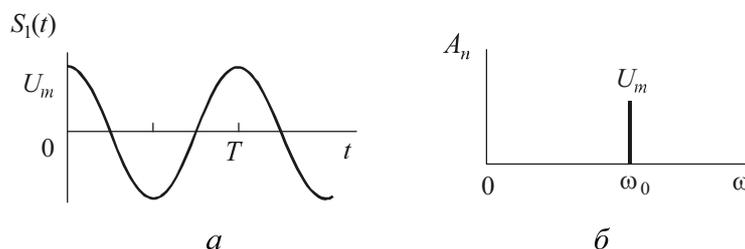


Рис. 6.5

Следовательно, $U_m \cos \omega_0 t = a_1 \cos \Omega t$, а поэтому спектр косинусоидального колебания представляет собой один компонент ряда Фурье с амплитудой $A_1 = a_1 = U_m$ и циклической (круговой) частотой $\Omega = \omega_0$ (рис. 6.5, б).

Б) **Косинусоидальное** колебание вида $S_2(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (рис. 6.6, а). Для определения спектра используем вещественную форму ряда Фурье

$$S_2(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_0 + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \dots$$

Тогда $U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ и $A_1 = U_m$, $\Omega = \omega_0$, $\varphi_1 = \varphi_0$. Спектральные диаграммы показаны на рис. 6.6, б.

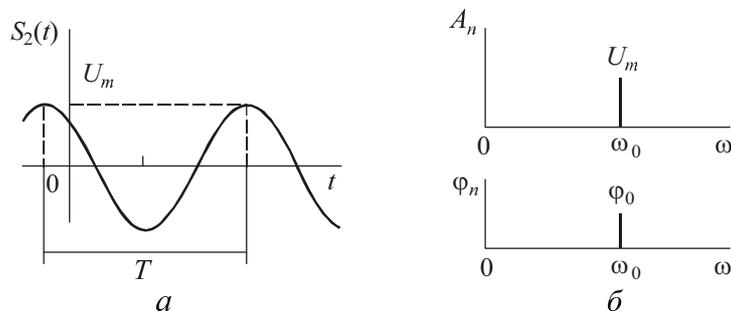


Рис. 6.6

В) **Синусоидальное** колебание $S_3(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ (рис. 6.7, а). Используя формулу приведения $\sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$, запишем колебание в виде косинусоиды $S_3(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \pi/2)$. При этом амплитудный спектр не изменится, а фазовый сдвиг станет равным $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$ (рис. 6.7, б).

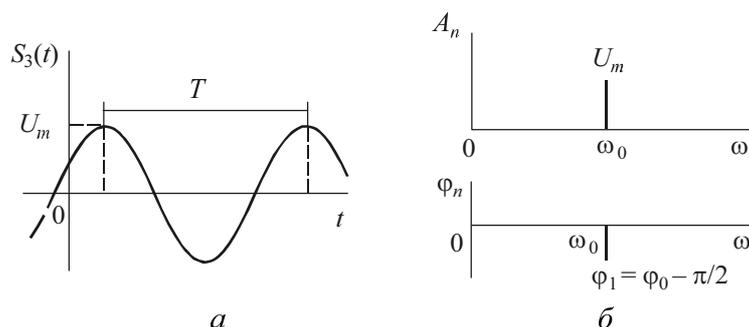


Рис. 6.7

Пример 2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Рассмотрим последовательность импульсов (рис. 6.8), начало отсчета времени которой расположим в середине импульса.

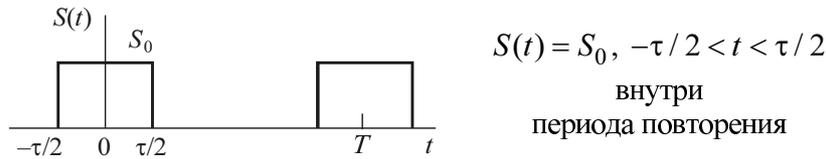


Рис. 6.8

Заданный сигнал – это четная функция времени, а поэтому все коэффициенты $b_n = 0$. Тогда коэффициенты A_n и a_n будут равны. Вычислим эти коэффициенты.

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S_0 dt = \frac{S}{T} \tau = \frac{S_0}{q}, \tag{6.18}$$

где $q = T / \tau$ – скважность импульсов;

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{2}{T} S_0 \frac{1}{-jn\Omega} \sin(n\Omega t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{2}{T} S_0 \tau \frac{2}{-jn\Omega} [\sin(n\Omega\tau/2) - \sin(-n\Omega\tau/2)] = \frac{2}{T} S_0 \tau \frac{\sin x}{x} = \frac{2S_0}{n\pi} \sin(n\pi/q), \tag{6.19}$$

где $x = n\Omega\tau/2 = n\pi/q$. Сомножитель $\sin x/x$ (рис. 6.9) будет огибающей амплитуд всех спектральных составляющих, за исключением постоянной составляющей (нулевой гармоники).

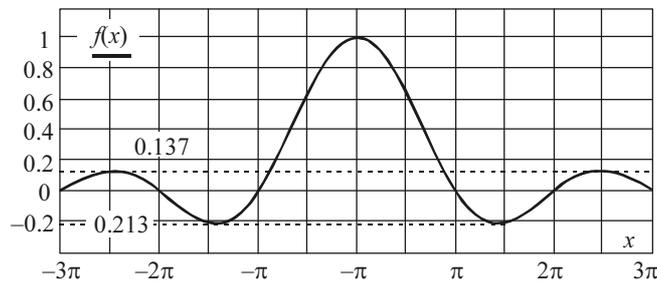


Рис. 6.9

Таким образом, коэффициенты A_n – все вещественные. Они могут иметь и положительные значения, тогда $\varphi_n = 0$, и отрицательные значения, тогда $\varphi_n = \pi$. Следовательно, для фазового спектра получаем

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{при } \sin x > 0, \\ \pi, & \text{при } \sin x < 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Спектральные диаграммы амплитуд и фаз показаны на рис. 6.10.

Ниже приведена программа (листинг) в Mathcad, чтобы вы сами смогли исследовать влияние параметров сигнала на его спектр.

Листинг

$$n := 0, 1 \dots 20 \quad f := 0, 0.1 \dots 18 \quad \tau := 0.2 \quad T := 1 \quad S := 2 \quad q := \frac{T}{\tau}$$

$$A(n) := \begin{cases} \frac{S}{q} & \text{if } n = 0. \\ \frac{2 \cdot S}{n \cdot \pi} \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{q}\right) & \text{if } n \geq 1. \end{cases} \quad \Phi(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{q}\right) > 0. \\ \pi & \text{if } \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{q}\right) < 0. \end{cases}$$

При выводе на экран монитора графиков $A(n)$ и $\Phi(n)$ производятся следующие установки: Symbol в положение o's, а Type в положение stem.

$$S(f) := \frac{2 \cdot S \sin(\pi \cdot f \cdot \tau)}{q \pi \cdot f \cdot \tau} \quad \Phi(f) := \begin{cases} 0 & \text{if } \sin(\pi \cdot f \cdot \tau) > 0. \\ \pi & \text{if } \sin(\pi \cdot f \cdot \tau) < 0. \end{cases}$$

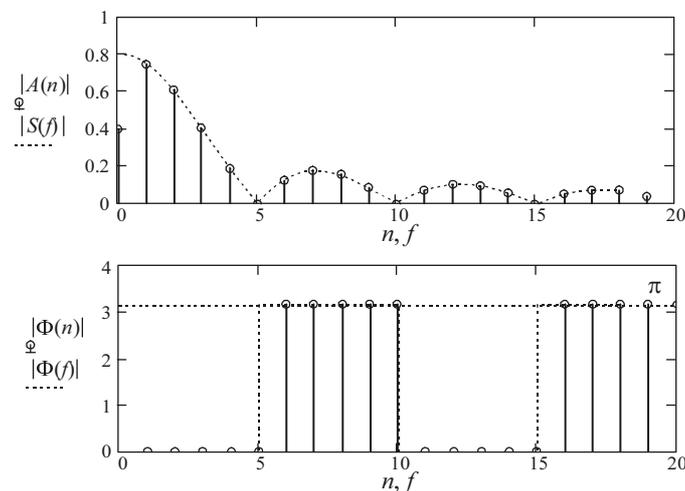


Рис. 6.10

Анализ результата

1. Спектр периодической последовательности дискретный. Расстояние F между дискретами обратно пропорционально периоду повторения T импульсов, т. е. $F = 1 / T$.

2. Спектр теоретически бесконечен.

3. Форма амплитудного спектра, т.е. его огибающая (штриховая линия на рис. 6.10), определяется функцией

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \quad (6.21)$$

и имеет «лепестковый» характер. Ширина лепестка Δf находится из условия равенства синуса нулю, что соответствует аргументу синуса π , 2π и т. д. Следовательно, ширина каждого лепестка

$$\Delta f = 1 / \tau. \quad (2.22)$$

Чем короче импульс, тем больше ширина лепестка спектра сигнала. Известно [1–3], что в первом лепестке сосредоточено 90.5 % всей мощности сигнала.

Надо отметить, что и для других импульсных сигналов, но с явно выраженными началом и концом амплитудный спектр также имеет лепестковый характер, при этом $\Delta f = K / \tau$, где $K = 1 \dots 2$ в зависимости от формы сигнала.

4. Количество гармоник, входящих в один лепесток:

$$n_0 = \Delta f / F = T / \tau = q, \quad (6.23)$$

т. е. равно скважности импульсов. При целочисленном значении скважности q в амплитудном спектре рассматриваемой последовательности будут отсутствовать гармоники с номерами n_0 , $2n_0$ и т. д.

5. Амплитуда гармоник A_n пропорциональна амплитуде S_0 и длительности τ импульса, но обратно пропорциональна периоду повторения T импульсов.

Пример 3. Меандр и его спектр. Меандр (по-гречески «орнамент») – это важный частный случай предыдущего сигнала, когда скважность равна двум (рис. 6.11).

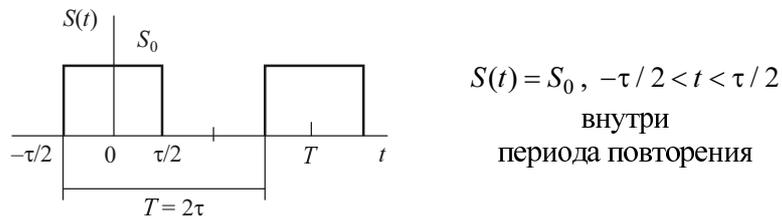


Рис. 6.11

Подставив в формулы (6.18) и (6.19) скважность $q = 2$, получим

$$A_0 = a_0 = S_0 / q = S_0 / 2, \quad (6.24)$$

$$A_n = a_n = \frac{2S_0}{n\pi} \sin(n\pi/2). \quad (6.25)$$

Определим амплитуды первых пяти гармоник сигнала:

$$n = 1, \quad A_1 = 2S_0 / \pi = 0.637S_0; \quad n = 2, \quad A_2 = 0;$$

$$n = 3, \quad A_3 = -2S_0 / 3\pi = -0.212S_0; \quad n = 4, \quad A_4 = 0;$$

$$n = 5, \quad A_5 = 2S_0 / 5\pi = 0.127S_0; \quad n = 6, \quad A_6 = 0.$$

Итак, меандр содержит в своем спектре только нечетные гармоники (рис. 6.12) с чередующимися знаками. Амплитуды гармоник обратно пропорциональны их номеру.

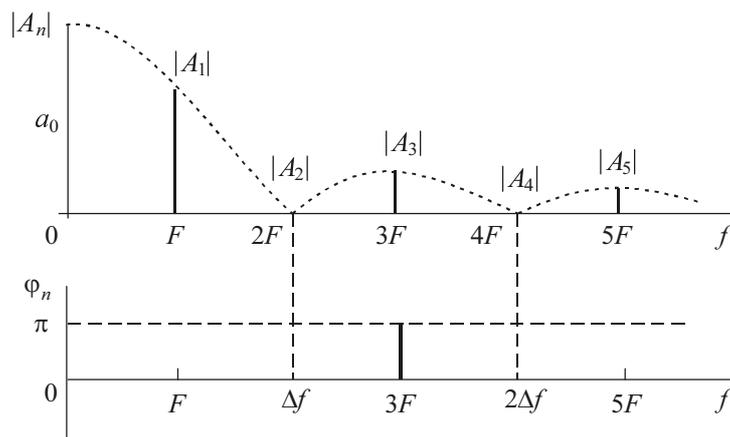


Рис. 6.12

Пример 4. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, представленной рядом Фурье в комплексной форме. В этом случае амплитудный спектр – четная функция своего аргумента (n или $n\Omega$) и мы отображаем амплитуду $|A_n|$ n -й гармоники сигнала двумя амплитудами $|C_n|/2$ и $|C_{-n}|/2$, расположенными симметрично относительно начала координат (нулевой частоты) (рис. 6.13). При этом теперь функция $\sin x / x$ описывает огибающую всех гармоник, включая постоянную составляющую.

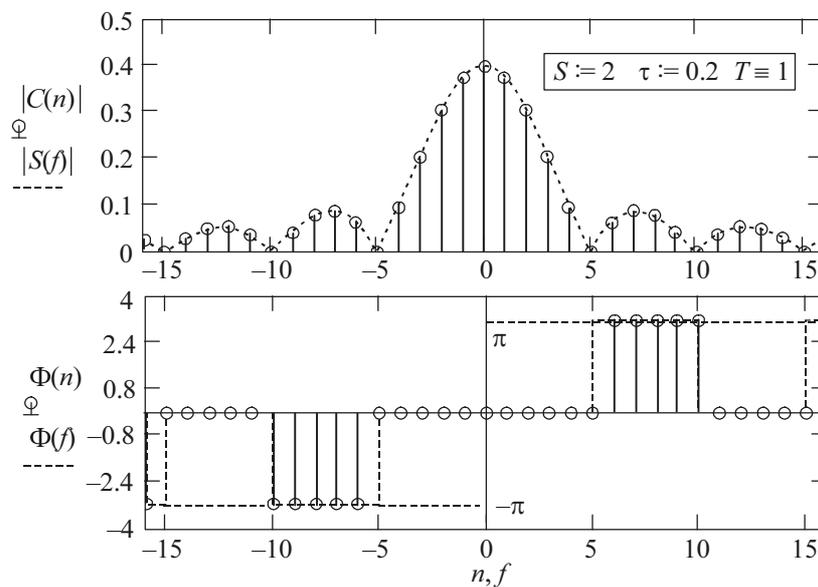


Рис. 6.13

Фазовый спектр – нечетная функция

$$\Psi_n = \varphi_n \quad (n > 0); \quad \Psi_n = -\varphi_n \quad (n < 0),$$

поэтому на полуоси положительных значений n сохраняет прежний вид, а на полуоси отрицательных значений n изменяет свой знак (рис. 6.13).

Пример 5. Синтез периодической последовательности прямоугольных импульсов. По найденным в предыдущих примерах спектральным коэффициентам можно записать выражение для сигнала в виде

$$\tilde{S}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\Omega t) = \frac{S_0}{q} + \sum_{n=1}^N \frac{2S_0}{n\pi} \sin(n\pi/q) \cos(n \cdot 2\pi Ft). \quad (6.26)$$

В частном случае для **меандра** имеем

$$\tilde{S}(t) = S_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \Omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\Omega t + \frac{2}{5\pi} \cos 5\Omega t - \frac{2}{7\pi} \cos 7\Omega t + \dots \right). \quad (6.27)$$

С помощью программы Mathcad проиллюстрируем влияние числа N суммируемых гармоник на форму сигнала. Используем нормированное время $\theta = t/T$.

Листинг

```

θ := 0,0001..1
S0 := 1    q := 2
S(θ) := | 1 if (-0.25 ≤ θ ≤ 0.25)
        | 0 otherwise
N := 3    n := 0,1..N
S1(θ) := a0 + ∑n=1N (2·S0 / (n·π)) · sin(n·π/q) · cos(n·2·π·θ)

```

Параметры сигнала
 Исходный сигнал
 N – vario
 Синтезированный сигнал

Результаты приведены на рис. 6.14.

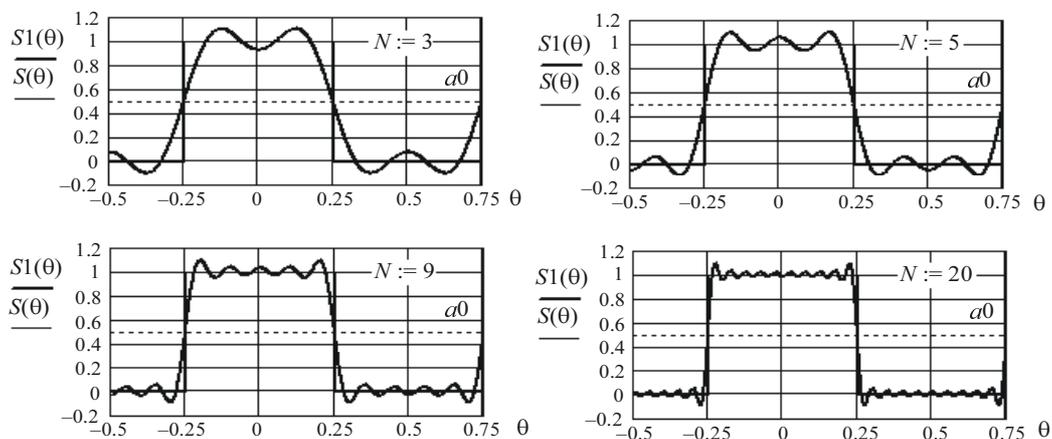


Рис. 6.14

С увеличением числа гармоник ширина выбросов на фронтах импульса будет уменьшаться, а высота выбросов при $N \rightarrow \infty$ стабилизироваться и в

пределе становится равной 0.09 от максимального значения импульса (отклонение δ) (рис. 6.15). Это явление, обусловленное неравномерной сходимостью ряда Фурье, было впервые исследовано Гиббсом и получило название: явление Гиббса. Тем не менее ряд сходится в среднеквадратическом смысле, т. е. среднеквадратическая ошибка ε (следовательно, и относительная ошибка μ) представления сигнала рядом косинусоид быстро стремится к нулю при увеличении их числа.

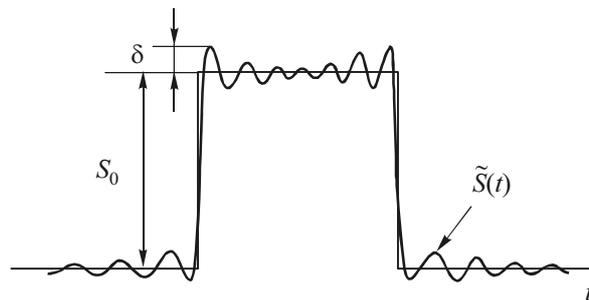


Рис. 6.15

Средняя мощность меандра

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S_0^2 dt = S_0^2 \tau / T = 0.5 S_0^2.$$

Распределение мощности в первых составляющих спектра:

$$P_0 = a_0^2 = (S_0 / 2)^2 = S_0^2 / 4, \quad P_0 / P = 0.5 \text{ (50 \%)};$$

$$P_1 = A_1^2 / 2 = (2S_0 / \pi)^2, \quad P_1 / P = 4 / \pi^2 = 0.405 \text{ (40.5 \%)};$$

$$P_3 = A_3^2 / 2 = (2S_0 / 3\pi)^2, \quad P_1 / P = 4 / 9\pi^2 = 0.045 \text{ (4.5 \%)}.$$

Таким образом, в полосе частот Δf первого лепестка, содержащей всего две составляющие спектра, сосредоточено 90.5 % всей мощности сигнала. При этом относительная ошибка синтеза составит $\mu = 1 - P_c / P = 0.095$ (т. е. 9.5 %). В двух лепестках ($2 \Delta f$) спектра будет сосредоточено 95 % мощности сигнала ($\mu = 0.05$). Расширение полосы спектра в два раза приведет к увеличению мощности всего лишь на 4.5 %.

Пример 6. Пилообразный сигнал. Этот сигнал (рис 6.16) в пределах периода можно описать линейной зависимостью

$$S(t) = (2A/T)t \text{ при } -0.5T \leq t \leq 0.5T.$$

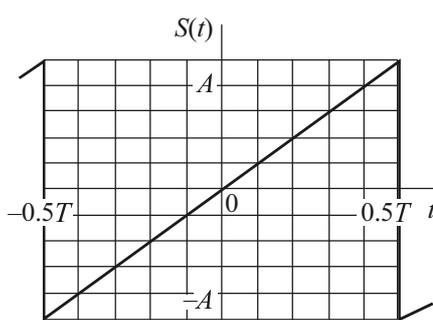


Рис. 6.16

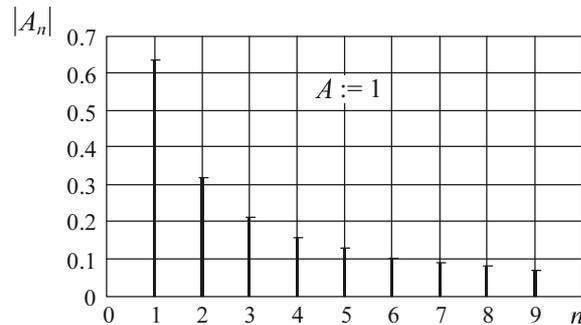


Рис. 6.17

Поскольку он – функция нечетная, ряд Фурье в синусно-косинусной форме (6.5) содержит только синусоидальные составляющие (рис. 6.17):

$$A_n = b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \sin(n\Omega t) dt = -\frac{2A}{n\pi} (-1)^n. \quad (6.28)$$

Выражение для ряда Фурье примет вид

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \Omega t - \frac{1}{2} \sin 2\Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t - \dots \right). \quad (6.29)$$

С помощью программы Mathcad проиллюстрируем влияние числа N суммируемых гармоник на форму сигнала. Используем нормированное время $\theta = t/T$.

Листинг

```

θ := -0.5, -0.49..0.5      A := 1          Нормированное время, амплитуда сигнала
S(θ) := A·2·θ              Исходный сигнал
N := 3                     N – vario
S2(θ) := ∑_{n=1}^N [ (-2 / (n·π)) · A · (-1)^n · sin(n·2·π·θ) ] Синтезированный сигнал

```

Результаты приведены на рис. 6.18.

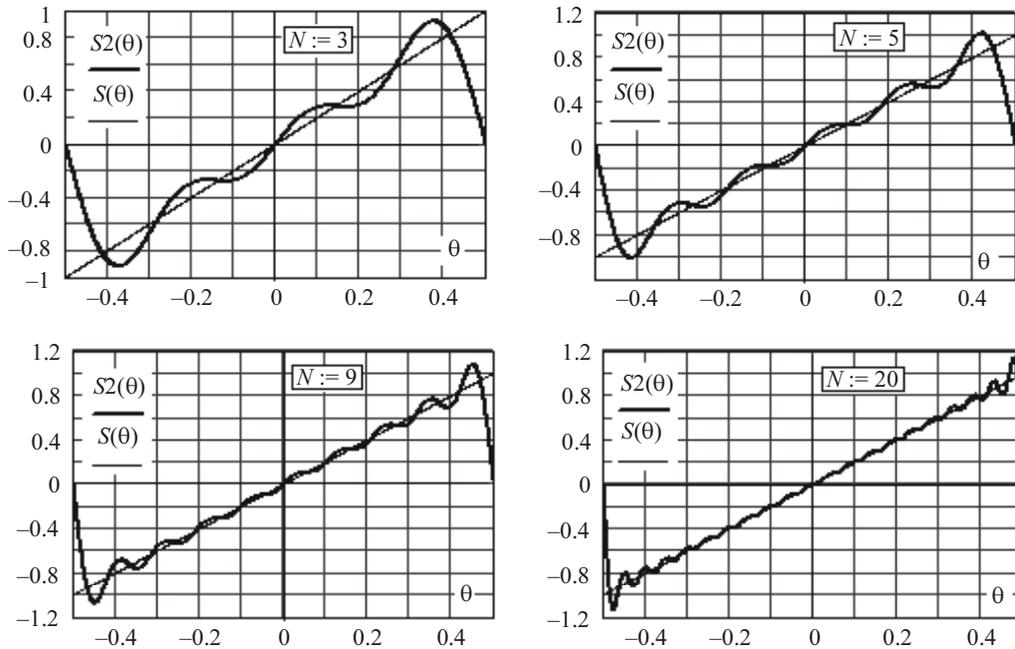


Рис. 6.18

Полная средняя мощность исходного и аппроксимированного сигнала (при $N = 10$)

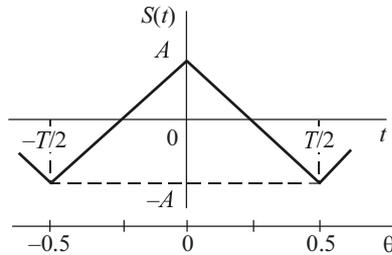
$$P = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(\frac{2A}{T} t \right)^2 dt = A^2 / 3 = 0.333 A^2,$$

$$P_a = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{-2A}{n\pi} (-1)^n \right)^2 / 2 = 0.314 A^2.$$

Относительная ошибка синтеза составит $\mu = 1 - P_a / P = 1 - 0.943 = 0.057$, или 5.7 %.

Рассмотренный сигнал широко используется, например, в устройствах для развертки изображения в осциллографах и телевизорах.

Пример 7. Последовательность треугольных импульсов (рис. 6.19).



$$S(t) = A(1 - 4|t - kT|/T)$$

при $(k - 0.5)/T \leq t \leq (k + 0.5)/T$,

или $S(\theta) = A(1 - 4|\theta - k|)$

при $(k - 0.5) \leq \theta \leq (k + 0.5)$.

Рис. 6.19

Поскольку сигнал – четная функция, в синусно-косинусной форме ряда Фурье будут только косинусные слагаемые (т. е. $b_n = 0$). Тогда

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \left(1 - 4\frac{|t|}{T}\right) \cos n\Omega t = \frac{4A}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n]. \quad (6.30)$$

В спектре сигнала (рис. 6.20) будут присутствовать только нечетные гармоники:

$$A_1 = \frac{8A}{\pi^2}, \quad A_3 = \frac{8A}{(3\pi)^2}, \quad A_5 = \frac{8A}{(5\pi)^2}, \quad A_7 = \frac{8A}{(7\pi)^2} \text{ и т. д.}$$

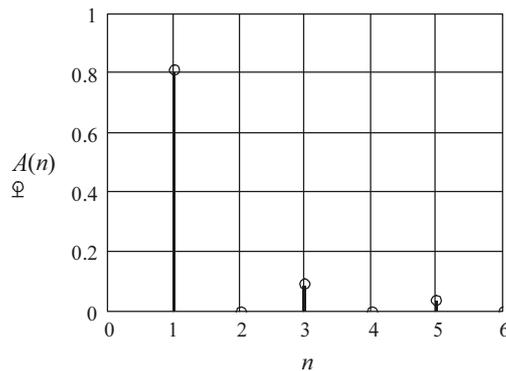


Рис. 6.20

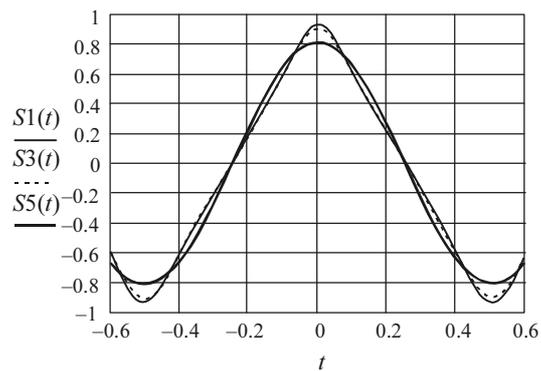


Рис. 6.21

Синтезированный сигнал имеет следующий вид (рис. 6.21):

$$\tilde{S}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos n\Omega t = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos \Omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\Omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\Omega t + \dots \right).$$

Чем больше гармоник будет участвовать в спектре сигнала, тем меньше будет отличие синтезированного сигнала $\tilde{S}(t)$ от исходного $S(t)$.

6.3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите спектр сигналов $S_1(t) - S_4(t)$, используя тригонометрическую форму ряда Фурье. Изобразите спектральные диаграммы.

а) $S_1(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_H t + \varphi_0)$;

б) $S_2(t) = U_0 + U_m \sin(\omega_H t + \varphi_0)$;

в) $S_3(t) = U_0 + U_{m1} \cos(\omega_H t) + U_{m2} \sin(2\omega_H t)$;

г) $S_4(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_H t) \cos(2\omega_H t)$.

2. Изобразите спектры мощности сигналов $S_1(t) - S_4(t)$ из упражнения 1. Определите среднюю за период мощность.

4. Как изменится спектр сигнала $S_1(t)$ из упражнения 1, если сигнал сдвинуть по оси времени на величину $\pm \tau$? Как изменится его спектр мощности?

5. Чем отличается спектр сигнала $\alpha S_1(t)$ от спектра сигнала $S_1(t)$, если $\alpha = \text{const}$?

6. Рассчитайте спектр и изобразите спектральную диаграмму сигнала

$$S(t) = \alpha dS_2(t) / dt,$$

где $S_2(t)$ – сигнал из упражнения 1.

7. Вычислите спектр и изобразите спектральные диаграммы сигнала

$$S(t) = \int_0^t S_1(t) dt, \text{ при } U_0 = 0, \varphi_0 = 0, \text{ где } S_1(t) \text{ – сигнал из упражнения 1.}$$

8. Изобразите спектр сигнала

$$S(t) = S_1(\beta t); \beta = \text{const.}$$

9. Запишите аналитическое выражение математической модели сигнала (рис. 6.22). Определите период сигнала. Вычислите среднюю за период мощность.

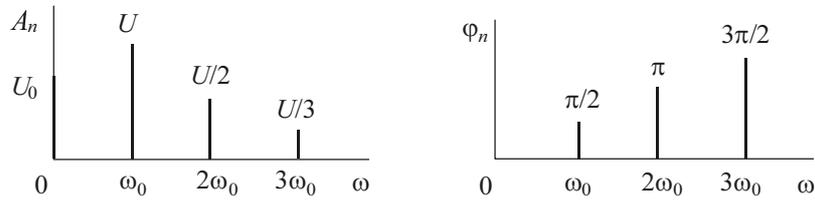


Рис. 6.22

10. Выведите выражение для расчета амплитуды n -й гармоники последовательности импульсов $S_1(t)$ (рис. 6.23, а).

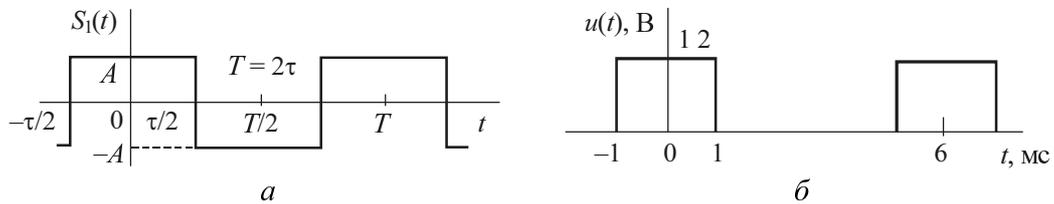


Рис. 6.23

11. По данным предыдущего упражнения запишите ряд Фурье в тригонометрической форме и изобразите сумму первых трех составляющих (с частотами Ω , 2Ω и 3Ω). Определите относительную среднеквадратическую ошибку μ такой аппроксимации. $A = 10$ В, $T = 2\tau = 10$ мс.

12. Какие гармоники будут отсутствовать в спектре сигнала $u(t)$ (рис. 6.23, б)? Рассчитайте постоянную составляющую a_0 сигнала.

13. Найдите постоянную составляющую и амплитуду первой гармоники периодического сигнала $S_1(t)$, показанного на рис. 6.24.

$$S_1(t) = U_m \cos \omega_0 t, \quad -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \quad \tau = T/2 = \pi/\omega_0.$$

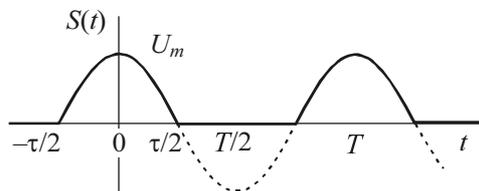


Рис. 6.24

14. Выведите выражение для расчета амплитуды n -й гармоники периодического колебания пилообразной формы $S_1(t)$ (рис. 6.25, а).

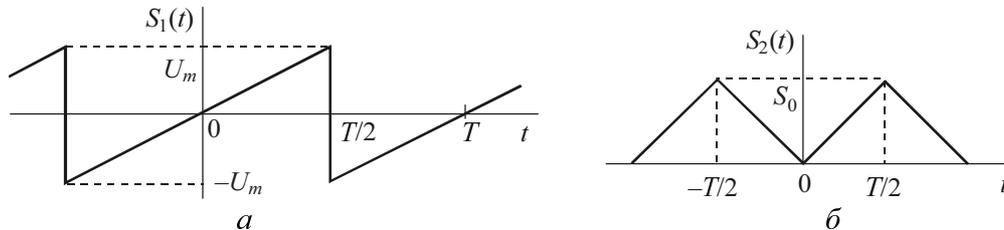


Рис. 6.25

15. По данным предыдущего упражнения запишите ряд Фурье в тригонометрической форме. Вычислите амплитуды первых трех гармоник и относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации для этого случая, т. е. когда $\tilde{S}_1(t)$ равно сумме трех составляющих.

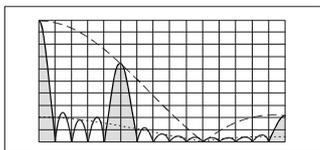
16. Определите постоянную составляющую и амплитуду n -й гармоники последовательности униполярных треугольных импульсов $S_2(t)$ (рис. 6.25, б).

17. По результату решения предыдущего упражнения аппроксимируйте исходный сигнал $S_2(t)$ суммой постоянной составляющей (a_0) и трех первых гармоник (A_1, A_2, A_3). Определите мощности исходного $S_2(t)$ и аппроксимированного $\tilde{S}_2(t)$ сигналов, а также относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации.

Примечание. Задание по гармоническому анализу периодических сигналов объединено с заданием по спектральному представлению непериодических сигналов (см. раздел 7.4).

Глава 7

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА



Три стадии признания научной истины: первая – «это абсурд», вторая – «в этом что-то есть», третья – «это общеизвестно».

Эрнест Резерфорд

7.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

7.1.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Наибольший интерес среди непериодических сигналов представляют *одиночные импульсы*. В отличие от периодического сигнала одиночный импульс, заданный на всей бесконечной оси времени ($T_0 \rightarrow \infty$), включающей область определения сигнала ($T_{\text{опр}}$), не может быть записан как ряд Фурье. Логическим распространением спектральных представлений на одиночные импульсы становится *интегральное преобразование*.

Прямое преобразование Фурье – это переход от описания сигнала во времени $S(t)$ к описанию в частотной области $\dot{S}(\omega)$.

Пусть задан импульсный сигнал $S(t)$, длительность которого $\tau = t_2 - t_1$ конечна. Дополним его такими же сигналами, следующими с периодом T . Тогда получим периодическую последовательность $S_{\text{пер}}(t)$, для которой справедливо представление в виде ряда Фурье:

$$S_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad (7.1)$$

с коэффициентами

$$\dot{C}_n = \frac{\dot{A}_n}{2}, \quad \dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_{\text{пер}}(t) e^{-jn\Omega t} dt. \quad (7.2)$$

Для возвращения от периодического сигнала $S_{\text{пер}}(t)$ к одиночному импульсу $S(t)$ следует устремить период повторения T к бесконечности. При этом основная частота $\Omega = 2\pi/T$ и амплитудные коэффициенты \dot{A}_n уменьшаются (но взаимное соотношение между уровнями гармоник остается неизменным) и в пределе стремятся к нулю. Поэтому их можно заменить $d\Omega = d\omega$ и $d\dot{A}_n = d\dot{A}$. Дискретную переменную $n\Omega$ можно заменить текущей частотой ω , а суммирование – интегрированием. Тогда, вводя новую комплексную функцию $\dot{S}(\omega)$, получим

$$\dot{S}(\omega) = S(j\omega) = \pi \frac{d\dot{A}}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.3)$$

Эта формула называется *прямым преобразованием Фурье*, а комплексная функция $\dot{S}(\omega)$ – *спектральной характеристикой (функцией)* сигнала $S(t)$ или *спектральной плотностью*.

Спектральная плотность не зависит от текущего времени и периода T . Она имеет размерность [Ампл / Гц]. Подобно \dot{A}_n спектральная плотность может быть представлена как

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = S(\omega) \cos \varphi(\omega) + jS(\omega) \sin \varphi(\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (7.4)$$

где

$$S(\omega) = |\dot{S}(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(B(\omega)/A(\omega)); \quad (7.5)$$

$S(\omega)$ – модуль спектральной плотности – четная функция частоты; $\varphi(\omega)$ – аргумент спектральной плотности – нечетная функция частоты. Модуль и аргумент спектральной плотности можно рассматривать как *амплитудно-частотную (АЧХ)* и *фазочастотную (ФЧХ) характеристики* сплошного спектра сигнала.

Для четного $S_{\text{ч}}(t)$ и нечетного $S_{\text{н}}(t)$ сигналов соответственно спектральная плотность будет чисто вещественной (и четной) и чисто мнимой (и нечетной):

$$\dot{S}_{\text{ч}}(\omega) = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ч}}(t) \cos \omega t dt, \quad \dot{S}_{\text{н}}(\omega) = jB(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{н}}(t) \sin \omega t dt. \quad (7.6)$$

Таким образом:

- частота становится непрерывным параметром преобразования,
- спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ – это непрерывная функция частоты,
- вид спектральной плотности зависит только от формы импульса.

Соотношение между спектрами одиночного импульса и последовательностью импульсов. Спектральная плотность связана простым соотношением с комплексными амплитудами периодического сигнала $\sum_{n=0}^{\infty} S(t + nT)$, полученного повторением с периодом T одиночного импульса $S(t)$:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \dot{S}(n\Omega), \quad \Omega = 2\pi / T. \quad (7.7)$$

Соотношение (7.7) позволяет легко перейти от сплошного спектра одиночного импульса к дискретному спектру периодической последовательности импульсов. Модуль спектральной плотности одиночного импульса и огибающая спектра периодической последовательности (полученной повторением заданного импульса) совпадают по форме и отличаются только масштабом:

$$A_n = 2C_n = \frac{2}{T} S(n\Omega) = \frac{S(n\Omega)}{\pi} \Omega. \quad (7.8)$$

Расчет \dot{C}_n и A_n по соотношениям (7.7) и (7.8) рекомендуется проводить еще и потому, что:

- спектральная плотность большинства простейших одиночных импульсов широко представлена в [1–3];
- при расчете спектра сложных импульсных последовательностей можно воспользоваться основными теоремами о спектре (прил. П.5).

Обратное преобразование Фурье – это восстановление временной модели $S(t)$ сигнала по его спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$. Формула (7.1) с учетом (7.7) запишется в виде

$$S_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{S}(n\Omega)\Omega}{2\pi} e^{jn\Omega t}.$$

При устремлении периода T к бесконечности и с учетом ранее сделанных замечаний о том, что Ω можно заменить $d\Omega = d\omega$, дискретную переменную $n\Omega$ –текущей частотой ω , а суммирование – интегрированием, получим переход от $S_{\text{пер}}(t)$ к $S(t)$:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) называется *обратным преобразованием Фурье*. Для вещественных сигналов с учетом того, что значения спектральной плотности при положительных и отрицательных частотах комплексно сопряжены ($\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$), формулу (7.9) можно записать еще в виде

$$S(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega. \quad (7.10)$$

Таким образом, получаем *фундаментальный вывод*: сигнал $S(t)$ и его спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ взаимно однозначно связаны парой преобразований Фурье.

Если использовать вместо круговой частоты ω обычную частоту f , то формулы прямого и обратного преобразований Фурье примут симметричный вид (за исключением знака в показателе экспоненты):

$$\begin{aligned} \dot{S}(f) = F^1 \{S(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi f t} dt, \\ \dot{S}(t) = F^{-1} \{\dot{S}(f)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j2\pi f t} df. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Применимость преобразований Фурье. Чтобы преобразования Фурье были применимы:

- должен сходиться интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt < \infty; \quad (7.12)$$

- должны соблюдаться условия Дирихле (см. раздел 6.1).

Основные свойства преобразований Фурье. Формулы (7.3) и (7.9) [а также (7.11)] позволяют установить связь между преобразованиями сигнала во временной области и изменением его спектра и, наоборот, установить, как влияют изменения в частотной области сигнала на изменения его во временной области. Основные свойства преобразований Фурье подробно изложены в [1–3] и в виде теорем приведены в прил. П.5. Использование этих теорем существенно облегчает на практике спектральный анализ и синтез сигналов.

7.1.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СИГНАЛА И ЕГО СВЯЗЬ С АКФ

Полная энергия одиночного импульса может быть вычислена либо во временной области, либо в частотной в соответствии с **равенством Парсеваля**:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (7.13)$$

где $W(\omega) = S^2(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2$ – *спектральная плотность энергии* (СПЭ), или *энергетический спектр* одиночного импульса. СПЭ и АКФ сигнала связаны парой преобразований Фурье

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.14)$$

Таким образом, чем шире СПЭ, тем уже АКФ, и наоборот.

Энергетическую связь двух различных сигналов $U(t)$ и $V(t)$, сдвинутых относительно друг друга на величину τ , характеризует *взаимная корреляционная функция* (ВКФ)

$$B_{u,v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)V(t-\tau) dt. \quad (7.15)$$

При $\tau=0$ ВКФ представляет собой энергию взаимодействия сигналов $E_{U,V}$, т. е. их скалярное произведение

$$E_{U,V} = B_{U,V}(0) = (U, V) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)V(t)dt. \quad (7.16)$$

Задавая оба сигнала своими спектральными плотностями $\dot{S}_U(\omega)$ и $\dot{S}_V(\omega)$ и выражая через них сигналы $U(t)$ и $V(t)$ в формуле (7.16) при помощи обратного преобразования Фурье, получаем

$$E_{U,V} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_V(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_V(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt.$$

Внутренний интеграл есть спектральная плотность сигнала $U(t)$, определенная при отрицательном значении аргумента ω , т. е. $\dot{S}_U(-\omega) = \dot{S}_U^*(\omega)$ (« $*$ » – знак комплексного сопряжения). Тогда

$$E_{U,V} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_V(\omega) \dot{S}_U^*(\omega) d\omega. \quad (7.17)$$

Приравнивая правые части выражений (7.16) и (7.17), получаем **обобщенную формулу Рэлея**

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t)V(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_V(\omega) \dot{S}_U^*(\omega) d\omega. \quad (7.18)$$

Эту формулу можно трактовать так: энергия взаимодействия двух сигналов есть скалярное произведение сигналов, или скалярное произведение их спектральных плотностей.

Равенство Парсеваля (7.13) – частный случай обобщенной формулы Рэлея (7.18), когда сигналы идентичны $U(t) = V(t) = S(t)$.

Для вещественных сигналов подынтегральное выражение в правой части выражения (7.18) должно быть вещественным. Введя вещественную функцию

$$W_{U,V}(\omega) = \operatorname{Re} \left(\dot{S}_V(\omega) \dot{S}_U^*(\omega) \right), \quad (7.19)$$

называемую *взаимной спектральной плотностью энергии* (ВСПЭ) или *взаимным энергетическим спектром*, получим

$$E_{U,V} = (U, V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{U,V}(\omega) d\omega. \quad (7.20)$$

Из (7.20) следует, что наибольший вклад в энергию взаимодействия $E_{U,V}$ двух сигналов дают те частотные участки $W_{U,V}(\omega)$, где спектры сигналов перекрываются.

ВКФ отображается в частотную область как взаимный энергетический спектр:

$$B_{U,V}(\tau) \Leftrightarrow W_{U,V} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{U,V}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.21)$$

где ВКФ связана с интегралом свертки следующим соотношением:

$$B_{U,V}(\tau) = U(\tau) \otimes V(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) V(\xi + \tau) d\xi. \quad (7.22)$$

7.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКТИВНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА И ШИРИНЫ ЕГО СПЕКТРА

Для оценки эффективной (практической или активной) длительности сигнала ($\tau_{эф}$), имеющего бесконечно протяженную во времени математическую модель, можно воспользоваться энергетическим критерием

$$E(\tau_{эф}) = \int_0^{\tau_{эф}} S^2(t) dt = k_3 E. \quad (7.23)$$

В частотной области аналогичным способом определяют эффективную ширину спектра сигнала ($\omega_{эф}$):

$$E(\omega_{эф}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{эф}} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = k_3 E. \quad (7.24)$$

Таким образом, эффективная длительность $\tau_{\text{эф}}$ (и ширина спектра $\omega_{\text{эф}}$) – это такой временной (и частотный) интервал, в котором сосредоточена подавляющая часть (k_3) полной энергии сигнала. Обычно $k_3 = 0.9$ (90 %) или 0.95 (95 %).

Между эффективной длительностью и шириной спектра простейших видеоимпульсов имеется связь, которая называется *соотношением неопределенности* для сигналов

$$\tau_{\text{эф}} f_{\text{эф}} = \mu, \quad (7.25)$$

где $f_{\text{эф}} = \omega_{\text{эф}} / 2\pi$; μ – небольшое число (см. прил. П.6).

При другом подходе за эффективную ширину спектра принимают основное равновеликого по площади прямоугольника (на положительной полуоси частот), т. е.

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{|\dot{S}(0)|^2} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (7.26)$$

Можно показать, что произведение ширины спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ на интервал корреляции τ_k сигнала есть величина, одинаковая для всех сигналов:

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \tau_k = \pi/2 \quad \text{и} \quad \Delta f_{\text{эф}} \tau_k = 1/4. \quad (7.27)$$

Действительно, подставляя в формулу (7.27) выражения для $\Delta\omega_{\text{эф}}$ (7.26) и τ_k (3.9), получаем

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \tau_k = \frac{1}{|\dot{S}(0)|^2} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \frac{1}{B(0)} \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau.$$

Подставляем сюда выражения $|\dot{S}(0)|^2$ и $B(0)$ из (7.14), окончательно имеем

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \tau_k = \frac{1}{2 \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \frac{1}{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega} \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2}.$$

7.1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В случаях, когда интегралы (7.3) и (7.12) не имеют конечного значения, применяется умножение функции $S(t)$ на затухающую экспоненту e^{-ct} , $t \geq 0$. В результате спектральная функция будет

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [S(t)e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} S(t)e^{-(c+j\omega)t} dt = \dot{S}(c+j\omega) = S(p), \quad (7.28)$$

где $p = c + j\omega$ – комплексное число, получившее название комплексной частоты; c – положительная константа, выбираемая так, чтобы функция $S(t)e^{-ct}$ удовлетворяла условию (7.12). Обеспечить существование интеграла в (7.28) можно заданием $S(t)$ так, чтобы $S(t) = 0$ при $t < 0$; при этом нижний предел интегрирования будет равен нулю.

Итак, преобразование

$$S(p) = L^1 \{S(t)\} = \int_0^{\infty} S(t)e^{-pt} dt \quad (7.29)$$

называется односторонним *прямым преобразованием Лапласа*.

Таким образом, для определения спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ сигнала $S(t)$ нет необходимости вычислять интеграл (7.3). Для этого можно воспользоваться таблицами операционных изображений по Лапласу (см. прил. П.6), если считать $p = j\omega$ (т. е. $c = 0$).

Если выполнить над $S(p) = \dot{S}(c+j\omega)$ обратное преобразование Фурье, то получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(c+j\omega) e^{j\omega t} d\omega = S(t)e^{-ct}.$$

Умножая обе части на e^{ct} и заменяя переменную ω на $c+j\omega$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \frac{j}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(c+j\omega) e^{ct} e^{j\omega t} d\omega = S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{S}(c+j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c+j\omega).$$

Наконец, переходя от комплексной $c + j\omega$ к p , получаем выражение

$$S(t) = L^{-1}\{S(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp, \quad (7.30)$$

которое называется *обратным преобразованием Лапласа*. Методы выполнения этого преобразования, включая определение вычетов, известны в математике.

Формулы (7.29) и (7.30) называют *парой преобразований Лапласа*, $S(p)$ – *изображением*, $S(t)$ – *оригиналом*, а сам метод преобразований – *операторным* (или *операционным*).

Для большого количества колебаний преобразования Лапласа приведены в таблицах (см., например, таблицу прил. П.7).

Так как преобразования Фурье есть частный случай преобразований Лапласа, то все теоремы преобразований Фурье остаются в силе, если $j\omega$ заменить на p и вместо спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ использовать изображение $S(p)$.

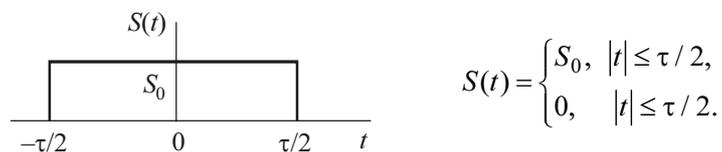
Преобразования Лапласа, как и преобразования Фурье, широко используются также в радиотехнике для изучения сигналов и их прохождения через радиотехнические цепи.

Изображение и спектральная плотность некоторых сигналов приведены в прил. П.8.

7.2. ПРИМЕРЫ

7.2.1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИГНАЛОВ

Пример 1. Прямоугольный импульс. Рассмотрим прямоугольный импульс, центрированный (четный) относительно начала отсчета (рис. 7.1).



$$S(t) = \begin{cases} S_0, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Рис. 7.1

Спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S_0 e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{-j\omega} \left(e^{-j\omega\tau/2} + e^{+j\omega\tau/2} \right) \frac{2}{2} = \frac{2S_0}{\omega} \sin(\omega\tau/2) \frac{\tau}{\tau} = \\ &= S_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = S_0\tau \sin(x)/x, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где $x = \omega\tau/2$. При $\omega = 0$ функция $\sin(x)/x$ равна единице и значение спектральной плотности $S(0)$ равно площади импульса $S_0\tau$.

Модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) спектральной плотности, т. е. амплитудный и фазовый спектры, можно записать в виде

$$|\dot{S}(\omega)| = S_0\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \sin(\omega\tau/2) > 0, \\ -\pi, & \sin(\omega\tau/2) < 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Эти формулы проиллюстрированы графиками на рис. 7.2.

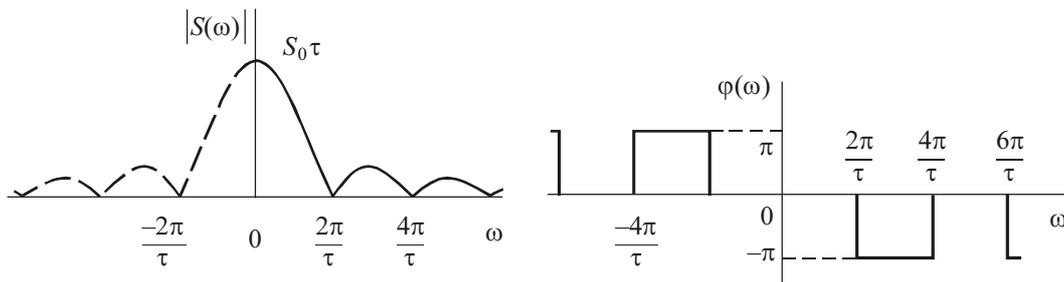


Рис. 7.2

АЧХ имеет лепестковый характер. Ширина лепестка

$$\Delta\omega = 2\pi/\tau \quad (7.33)$$

обратно пропорциональна длительности импульса τ . Поскольку спектральная плотность представляет собой вещественную функцию, ФЧХ в зависимости от знака $\sin(x)/x$ может принимать только два значения: 0 или π . Но значения фазы π и $-\pi$ неразличимы. Поэтому разные знаки на ФЧХ при $\omega > 0$ и $\omega < 0$ взяты с той только целью, чтобы представить фазовый спектр в виде нечетной функции.

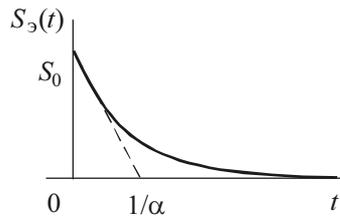
По отношению к периодической последовательности импульсов спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ характеризует форму огибающей амплитудного спектра (см. пример 6.2):

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \dot{S}(n\Omega) = \frac{\Omega}{\pi} \dot{S}(n\Omega).$$

Но при этом спектр последовательности линейчатый (дискретный), а одиночного импульса – сплошной.

Пример 2. Экспоненциальный импульс. Это сигнал бесконечной длительности (рис. 7.3):

$$S_3(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad \text{и} \quad S_3(t) = 0, \quad t < 0. \quad (7.34)$$



Штриховая линия – касательная к экспоненте. Показывает геометрический способ определения коэффициента α

Рис. 7.3

Спектральная плотность

$$\dot{S}_3(\omega) = \int_0^{\infty} S_0 e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{S_0}{\alpha + j\omega}. \quad (7.35)$$

АЧХ и ФЧХ, описываемые выражениями

$$|\dot{S}_3(\omega)| = \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}(-\omega / \alpha), \quad (7.36)$$

показаны на рис. 7.4.

Отметим следующие отличительные особенности спектра этого импульса в сравнении со спектром прямоугольного импульса. Во-первых, спектральная плотность экспоненциального импульса – это комплексная функция частоты. Во-вторых, АЧХ не обращается в нуль при любом конечном значении частоты.

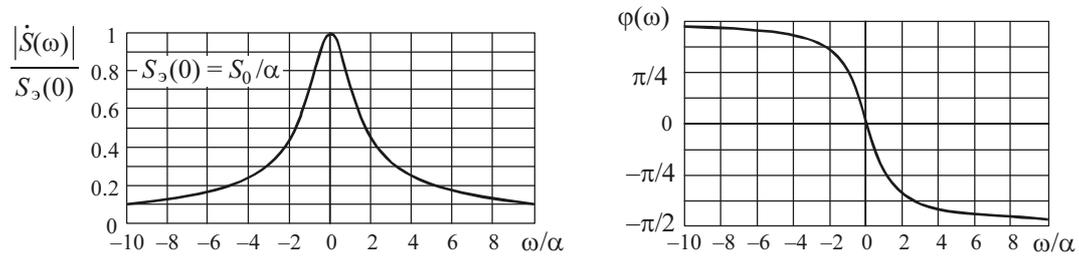


Рис. 7.4

СПЭ описывается выражением

$$|\dot{S}_3(\omega)|^2 = \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (7.37)$$

Эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ будет

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{|\dot{S}(0)|^2} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{S_0^2/\alpha^2} \int_0^{\infty} \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \alpha^2 \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \alpha. \quad (7.38)$$

Пример 3. Колокольный (гауссовский) импульс. Этот импульс (рис. 7.5, а) описывается выражением

$$S(t) = S_0 e^{-\beta^2 t^2}. \quad (7.39)$$

Спектральная плотность импульса

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} dt.$$

Преобразуем интеграл к табличному виду (см. прил. П.3):

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} / 2.$$

Тогда

$$\dot{S}(\omega) = S_0 e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\beta t + j\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} dt = S_0 \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = S_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}. \quad (7.40)$$

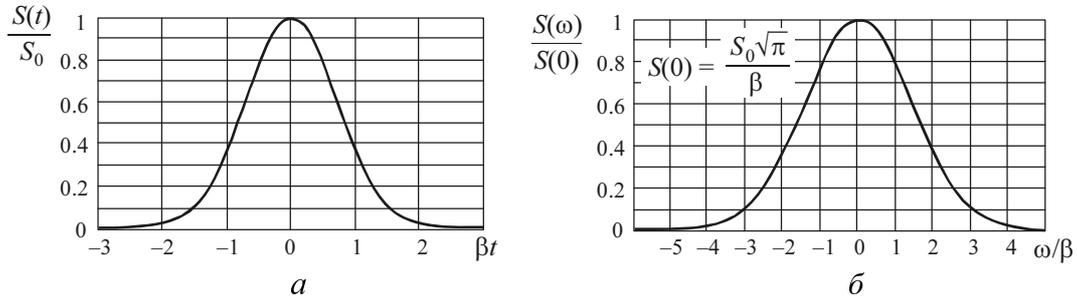


Рис. 7.5

Таким образом, спектральная плотность анализируемого импульса – это функция колокольной формы (рис. 7.5, б). Поскольку она вещественная, четная и положительная, ФЧХ равна нулю во всем диапазоне частот. Как и во временной области, так и в частотной области протяженность импульса бесконечна.

Колокольный импульс интересен тем, что все его производные имеют колокольную форму и он самый «сосредоточенный» в спектре – у него среди всех импульсных сигналов наименьшее значение $\mu = \tau_3 \Delta f_3$ (см. прил. П.5).

Эффективная ширина спектра

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{эф}} &= \frac{1}{|\dot{S}(0)|^2} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{S_0^2 \pi / \beta^2} \int_0^{\infty} S_0^2 \pi / \beta^2 e^{-\omega^2 / (2\beta^2)} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2 / (\beta\sqrt{2})} = \beta\sqrt{\pi/2}, \quad (7.41) \\ \Delta f_3 &= \Delta\omega_{\text{эф}} / 2\pi = \beta\sqrt{1/8\pi} \approx 0.2\beta. \end{aligned}$$

Пример 4. Импульс вида $\sin(x)/x$. Этот импульс, как и предыдущий, имеет бесконечную протяженность в обоих направлениях по оси времени (рис. 7.6, а) и описывается выражением

$$S(t) = S_0 \text{sinc}(\omega_m t) = S_0 \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} = S_0 \frac{\sin(\pi t / \Delta t)}{\pi t / \Delta t} = S_0 \frac{\sin x}{x}, \quad (7.42)$$

где $\omega_m = \pi / \Delta t$, $x = \omega_m t = \pi t / \Delta t$.

В примере 1 был задан прямоугольный импульс, а спектральная плотность получилась в виде функции $\sin(x)/x$. Если сравнить формулы прямого и

обратного преобразований Фурье, то очевидна их симметрия, т. е. взаимная заменимость ω и t . Эти формулы отличаются лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и множителем перед интегралом. Поэтому следует ожидать, что при замене ω на t и t на ω исходному сигналу будет соответствовать спектр прямоугольной формы (рис. 7.6, б). Уровень спектра в полосе частот $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$ определим по значению спектральной плотности при $\omega = 0$:

$$\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} dt = \frac{S_0}{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{S_0}{\omega_m} \pi = S_0 / (2f_m) = S_0 \Delta t,$$

где $\Delta t = \pi / \omega_m$.

Следовательно, спектральная плотность может быть выражена как

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) = \begin{cases} S_0 \pi / \omega_m, & |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases} \quad (7.43)$$

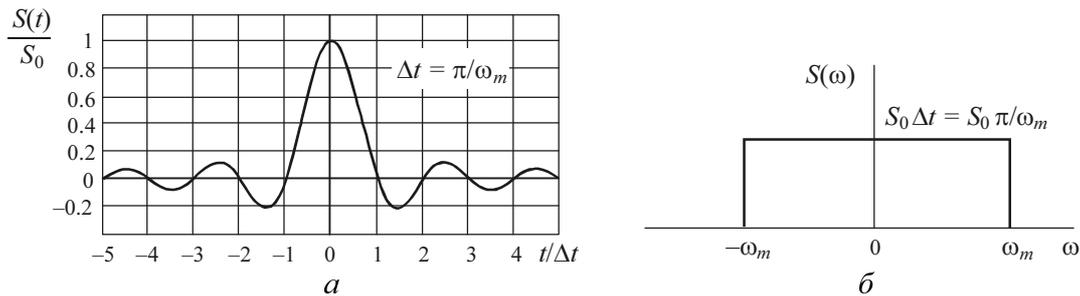


Рис. 7.6

Для подтверждения правильности этого результата выполним обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{S_0 \pi}{\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{S_0}{\omega_m t} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_m t} - e^{-j\omega_m t}) = S_0 \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, заданный сигнал имеет прямоугольный спектр от $-\omega_m$ до ω_m . Следовательно, $\Delta\omega_{\text{эф}} = \omega_m$. С этим сигналом мы вновь встретимся при представлении сигналов рядом Котельникова (глава 8).

Пример 5. Спектр пары импульсов прямоугольной формы (рис. 7.2). Этот пример призван демонстрировать применение теорем о спектрах (см. прил. П.4).

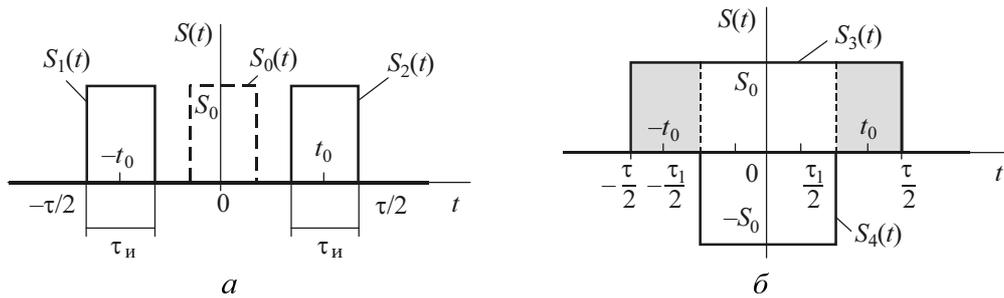


Рис. 7.7

Решение 1. Спектр одиночного прямоугольного импульса $S_0(t)$ был найден в примере 1. Здесь воспользуемся теоремами о спектре суммы сигналов и спектре смещенных по оси времени сигналов:

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = S_0(t + t_0) + S_0(t - t_0),$$

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_0(\omega) \left[e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0} \right] \frac{2}{2} = 2\dot{S}_0(\omega) \cos \omega t_0.$$

Подставив вместо $\dot{S}_0(\omega)$ выражение (7.31) для спектральной плотности одиночного импульса, выведенное в примере 1, получим

$$\dot{S}(\omega) = 2S_0\tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2} \cos \omega t_0. \quad (7.44)$$

АЧХ и ФЧХ (для $\omega > 0$) спектральной плотности можно записать как

$$|\dot{S}(\omega)| = 2S_0\tau_n \left| \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2} \right| |\cos \omega t_0|,$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \sin(\omega\tau_n/2) \cos \omega t_0 > 0, \\ \pi, & \sin(\omega\tau_n/2) \cos \omega t_0 < 0. \end{cases}$$

Эти характеристики приведены на рис. 7.8. Они построены для положительной полуоси частот. АЧХ – это четная функция аргумента ω , а ФЧХ – нечетная. Штриховой линией на графике АЧХ изображена удвоенная спектральная плотность одиночного импульса. Ширина лепестка $\Delta\omega$ его спектра обратно пропорциональна длительности импульса $\tau_{\text{и}}$: $\Delta\omega = 2\pi / \tau_{\text{и}}$. «Вписанные» лепестки обусловлены множителем $\cos \omega t_0$, и их ширина обратно пропорциональна временному сдвигу t_0 .

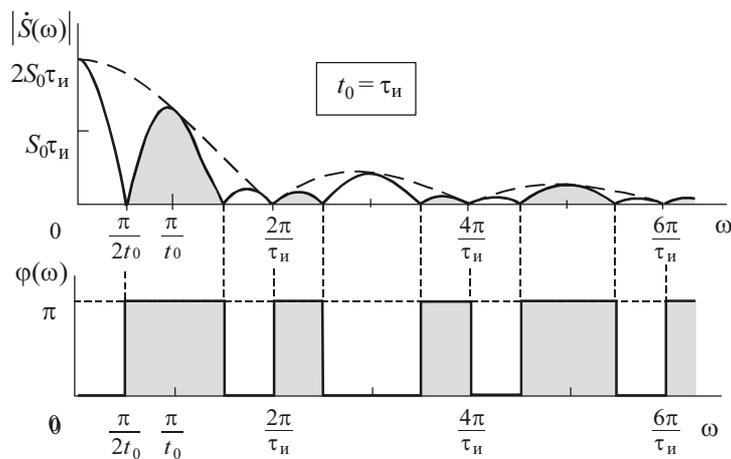


Рис. 7.8

Решение 2. Заданный сигнал можно представить в виде суммы двух симметричных относительно начала координат ($t = 0$) импульсов $S_3(t)$ и $S_4(t)$ (см. рис. 7.7, б). Тогда по теореме о спектре суммы сигналов получаем

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \dot{S}_3(\omega) + \dot{S}_4(\omega) = S_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} - S_0\tau_1 \frac{\sin(\omega\tau_1/2)}{\omega\tau_1/2} = \\ &= \frac{2S_0}{\omega} (\sin(\omega\tau/2) - \sin(\omega\tau_1/2)). \end{aligned}$$

Если подставить в это выражение $\tau = 2t_0 + \tau_{\text{и}}$ и $\tau = 2t_0 - \tau_{\text{и}}$, заменить разность синусов на произведение и домножить на $\tau_{\text{и}} / \tau_{\text{и}}$, то после преобразований получим

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2S_0}{\omega} \left(2 \sin\left(\frac{\omega(\tau - \tau_1)/2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega(\tau + \tau_1)/2}{2}\right) \right) \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}} =$$

$$= 2S_0\tau_{\text{и}} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{и}}/2)}{\omega\tau_{\text{и}}/2} \cos \omega t_0.$$

Это выражение точно совпадает с (7.44).

Пример 6. «Пачка» импульсов. Рассмотрим группу равноотстоящих одинаковых, например прямоугольных, импульсов (рис. 7.9).

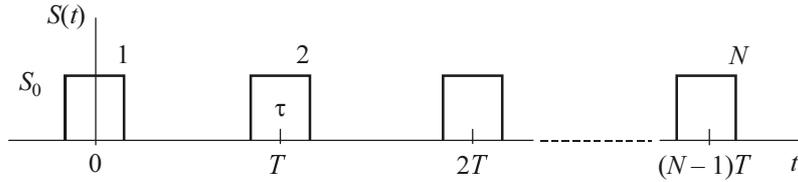


Рис. 7.9

Спектральная плотность $\dot{S}_1(f)$ первого импульса известна. Спектральные плотности последующих импульсов можно выразить через $\dot{S}_1(f)$ в соответствии с теоремой о спектре сигнала, смещенного во времени (прил. П.5). Тогда спектральная плотность пачки будет

$$\dot{S}(f) = \dot{S}_1(f) \left[1 + e^{-j2\pi fT} + \dots + e^{-jn \cdot 2\pi fT} + \dots + e^{-j(N-1)2\pi fT} \right].$$

На частотах $f = f_n = n/T$ (где n – целое число) спектральные компоненты импульсов складываются в фазе, т. е. с фазовыми сдвигами, кратными 2π . При этом каждое слагаемое в скобках равно единице и $\dot{S}(f_n) = N\dot{S}_1(n/T)$. На частоте $f_1 = 1/NT$ и кратных ей (за исключением частот n/T) сумма в квадратных скобках становится равной нулю.

Выразим модуль $|\dot{S}(f)|$ спектральной плотности пачки. С учетом формулы геометрической прогрессии [42, 43] получим

$$\begin{aligned} \dot{S}(f) &= \dot{S}_1(f) \frac{1 - e^{-jN \cdot 2\pi fT}}{1 - e^{-j \cdot 2\pi fT}} = \frac{(e^{jN\pi fT} - e^{-jN\pi fT}) e^{-jN\pi fT}}{(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) e^{-j\pi fT}} = \\ &= \dot{S}_1(f) \frac{\sin(N\pi fT)}{\sin(\pi fT)} \left[\cos((N-1)\pi fT) - j \sin((N-1)\pi fT) \right]. \end{aligned}$$

Модуль этого выражения будет

$$|\dot{S}(f)| = |\dot{S}_1(f)| \frac{|\sin(N\pi fT)|}{|\sin(\pi fT)|}.$$

При $f \rightarrow 0$ имеем: $\sin(N\pi fT) \approx N\pi fT$ и $\sin(\pi fT) \approx \pi fT$. Тогда

$$|\dot{S}(f)| = N |\dot{S}_1(f)|,$$

т. е. модуль спектральной плотности пачки в N раз превосходит модуль одиночного импульса.

В качестве примера рис. 7.10 иллюстрирует модуль спектра пачки из пяти прямоугольных импульсов. Пунктирная линия соответствует спектральной плотности одиночного импульса, а штриховая линия – огибающей спектра всей пачки.

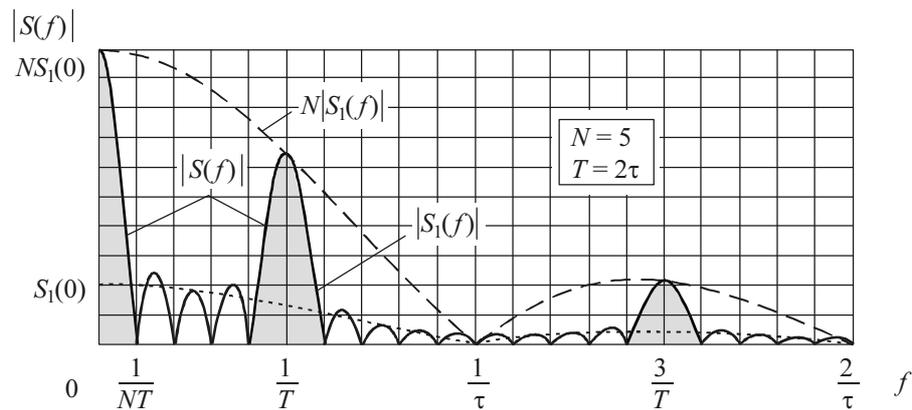


Рис. 7.10

При $N \rightarrow \infty$ спектральная плотность принимает линейчатую структуру спектра периодического сигнала (см. пример 15) с частотами $f_n = n/T$. Тогда спектр удобнее представить совокупностью амплитуд A_n (см. рис. 6.12).

Пример 7. Симметричный треугольный импульс. Для получения результата наиболее целесообразно использовать теоремы о спектрах (см. прил. П.5). Первоначально продифференцируем сигнал $S(t)$ (рис. 7.11, а). Производная $S_{\text{пр}}(t) = S'(t)$ имеет вид пары прямоугольных импульсов

(рис. 7.11, б) длительностью $\tau_1 = \tau/2$, смещенных по оси времени на $\pm t_0 = \pm\tau/2$. Далее используем теоремы о сумме и временном сдвиге сигналов:

$$\dot{S}_{\text{пр}}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_0(\omega) \left(e^{j\omega t_0} - e^{-j\omega t_0} \right) \frac{2j}{2j} = 2j\dot{S}_0(\omega) \sin \omega t_0.$$

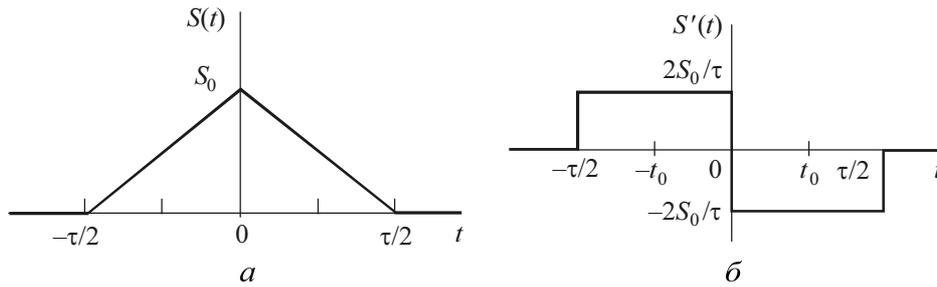


Рис. 7.11

Исходный сигнал $S(t)$ определяется из сигнала $S_{\text{пр}}(t) = S'(t)$ интегрированием, следовательно, спектр $\dot{S}(\omega)$ находится из спектра $\dot{S}_{\text{пр}}(\omega)$ делением на $j\omega$, т. е.

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}_{\text{пр}}(\omega) = \frac{2}{\omega} \dot{S}_0(\omega) \sin \omega t_0.$$

Подставляя в это выражение спектр $\dot{S}_0(\omega) = S_1\tau_1 (\sin(\omega\tau_1/2)/(\omega\tau_1/2))$ одиночного прямоугольного импульса с амплитудой $S_1 = 2S_0/\tau$ и длительностью $\tau_1 = \tau/2$, получаем

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2}{\omega} \frac{2S_0}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin \omega\tau/4}{\omega\tau/4} \sin \omega\tau/4 = \frac{1}{2} S_0 \tau \left(\frac{\sin \omega\tau/4}{\omega\tau/4} \right)^2. \quad (7.45)$$

Спектральная плотность получилась не только вещественной (что следовало из четности сигнала), но и положительной. Поэтому фазовый спектр равен нулю во всем диапазоне частот.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) показана на рис. 7.12. Она имеет лепестковую форму с шириной первого лепестка $\Delta\omega = 4\pi/\tau$.

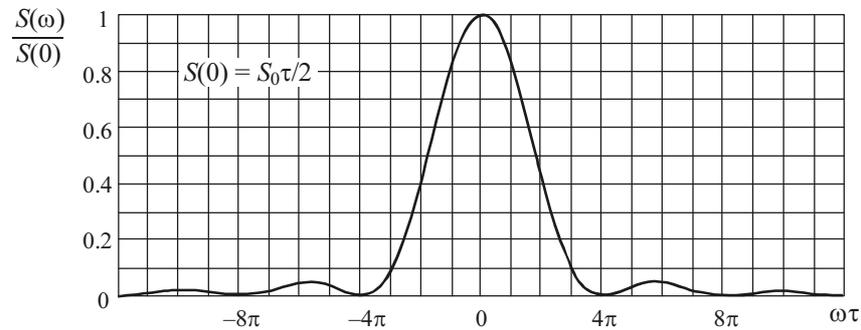


Рис. 7.12

Пример 8. Затухающее гармоническое колебание. Найдем спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ сигнала $S(t)$, полученного умножением экспоненциального импульса $S_3(t)$ (7.26) на косинусоиду $\cos \omega_0 t$, т. е.

$$S(t) = S_3(t) \cos \omega_0 t = S_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t.$$

Изобразим график $|\dot{S}(\omega)|$.

Представим косинусоиду по формуле Эйлера в виде двух комплексных экспонент. Тогда

$$S(t) = \frac{1}{2} S_3(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} S_3(t) e^{-j\omega_0 t}$$

и спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt. \end{aligned}$$

Полученные слагаемые есть не что иное, как спектры экспоненциального импульса, смещенные по оси частот на $\pm\omega_0$:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{S}_3(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}_3(\omega + \omega_0) = \frac{1}{2} \frac{S_0}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \frac{S_0}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}. \quad (7.46)$$

Этот же результат получится при использовании теоремы о смещении спектра сигнала (при умножении сигнала на комплексную экспоненту).

Для положительной полуоси частот ($\omega > 0$) имеем

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{S_0}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} \quad \text{и} \quad |\dot{S}(\omega)| = \frac{1}{2} \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}}.$$

Аналогично и для отрицательной полуоси частот ($\omega < 0$):

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{S_0}{\alpha + j(\omega + \omega_0)} \quad \text{и} \quad |\dot{S}(\omega)| = \frac{1}{2} \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}}.$$

График $|\dot{S}(\omega)|$ показан на рис. 7.13.

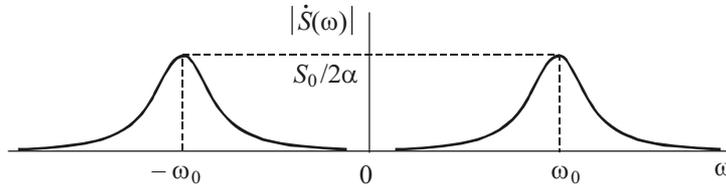


Рис. 7.13

Если $\omega_0 / \alpha < 10$, то спектры $0.5\dot{S}_s(\omega - \omega_0)$ и $0.5\dot{S}_s(\omega + \omega_0)$ (штриховые линии на рис. 7.14) частично перекрываются. В этом случае надо находить модуль суммы двух комплексных слагаемых, которые записаны в правой части выражения (7.46). Преобразуем (7.46), приведя слагаемые к общему знаменателю:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{S_0}{2} \frac{\alpha + j(\omega + \omega_0) + \alpha + j(\omega - \omega_0)}{[\alpha + j(\omega - \omega_0)][\alpha + j(\omega + \omega_0)]} = \frac{S_0(\alpha + j\omega)}{\omega_0^2 + (\alpha + j\omega)^2}. \quad (7.47)$$

Модуль выражения (7.47) для двух значений ω_0 / α показан на графике рис. 7.14.

Пример 9. Свертка сигналов. Связь с ВКФ. Рассмотрим два сигнала:

$$S_1(t) = S_1 e^{-\alpha t}; \quad S_2(t) = S_2 \sigma(t).$$

Определим их свертку $S(\tau)$:

$$S(\tau) = S_1(t) \otimes S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(\tau - t) dt.$$

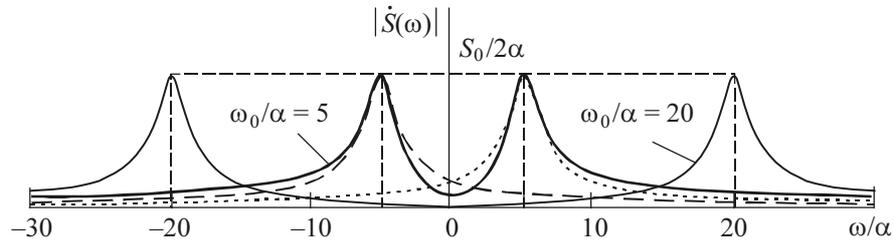


Рис. 7.14

Геометрические построения для пояснения вычисления свертки приведены на рис. 7.15, а. Закрашенная на рисунке площадь представляет собой значение свертки для сдвига второго сигнала на $\tau = \tau_1$. При дальнейшем сдвиге эта площадь стремится к константе.

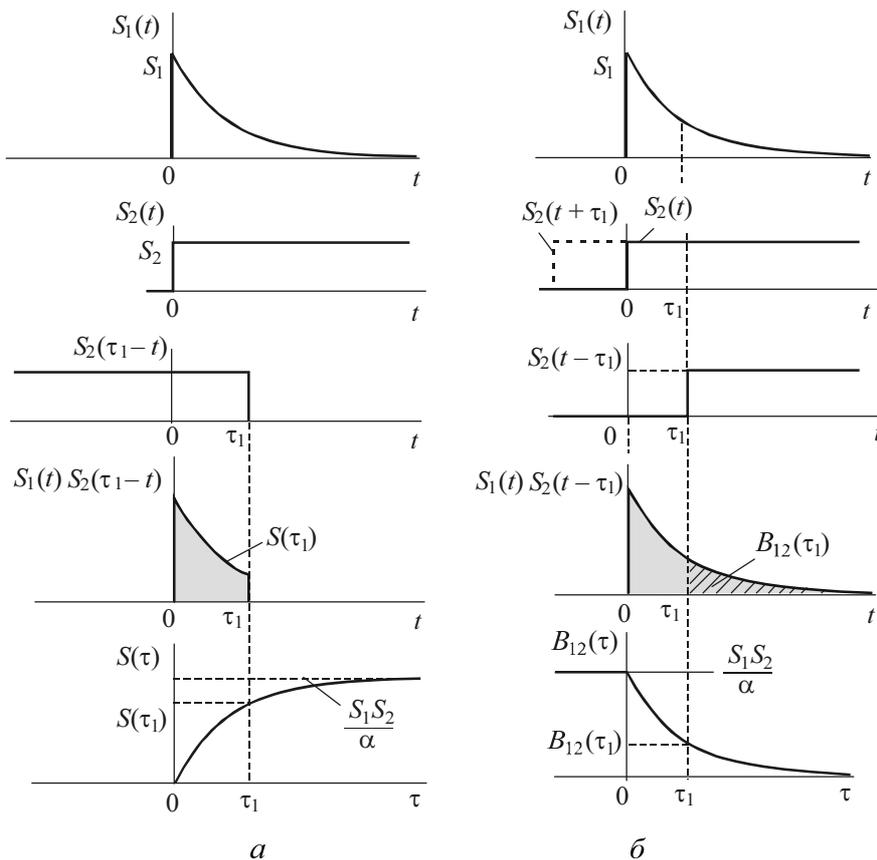


Рис. 7.15

Проставим в предыдущем выражении реальные пределы интегрирования. Тогда получим

$$S(\tau) = \int_0^{\tau} S_1 e^{-\alpha t} S_2 dt = \frac{S_1 S_2}{-\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\tau} = \frac{S_1 S_2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \tau}).$$

Таким образом,

$$S(\tau) = \begin{cases} \frac{S_1 S_2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \tau}), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим взаимосвязь свертки $S(\tau)$ и ВКФ $B_{12}(\tau)$. Берем сдвиг второго сигнала вправо по оси времени. Тогда получаем

$$B_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} S_1 e^{-\alpha t} S_2 dt = \frac{S_1 S_2}{-\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_{\tau}^{\infty} = \frac{S_1 S_2}{\alpha} e^{-\alpha \tau}.$$

При $\tau = 0$ ВКФ $B_{12}(\tau) = U_1 U_2 / \alpha = E_{12}$ определяет энергию взаимодействия сигналов.

При сдвиге второго сигнала влево перекрываемая площадь остается постоянной (на рис. 7.15, б она закрашена), как и в случае $\tau = 0$, т. е.

$$B_{12}(-\tau) = S_1 S_2 / \alpha.$$

Таким образом, имеем

$$B_{12}(\tau) = \begin{cases} (S_1 S_2 / \alpha) e^{-\alpha \tau}, & \tau \geq 0, \\ S_1 S_2 / \alpha, & \tau < 0. \end{cases}$$

Просуммируем обе функции. При $\tau < 0$ имеем $S(\tau) + B_{12}(\tau) = S_1 S_2 / \alpha$.
При $\tau > 0$

$$S(\tau) + B_{12}(\tau) = \frac{S_1 S_2}{\alpha} - \frac{S_1 S_2}{\alpha} e^{-\alpha \tau} + \frac{S_1 S_2}{\alpha} e^{-\alpha \tau} = \frac{S_1 S_2}{\alpha}.$$

Таким образом, сумма свертки и ВКФ сигналов равна энергии взаимодействия этих сигналов:

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t)dt = \int_0^{\infty} S_1 e^{-\alpha t} S_2 dt = \frac{S_1 S_2}{-\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{S_1 S_2}{\alpha}.$$

По теореме о спектре свертки сигналов находим спектральную плотность как произведение спектров исходных сигналов

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega) = \frac{S_1}{\alpha + j\omega} \frac{S_2}{j\omega}.$$

$$|\dot{S}(\omega)| = \frac{S_1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \frac{S_2}{|\omega|}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \arctg(-\omega/\alpha) - \pi/2.$$

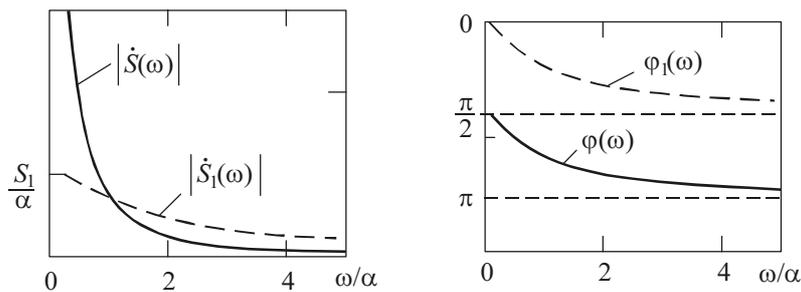


Рис. 7.16

Графики $|\dot{S}(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ показаны на рис. 7.16. Там же для сравнения штриховыми линиями даны графики $|\dot{S}_1(\omega)|$ и $\varphi_1(\omega)$.

7.2.2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ СИГНАЛОВ

Пример 10. Функция включения (Хевисайда). Эта функция может быть получена предельным переходом экспоненциального импульса (пример 2) при $S_0 = 1$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Поэтому спектральная плотность может быть получена из выражения (7.35) при $\alpha \rightarrow 0$, т. е.

$$\sigma(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}. \quad (7.48)$$

Это соотношение справедливо для всех частот, кроме $\omega = 0$. Выделим в спектральной плотности экспоненты действительную часть и найдем ее предельное значение

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} \right] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi\delta(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность функции Хевисайда будет

$$\sigma(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (7.49)$$

Дельта-функция при $\omega = 0$ свидетельствует о наличии в функции включения постоянной составляющей, равной $1/2$.

Примечание. При анализе воздействия единичной функции на цепи, пропускающие постоянный ток (т. е. на цепи, передаточная функция которых равна нулю при $\omega = 0$), спектральную плотность можно вычислять как

$$\sigma(\omega) = 1/j\omega. \quad (7.49')$$

АЧХ и ФЧХ функции Хевисайда показаны на рис. 7.17.

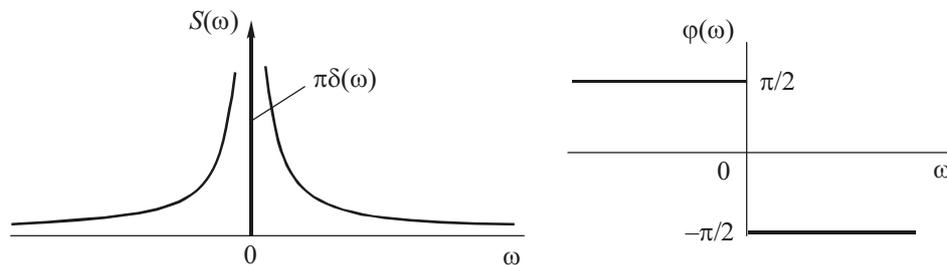


Рис. 7.17

Пример 11. Дельта-функция (Дирака). Напомним, что дельта-функция обладает фильтрующим свойством (1.25). Тогда

$$\dot{S}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (7.50)$$

Следовательно, спектр этого импульса веществен и равномерен во всем бесконечном диапазоне частот. Этого следовало ожидать в соответствии с соотношением между длительностью сигнала и шириной его спектра. Длительность импульса бесконечно мала, а поэтому спектр бесконечно широк.

Записывая дельта-функцию в виде обратного преобразования Фурье, получим полезное для дальнейших применений соотношение

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.51)$$

И соответственно в силу дуальности (симметрии) преобразования Фурье имеем

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt. \quad (7.52)$$

Пример 12. Гармоническое колебание. Определим спектральную плотность гармонического колебания

$$S(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Представим его по формуле Эйлера в виде суммы комплексных экспонент. Тогда в соответствии с формулами (7.3) и (7.52) получим

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt + \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{S_0}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{S_0}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \end{aligned}$$

$$= S_0 \pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + S_0 \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0). \quad (7.53)$$

Следовательно, спектральная плотность представляет собой пару дельта-функций на частотах $\pm\omega_0$. АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 7.18.

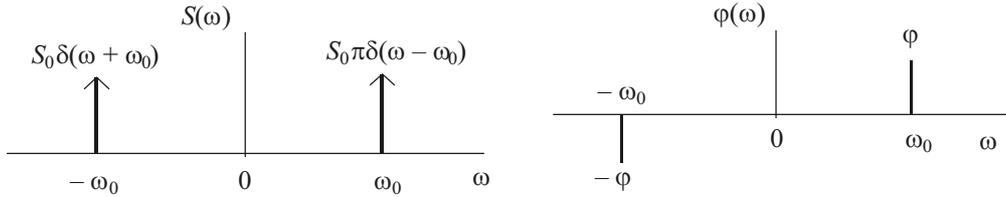


Рис. 7.18

Пример 13. Постоянное напряжение. Постоянное напряжение $U_0 = \text{const}$ – самый простейший неинтегрируемый сигнал. Он есть частный случай гармонического колебания, когда $\omega_0 = 0$, $\varphi = 0$ и $S_0 = U_0$. Тогда из выражения (7.53) имеем

$$\dot{S}(\omega) = S_0 \pi \delta(\omega) + S_0 \pi \delta(\omega) = 2U_0 \pi \delta(\omega).$$

Итак, постоянное напряжение имеет спектральную плотность только на нулевой частоте. Это опять-таки согласуется с соотношением между длительностью сигнала и шириной его спектра: бесконечно протяженный во временной области сигнал имеет бесконечно узкий спектр.

Пример 14. Комплексная экспонента. В примере 12 было установлено, что гармоническое колебание, представленное полусуммой двух комплексных экспонент, содержало две дельта-функции на частотах $\pm\omega_0$. Следовательно, одна комплексная экспонента

$$S(t) = S_0 e^{j\omega_0 t}$$

должна быть представлена одной дельта-функцией на частоте ω_0 . Действительно,

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi S_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (7.54)$$

Здесь важно отметить, что комплексный сигнал потерял свойство симметрии спектра относительно точки $\omega = 0$.

Пример 15. Периодический сигнал. В главе 6 периодический сигнал был представлен рядом Фурье и определен спектр в виде совокупности амплитуд (A_n или \dot{C}_n) его гармоник. В этом примере представим периодический сигнал

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{in\Omega t}$$

с помощью прямого преобразования Фурье. В соответствии с формулой (7.51) получаем

$$\dot{S}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \delta(\omega - n\Omega). \quad (7.55)$$

На рис. 7.19 показан амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольного импульса (из примера 2 главы 6).

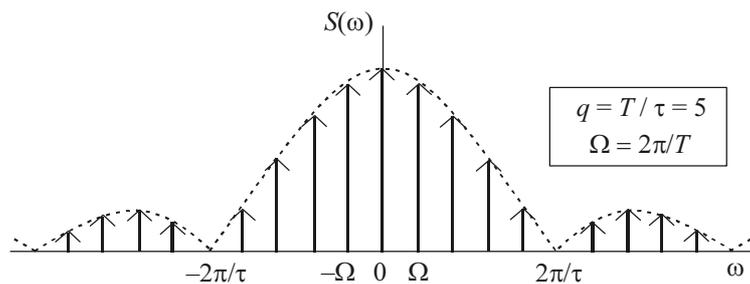


Рис. 7.19

По своему виду график повторяет спектральную диаграмму амплитуд, но образован дельта-функциями на частотах $\pm n\Omega$.

7.2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Пример 16. Изображение функций Хевисайда и Дирака. Изображение по Лапласу функции Хевисайда определим по формуле (7.29):

$$S_{\sigma}(p) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-p} e^{-(c+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \quad (7.56)$$

Здесь при подстановке в экспоненту верхнего предела получаем нуль, а нижнего предела – минус единицу.

Поскольку функция Дирака есть производная от функции Хевисайда, по теореме изображения (спектра) производной от сигнала получаем

$$S_{\delta}(p) = pS_{\sigma}(p) = p \frac{1}{p} = 1. \quad (7.57)$$

Пример 17. Изображение прямоугольного импульса. Рассмотрим прямоугольный импульс, передний фронт которого совмещен с началом отсчета времени (рис. 7.20, а). Его можно представить с помощью суммы функций Хевисайда

$$S(t) = S_0\sigma(t) - S_0\sigma(t - \tau).$$

Используя свойства преобразований Лапласа, аналогичные свойствам преобразований Фурье, получаем

$$S(p) = S_0 \frac{1}{p} - S_0 \frac{1}{p} e^{-p\tau} = \frac{S_0}{p} (1 - e^{-p\tau}). \quad (7.58)$$

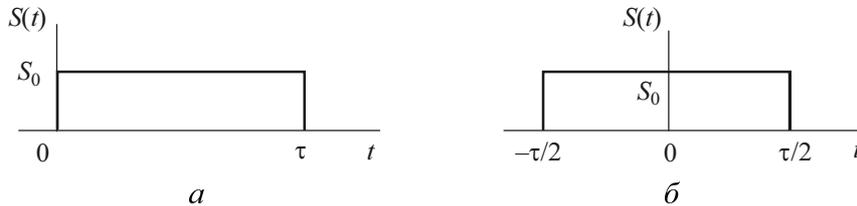


Рис. 7.20

Теперь рассмотрим прямоугольный импульс, симметричный относительно точки $t = 0$ (рис. 7.20, б). Используем теорему о временном сдвиге сигнала:

$$S_{\tau}(t) = S(t + \tau/2) \leftrightarrow S_{\tau}(p) = S(p)e^{p\tau/2} = \frac{S_0}{p} (e^{p\tau/2} - e^{-p\tau/2}). \quad (7.59)$$

Пример 18. Определение оригинала по изображению. Заданы изображения

$$S_1(p) = S_0\omega / (p^2 + \omega^2) \quad \text{и} \quad S_2(p) = S_0p / (p^2 + \omega^2).$$

По таблице прил. П.6 соответственно получаем оригиналы:

$$S_1(p) = S_0 \omega / (p^2 + \omega^2) \leftrightarrow S_1(t) = S_0 \sin \omega t,$$

$$S_2(p) = S_0 p / (p^2 + \omega^2) \leftrightarrow S_2(t) = S_0 \cos \omega t.$$

Следовательно, оригиналами заданных изображений будут гармонические колебания.

7.3. УПРАЖНЕНИЯ

7.3.1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ

1. Определите спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ и постройте спектральные диаграммы $|\dot{S}(\omega/\alpha)|$ и $\varphi(\omega/\alpha)$ экспоненциального импульса

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \alpha > 0. \quad (7.60)$$

Рассчитайте амплитуду второй гармоники периодической последовательности экспоненциальных импульсов, если $S_0 = U = 10 \text{ В}$, $\alpha = 1000 \text{ 1/с}$ и $T = 5 \text{ мс}$.

2. По результатам предыдущего упражнения вычислите, на какой частоте ω_{10} значение модуля $|\dot{S}(\omega)|$ спектральной плотности будет в 10 раз меньше значения $|\dot{S}(0)| = S(0)$ на нулевой частоте. $\alpha = 10^3 \text{ 1/с}$. Вычислите также частоту, на которой $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

3. Найдите и изобразите графически сигнал $S(t)$, если его спектральная плотность имеет вид (рис. 7.21)

$$S(\omega) = \pi S_0 e^{-\beta|\omega|}.$$

4. Вычислите спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ и постройте график $|\dot{S}(\omega)|$ пары экспоненциальных импульсов $S(t)$, показанных на рис. 7.22. Штриховой линией на рисунке обозначен одиночный импульс

$$S_{\text{од}}(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0.$$

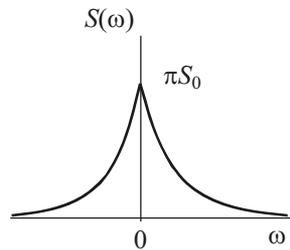


Рис. 7.21

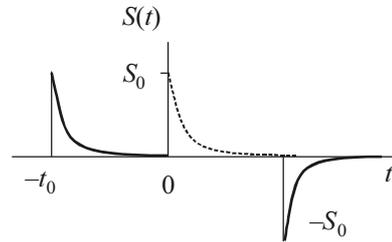


Рис. 7.22

Воспользуйтесь теоремами о свойствах спектров.

5. Спектральная плотность некоторого импульса в диапазоне частот от $f = 0$ до $|f| \leq 100$ кГц равномерна и равна 0.1 мВ/Гц. Периодическая последовательность образована этим импульсом с периодом 0.1 мс. Определите количество n гармоник, входящих в указанный диапазон частот, и вычислите их амплитуды A_n .

6. Найдите спектральную плотность симметричного относительно начала координат прямоугольного импульса с амплитудой S_0 и длительностью τ (см. рис. 7.1). При этом воспользуйтесь выражением спектральной плотности функции Хевисайда и теоремами о спектре суммы сигналов и о спектре сигналов, смещенных во времени.

7. По результату предыдущего упражнения постройте модуль спектральной плотности прямоугольного импульса для диапазона частот от 0 до 3 кГц. Амплитуда импульса 10 В, длительность 1 мс.

8. По результату упражнения 6 определите постоянную составляющую и амплитуды первых двух гармоник периодической последовательности прямоугольных импульсов с периодом $T = 2\tau = 2$ мс.

9. Изобразите временную диаграмму производной $S_{\text{пр}}(t)$ прямоугольного импульса, расположенного симметрично относительно начала координат. Найдите выражение для спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ и постройте график модуля $|\dot{S}(f)|$, $S_0 = 10$ В, $\tau = 1$ мс.

10. Сигнал $S(t)$ показан на рис. 7.23. Найдите выражение и изобразите временную диаграмму сигнала $S_{\text{инт}}(t)$, полученного интегрированием сигнала $S(t)$. Найдите также выражение для спектральной плотности $\dot{S}_{\text{инт}}(\omega)$.

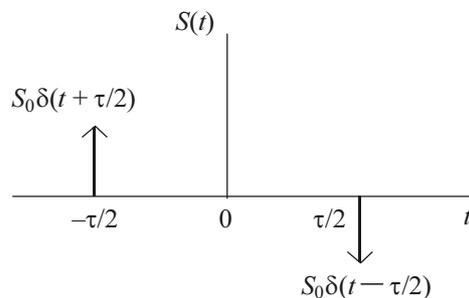


Рис. 7.23

11. Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ сигнала $S(t)$ приведена на рис. 7.24. Найдите и изобразите графически сигнал $S(t)$.

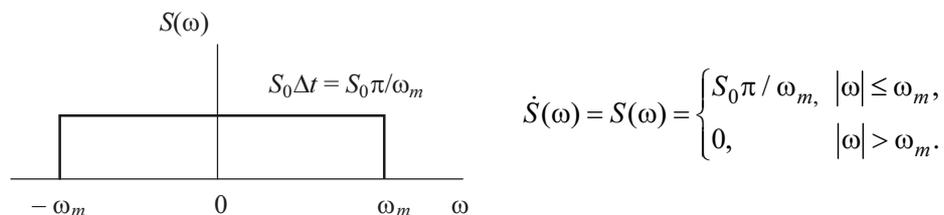


Рис. 7.24

12. Найдите спектральную плотность $\dot{S}(f)$ и постройте спектральные диаграммы $|\dot{S}(f)|$ и $\varphi(f)$ трапецеидального импульса $S(t)$ (рис. 7.25).

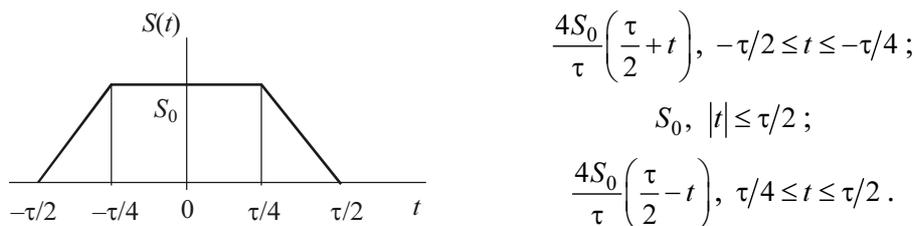


Рис. 7.25

Указание. Целесообразно использовать теоремы о спектрах (см. прил. П.5). Например, после однократного или двукратного дифференцирования сигнала получаются комбинации функций Хевисайда $\sigma(t)$ или Дирака $\delta(t)$, спектральные плотности которых известны.

13. Определите спектральную плотность пачки из N импульсов треугольной формы (рис. 7.26).

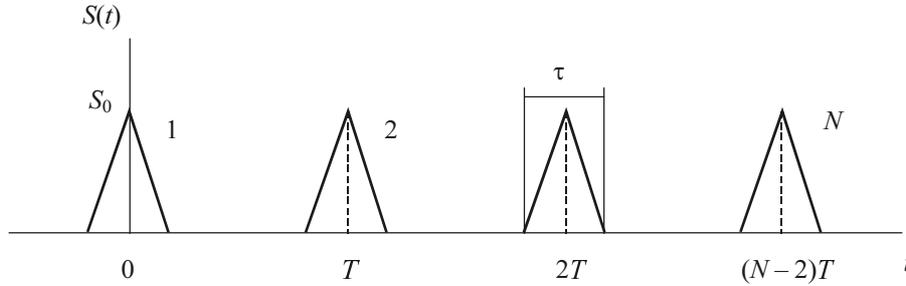


Рис. 7.26

14. Найдите $\dot{S}(\omega)$, $|\dot{S}(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ сигнала, изображенного на рис. 7.27.

Указание. Преобразуйте сигнал в сумму $\delta(t)$; воспользуйтесь основными теоремами о спектрах (прил. П.5).

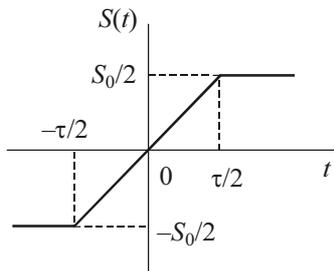


Рис. 7.27

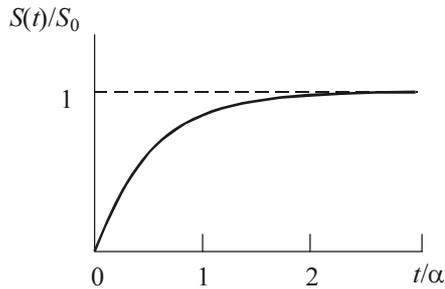
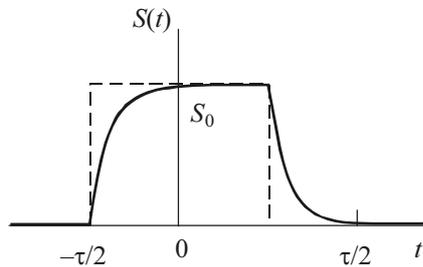


Рис. 7.28

15. Определите $\dot{S}(\omega)$ сигнала, показанного на рис. 7.28. Изобразите $|\dot{S}(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. Целесообразно представить сигнал как алгебраическую сумму функции Хевисайда и экспоненты, спектры которых были определены раньше.

16. На рис. 7.29 показан импульс с экспоненциальными фронтами. Найдите выражение для спектральной плотности. Изобразите графики $|\dot{S}(f)|$ и $\varphi(f)$. Определите фазовый сдвиг $\varphi(\omega_1)$ на частоте $\omega_1 = 2\pi/\tau$.



$$S(t) = \begin{cases} S_0(1 - e^{-\alpha(t+\tau/2)}), & t > -\tau/2, \\ S_0(1 - e^{-\alpha(t-\tau/2)}), & t > \tau/2. \end{cases}$$

Рис. 7.29

17. Спектральная плотность дельта-импульса $\delta(t)$ на всех частотах равна единице, т. е. $\dot{S}_\delta(\omega) = 1$. Вычислите коэффициенты \dot{C}_n и спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ последовательности дельта-импульсов

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t + nT_0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

7.3.2. СПЕКТР, АКФ И СВЕРТКА СИГНАЛОВ

18. Найдите АКФ сигнала, спектральная плотность которого имеет вид

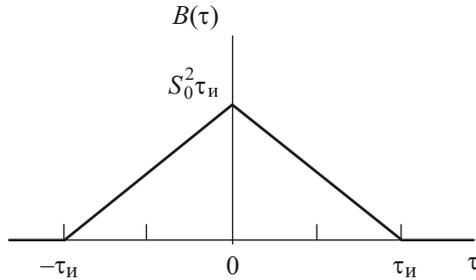
$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} S_0 e^{j\varphi(\omega)}, & |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

19. Определите энергию экспоненциального импульса (7.60) и его эффективную длительность $\tau_{\text{эф}}$.

20. Найдите эффективную ширину спектра $f_{\text{эф}}$ экспоненциального импульса (7.60).

21. Определите свертку двух сигналов: $S_1(t) = S_1 e^{-\alpha t}$, $t > 0$, $\alpha > 0$; $S_2(t) = S_2$, $0 < t < \tau_{\text{и}}$.

22. Получите выражение для спектральной плотности импульса, АКФ которого показана на рис. 7.30. Воспользуйтесь теоремами о свойствах спектров (см. упражнение 7).



$$B(\tau) = \begin{cases} S_0^2(\tau_{\text{И}} + \tau), & -\tau_{\text{И}} < \tau < 0, \\ S_0^2(\tau_{\text{И}} - \tau), & 0 \leq \tau \leq \tau_{\text{И}}, \\ 0, & |\tau| > \tau_{\text{И}}. \end{cases}$$

Рис. 7.30

23. Определите спектральную плотность $\dot{S}_{12}(\omega)$ свертки $S_{12}(\tau)$ двух экспоненциальных импульсов $S_1(t) = S_1 e^{-\alpha t}$, $S_2(t) = S_2 e^{-\beta t}$, $0 < t < \infty$, спектры которых полагаются известными.

7.3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

24. Используя прямое преобразование Лапласа, найдите изображение следующих сигналов:

- 1) экспоненты $S_1(t) = S_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$;
- 2) функции включения $S_2(t) = \sigma(t) = 1$, $t > 0$;
- 3) дельта-функции $S_3(t) = \delta(t) = \sigma'(t)$;
- 4) косинусоидального напряжения $S_4(t) = U_m \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$;
- 5) синусоидального напряжения $S_5(t) = U_m \sin \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$.

25. Найдите изображение прямоугольного импульса $S(t) = S_0$, $0 < t \leq \tau$.

26. Определите изображение линейно нарастающего сигнала $S(t) = S_0 t \sigma(t)$.

27. Используя теорему умножения оригинала на экспоненту, найдите изображения и спектральные плотности следующих сигналов:

- 1) $S_1(t) = S_0 \cos \omega_0 t e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$;
- 2) $S_2(t) = S_0 \sin \omega_0 t e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$;
- 3) $S_3(t) = S_0 t e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$;
- 4) $S_4(t) = S_0 e^{-\beta t} e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$.

28. Выведите общие формулы для нахождения изображений $S_1(p)$ и $S_2(p)$ сигналов $S_1(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ и $S_2(t) = f(t) \sin \omega_0 t$ по известному изображению $F(p)$ функции $f(t)$.

29. Найдите изображение и спектральную плотность сигналов $S_1(t) = S_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ и $S_2(t) = S_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ по известному изображению экспоненты $e^{-\alpha t} \leftrightarrow 1/(p + \alpha)$. Используйте полученные в предыдущем упражнении общие формулы нахождения изображения сигнала, домноженного на косинусоиду $\cos \omega_0 t$ или синусоиду $\sin \omega_0 t$.

7.4. ЗАДАНИЕ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

В табл. 1.3 заданы варианты импульсных сигналов $S(t)$, а в табл. 1.4 – их параметры.

Требуется:

а) вывести выражения для определения спектральной плотности $\dot{S}(f)$, ее модуля $|\dot{S}(f)|$ и аргумента $\varphi(f)$ сигнала $S(t)$;

б) построить спектральные диаграммы модуля $|\dot{S}(f)|$ и фазы $\varphi(f)$, а также диаграмму энергетического спектра $|\dot{S}(f)|^2$;

в) найти ширину лепестка спектра сигнала; для вариантов 1, 3–9 также ширину лепестка спектра одиночного импульса, входящего в состав сигнала;

г) вычислить энергию сигнала;

д) рассчитать коэффициенты \dot{C}_n и \dot{A}_n комплексного и тригонометрического ряда Фурье для периодического сигнала $S_T(t)$, полученного повторением заданного сигнала $S(t)$ с периодом T_n . Построить соответствующие спектральные диаграммы $|\dot{C}_n|$, Ψ_n и $|\dot{A}_n|$, Φ_n .

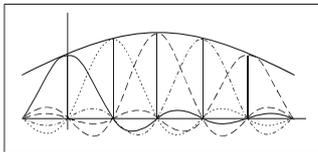
Указания. При выполнении пункта «а» задания следует иметь в виду, что непосредственное применение прямого преобразования Фурье для некоторых вариантов приводит к сложному и громоздкому интегрированию. Поэтому

для получения результата наиболее простым путем целесообразно использовать теоремы о спектрах (см. прил. П.5), например теоремы о спектре суммы и производной сигналов. После n -кратного дифференцирования сигнала, описываемого кусочно-линейными функциями времени, результат выражается с помощью различных комбинаций функций Хевисайда $\sigma(t)$ и Дирака $\delta(t)$, спектральные плотности которых известны [выражения (7.49') и (7.50)]. Кратность дифференцирования n следует выбирать такой, чтобы не потребовалось дифференцировать функцию $\delta(t)$.

При выполнении пункта «д» надо учесть известную связь между спектральной плотностью одиночного импульса и спектром периодического сигнала [см. формулы (7.7) и (7.8)].

Глава 8

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ
С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ
РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА**



Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Исаак Ньютон

8.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

8.1.1. РЯД И ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Непрерывный сигнал $S(t)$, спектр которого ограничен сверху частотой ω_m , можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова – базису функций вида $\sin x / x$:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \varphi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad (8.1)$$

где

$$C_n = S_n = S(n\Delta t) \quad (8.2)$$

– n -й отсчет (выборка) сигнала $S(t)$, т. е. значение функции $S(t)$ в момент времени $n\Delta t$;

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)} \quad (8.3)$$

– n -я базисная функция. Бесконечная совокупность этих функций образует *базис Котельникова*;

$$\Delta t = 1 / 2 f_m = \pi / \omega_m \quad (8.4)$$

– интервал дискретизации (интервал Найквиста).

Выражение (8.1) называют *рядом Котельникова*.

Теорему Котельникова (теорему отсчетов) можно представить в такой формулировке: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше ω_m (рад/с, или f_m , Гц), полностью определяется последовательностью своих мгновенных значений $S_n = S(n\Delta t)$, отсчитываемых через равные интервалы $\Delta t = 1 / 2 f_m = \pi / \omega_m$.

Таким образом, отсчеты $S_n = S(n\Delta t)$ сигнала $S(t)$ – это коэффициенты обобщенного ряда Фурье (8.1), т. е. спектральные составляющие сигнала в базисе функций (8.3). Спектр же сигнала несет полную информацию о сигнале, а потому сигнал $S(t)$ можно однозначно представить совокупностью отсчетов $S(n\Delta t)$. Такая процедура называется *дискретизацией* сигнала.

8.1.2. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим функцию $\sin x / x$ вида (8.3) при $n = 0$:

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}. \quad (8.3')$$

Временная диаграмма этой функции показана на рис. 8.1. При $t = \Delta t = \pi / \omega_m$ аргумент синуса равен π , и функция принимает нулевое значение. Через каждые Δt она равна нулю.

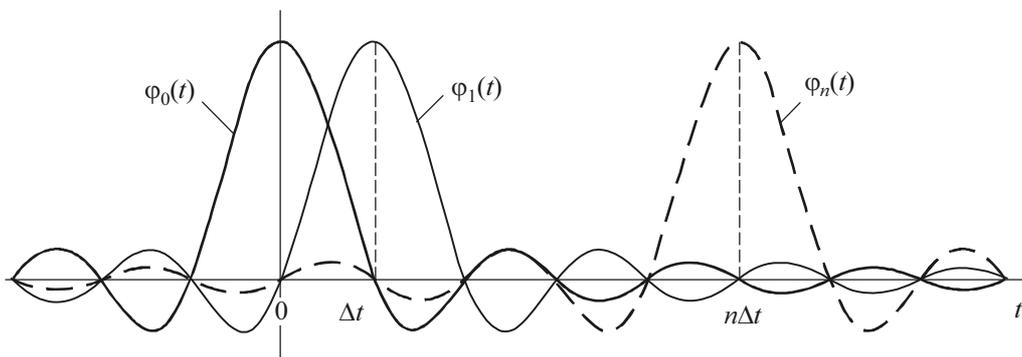


Рис. 8.1

В примере 4 главы 7 было доказано, что спектр этой функции ($\varphi_0(t) = S(t) / S_0$) равномерен в полосе частот от $-\omega_m$ до ω_m . Согласно (7.43) имеем (рис. 8.2)

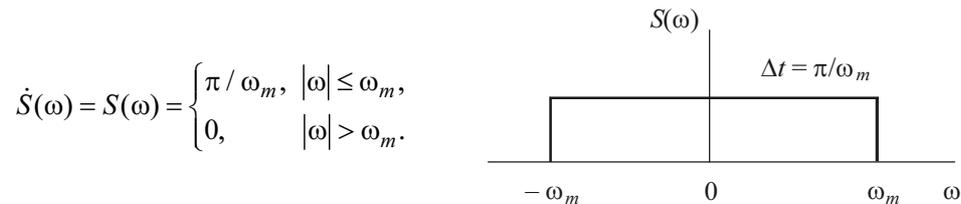


Рис. 8.2

Функцию $\varphi_0(t)$, вещественная спектральная плотность которой постоянна и отлична от нуля в интервале $[-\omega_m, \omega_m]$, принято называть *идеальным низкочастотным сигналом*.

Базисная функция $\varphi_n(t)$ отличается от исходной $\varphi_0(t)$ сдвигом на $n\Delta t$ (см. рис. 8.1):

$$\varphi_n(t) = \varphi_0(t - n\Delta t).$$

Согласно теореме о спектре сигнала, смещенного во времени, спектральная плотность $\dot{S}_{\varphi_n}(\omega)$ базисной функции $\varphi_n(t)$ выразится через спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ исходной функции $\varphi_0(t)$ следующим образом:

$$\dot{S}_{\varphi_n}(\omega) = S(\omega)e^{-j\omega n\Delta t} = (\pi/\omega_m)e^{-j\omega n\Delta t}, \quad (8.5)$$

т. е. модуль спектральной плотности не изменится, а появится фазовый сдвиг $\Phi(\omega) = -n\Delta t \cdot \omega$, обусловленный задержкой во времени функции $\varphi_n(t)$.

Квадрат нормы базисной функции:

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)} \right]^2 dt.$$

Вводя новую переменную $x = \omega_m(t - n\Delta t)$ и учитывая, что $dx = \omega_m dt$, $dt = dt / \omega_m$ и $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin x / x)^2 dt = \pi$ (табличный интеграл № 3 прил. П.3), получаем

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin x / x)^2 dx = \frac{\pi}{\omega_m} = \Delta t. \quad (8.6)$$

Скалярное произведение функций $\varphi_n(t)$ и $\varphi_k(t)$ выразим согласно обобщенной формуле Рэлея (7.17) как

$$\begin{aligned} (\varphi_n(t), \varphi_k(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \dot{S}_{\varphi_n}(\omega) \dot{S}_{\varphi_k}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\omega_m} \right)^2 \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j(n-k)\Delta t \omega} d\omega = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Следовательно, условие ортогональности – равенство нулю скалярного произведения функций – выполняется. Базисные функции ортогональны – это их главное свойство.

8.1.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Коэффициенты обобщенного ряда Фурье, определяемые по формуле (5.4), в данном случае запишутся

$$C_n = S_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \varphi_n(t) dt. \quad (8.2')$$

Интеграл выразим исходя из обобщенной формулы Рэлея (7.17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}_{\varphi_n}^* d\omega = \Delta t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega(n\Delta t)} d\omega = \Delta t \cdot S(n\Delta t).$$

Подставляя этот результат в предыдущую формулу, получаем

$$C_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \Delta t \cdot S(n\Delta t) = S(n\Delta t) = S_n,$$

т. е. доказали справедливость выражения (8.2) и, следовательно, теоремы Котельникова.

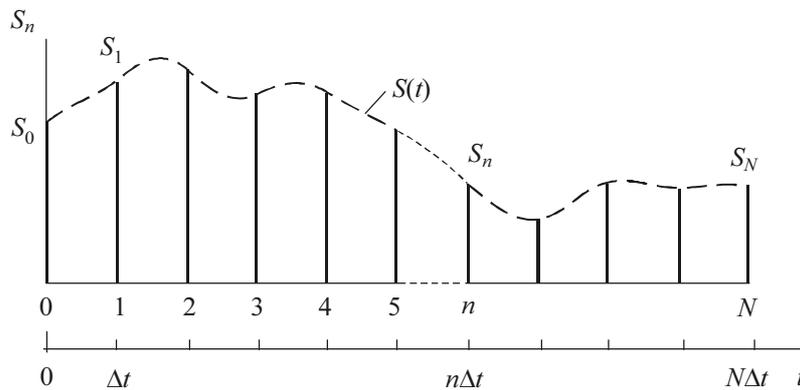


Рис. 8.3

Совокупность коэффициентов $\{S_n\}$ представляет собой *спектр* сигнала в базисе функций $\sin x/x$, т. е. в базисе Котельникова. Графическое изображение совокупности $\{S_n\}$, называемое спектральной диаграммой (рис. 8.3), представляет собой выборки сигнала, т. е. дискретизированный сигнал $S(n\Delta t)$.

8.1.4. БАЗА, ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ СИГНАЛА, ОШИБКА АППРОКСИМАЦИИ

Время действия T_c реального сигнала ограничено. Следовательно, спектр его, строго говоря, бесконечен и имеет лепестковый характер. Поэтому за максимальную частоту ω_m можно принять либо ширину лепестка спектра $\Delta\omega$, либо эффективную (активную) ширину спектра $\omega_{\text{эф}}$ [см. формулу (7.25)], в которой сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала.

База сигнала согласно (1.1)

$$B_c = T_c F_c = T_c f_m = T_c f_{\text{эф}}. \quad (8.8)$$

Число независимых отсчетов N , которое надо иметь для полного описания сигнала $S(t)$, равно

$$N = T_c / \Delta t + 1 \approx T_c / \Delta t = 2T_c f_m = 2B_c. \quad (8.9)$$

Число N называют также *числом координат, размерностью пространства сигналов* и *числом степеней свободы* сигналов, ограниченных по частоте и длительности. Это число обычно велико. Например, сигнал полуминутного телефонного разговора потребует $60 \cdot 3400 = 204\,000$ отсчетов.

Реальный сигнал, ограниченный во времени, можно аппроксимировать рядом (8.1), но с ограниченным числом членов:

$$\tilde{S}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}. \quad (8.10)$$

Суть **задачи аппроксимации (синтеза) сигнала** – это представление сигнала рядом (8.10) при фиксированном числе N и известной совокупности отсчетов $\{S_n = S(n\Delta t)\}$.

Энергию и мощность исходного и аппроксимированного сигналов можно определить согласно (5.7) – (5.10) так:

$$E_s = \int_0^{T_c} S^2(t) dt, \quad E_a = \sum_{n=0}^{N-1} S^2(n\Delta t) \Delta t, \quad (8.11)$$

$$P_s = \frac{E}{T_c} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} S^2(t) dt, \quad P_a = \frac{\Delta t}{T_c} \sum_{n=0}^{N-1} S^2(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S^2(n\Delta t). \quad (8.12)$$

Из последней формулы следует, что усредненная за время действия T_c сигнала мощность равна среднему квадрату отсчетов (выборок).

При суммировании составляющих ряда (8.10) сигнал $S(t)$ точно воспроизводится только в отсчетных точках времени $t = n\Delta t$. В промежутках возникает ошибка аппроксимации. Она возрастает у краев интервала T_c . Здесь отброшенные члены ряда (8.1) наиболее значимы. С увеличением частоты ограничения ω_m и, следовательно, уменьшением интервала дискретизации $\Delta t = \pi/\omega_m$ растет число отсчетов N сигнала $S(t)$ и сам сигнал будет аппроксимироваться точнее.

Относительная ошибка μ аппроксимации сигнала $S(t)$ рядом Котельникова $\tilde{S}(t)$ (8.10) определяется по формуле (5.8), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$\mu = \varepsilon / E = (E - E_a) / E = 1 - E_a / E = 1 - P_a / P.$$

С учетом выражений (8.11) и (8.12) получаем

$$\mu = 1 - \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} S^2(n\Delta t) \right) / \left(\int_0^{T_c} S^2(t) dt \right). \quad (8.13)$$

Если энергию сигналов вычислять по спектральной плотности энергии (в соответствии с равенством Парсеваля [см. формулу (7.13)]), то относительная ошибка запишется в виде

$$\mu = 1 - \left(\int_0^{\omega_m} S^2(\omega) d\omega \right) / \left(\int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right) = \left(\int_{\omega_m}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right) / \left(\int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right), \quad (8.13')$$

а абсолютная ошибка

$$\varepsilon = E - E_a = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_m}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (8.13'')$$

8.1.5. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

Дискретизацию (взятие выборок) можно выполнить с помощью импульсного модулятора (ИМ на рис. 8.4, а), реализуемого в простейшем случае в виде электронного ключа. На один вход подается исходный аналоговый сигнал $S(t)$, а на другой – периодическая последовательность $y(t)$ импульсов с амплитудой U_0 , периодом $T = \Delta t$ и длительностью $\tau \ll T$. Последовательность поступает от импульсного генератора ИГ. На выходе ИМ получается дискретный сигнал

$$S_d(t) = S(t)y(t). \quad (8.14)$$

Обычно в качестве ИГ используется генератор прямоугольных импульсов. Тогда импульсная последовательность служит переносчиком, а дискретный

сигнал представляет собой результат амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) (рис. 8.4, б).

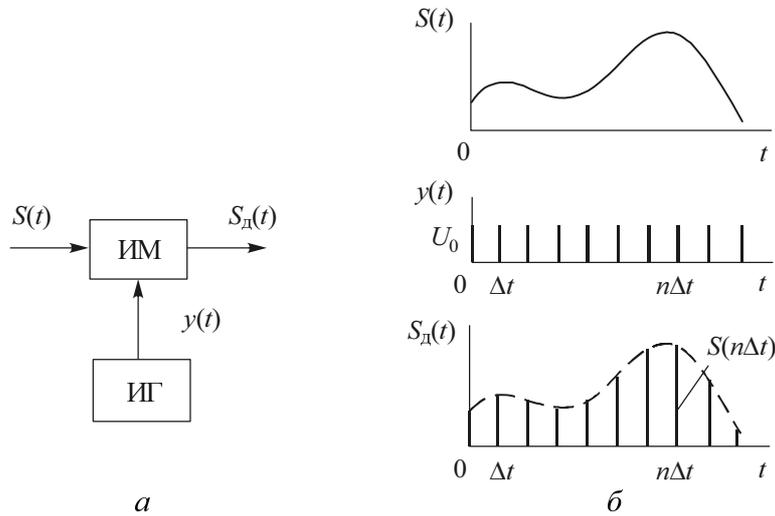


Рис. 8.4

Если одновременно с уменьшением длительности импульса τ увеличивать его амплитуду U_0 так, чтобы площадь $U_0\tau$ оставалась постоянной и равной единице, то получаем следующую математическую модель дискретного сигнала:

$$\begin{aligned}
 S_d(t) &= S(t)y(t) = S(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t) = S(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t). \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

Итак, дискретный сигнал представляет собой счетное множество точек $\{n\Delta t\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) на оси времени, в каждой из которых определено значение $S(n\Delta t)$. С другой стороны, этот дискретный сигнал $S_d(t)$ есть спектр исходного непрерывного сигнала $S(t)$ в базисе Котельникова $\{\varphi_n(t)\}$.

Простота определения коэффициентов $C_n = S_n = S(n\Delta t) = S_d(t)$ — это большое достоинство ряда Котельникова (8.1).

8.1.6. СВЯЗЬ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Обратимся к выражению (8.14). Выразим периодическую функцию $y(t)$ рядом Фурье:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_{\text{д}}t = \frac{U_0\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} U_0\tau \frac{\sin z(k)}{z(k)} \cos k\omega_{\text{д}}t,$$

где $z(k) = k\omega_{\text{д}}\tau/2$, $\omega_{\text{д}}$ – частота (круговая) дискретизации,

$$\omega_{\text{д}} = 2\pi f_{\text{д}} = 2\pi/T = 2\pi/\Delta t, \quad T = \Delta t. \quad (8.16)$$

Тогда выражение (8.14) запишется как

$$S_{\text{д}}(t) = S(t)y(t) = \frac{U_0\tau}{T} \left[S(t) + 2S(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin z(k)}{z(k)} \cos k\omega_{\text{д}}t \right].$$

Найдем спектральную плотность дискретного сигнала. Первому слагаемому в квадратных скобках соответствует спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$. Каждому произведению $S(t) \cos k\omega_{\text{д}}t = 0.5[S(t) \exp(jk\omega_{\text{д}}t) + S(t) \exp(-jk\omega_{\text{д}}t)]$ согласно теореме о смещении спектра соответствует спектральная плотность $0.5[\dot{S}(\omega + k\omega_{\text{д}}) + \dot{S}(\omega - k\omega_{\text{д}})]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{д}}(\omega) &= \frac{U_0\tau}{T} \left[\dot{S}(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin z(k)}{z(k)} \dot{S}(\omega + k\omega_{\text{д}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin z(k)}{z(k)} \dot{S}(\omega - k\omega_{\text{д}}) \right]. \\ \dot{S}_{\text{д}}(\omega) &= \frac{U_0\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin z(k)}{z(k)} \dot{S}(\omega - k\omega_{\text{д}}). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Сигналы $S(t)$, $y(t)$ и $S_{\text{д}}(t)$ и модули их спектров иллюстрирует рис. 8.5.

При уменьшении длительности импульсов последовательности $y(t)$ будет увеличиваться ширина лепестков ($\Delta\omega = 2\pi/\tau$) модуля спектральной плотности $y(\omega)$. В пределе, при $\tau \rightarrow 0$, но постоянстве площади импульсов $U_0\tau = 1$ отношение $\sin z(k)/z(k) \rightarrow 1$ и последовательность прямоугольных импульсов превращается в последовательность дельта-функций

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t), \quad (8.18)$$

и дискретный сигнал описывается выражением (8.15). Спектр же этого сигнала становится строго периодическим с «периодом» ω_d (рис. 8.6):

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - k\omega_d). \quad (8.19)$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала отличается от спектра непрерывного сигнала тем, что он периодичен по частоте.

Из-за множителя $1/T$ в формуле (8.19) спектры $\dot{S}(\omega)$ и $\dot{S}_d(\omega)$ имеют разную размерность: первый имеет размерность [сигнал/частота], а второй – [сигнал].

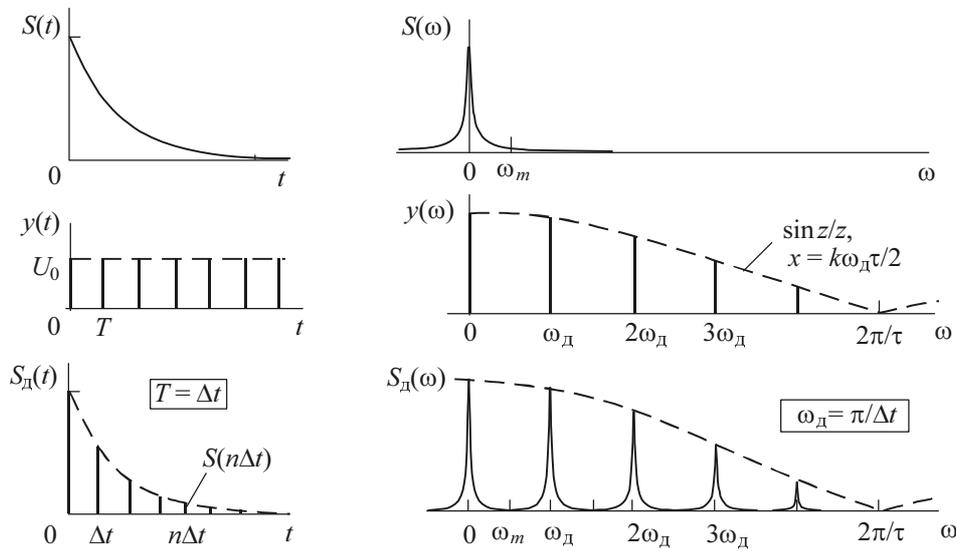


Рис. 8.5

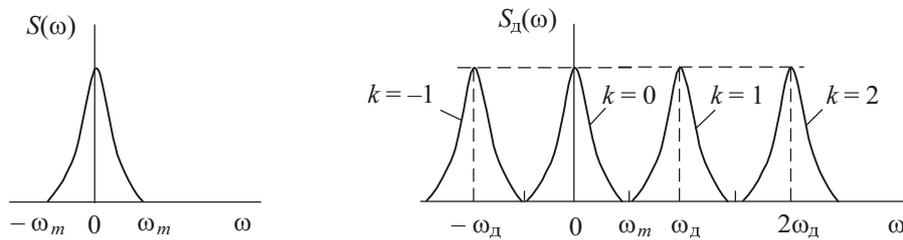


Рис. 8.6

Характер спектра $\dot{S}_d(\omega)$ дискретного сигнала демонстрирует еще раз частотно-временную *дуальность* преобразований Фурье: периодическому сигналу соответствует дискретный спектр, а периодическому спектру – дискретный сигнал.

8.1.7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

Ряд Котельникова (8.1) точно определяет сигнал $S(t)$ в точках отсчета $t = n\Delta t$. Это не требует дополнительного доказательства, так как коэффициенты ряда C_n – это отсчеты $S(n\Delta t)$. Но ряд (8.1) определяет сигнал $S(t)$ также и в любые моменты времени (рис. 8.7). Понятно, что из-за ограниченности спектра ($f \leq f_m$), т. е. отсутствия очень быстро изменяющихся составляющих с частотами $f > f_m$, сигнал между отсчетами изменяется несущественно. В противном случае это означает, что в спектре сигнала содержатся более высокочастотные составляющие и интервал дискретизации выбран неверно. Однако в промежутках между отсчетами, как уже отмечалось, возникает ошибка аппроксимации.

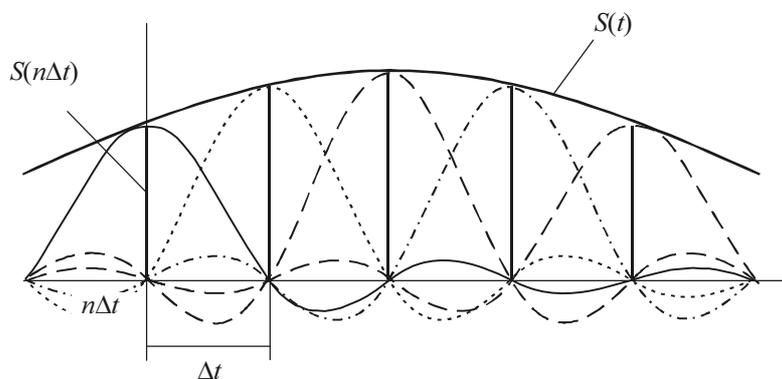


Рис. 8.7

Со спектральной точки зрения для восстановления исходного сигнала необходимо из спектра $S_d(\omega)$ дискретного сигнала «вырезать» полосу частот $[-\omega_m, \omega_m]$, в которой заключен спектр $S(\omega)$ сигнала $S(t)$ (см. рис. 8.6). При этом необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\omega_d \geq 2\omega_m. \quad (8.20)$$

Если условие (8.20) не соблюдается, то сдвинутые копии спектра накладываются друг на друга (рис. 8.8). При восстановлении непрерывного сигнала это приведет к неизбежным искажениям (см. пример 8.1). Поэтому надо либо увеличить частоту дискретизации (рис. 8.9), что предотвратит перекрытие копий спектра, либо предварительно пропустить исходный сигнал через ФНЧ с частотой среза, равной $\omega_H = \omega_d / 2$ (так называемой частотой Найквиста).

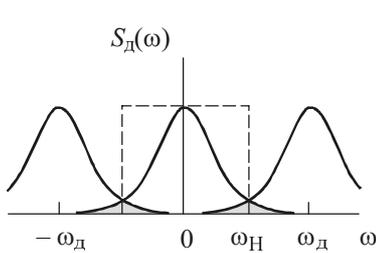


Рис. 8.8

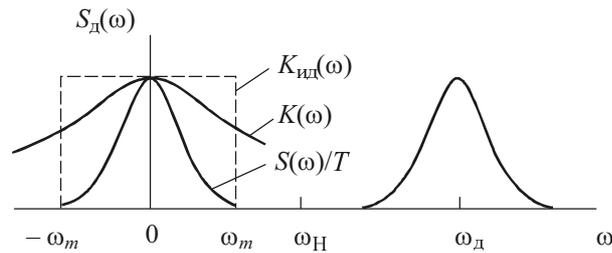


Рис. 8.9

В идеальном случае для восстановления непрерывного сигнала требуется фильтр нижних частот (ФНЧ), амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого прямоугольна: $K_{ид}(\omega) = \pi/\omega_m = \Delta t$ при $|\omega| \leq \omega_m$ (рис. 8.10, а). Импульсная характеристика такого фильтра $g(t) = \sin \omega_m t / (\omega_m t)$ (рис. 8.10, б) совпадает с базисной функцией $\varphi_0(t)$. При подаче на вход идеального ФНЧ сигнала в виде последовательности дельта-функций с коэффициентами $S(n\Delta t)$ сумма откликов на выходе описывается рядом (8.1).

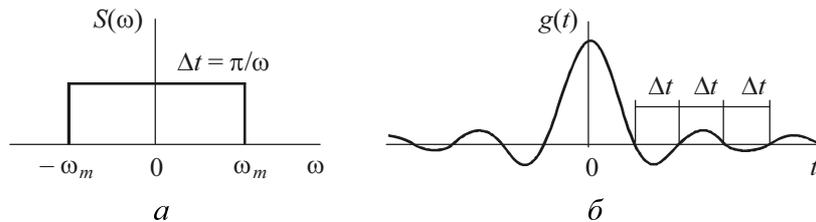


Рис. 8.10

Однако идеальный ФНЧ физически нереализуем. Импульсная характеристика физически реализуемого фильтра должна быть равна нулю при $t < 0$. У реальных ФНЧ АЧХ $K(\omega)$ не прямоугольные, а плавные кривые с конечной крутизной среза (см. рис. 8.9). Поэтому частота дискретизации должна выбираться в несколько раз больше, чем $1/\Delta t = 2f_m$, а интервал дискретизации –

соответственно меньше, чем $1/2f_m$. Увеличение «периода» ω_d раздвигает соседние лепестки спектра $S_d(\omega)$, что улучшает качество восстановления сигнала и облегчает реализацию ФНЧ.

Следует заметить, что на практике нереализуем и сигнал вида (8.15) с входящими в него дельта-функциями. Используемые вместо них короткие импульсы приводят к тому, что изменяется спектральная плотность дискретного сигнала $\dot{S}_d(\omega)$. Сравните выражения (8.17) и (8.19), а также рис. 8.5 и 8.6. Расхождение тем значительнее, чем больше длительность импульсов.

Примечание. Если для восстановления сигнала использовать не ФНЧ, а полосовой фильтр с центральной частотой $k\omega_d$ (и шириной полосы пропускания $(2\Delta\omega \geq 2\omega_m)$), то выделенному спектру будет соответствовать не видео-, а радиосигнал $S_p(t) = S(t) \cos(k\omega_d t)$. Это следует из теоремы о смещении спектра сигнала (прил. П.4).

8.1.8. ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Из симметрии преобразований Фурье относительно ω и t можно сформулировать теорему отсчетов в частотной области и для спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ можно получить ряд, подобный ряду (8.1). Для этого в выражении (8.1) заменим: t на ω , интервал дискретизации времени Δt на интервал дискретизации по частоте $\Delta\omega = 2\pi/T_c$, ширину спектра $2\omega_m$ на длительность сигнала T_c . базисную функцию $\varphi_n(t)$ на $\varphi_n(\omega)$ и сигнал $S(t)$ на спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \dot{S}(n\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)} = \\ &= \sum_{n=-f_m T_c}^{f_m T_c} \dot{S}(n\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c} \right)}{\frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c} \right)}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Выборки (спектральные линии) $\dot{S}(n\Delta\omega)$ представляют собой комплексные числа. Поэтому в соответствующей точке на оси частот должны быть определены модуль и аргумент $\dot{S}(n\Delta\omega)$. Общее число параметров получается вдвое больше, чем в случае ряда (8.1). Но, поскольку $\dot{S}(n\Delta\omega)$ и $\dot{S}(-n\Delta\omega)$ комплексно-сопряжены, задание одной из них однозначно связано с другой. Поэтому спектральная плотность сигнала может быть полностью охарактеризована выборками в области положительных частот и числом $N = 2T_c f_m$.

На рис. 8.11 проиллюстрирован результат дискретизации спектра. Дискретному спектру соответствует периодический сигнал $S_{\Pi}(t)$ с периодом T_c .

Если при дискретизации по времени интервал Δt должен быть менее величины $1/2f_m$, то при дискретизации по частоте интервал $\Delta\omega$ не должен превышать значение $2\pi/T_c$, т. е.

$$\Delta\omega < 2\pi/T_c. \quad (8.22)$$

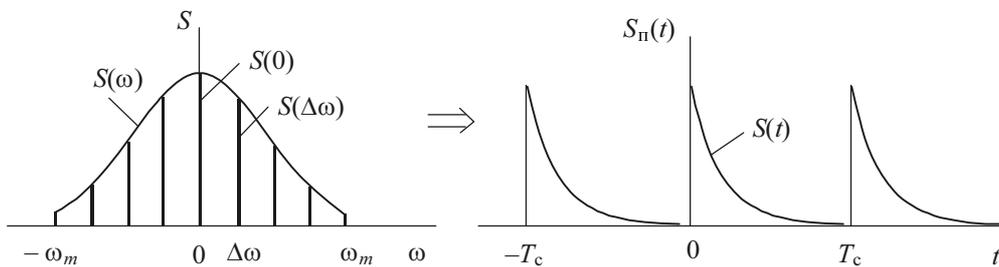


Рис. 8.11

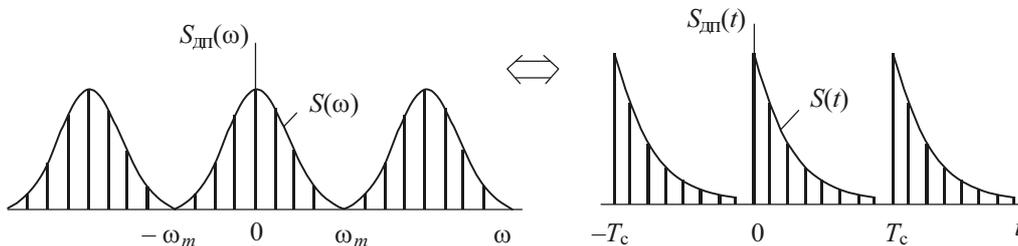


Рис. 8.12

Уменьшение интервала дискретизации $\Delta\omega$, т. е. выполнение условия (8.22), соответствует увеличению периода повторения T_c сигнала $S_{\Pi}(t)$ и отсутствию перекрытий сдвинутых копий исходного сигнала $S(t)$.

Дискретному периодическому спектру соответствует периодический дискретный сигнал (рис. 8.12). Дискретизация сигнала во временной и частотной областях – это путь к осуществлению *цифровой обработки сигналов*.

В заключение следует отметить, что теорема Котельникова (теорема отсчетов) имеет огромное значение для дискретизации аналоговых сигналов и математического описания дискретных сигналов. Дискретные сигналы, квантованные по уровню и называемые *цифровыми сигналами*, широко применяются во многих областях современной науки и техники.

8.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Гармоническое колебание. Задано гармоническое колебание

$$S(t) = S_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.23)$$

Задан также интервал Δt (частота $\omega_{\text{д}} = 2\pi/\Delta t$) дискретизации. Требуется найти отсчеты $S(n\Delta t)$ и спектр $\dot{S}_{\text{д}}(\omega)$ дискретного сигнала.

Отсчеты находятся из выражения (8.23) подстановкой вместо t дискретных значений $n\Delta t$: $S(n\Delta t) = S_0 \sin(\omega_0 n\Delta t + \varphi)$.

Для нахождения спектра $\dot{S}_{\text{д}}(\omega)$ воспользуемся выражением спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ гармонического сигнала. В примере 12 главы 7 было показано (см. формулу (7.53) и рис. 7.18), что $\dot{S}(\omega)$ представляет собой две дельта-функции на частотах $-\omega_0$ и ω_0 . Тогда согласно (8.19) для модуля спектральной плотности $S_{\text{д}}(\omega)$ дискретного сигнала получаем

$$S_{\text{д}}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_{\text{д}}) = \frac{S_0\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_{\text{д}}). \quad (8.24)$$

В зависимости от соотношения между частотами ω_0 (она же ω_m) и $\omega_{\text{Н}} = \omega_{\text{д}}$ ($\omega_{\text{Н}}$ – частота Найквиста) возможны несколько характерных случаев (рис. 8.13).

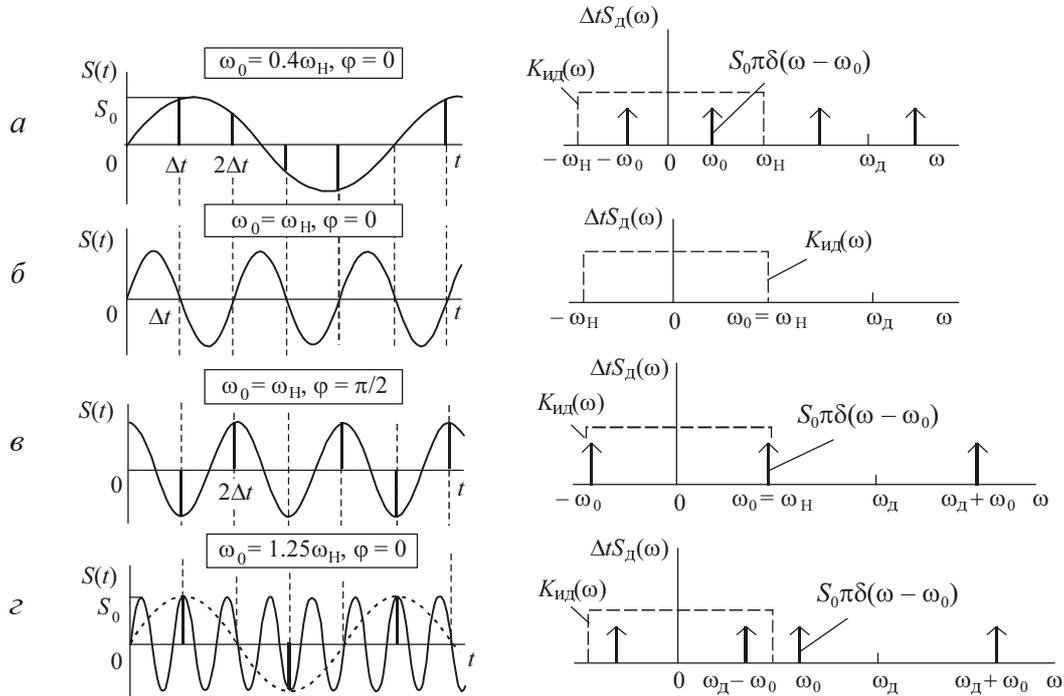


Рис. 8.13

1. $\omega_0 < \omega_H = \omega_D/2$ (т. е. $\omega_D > 2\omega_0 = 2\omega_m$). В этом случае приходится более двух выборок за период синусоиды. Выборки $S(n\Delta t)$ в соответствии с формулой (8.1) позволят правильно восстановить исходный сигнал (рис. 8.13, а). Это подтверждается и по спектральной диаграмме $S_d(\omega)$. Штриховой линией на ней показана АЧХ $K_{ид}(\omega)$ идеального ФНЧ, с помощью которого может быть восстановлен сигнал $S(t)$ только на частоте ω_0 .

2. $\omega_0 = \omega_H = \omega_D/2$ ($\omega_D = 2\omega_0 = 2\omega_m$). В этом случае восстановление сигнала возможно, но при фазовом сдвиге $\varphi = \pi/2$ (рис. 8.13, в). В худшем случае, когда $\varphi = 0$, отсчеты синусоиды равны нулю (рис. 8.13, б). При произвольном φ дискретные отсчеты позволяют восстановить сигнал с частотой ω_0 , но амплитуда и фаза восстановленного сигнала будут иными, чем у исходного сигнала.

3. $\omega_0 > \omega_H$ ($\omega_D < 2\omega_0$). Восстановленный по дискретным отсчетам сигнал будет гармоническим (пунктирная линия на временной диаграмме рис. 8.13, з),

но его частота будет не ω_0 , а $\omega_d - \omega_0$. Это явление называют *эффектом появления ложных частот*.

Пример 2. Бигармонический сигнал. Представим рядом Котельникова сигнал

$$S(t) = S_0[2 + \cos \Omega t + 0.5 \sin(2\Omega t - \varphi)].$$

График нормированного сигнала $s(t) = S(t)/S_0$ для $\varphi = \pi/2$ показан сплошной линией на рис. 8.14. Там же жирными линиями отмечены нормированные отсчеты сигнала $s(n\Delta t)$.

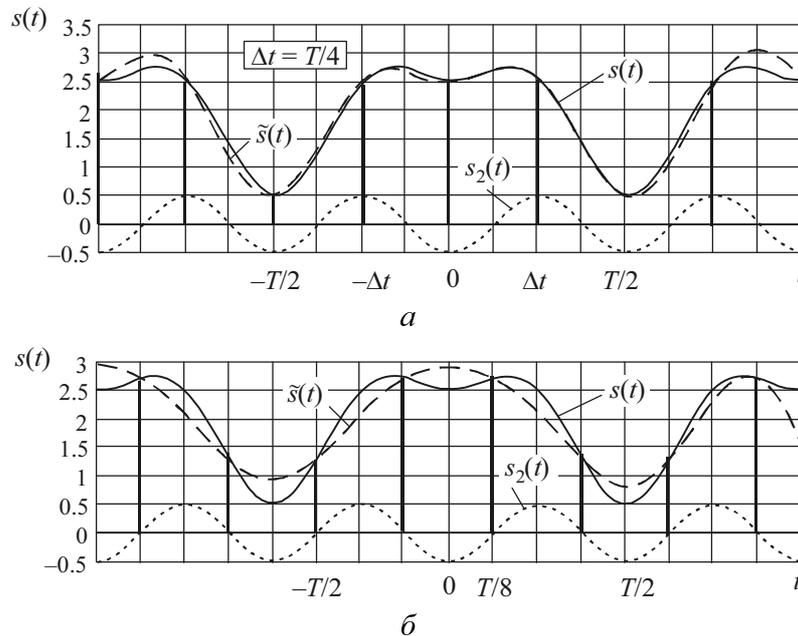


Рис. 8.14

Интервал дискретизации выбран в соответствии с условием (8.4): $\Delta t = \pi/\omega_m = \pi/2\Omega = T/4$, где $T = 2\pi/\Omega$ – период первой гармоники сигнала. В периоде укладывается четыре интервала дискретизации и пять отсчетов: $s(-2\Delta t) = 0.5$, $s(-\Delta t) = 2.5$, $s(0) = 2.5$, $s(\Delta t) = 2.5$, $s(2\Delta t) = 0.5$. Из-за периодичности сигнала мгновенные значения и выборки будут повторяться. Если в ряде (8.1) учесть члены от $n = -5$ до $n = 5$, то нормированный аппроксимированный сигнал $\tilde{s}(t) = \tilde{S}(t)/S_0$ примет вид, показанный штриховой линией на

рис. 8.14, *а*. Пунктирной линией на графике показана нормированная вторая гармоника сигнала: $s_2(t) = 0.5 \sin(2\Omega t + \varphi)$. Отсчеты попадают на экстремумы этой составляющей.

Следует отметить, что в рассмотренном случае аппроксимированный и исходный сигналы удовлетворительно совпадают именно потому, что аккуратно выбраны моменты отсчетов. Из рис. 8.14, *б* легко видеть, что если моменты отсчетов сместить на интервал $T/8$, то отсчеты попадут на нулевые значения второй гармоники сигнала $s_2(t)$ и информация о ней в аппроксимированном сигнале $\tilde{s}(t)$ будет утеряна.

Пример 3. Прямоугольный видеоимпульс. Этот импульс (рис. 8.15, *а*) не принадлежит к числу сигналов с ограниченным спектром.

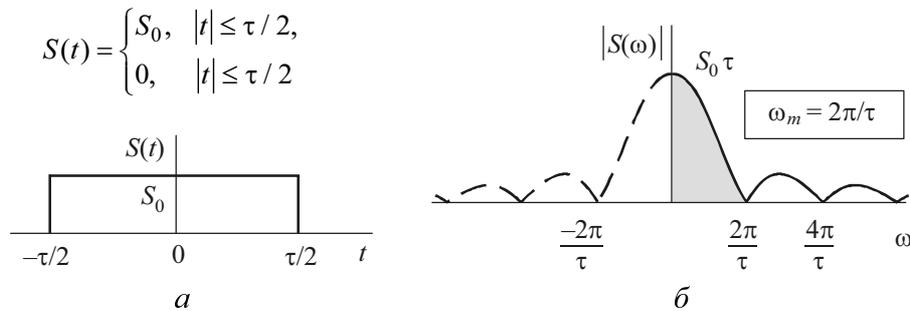


Рис. 8.15

В примере 1 главы 7 было показано, что модуль спектральной плотности $|\dot{S}(\omega)| = S(\omega)$ этого импульса имеет лепестковый характер (рис. 8.15, *б*) и сравнительно быстро убывает (по закону $1/\omega$) с ростом частоты. Ограничимся первым лепестком при выборе ω_m на положительной полуоси частот (на рис. 8.15, *б* лепесток закрашен):

$$\omega_m = \Delta\omega = 2\pi/\tau,$$

в котором сосредоточено 90.5 % всей энергии импульса. Ошибка μ , возникающая в результате такого усечения спектра и, следовательно, аппроксимации сигнала, будет согласно (8.13')

$$\mu = 1 - E_a / E = 1 - 0.905 / 1 = 0.095 = 9.5 \% .$$

Интервал Δt и частота дискретизации ω_d определяются

$$\Delta t = \pi/\omega_m = \pi/(2\pi/\tau) = \tau/2, \quad \omega_d = 2\pi/\Delta t = 2\pi/(\pi/\omega_m) = 2\omega_m.$$

Дискретизированный сигнал согласно формуле (8.15) будет иметь вид (рис. 8.16, а)

$$S_d(t) = \sum_{n=-1}^1 S(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t) = S_0 \sum_{n=-1}^1 \delta(t - n\Delta t).$$

Спектральная плотность $\dot{S}_d(\omega)$ дискретизированного сигнала определяется по формуле (8.19) ($T = \Delta t$):

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - k\omega_d),$$

где

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} S_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, & |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

Модуль спектральной плотности $|\dot{S}_d(\omega)| = S_d(\omega)$ показан на рис. 8.16, б.

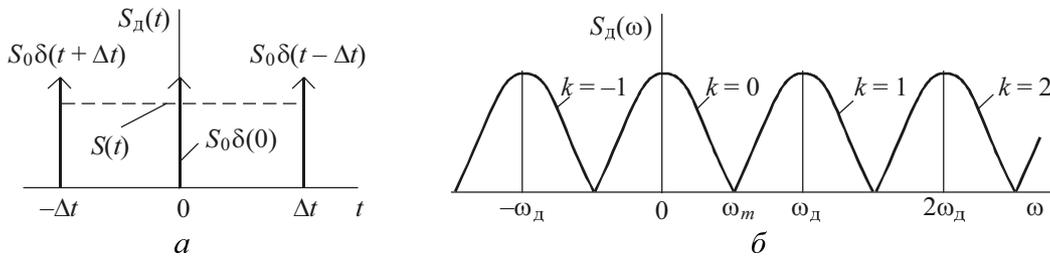


Рис. 8.16

В длительности импульса τ уложатся два интервала Δt и три отсчета $N = \tau/\Delta t + 1 = \tau/(\tau/2) + 1 = 3$ одинакового значения S_0 (рис. 8.16, а). Тогда импульс аппроксимируется согласно (8.1) следующим образом:

$$\tilde{S}(t) = S_0 \sum_{n=-1}^1 \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}. \quad (8.25)$$

На рис. 8.17 показаны исходный $S(t)$ и аппроксимированный $\tilde{S}(t)$ сигналы.

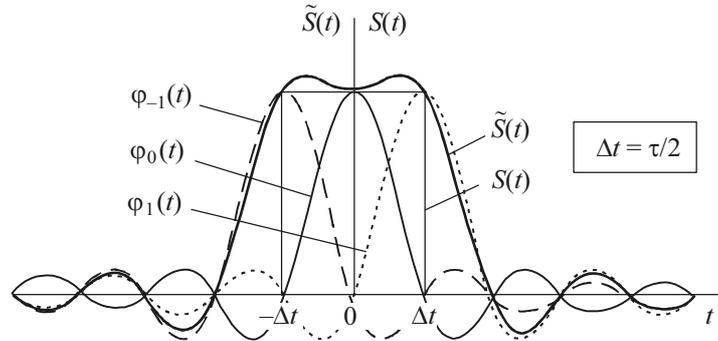


Рис. 8.17

Если же ограничить полосу частот исходного импульса двумя лепестками, т. е. $\omega_{1.m} = 4\pi/\tau$, то $\Delta t_1 = \pi/\omega_{1.m} = \tau/4$, $\omega_{1.д} = 2\pi/\Delta t_1 = 2\omega_{1.m}$. В этом случае модуль спектральной плотности $S_d(\omega)$ изменится (рис. 8.18, а), изменится и вид аппроксимированного сигнала $\tilde{S}(t)$ (рис. 8.18, б). В длительности импульса уложатся теперь пять отсчетов; формула (8.25) примет вид

$$\tilde{S}(t) = S_0 \sum_{n=-2}^2 \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}.$$

Поскольку два лепестка спектра исходного сигнала содержат 95 % всей его энергии, ошибка аппроксимации μ составит 5 %.

Совершенно естественно, что с увеличением ω_m уменьшается интервал дискретизации $\Delta t = \pi/\omega_m$, растет число учитываемых членов ряда (8.1) и точность аппроксимации будет расти. Ряд (8.1) сходится при $N \rightarrow \infty$ в среднеквадратическом смысле – среднеквадратическая ошибка ε и относительная ошибка μ стремятся к нулю.

С увеличением числа составляющих форма импульса будет приближаться к прямоугольной. Однако даже при $N \rightarrow \infty$ останутся выбросы на фронтах импульса. Мы уже встречались с этим явлением – *явлением Гиббса*, когда аппроксимировали (синтезировали) прямоугольный импульс в базисе гармонических функций (см. пример 5 главы 6).

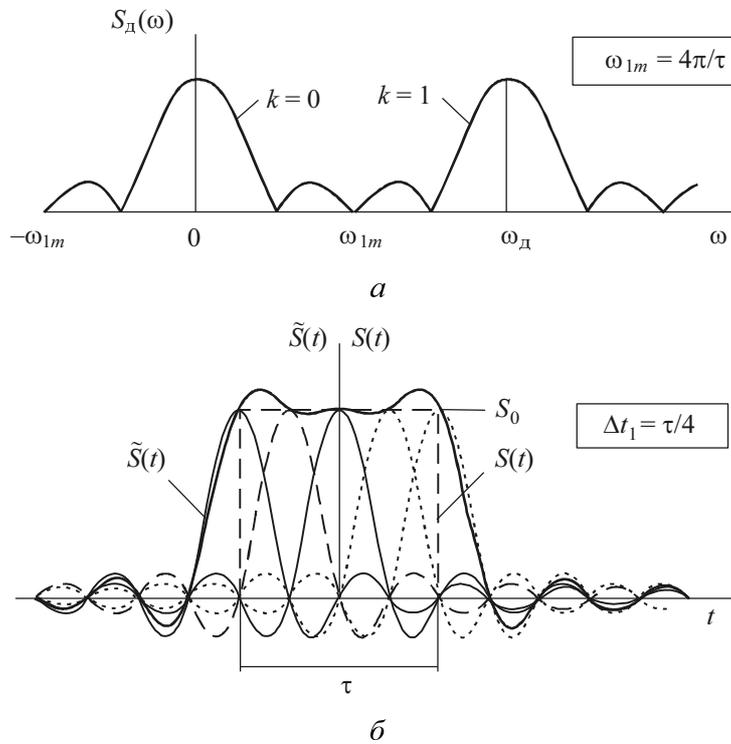


Рис. 8.18

Пример 4. Экспоненциальный импульс. Представим рядом Котельникова экспоненциальный импульс

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t} \sigma(t).$$

Как и прямоугольный импульс, он не принадлежит к числу сигналов с ограниченным спектром. Его энергетический спектр теоретически бесконечен:

$$W(\omega) = S^2(\omega) = \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

За граничную (максимальную) частоту f_m и длительность импульса τ примем соответственно эффективную ширину спектра $\Delta f_{\text{эф}}$ и эффективную длительность $\tau_{\text{эф}}$ сигнала, которые возьмем из табл. П.1 прил. П.5: $f_m = \Delta f_{\text{эф}} = 0.98\alpha$, $\tau = \tau_{\text{эф}} = 1.155 / \alpha$.

Интервал Δt и частоту f_d дискретизации определим из условий (8.4) и (8.16):

$$\Delta t = 1/2f_m = 0.51/\alpha \quad \text{и} \quad f_d = 1/\Delta t = 2f_m = 1.96\alpha.$$

Последовательность коэффициентов $\{S_n\}$ найдем из выражения для сигнала $S(t)$ с подстановкой в него значений $n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Для $S_0 = 1$ и $\alpha = 1$ получаем: $S_0 = S(0) = 1$, $S_1 = S(\Delta t) = 0.6$, $S(2\Delta t) = 0.361$, $S(3\Delta t) = 0.217$, $S(4\Delta t) = 0.13$, $S(5\Delta t) = 0.078$, $S(6\Delta t) = 0.047$, $S(7\Delta t) = 0.017$, $S(8\Delta t) = 0.01$.

Спектр по Котельникову показан на рис. 8.19, а (вертикальные линии). Там же приведен исходный сигнал $S(t)$ (штриховая линия).

По найденной совокупности коэффициентов $\{S_n\}$ и заданной системе базисных функций аппроксимируем сигнал согласно формуле (8.10):

$$\tilde{S}(t) = \sum_{n=0}^8 S(n\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}.$$

Временная диаграмма аппроксимированного сигнала показана (жирной линией) на рис. 8.19, б.

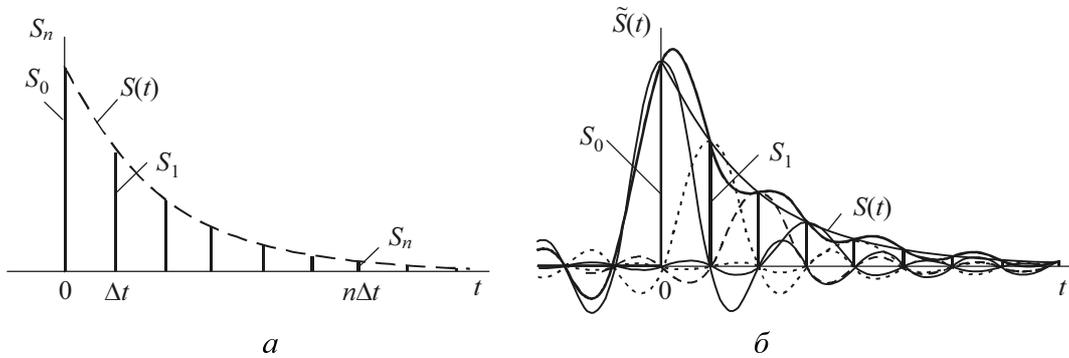


Рис. 8.19

Ошибка аппроксимации может быть определена по формуле (8.13'):

$$\mu = \left(\int_{\omega_m}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right) / \left(\int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right) = \left(S_0^2 \int_{\omega_m}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) / \left(S_0^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) =$$

$$= \left[\frac{S_0^2}{\alpha\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_m}{\alpha} \right) \right] / \left[\frac{S_0^2}{2\alpha} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_m}{\alpha} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_m}{\alpha}. \quad (8.26)$$

В рассматриваемом случае $\omega_m = 2\pi f_m = 2\pi \cdot 0.98\alpha = 6.15\alpha$ и

$$\mu = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(6.15) = 0.102 = 10.2 \ \%.$$

Из (8.26) очевидно, что с увеличением ω_m ошибка аппроксимации уменьшается. Объяснить это можно и тем, что уменьшается интервал дискретизации и увеличивается число отсчетов N , участвующих в аппроксимации сигнала. Однако, как и в случае с прямоугольным импульсом, проявляется эффект Гиббса при скачке сигнала (в точке $t = 0$).

8.3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Сигнал телефонного канала связи ограничен частотой $f_m = 3400$ Гц. Для передачи его дискретным способом определите интервал Δt между отсчетами и количество отсчетов N . Продолжительность сигнала равна 15 мин.

2. Сколько отсчетов потребуется при передаче дискретным способом сигнала звукового сопровождения телевизионного канала? Время передачи $T_c = 1$ час, а верхняя частота сигнала $f_m = 12$ кГц.

3. На рис. 8.20 показаны отсчеты двух сигналов, дискретизированных в соответствии с теоремой Котельникова. Вычислите мгновенные значения $\tilde{U}_1(t_1)$ и $\tilde{U}_2(t_1)$ аппроксимированных сигналов в момент времени $t_1 = 0.5$ мс.

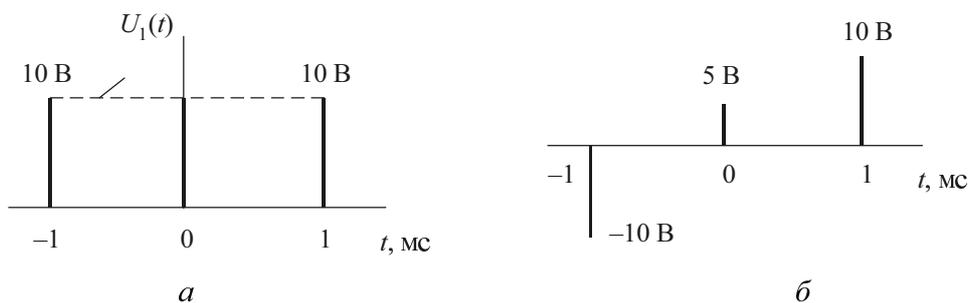


Рис. 8.20

4. На рис. 8.20, а приведены отсчеты прямоугольного импульса $U_1(t)$, взятые в соответствии с теоремой Котельникова. Импульс расположен симметрично относительно нуля и имеет длительность $\tau = 2$ мс. Определите энергию E , частоту ω_m ограничения спектра исходного сигнала, энергию E_a импульса в полосе частот $0 \dots \omega_m$ и относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации.

5. Задан бигармонический сигнал

$$u(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t,$$

где $\omega_2 = 2\omega_1$. Сигнал дискретизирован с шагом $\Delta t = 0.2 / \omega_1$. Определите частоту дискретизации ω_d и частоту Найквиста ω_H . Найдите и постройте спектральную плотность дискретизированного сигнала.

6. Спектральная плотность $S(\omega)$ сигнала $S(t)$ описывается выражением

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0 \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_m}\right), & |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

Представьте этот сигнал в виде суммы двух идеальных низкочастотных сигналов (спектральные плотности которых постоянны от $-\omega_m$ до ω_m).

7. Гауссовский импульс

$$S(t) = S_0 e^{-\beta^2 t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

подвергнут дискретизации с интервалом $\Delta t = 1/\beta$. Определите частоту Найквиста ω_H . Найдите и постройте нормированную спектральную плотность $S_{\text{д.отн}}(\omega) = S_{\text{д}}(\omega) / S_{\text{д}}(0)$ дискретизированного сигнала.

8. Постройте спектр $S_{\text{д.отн}}(\omega)$ по условию упражнения 7, если интервал дискретизации уменьшен в два раза.

9. Экспоненциальный импульс $S(t) = S_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$ аппроксимируется сигналом $\tilde{S}(t)$ вида (8.10). Спектральная плотность $\tilde{S}(\omega)$ этого сигнала совпада-

ет со спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$ исходного сигнала $S(t)$ в полосе частот от $-\omega_m$ до ω_m . Вне этой полосы $\tilde{S}(\omega) = 0$. Интервал дискретизации $\Delta t = 0.25 / \alpha$.

Определите относительную среднеквадратическую ошибку μ аппроксимации.

10. Экспоненциальный импульс $S(t) = S_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$ описывается в частотной области комплексной спектральной плотностью

$$\dot{S}(\omega) = \frac{S_0}{\alpha + j\omega} = \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{j \arctg(-\omega/\alpha)}.$$

Нормированный модуль и аргумент спектральной плотности приведены на рис. 8.21. Эти спектральные характеристики подвергнуты дискретизации с интервалом $\Delta\omega = \alpha / 2$.

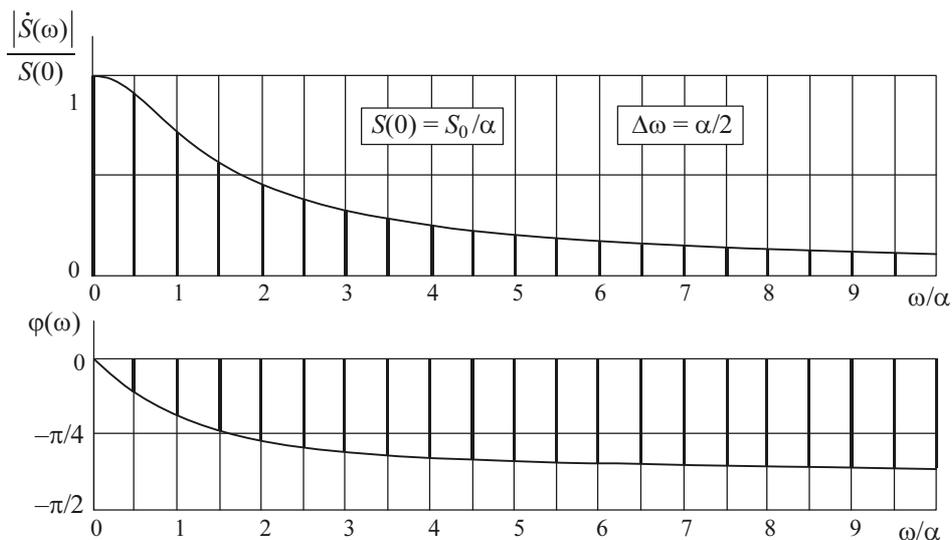


Рис. 8.21

Определите эффективную полосу частот (в области $\omega > 0$), в которой заключено 90 % всей энергии импульса, число выборок N спектра $\dot{S}(\omega)$ в этой полосе, а также период T последовательности импульсов, которая соответствует дискретному спектру.

8.4. ЗАДАНИЕ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА

В табл. 1.3 заданы варианты импульсных сигналов $S(t)$, а в табл. 1.4 – их параметры.

Требуется:

а) привести выражение и построить диаграмму модуля спектральной плотности $S(f)$ заданного сигнала $S(t)$. Для этого следует воспользоваться результатами задания 7.4;

б) вычислить максимальную частоту f_m в спектре сигнала (воспользоваться энергетическим критерием);

в) описать аналитически и построить графически модуль спектральной плотности $S(f)$ исходного сигнала для ограниченной полосы частот $[-f_m, f_m]$ ($S(f) = 0$ вне этой полосы);

г) определить интервал дискретизации (Найквиста) Δt ;

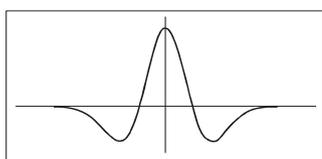
д) построить график дискретизированного сигнала, если за дискретизирующую систему функций принята последовательность дельта-импульсов $\delta(t)$;

е) построить аппроксимированный (восстановленный) сигнал для интервалов дискретизации Δt и $\Delta t_1 = \Delta t/2$ (при постоянстве f_m);

ж) определить спектр $\dot{S}_d(f)$ дискретизированного в соответствии с п. «е» сигнала. Построить диаграмму модуля спектральной плотности $|\dot{S}_d(f)| = S_d(f)$ для интервалов дискретизации Δt и $\Delta t_1 = \Delta t/2$ (при постоянстве f_m).

Глава 9

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ



В науке слава достается тому, кто убедил мир, а не тому, кто первым набрел на идею.

Фрэнсис Дарвин

9.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

9.1.1. ВЕЙВЛЕТЫ. ГЛАВНЫЕ ПРИЗНАКИ

Как отмечалось в главе 4, в последние годы в качестве базисных функций обобщенного ряда Фурье (5.3) широко используются вейвлеты. Возникло и успешно развивается новое направление в теории и технике сигналов, которое называется вейвлет-преобразованием (ВП) сигналов. Уникальные свойства вейвлетов, ВП и быстрые алгоритмы ВП сделали их мощным инструментом анализа и синтеза сигналов и изображений различной природы.

Число публикаций неуклонно растет и не поддается учету из-за огромного количества практических приложений во многих областях науки, техники, медицины и экономики. Появились учебные пособия (например, [7, 15, 16, 18, 19]), монографии, диссертации, переведены на русский язык фундаментальные теоретические книги И. Добеши, Т. Чуи и др.

Известны применения ВП в цифровой связи, в системах для обнаружения и распознавания сигналов на фоне помех и т. п. ВП легло в основу международных стандартов по сжатию изображений MPEG-4, JPEG-2000, графических программных средств Corel, видеокодеров фирмы Analog Devices и др.

Английское слово «wavelet» (от французского «ondelette») дословно переводится как «короткая (маленькая) волна». В различных переводах зарубежных статей на русский язык встречаются еще термины: «всплеск», «всплесковая функция», «маловолновая функция», «волночка» и др.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций:

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (9.1)$$

Функции $\Psi_{ab}(t)$ сконструированы из материнского (исходного) вейвлета $\psi(t)$, обладающего определенными свойствами за счет операций сдвига во времени (b) и изменения временного масштаба (a) (рис. 9.1). Множитель $1/\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a .

ГЛАВНЫЕ ПРИЗНАКИ ВЕЙВЛЕТА

1. Ограниченность. Квадрат нормы функции должен быть конечным:

$$\|\Psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (9.2)$$

2. Локализация. ВП в отличие от преобразования Фурье использует локализованную исходную функцию и во времени, и по частоте. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$|\Psi(t)| \leq C(1+|t|)^{-1-\varepsilon} \quad \text{и} \quad |S_{\Psi}(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^{-1-\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon > 0. \quad (9.3)$$

Например, дельта-функция $\delta(t)$ и гармоническая функция не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временной и частотной областях.

На рис. 1.2 в качестве примера приведены вейвлет «мексиканская шляпа» (a) и модуль его спектральной плотности (b).

Малые значения a соответствуют мелкому масштабу $\Psi_{ab}(t)$ или высоким частотам ($\omega \sim 1/a$), большие параметры a – крупному масштабу $\Psi_{ab}(t)$, т. е. растяжению материнского вейвлета $\psi(t)$ и сжатию его спектра. В частотной области спектры вейвлетов похожи на всплески (волночки) с пиком на частоте ω_0 и полосой $\Delta\omega$, т. е. имеют вид *полосового фильтра*; при этом ω_0 и $\Delta\omega$ уменьшаются с ростом параметра a .

В соответствии с принципом неопределенности произведение эффективной длительности ($\tau_{\text{эф}}$) и эффективной ширины спектра ($\Delta\omega_{\text{эф}}$) функции

$\psi_{ab}(t)$ (площадь прямоугольников на рис. 9.2) остается неизменным. Кроме того, из-за масштабирования и временного сдвига ($b/a = \Delta = \text{const}$) сохраняется относительная «плотность» расположения базисных функций по оси t .

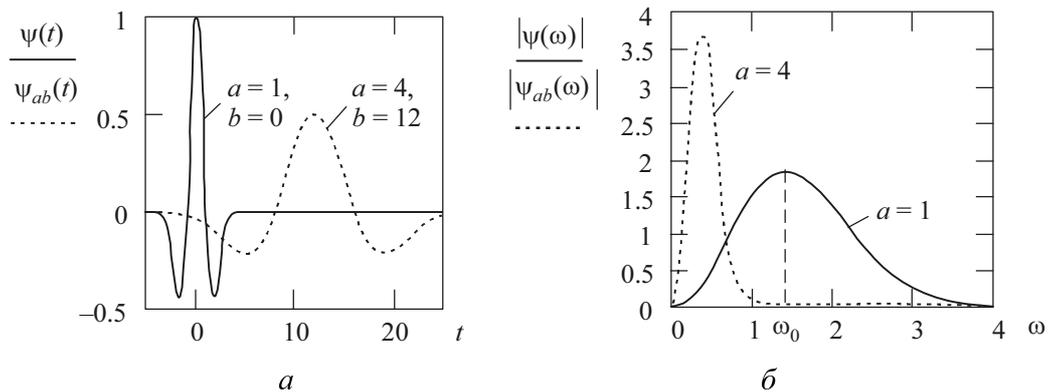


Рис. 9.1

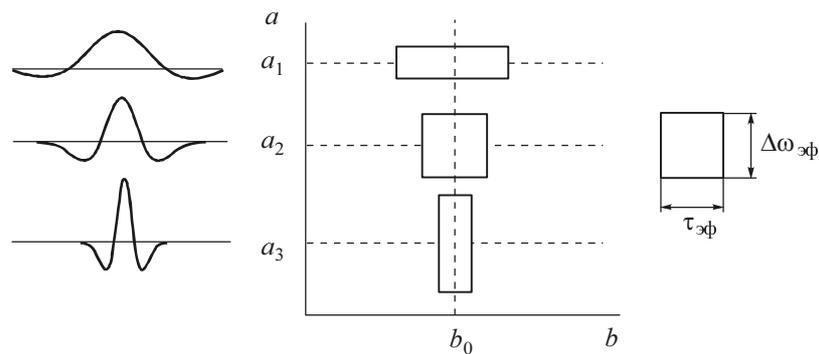


Рис. 9.2

3. Нулевое среднее. График исходной функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени (см. рис. 9.2) и иметь нулевую площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (9.4)$$

Из этого условия становится понятен выбор названия «вейвлет» – маленькая волна.

Равенство нулю площади функции $\psi(t)$, т. е. нулевого момента, приводит к тому, что фурье-преобразование $S_\psi(\omega) = \psi(\omega)$ этой функции равно нулю при $\omega = 0$ и имеет вид полосового фильтра (рис. 9.1, б). При различных значениях a это будет набор полосовых фильтров.

Часто для приложений бывает необходимо, чтобы не только нулевой, но и все первые n моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0. \quad (9.5)$$

Вейвлеты n -го порядка позволяют анализировать более тонкую (высоко-частотную) структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие.

4. Автомодельность. Характерным признаком ВП стало его самоподобие. Все вейвлеты конкретного семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и материнский вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований (a) и сдвига (b).

9.1.2. ПРИМЕРЫ МАТЕРИНСКИХ ВЕЙВЛЕТОВ

Основные вейвлетообразующие функции, или материнские вейвлеты, приведены в табл. 9.1.

Наиболее распространенные вещественные базисы конструируются на основе производных функции Гаусса ($g_0(t) = \exp(-t^2 / 2)$). Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной области.

На рис. 9.3 показаны вейвлеты первых четырех порядков $g_1(t) - g_4(t)$ и модули их спектральной плотности. При $n = 1$ получаем вейвлет первого порядка, называемый WAVE-вейвлетом с равным нулю нулевым моментом. При $n = 2$ получаем МНАТ-вейвлет, называемый «мексиканская шляпа» (mexican hat – похож на сомбреро). У него нулевой и первый моменты равны нулю. Он имеет лучшее разрешение, чем WAVE-вейвлет.

Таблица 9.1

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: • первого порядка, или WAVE- вейвлет • второго порядка, или МНАТ-вейвлет «мексиканская шляпа» – <u>mexican hat</u>) • n -го порядка	$-t \exp(-t^2 / 2)$ $(1 - t^2) \exp(-t^2 / 2)$ $(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(-t^2 / 2)]$	$(i\omega) \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$ $(i\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$ $(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$
DOG – <u>d</u> ifference of <u>g</u> aussians	$e^{-t^2/2} - 0, 5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi} (e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$
Вещественные дискретные		
НААР-вейвлет	$\begin{cases} 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ \geq -1, 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, t < 0, t > 0 \end{cases}$	$i e^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega / 4}{\omega / 4}$
ФНАТ-вейвлет, или «французская шляпа» (<u>F</u> rench <u>h</u> at – похож на цилиндр)	$\begin{cases} 1, t \leq 1/3, \\ \geq -1/2, 1/3 \leq t \leq 1, \\ 0, t > 1 \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega / 3}{3 \omega / 3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} \cdot e^{-(\omega - \omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

Выше был представлен небольшой перечень типов вейвлетов, описываемых аналитически в явном виде. Однако большинство типов вейвлетов не

имеют аналитического описания в виде одной формулы, а задаются итерационными выражениями, легко вычисляемыми компьютерами. Примером таких вейвлетов служат функции Добеши (Daubechies), одна из которых (db4) используется в качестве встроенной для ВП в Mathcad.

В настоящее время выбор вейвлетов довольно обширен. Только в пакете Wavelet Toolbox 2.0/2.1 (MATLAB 6) представлено полтора десятка материнских вейвлетов; при этом для ряда из них дано еще множество вариантов.

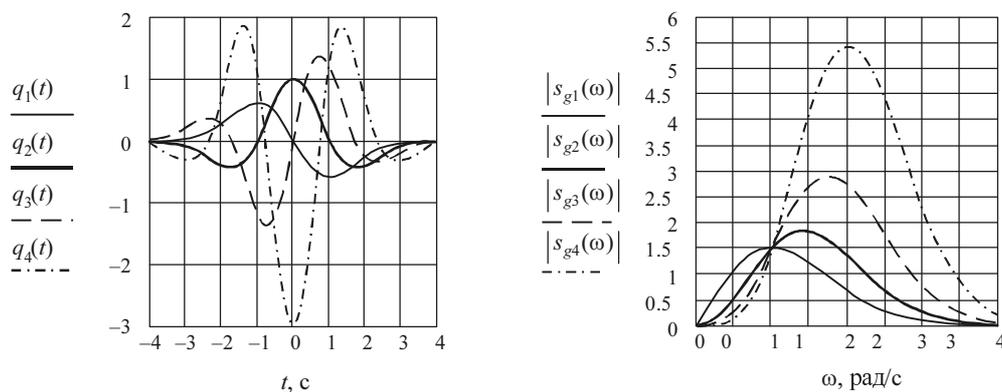


Рис. 9.3

Выбор конкретного материнского вейвлета (будь то непрерывный или дискретный) целиком зависит от характера поставленной задачи и от конкретного анализируемого сигнала.

9.1.3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Непрерывное (интегральное) вейвлет-преобразование (НВП или CWT – continuous wavelet transform).

Сконструируем базис $\psi_{ab}(t)$ с помощью *непрерывных* масштабных преобразований (a) и переносов (b) материнского вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров a и b в формуле (9.1).

Тогда по определению прямое (анализ) и обратное (синтез) НВП (т. е. ПНВП и ОНВП) сигнала $S(t)$ запишутся:

$$W(a, b) = (S(t), \psi_{ab}(t)) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (9.6)$$

$$S(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}, \quad (9.7)$$

где C_ψ – нормирующий коэффициент,

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty,$$

(\cdot, \cdot) – скалярное произведение соответствующих сомножителей; $\Psi(\omega)$ – фурье-преобразование вейвлета $\psi(t)$. Для ортонормированных вейвлетов $C_\psi = 1$.

Из (9.6) следует, что вейвлет-спектр $W_s(a, b)$ (wavelet spectrum, или time-scale-spectrum – масштабно-временной спектр) в отличие от фурье-спектра (single spectrum) есть функция двух аргументов: первый аргумент a (временной масштаб) аналогичен периоду осцилляций, т. е. обратен частоте, а второй b – аналогичен смещению сигнала по оси времени.

Надо отметить, что $W(b, a_0)$ характеризует временную зависимость (при $a = a_0$), тогда как зависимости $W(a, b_0)$ можно поставить в соответствие частотную зависимость (при $b = b_0$).

Способы представления (визуализации) $W(a, b)$ могут быть различными. Спектр $W(a, b)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве (см. далее рис. 9.7). Однако часто вместо изображения поверхности представляют ее проекцию на плоскость ab с изоуровнями (рис. 9.8), позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуд ВП на разных масштабах (a) и во времени (b). Кроме того, изображают картины линий локальных экстремумов этих поверхностей, так называемый *скелетон* (skeleton), который выявляет структуру анализируемого сигнала.

9.1.4. СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

Прямое ВП содержит комбинированную информацию об анализируемом сигнале и анализирующем вейвлете. Несмотря на это, ВП позволяет получить объективную информацию о сигнале, потому что некоторые свойства ВП не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от вейвлета делает эти простые свойства очень важными.

Линейность. Она следует из скалярного произведения (9.6):

$$W[\alpha S_1(t) + \beta S_2(t)] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

Сдвиг. Смещение сигнала во временной области на b_0 ведет к сдвигу вейвлет-образа также на b_0 :

$$W[S(t - b_0)] = W[a, b - b_0]. \quad (9.8)$$

Масштабирование. Растяжение (сжатие) сигнала приводит также к растяжению (сжатию) его в области $W(a, b)$:

$$W[S(t/a_0)] = \frac{1}{a_0} W\left[\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right].$$

Дифференцирование

$$W[d_t^m S] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} S(t) d_t^m [\psi_{ab}(t)] dt,$$

где $d_t^m = d^m[\dots]/dt^m$, $m \geq 1$. Из этого свойства следует, что проигнорировать, например, крупномасштабные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации сигнала $S(t)$ можно дифференцированием нужное число раз либо вейвлета, либо самого сигнала. Если учесть, что часто сигнал задан цифровым рядом, а анализирующий вейвлет – формулой, то это свойство весьма полезное.

Масштабно-временная локализация. Она обусловлена тем, что элементы базиса ВП хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном.

За счет изменения масштаба (увеличение a приводит к сужению фурье-спектра функции $\psi_{ab}(t)$) вейвлеты способны различать характеристики на разных шкалах (частотах), а за счет сдвига анализировать свойства сигнала в разных точках на всем исследуемом интервале.

Поэтому не случайно многие исследователи называют вейвлет-анализ «**математическим микроскопом**». Это название хорошо отражает замечательные свойства метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a – увеличение, и, наконец, выбором материнского вейвлета ψ опре-

деляют оптические качества микроскопа. Способность этого микроскопа обнаруживать внутреннюю структуру существенно неоднородного процесса и изучать его локальные свойства продемонстрирована на многих примерах (см., например, [15]).

9.1.5. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

Классическое преобразование Фурье (ПФ) – это традиционный математический аппарат для анализа стационарных процессов. Сигналы разлагаются в базисе косинусов и синусов или комплексных экспонент. Эти базисные функции простираются вдоль всей оси времени.

С практической точки зрения и с позиций точного представления произвольных сигналов ПФ имеет **ряд ограничений и недостатков**. Обладая хорошей локализацией по частоте, оно не обладает временным разрешением. ПФ даже для одной заданной частоты требует знания сигнала не только в прошлом, но и в будущем, а это – теоретическая абстракция. Обусловлено это тем, что базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое колебание, которое математически определено на временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$. ПФ не учитывает, что частота колебания может изменяться во времени. Локальные особенности сигнала (разрывы, ступеньки, пики и т. п.) дают едва заметные составляющие спектра, по которым обнаружить эти особенности и тем более их место и характер практически невозможно. В этом случае невозможно и точное восстановление сигнала из-за появления эффекта Гиббса. Для получения о сигнале высокочастотной информации с хорошей точностью следует извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала. Для получения низкочастотной спектральной информации – наоборот. Кроме того, на практике не все сигналы стационарны, а для нестационарных сигналов трудности ПФ возрастают многократно.

Часть указанных трудностей преодолевается при использовании **оконого** ПФ:

$$S(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)w(t-b)e^{-j\omega t} dt, \quad (9.9)$$

в котором применяется предварительная операция умножения сигнала $S(t)$ на «окно» $w(t-b)$; при этом окном будет локальная во времени функция (например, прямоугольная, т. е. $w(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $w(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > \tau$), перемещаемая вдоль оси времени t (рис. 9.5) для вычисления ПФ в разных пози-

циях b . В результате получается текущий спектр, т. е. частотно-временное описание сигнала.

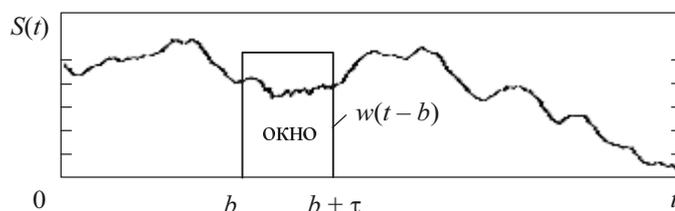


Рис. 9.4

Если окно, показанное на рис. 9.4, перемещать скачками (через τ) вдоль всего времени существования сигнала $S(t)$, то за некоторое число таких перемещений возможен «просмотр» всего сигнала. Так что вместо обычной спектрограммы получится набор спектрограмм, схематично представленный в виде прямоугольников на рис. 9.5, а. Такой спектральный анализ равносителен анализу с помощью набора фильтров с постоянной шириной полосы пропускания, равной $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$.

Очевидно, что, поскольку каждое окно выделяет свой небольшой участок во времени, точность представления и разрешающая способность (по времени) могут быть повышены. Однако в силу известного принципа неопределенности ($\Delta\omega\tau = \text{const}$) невозможно получить одновременно высокое разрешение и по частоте, и по времени. Окну с узкой шириной (τ) во времени будет соответствовать плохое разрешение по частоте (большая величина $\Delta\omega$).

Недостаток оконного ПФ состоит в том, что используется фиксированное окно и, следовательно, *фиксированное разрешение* по времени и частоте для всех точек плоскости преобразования (рис. 9.5, а), которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала.

ВП имеет **существенное преимущество** перед ПФ, прежде всего за счет свойства локальности у вейвлетов. В вейвлет-преобразовании операция умножения на окно содержится в самой базисной функции, которая сужает и расширяет окно (рис. 9.5, б): с ростом параметра a увеличивается разрешение по частоте и уменьшается разрешение по времени, а с уменьшением этого параметра – наоборот. Отсюда появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна. Подвижное частотно-временное окно одинаково хорошо выделяет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов. Это свойство ВП дает ему большое преимущество при анализе локальных свойств сигналов.

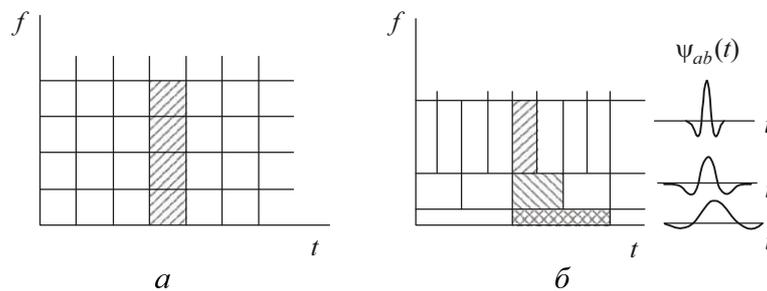


Рис. 9.5

Возможно локально реконструировать сигнал: реконструировать только часть сигнала или выделить вклад определенного масштаба. Если вейвлет-коэффициенты подвержены случайным ошибкам, они будут действовать на реконструируемый сигнал локально вблизи положения возмущения, ПФ же распространяет ошибки по всему восстанавливаемому сигналу.

Именно благодаря выявлению локальных особенностей сигнала, принципиально отсутствующему у ПФ, ВП широко применяется для анализа тонкой структуры сигналов и изображений, для их сжатия и очистки от шума, что важно и полезно в радиотехнике, электронике, гидроакустике, геофизике, медицине и других областях науки и техники.

При этом надо отметить, что ВП ни в коем случае *не становится заменой традиционного преобразования Фурье и не умаляет его достоинств и значимости при работе со стационарными процессами* и когда нет необходимости исследовать локальную структуру сигналов. *ВП просто иное и позволяет посмотреть на исследуемый процесс с иной точки зрения.*

9.2. ПРИМЕРЫ

9.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-СПЕКТРА В СИСТЕМЕ Mathcad

Программирование ВП базируется на соотношениях (9.1), (9.6) и (9.7).

Хорошо известная и распространенная у нас система компьютерной математики Mathcad очень удобна для ознакомления с техникой ВП. Пользователь общается с этой системой с помощью простого математически ориентированного языка. Интегралы вычисляются стандартным оператором интегрирования. Использован вейвлет «мексиканская шляпа».

Следует отметить, что на практике невозможно проводить вычисления с непрерывными значениями a и b ; так или иначе приходится задавать их дискретные значения и в частности для графического представления результата

вычислений, что и сделано в приводимых ниже примерах. Выбор значений a и b сделан таким, чтобы вейвлет-спектрограммы выглядели детально и наглядно.

Пример 1. Гармоническое колебание

Листинг

Описание сигнала:

$$A := 1 \quad T := 50 \quad s(t) := A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Вейвлетобразующая функция:

$$N := 256 \quad \text{МНАТ}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \quad \psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \text{МНАТ}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$a := 1 \dots 30 \quad b := 0 \dots 50$$

$$\text{Вейвлет-спектр: } W(a, b) := \int_0^N s(t) \psi(a, b, t) dt \quad N_{b,a} := W(a, b)$$

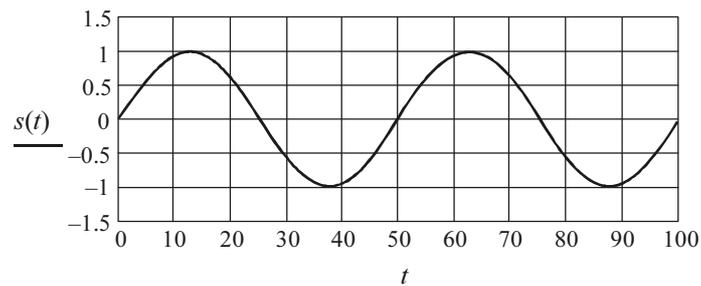


Рис. 9.6

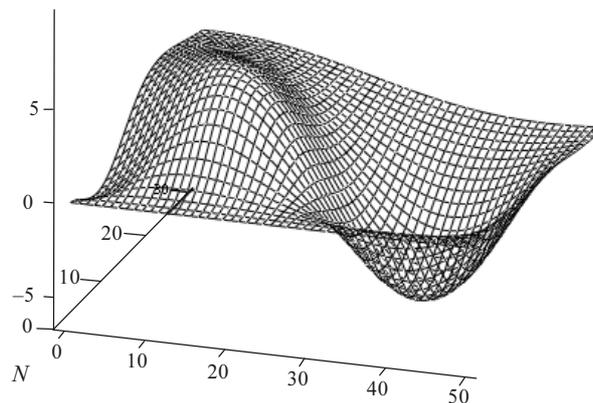


Рис. 9.7

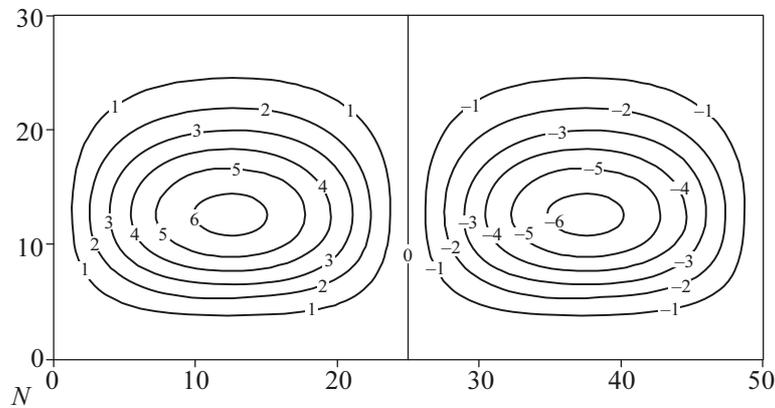


Рис. 9.8

Результаты листинга выведены на рисунках. На рис. 9.6 дан сигнал. График двухпараметрического спектра $N_{ab} = W(a, b)$ представлен на рис. 9.7 в виде поверхности в трехмерном пространстве, а на рис. 9.8 – в виде привычных для ВП изоуровней на плоскости (a, b) . Следует отметить, что сечение $W(a, b)$ для временного масштаба $a = a_0$ характеризует исходное колебание $s(t)$; при этом амплитуда его максимальна при $a_0 \sim 1/\omega$. Зависимости $W(a, b_0)$ можно поставить в соответствие текущий спектр колебания при $b = b_0$.

Пример 2. Сумма двух гармонических колебаний

Листинг

Описание сигнала:

$$A_1 := 1 \quad T_1 := 50 \quad A_2 := 1 \quad T_2 := 10 \quad \omega_1 := \frac{2\pi}{T_1} \quad \omega_2 := \frac{2\pi}{T_2}$$

$$s(t) := A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$$

Вейвлет-образующая функция:

$$N := 256 \quad \text{MHAT}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$$a := 1 \dots 30 \quad b := 0 \dots 50 \quad \psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \text{MHAT}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\text{Вейвлет-спектр: } W(a, b) := \int_0^N s(t) \psi(a, b, t) dt \quad N_{b,a} := W(a, b)$$

Временная диаграмма сигнала показана на рис. 9.9.

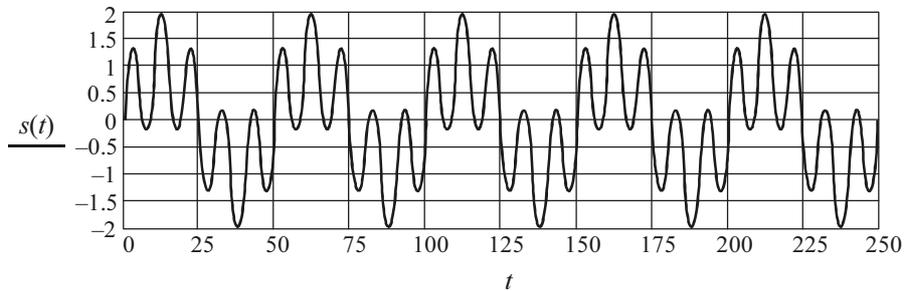


Рис. 9.9

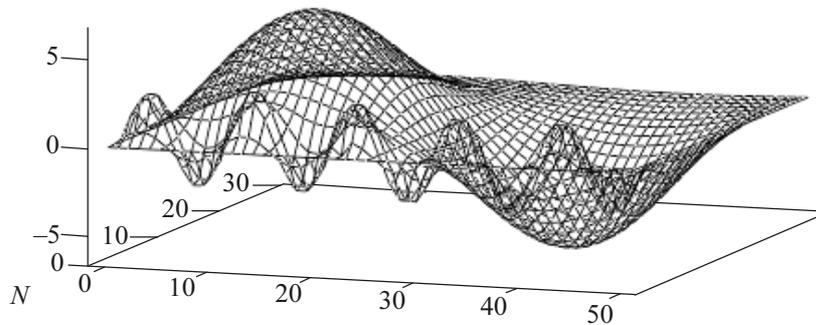


Рис. 9.10

График двухпараметрического спектра $W(a, b)$ показан на рис. 9.10 в виде поверхности в трехмерном пространстве, а на рис. 9.11 – в виде изоуровней на плоскости (a, b) .

На рис. 9.11, a показаны «сечения» вейвлет-спектра для двух значений параметра a . При относительно небольшом параметре временного масштаба a , т. е. при $a_1 = 2$ ($a_1 \sim 1/\omega_2$), сечение спектра несет информацию только о высокочастотной составляющей сигнала, отфильтровывая (подавляя) его низкочастотный компонент. С ростом a происходит растяжение базисной функции $\psi[(t-b)/a]$ и, следовательно, сужение ее спектра, т. е. уменьшение полосы частотного «окна». В результате при $a_2 = 15$ ($a_2 \sim 1/\omega_1$) сечение спектра представляет собой лишь низкочастотный компонент сигнала. При дальнейшем увеличении a полоса окна еще уменьшается и уровень этого низкочастотного компонента убывает до постоянной составляющей (при $a > 25$), равной нулю для анализируемого сигнала.

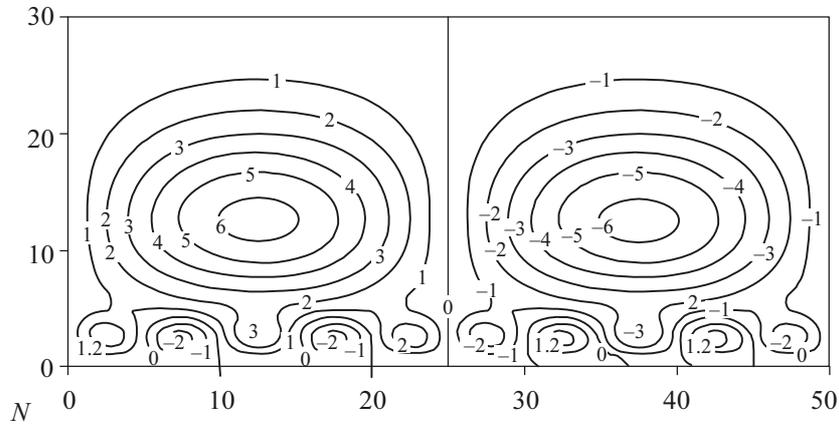
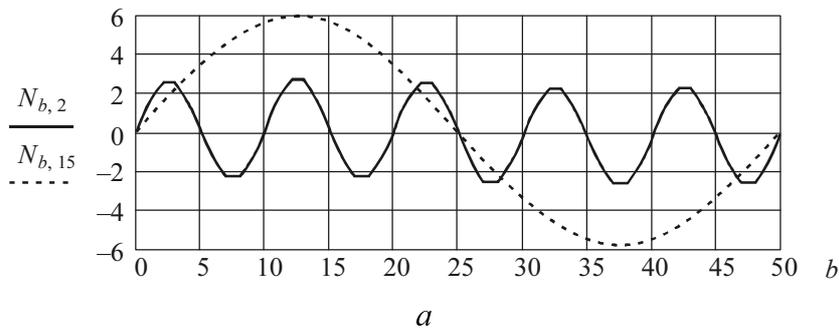
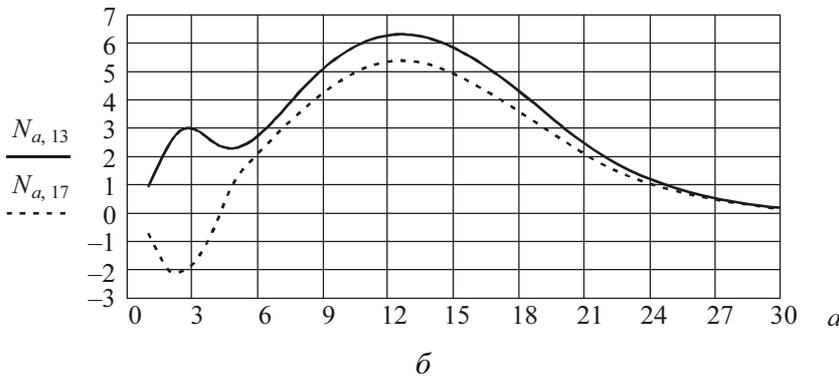


Рис. 9.11



a



б

Рис. 9.12

На рис 9.12, б показаны сечения вейвлет-спектра $W(a, b)$, характеризующие текущий спектр сигнала при $b_1 = 13$ и $b_2 = 17$.

Итак, очевидно, что спектр рассматриваемого сигнала в отличие от гармонического (см. пример 1) содержит еще высокочастотный компонент в области малых значений временного масштаба a ($a \sim 1 \dots 3$), который соответствует второй составляющей сигнала, т. е. $A_2 \sin(\omega_2 t)$.

Пример 3. Прямоугольный импульс

Листинг

$$\begin{aligned}
 U &:= 5 \quad t_0 := 20 \quad \tau := 60 \\
 s(t) &:= \begin{cases} U & \text{if } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{MHAT}(t) &:= \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \\
 N &:= 128 \\
 a &:= 1..50 \quad b := 0..100 \quad \psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \text{MHAT}\left(\frac{t-b}{a}\right) \\
 W(a, b) &:= \int_0^N s(t) \cdot \psi(a, b, t) \, dt \quad N_{ab} := W(a, b)
 \end{aligned}$$

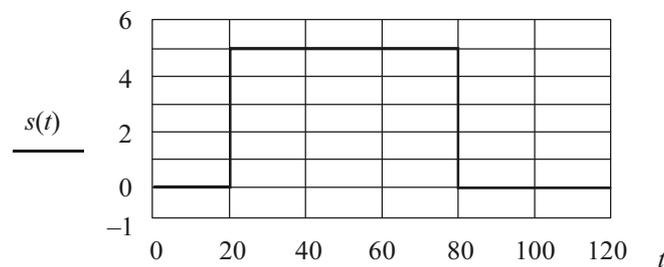


Рис. 9.13

Результаты выведены на графики. На рис. 9.13 показана осциллограмма сигнала. Вейвлет-спектры приведены на рис. 9.14: a – двухпараметрический спектр $W(a, b)$ в виде поверхности в трехмерном пространстве, b – спектр в виде изоуровней на плоскости (a, b) , v – «сечения» вейвлет-спектра для трех значений параметра a . Как видно из рис. 9.14, вейвлет-спектр хорошо передает тонкие особенности сигнала – его скачки при отсчетах $b = 20$ и $b = 80$ (при $a \sim 1 \dots 5$).

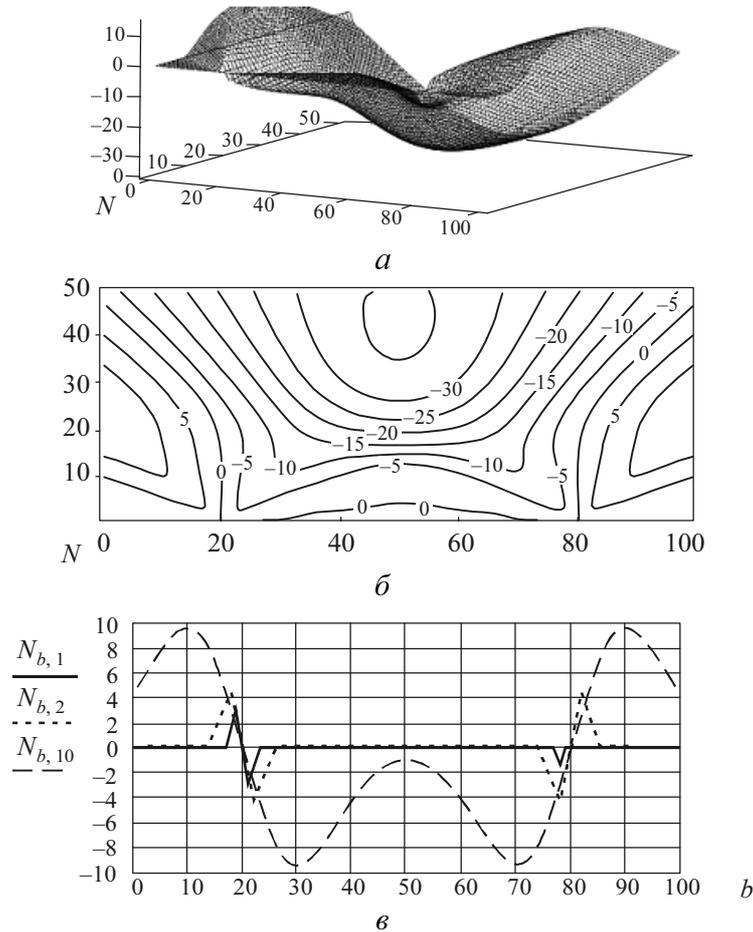


Рис. 9.14

Следует отметить, что выполнение непрерывного ВП в Mathcad требует больших вычислительных затрат (десятков секунд). Это обусловлено довольно медленным методом интегрирования. Гораздо более эффективен ВА в системе MATLAB.

9.2.2. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В СИСТЕМЕ MATLAB

Пакет Wavelet Toolbox системы MATLAB располагает средствами для построения вейвлет-спектров сигналов с улучшенной визуализацией [40]. Спектрограммы представляют значения вейвлет-коэффициентов в плоскости масштаб–время; при этом внизу спектрограммы расположены малые значения

масштаба (малые номера коэффициентов), представляющие детальную картину сигнала, а сверху – большие значения a , дающие огрубленную картину.

В приводимых ниже примерах прямое ВП реализуется функцией `cwt`, которая может быть представлена в нескольких формах [18, 39, 40], например:

```
COEF = cwt(S, SCALES, 'wname' PLOTMODE, XLIM),
```

где строка S – сигнал; строка $SKALES$ – задание диапазона и шага изменения параметра a ; строка 'wname' – имя (тип) вейвлета, строка $PLOTMODE$ – настройка цвета: 'lv1' – окраска шаг за шагом, 'glb' – окраска с учетом всех коэффициентов, 'absvil' или 'lvlab' – окраска шаг за шагом с использованием абсолютных значений коэффициентов; строка $XLIM$ – строка переменных настройки.

Пример 4. Гармоническое колебание

Листинг

```
function garm
t = 0:0.00001:0.0004; A1 = 1; F1 = 10000; a1 = 45;
s = A1*soc(2*pi*F1*t+a1);
figure (1); plot(t,s); axis([0 0.0004 -3 3]); grid on;
subplot(211), plot(t,s); title('Сигнал S(t)')
subplot(212), c = cwt(s, 1:2:32, 'mexh', 'abs1v1', [0 10]);
title('Вейвлет-спектр '); xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a');
end
```

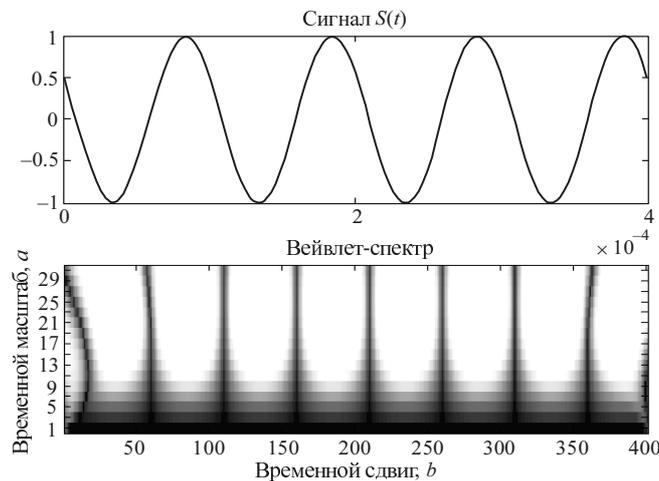


Рис. 9.15

И хотя спектрограмма гармонического колебания, представленная на рис. 9.15, особой выразительностью не отличается, однако на ней отчетливо видны переходы сигнала через нуль (темный тон) и экстремальные точки (светлый тон).

Пример 5. Сумма двух гармонических колебаний. Сигнал $S(t)$ представляет собой сумму двух гармонических колебаний с кратными частотами.

Листинг

```
function binar
t = 0:0.000001:0.0004;
A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000; F2 = 2*F1; a = 90; b = 90;
a1 = a*0.0174533; a2 = b*0.0174533;
s = A1*sin(2*pi*F1*t-a1) + A2*sin(2*pi*F2*t-a2);
figure (1); plot(t,s); axis([0 0.0004 -3 3]); grid on;
subplot(211), plot(t,s); title('Сигнал S(t)')
subplot(212), c = cwt(s,1:2:50,'mexh','abs1v',[0 1]);
title('Вейвлет-спектр сигнала S(t)'); xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a');
end
```

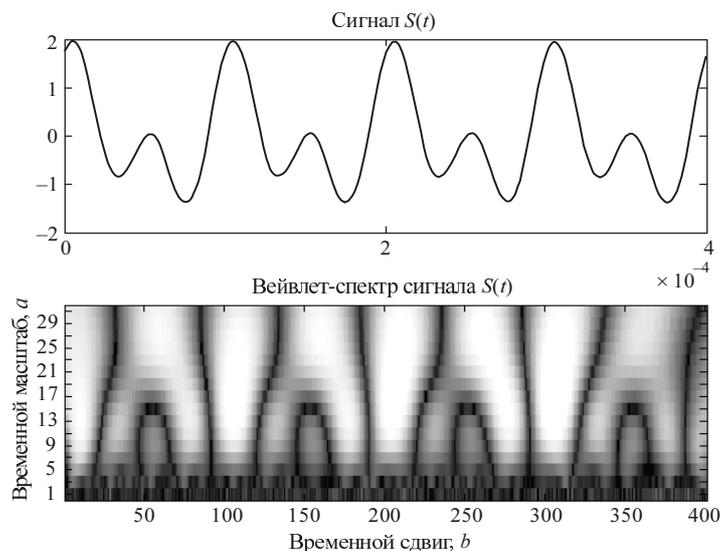


Рис. 9.16

Временная диаграмма $S(t)$ и спектральная диаграмма сигнала $W(a, b)$ показаны на рис. 9.16. В нижней части спектрограммы хорошо просматривается структура второй гармоники, а с ростом a – первой; при этом отчетливо

фиксируются темным тоном переходы сигнала через нуль, а светлым тоном – экстремумы.

Пример 6. Бигармонический импульсный сигнал с шумом. Сигнал $x(t)$ представляет собой сумму бигармонического сигнала $S(t)$ и белого гауссова шума $n(t)$ с математическим ожиданием $m = 0$ и среднеквадратическим отклонением g .

Листинг

```
function bigarm_rauch
t = 0:0.000001:0.001; A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000; F2 = 2*F1; a = 90; b = 90;
A1 = 1; A2 = 1; F1 = 1 0000; F2 = 2 *F1; a = 90; b = 90;
a1 = a*0.0174533; a2 = b*0.0174533;
s1(1:200) = 0; t2 = 0.0002:0.000001:0.0007;
s2 = A1*sin(2*pi*F1*t2-a1) + A2*sin(2*pi*F2*t2-a2);
s3(1:300) = 0; s = [s1 s2 s3];
randn('state',0); g = 0.5; n = g *randn(size(t)); x = s+n;
figure (1); subplot(211), plot(t,x,'k'); title('Сигнал x(t)'); grid on;
gtext('F=10кГц, A1=A2=1В, g=0.5 В');
subplot(212), c = cwt(x,1:124,'mexh','absglb',[0 50]);
title('Вейвлет-спектр W(a,b)'); xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a');
end
```

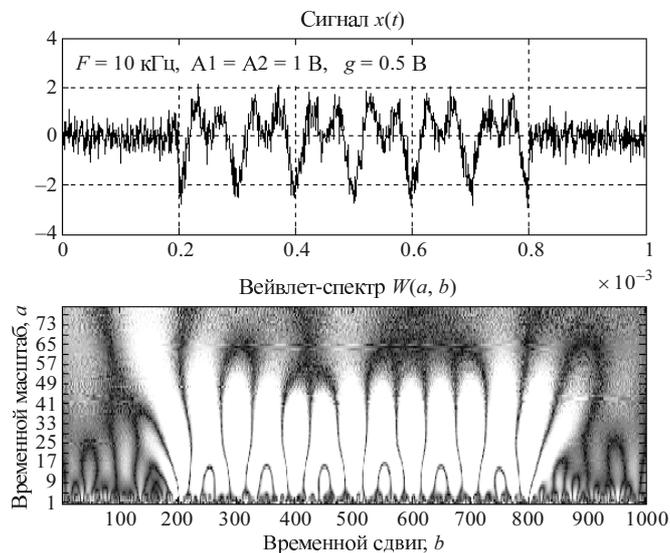


Рис. 9.17

На рис. 9.17 показаны диаграмма сигнала и его спектрограмма. В нижней части спектрограммы хорошо видна сложная структура вейвлет-спектра шума ($a \approx 1 \dots 5$), с ростом параметра a просматривается структура второй гармоники, а затем – первой; при этом отчетливо фиксируются начало и конец импульса. По-прежнему темным тоном фиксируются переходы сигнала через нуль, а светлым тоном – экстремумы.

Пример 7. Прямоугольный импульс с шумом

Листинг

```
function pr_rauch_wav
t = 0:0.000001:0.000300; A1 = 2; F1 = 0; s1(1:75) = 0;
t2 = 0.000075:0.000001:0.000175; s2 = A1*cos(2*pi*F1*t2);
s3(1:125) = 0; s = [s1 s2 s3];
randn('state',0); g = 0.5; n = g*randn(size(t));
x = s + n; figure (1);
subplot(211), plot(t,x,'k'); title('Сигнал x(t)'); grid on;
subplot(212), c = cwt(x,1:27,'mexh','absglb',[0 10]);
title('Вейвлет-спектр'); xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a');
end
```

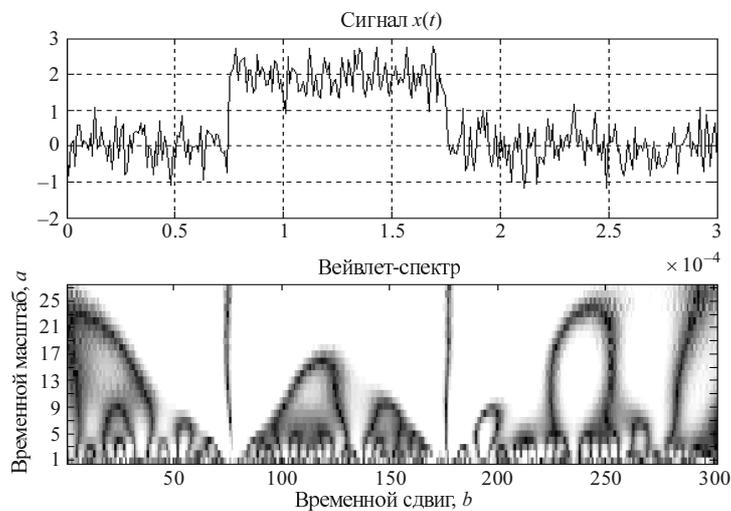


Рис. 9.18

В нижней части спектрограммы (рис. 9.18) видна весьма сложная структура спектра шума, верхняя часть спектрограммы ($a > 20$) отчетливо показывает наличие разрывов. Этот пример – наглядное свидетельство высокой разре-

шающей способности вейвлетов при выявлении локальной (тонкой) структуры сигналов.

Пример 8. Звуковой сигнал. Загрузим звуковой сигнал из файла `mtlb` с выборкой в 200 отсчетов:

Листинг

```
function ss
load mtlb; v=mtlb(1:200); lv = length(v);
subplot(211), plot(v); title('Звуковой сигнал');
set(gca, 'Xlim',[0 200]); [c,l] = wavedec(v,5,'sym2');
cfd = zeros(5,lv); subplot(212) ccfs = cwt(v,1:128,'sym4','plot');
title('Вейвлет-спектр') colormap(pink(32)); xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a');
end
```

Вейвлет-спектрограмма (рис. 9.19) демонстрирует мельчайшие детали частотного образа сигнала: в нижней части отчетливо видны высокочастотные компоненты, а в верхней – низкочастотные (где изменения яркости менее частые, чем в нижней части).

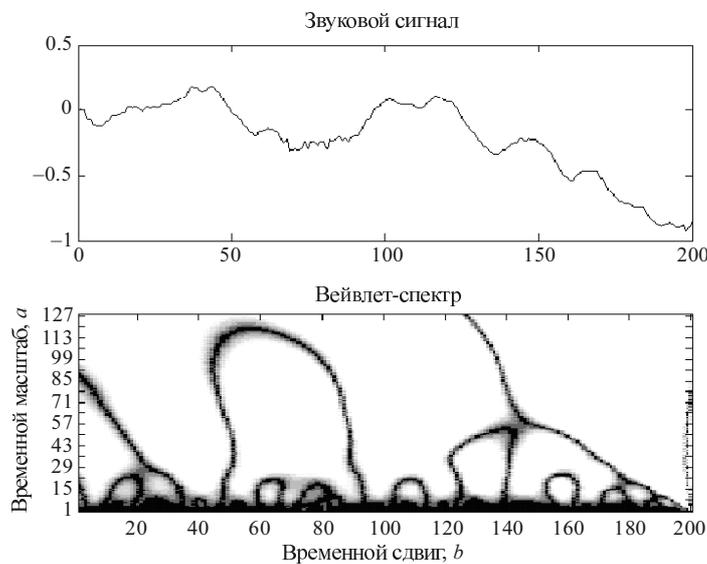


Рис. 9.19

Как следует из приведенных примеров, применение вейвлет-анализа наиболее целесообразно для изучения локальных изменений сигналов (выявления

тонкой структуры сигналов, содержащих скачки, резкие переходы производных через нуль и т. п.).

Пример 9. Доступ к демонстрационным примерам. Он осуществляется командой **wavedemo**. Открывается окно (рис. 9.20, а), в котором представлено следующее меню:

- Command line mode – примеры работы в командном режиме;
- GUI mode – доступ к GUI средствам;
- Short 1D scenario – слайдовая демонстрация возможностей одномерного ВП;
- Close – закрытие окна.

Command line mode – активизируя эту кнопку, можно вывести еще одно окно (рис. 9.20, б). Многие примеры из этого окна те же самые, что и в окне пакета GUI (см. ниже). Активизируем кнопку Continuous Wavelet 1-D. Появляется окно, позволяющее просмотреть отдельные слайды, ознакомиться с вейвлет-технологией одномерного непрерывного и дискретного ВП сигнала Electrical consumption.

GUI mode – доступ к GUI средствам (*описан ниже*). В разделах «Continuous Wavelet 1-D» и «Complex Continuous Wavelet 1-D» пакета Wavelet Toolbox даны демонстрационные примеры на выявление и анализ тонкой структуры сигналов.

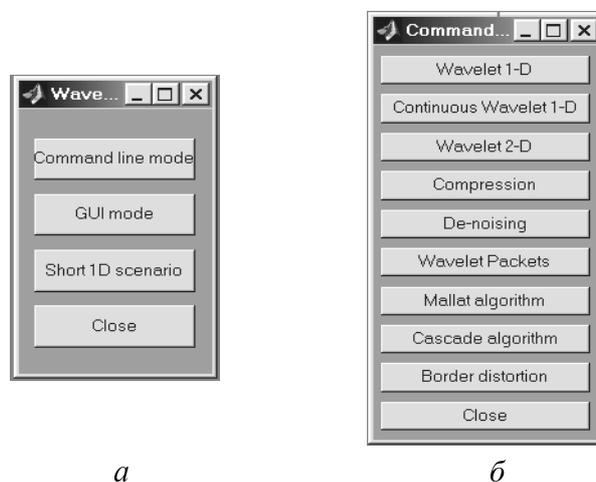


Рис. 9.20

Short 1D scenario – это весьма полная и наглядная демонстрация возможностей одномерного ВП (на примере сигнала Electrical consumption с шумами).

Демонстрационный пример дан в красочном оформлении и использует окно с пояснительным текстом, а также панель управления слайд-шоу. Анализируются детали декомпозиции и реконструкции сигнала, а также компрессии и очистки его от шума.

Пример 10. Треугольный сигнал (демонстрационный). На рис. 9.21 приведен результат вейвлет-анализа одного из демонстрационных примеров – треугольного сигнала, имеющего в середине стадий нарастания и спада едва заметные горизонтальные «полочки».

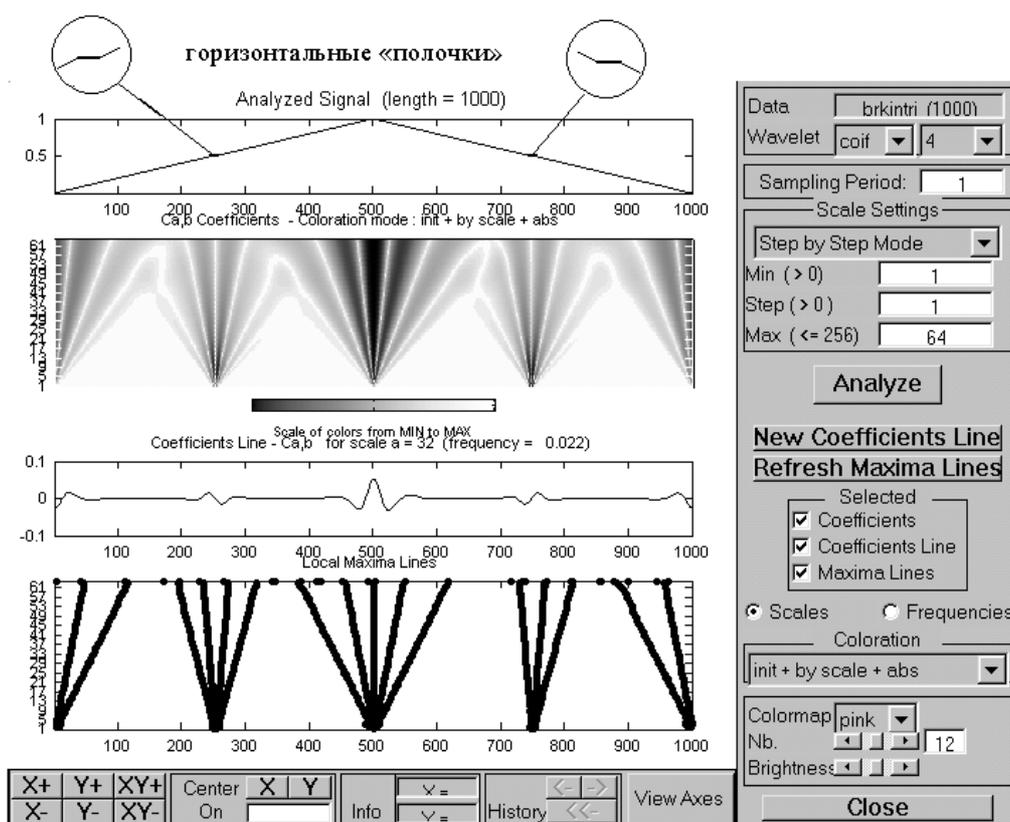


Рис. 9.21

К особенностям этого сигнала относятся еще три характерные точки: средняя точка с разрывом первой производной (переход от нарастания к спаду) и две концевые точки, за пределами которых сигнал не определен. Эти особенности нашли отражение на спектрограмме и на линиях локализации экстремумов (нижний график).

9.3. ЗАДАНИЯ

9.3.1. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ПАКЕТЕ Mathcad НА ОСНОВЕ МНАТ-ВЕЙВЛЕТА

В табл. 9.2 заданы варианты сигналов $S(t)$, а в табл. 9.3 – их параметры. Здесь U_i , T_i и φ_i – амплитуда, период и фазовый сдвиг соответствующей гармонической составляющей.

Требуется:

а) определить вейвлет-спектр и вывести графики:

- поверхности $W(a, b)$ в трехмерном пространстве,
- изолинии уровня на плоскости (a, b) ;

б) построить несколько сечений спектра $W(a, b)$ для различных (характерных) значений a и b , т. е. $W(a_1, b)$, $W(a_2, b)$, $W(a, b_1)$, $W(a, b_2)$; проанализировать результаты;

в) изменяя параметры сигнала (амплитуды, периоды и начальные фазы гармоник), проанализировать их влияние на форму его вейвлет-спектра.

Таблица 9.2

Номер варианта	Сигнал $S(t)$
0	$U_1 \sin(2\pi t / T_1) + U_2 \sin(2\pi t / T_2) + U_3 \sin(2\pi t / T_3)$
1	$U_1 \cos(2\pi t / T_1) + U_2 \sin(2\pi t / T_2) + U_3 \sin(2\pi t / T_3)$
2	$U_1 \sin(2\pi t / T_1) + U_2 \cos(2\pi t / T_2) + U_3 \sin(2\pi t / T_3)$
3	$U_1 \sin(2\pi t / T_1) + U_2 \sin(2\pi t / T_2) + U_3 \cos(2\pi t / T_3)$
4	$U_1 \cos(2\pi t / T_1) + U_2 \cos(2\pi t / T_2) + U_3 \sin(2\pi t / T_3)$
5	$U_1 \cos(2\pi t / T_1) + U_2 \cos(2\pi t / T_2) + U_3 \cos(2\pi t / T_3)$
6	$U_1 \sin(2\pi t / T_1 - \varphi_1) + U_2 \sin(2\pi t / T_2 - \varphi_2)$
7	$U_1 \cos(2\pi t / T_1 - \varphi_1) + U_2 \sin(2\pi t / T_2 - \varphi_2)$
8	$U_1 \sin(2\pi t / T_1 - \varphi_1) + U_2 \cos(2\pi t / T_2 - \varphi_2)$
9	$U_1 \cos(2\pi t / T_1 - \varphi_1) + U_2 \cos(2\pi t / T_2 - \varphi_2)$

Таблица 9.3

Параметры	Подварианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
U_2	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
U_3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
T_1	10	50	20	15	30	5	60	50	40	10
T_2	30	30	40	30	45	10	30	25	20	20
T_2	50	10	60	45	15	15	15	10	10	40
φ_1	0	$\pi/4$	0	$\pi/4$	0	$\pi/4$	0	$\pi/4$	0	$\pi/3$
φ_2	0	0	$\pi/4$	$\pi/4$	0	0	$\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/3$

9.3.2. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПАКЕТЕ MATLAB

Цель этого задания – изучение одномерного непрерывного ВП с помощью графического интерфейса пользователя Wavelet Toolbox MATLAB.

Сведения о большинстве вейвлетов и различных вейвлет-преобразованиях можно получить, работая с графическим интерфейсом пользователя GUI (Graphic User Interface). В GUI приведено много демонстрационных примеров по вейвлет-анализу (декомпозиции), вейвлет-синтезу (реконструкции) сигналов, их очистке от шумов и сжатию (компрессии). Подробные сведения, включая основные команды и функции пакета Wavelet Toolbox, приведены в книге автора [18, с. 90–99].

Для доступа к GUI необходимо исполнить команду **wavemenu**. При этом появляется окно со списком разделов ВП. Активизируя мышью соответствующий раздел, можно детально ознакомиться с его содержанием и приобрести навыки работы со средствами пакета Wavelet Toolbox, содержащего 19 разделов.

Требуется изучить следующие три раздела:

- 1) Wavelet Display,
- 2) Continuous Wavelet 1-D,
- 3) Complex Continuous Wavelet 1-D.

1. **Wavelet Display** – просмотр вейвлетов. Нажатие этой кнопки выводит окно, в котором слева расположено основное поле для графиков, а справа – подменю управления, в котором имеются кнопки для выбора типа вейвлета и получения необходимых сведений о нем.

Практическое задание. Просмотрите и запишите названия всех 15 вейвлетов. Опишите, как влияет порядок вейвлета на его форму, например, как связано количество экстремумов с порядком вейвлета «gaus».

2. **Continuous Wavelet 1-D** – непрерывное одномерное ВП. Активизируя позиции File, Example Analysis, открываем подменю с 15 файлами сигналов. Выбираем первый из них: рис. 9.22 дает результат анализа.

На основном поле выведены графики: анализируемого сигнала (Analyzed Signal), спектральных коэффициентов (Coefficients Ca,b), линии значений коэффициентов на уровне a (Coefficients Line Ca,b for scale $a =$) и линии выделения экстремумов (Local Maxima Lines). В нижнем правом углу имеется кнопка View Axes. Ее активизация выводит окно с кнопками, расположение которых соответствует положению графиков. Активизация какой-либо из них вызовет соответствующий график в увеличенном масштабе. Левой кнопкой мыши можно выделить его часть и с помощью кнопок панели инструментов (под окном графика) произвести соответствующее преобразование по осям.

Кнопки правой части позволяют выбрать тип и порядок вейвлета и соответствующие параметры вейвлет-технологии.

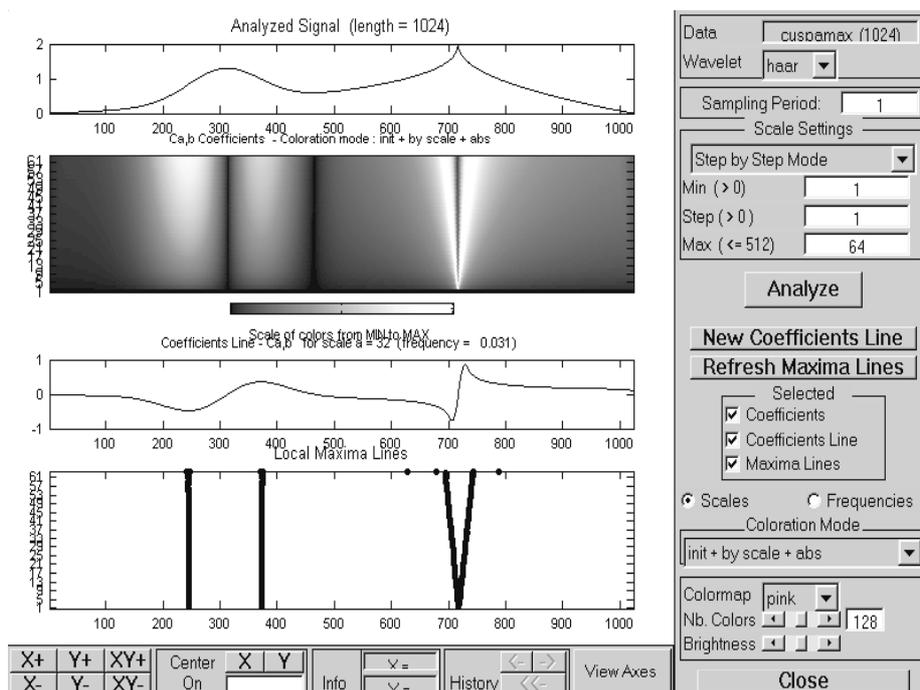


Рис. 9.22

Практическое задание. Изменяя уровень коэффициента a (в окне «Max»), проанализируйте его влияние на форму графиков ВП. Прделайте то же самое, изменив тип и порядок вейвлета. Поупражняйтесь на другом сигнале.

3. **Complex Continuous Wavelet 1-D** – непрерывное одномерное ВП с использованием четырех комплексных вейвлетов (Complex Gaussian – cdau, Shannon – shau, Frequency Bspline – fbsp, Complex Morlet – cmor). Раздел содержит 7 примеров. Выбираем опять первый сигнал. Результат анализа приведен на рис. 9.23.

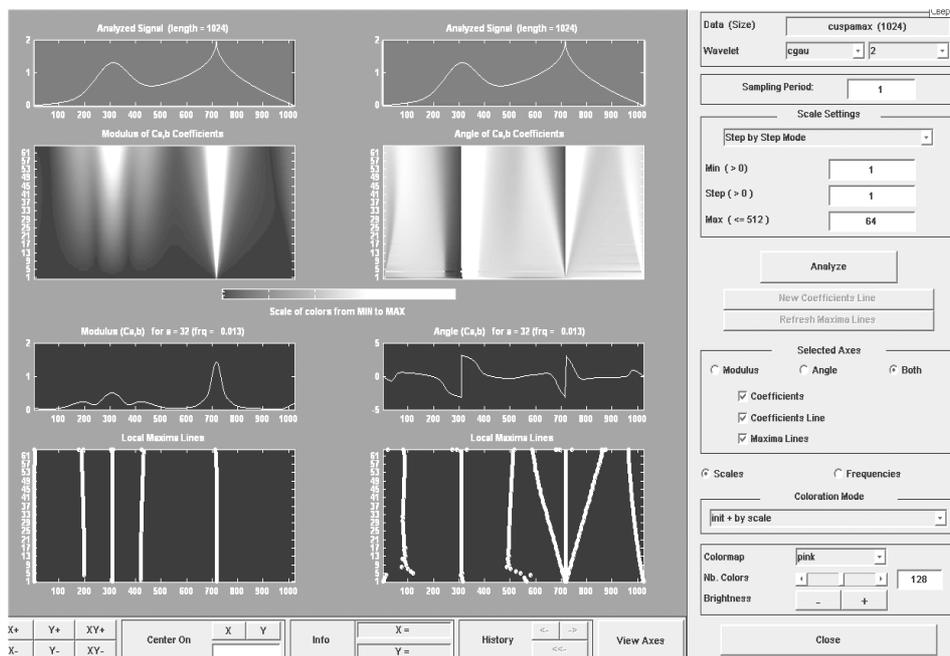


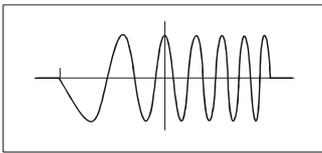
Рис. 9.23

Правая часть поля окна та же, что и в предыдущем случае, а в основном поле выводятся графики: анализируемого сигнала (Analyzed Signal), модуля (Moduls) и фазы (угла – Angle), коэффициентов модуля и фазы, коэффициентов на определенном уровне, линий локальных максимумов модуля и фазы.

Практическое задание – аналогично заданию раздела 2.

Глава 10

МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ



Ученый – это не тот, кто дает правильные ответы, а тот, кто ставит правильные вопросы.

Клод Леви-Стросс

10.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

10.1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В системах передачи информации исходный сигнал от источника сообщений (микрофона, телекамеры и др.) относительно низкочастотный. Поэтому на передающей стороне канала осуществляется модуляция – процесс управления параметрами несущего высокочастотного (ВЧ) колебания (переносчика) (рис. 10.1). При этом исходный сигнал называется *модулирующим* или *видеосигналом* ($S_B(t)$), колебание-переносчик – *несущим колебанием* ($S_H(t)$), а результирующий сигнал – *модулированным* или *радиосигналом* ($S_P(t)$).

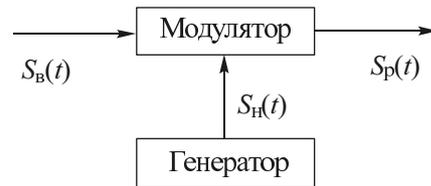


Рис. 10.1

Чем выше частота ВЧ несущего колебания, тем меньше габариты (апертура) приемопередающих антенн. Следовательно, модуляция осуществляется для эффективной передачи относительно низкочастотного видеосигнала с помощью радиоволн по каналу связи. При этом спектр видеосигнала переносится в диапазон ВЧ.

В качестве переносчика используются:

- высокочастотное гармоническое колебание;

- периодическая последовательность видео- или радиоимпульсов;
- шумоподобные сигналы.

Итак, формируется некоторое колебание-переносчик $S_H(t)$, один из параметров p которого изменяется во времени пропорционально видеосигналу $S_B(t)$, т. е.

$$p(t) = p_0 + \Delta p s_B(t), \quad (10.1)$$

где p_0 – исходное значение параметра переносчика;

$$\Delta p = k S_B \quad (10.2)$$

– амплитуда изменения параметра при модуляции, пропорциональная с коэффициентом пропорциональности k амплитуде S_B изменения видеосигнала

$$S_B(t) = S_B s_B(t), \quad (10.3)$$

где $s_B(t)$ – закон изменения видеосигнала.

Чаще всего в качестве переносчика применяется высокочастотное гармоническое колебание (несущее колебание или просто несущая):

$$S_H(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (10.4)$$

где S_0 , ω_0 , φ_0 – амплитуда, частота и начальный фазовый сдвиг.

В зависимости от того, какой из указанных параметров несущего колебания изменяется по закону видеосигнала, выделяют три вида модуляции:

- амплитудная (АМ) $\rightarrow S(t) = S_0 + k_a S_B s_B(t) = S_0 + \Delta S s_B(t), \quad (10.5)$

- частотная (ЧМ) $\rightarrow \omega(t) = \omega_0 + k_\omega S_B s_B(t) = \omega_0 + \Delta \omega s_B(t), \quad (10.6)$

- фазовая (ФМ) $\rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + k_\varphi S_B s_B(t) = \varphi_0 + \Delta \varphi s_B(t), \quad (10.7)$

где ΔS , $\Delta \omega$ и $\Delta \varphi$ – амплитуда изменения амплитуды, частоты и фазы несущего колебания.

Далее увидим, что сигналы частотной и фазовой модуляции тесно связаны между собой, так как обе они изменяют аргумент функции косинуса в (10.4). Поэтому эти два вида модуляции имеют общее название *угловой модуляции* (УМ).

Распространенные схемы модуляции рассмотрены в [1–3, 12]. Ниже рассматриваются лишь модулированные сигналы.

10.1.2. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОЕ КОЛЕБАНИЕ (АМК)

Временное представление

Из (10.5) следует, что амплитуда $S(t)$ несущего колебания, называемая *оггибающей* АМК, изменяется во времени по закону видеосигнала $s_B(t)$. Выясним основные свойства АМ сигнала на его простейшей модели – *однотональной* модуляции, когда модулирующий сигнал оказывается гармоническим колебанием:

$$S_B(t) = S_{B_0} s_B(t) = S_{B_0} \cos(\Omega t + \alpha). \quad (10.8)$$

Тогда АМК примет вид

$$\begin{aligned} S_{\text{АМК}}(t) &= S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = [S_0 + \Delta S \cos(\Omega t + \alpha)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= S_0 [1 + M \cos(\Omega t + \alpha)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (10.9)$$

где $S(t)$ – изменяющаяся амплитуда АМК, называемая *оггибающей* АМК;

$$M = \Delta S / S_0 \quad (10.10)$$

– *коэффициент модуляции*, или *глубина модуляции*, т. е. отношение амплитуды оггибающей ΔS к амплитуде S_0 несущего колебания.

Временные диаграммы колебаний (для $\varphi_0 = 0$ и $\alpha = 0$) показаны на рис. 10.2, а.

По временной диаграмме (осциллограмме) можно определить коэффициент модуляции

$$M = \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max} + S_{\min}}. \quad (10.11)$$

Спектральное представление

Раскроем квадратные скобки в выражении (10.9). Тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{АМК}}(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + S_0 M \cos(\Omega t + \alpha) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{S_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \alpha] + \\ &\quad + \frac{S_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \alpha]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

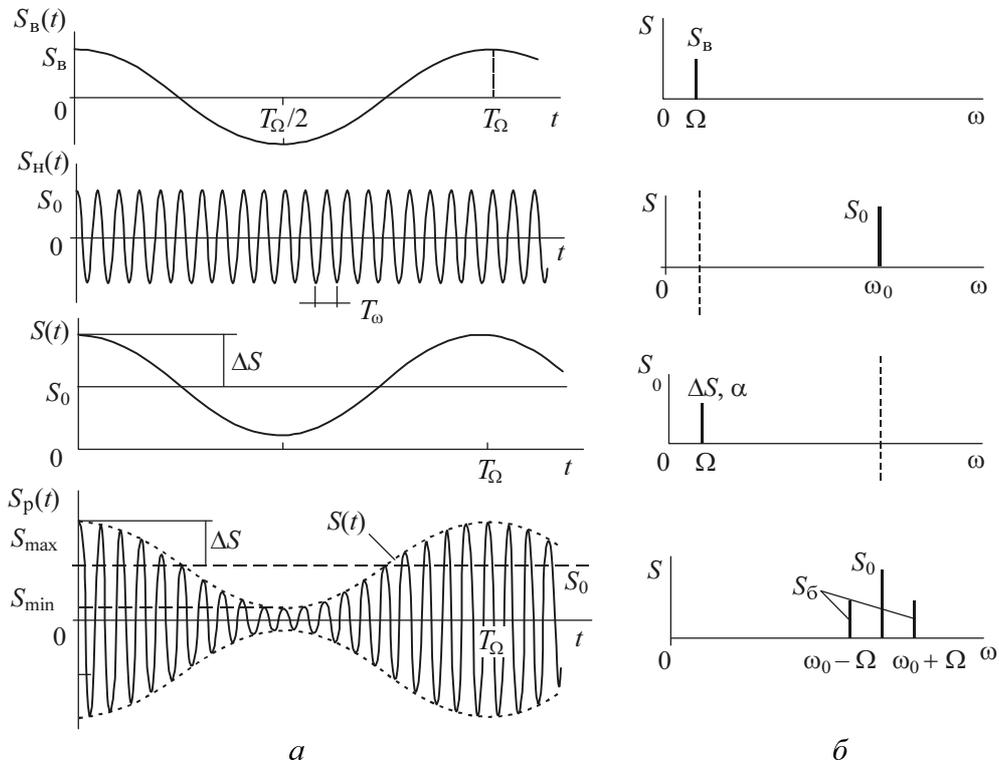


Рис. 10.2

Таким образом, тональное АМК можно представить суммой трех косинусоидальных колебаний с постоянными амплитудами, частотами и фазами. Частоты $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ принято называть соответственно *нижней и верхней боковыми частотами*, а колебания на этих частотах – *нижней ($S_{НБ}$) и верхней ($S_{ВБ}$) боковыми составляющими*.

Спектральные диаграммы колебаний показаны на рис. 10.2, б. По нижней диаграмме можно найти коэффициент модуляции

$$M = \frac{2S_0}{S_0}. \quad (10.13)$$

Таким образом, амплитудный спектр АМК образуется несущим колебанием и переносом (на частоту ω_0) спектра видеосигнала из области низких частот в область высоких частот. При этом получаются симметричные боковые колебания.

Векторное представление

В курсе основ теории цепей при построении векторной диаграммы гармонического колебания вида (10.4) принято считать ось OA (рис. 10.3, *а*) неподвижной, а вектор S_0 – вращающимся против часовой стрелки с угловой скоростью (частотой) ω_0 .

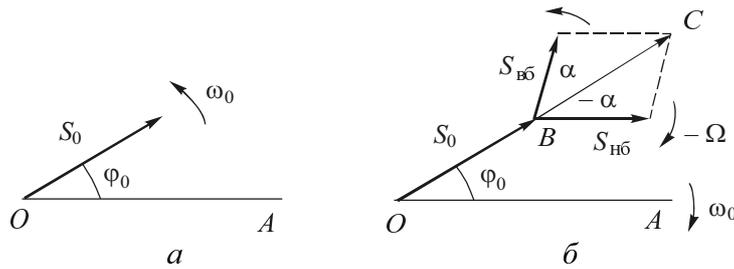


Рис. 10.3

При построении векторной диаграммы АМК согласно выражению (10.12) считаем ось OA вращающейся с угловой скоростью ω_0 по часовой стрелке. Тогда векторы колебаний нижней и верхней боковых частот будут вращаться с угловой скоростью Ω соответственно по часовой стрелке и против нее (рис. 10.3, *б*). Результирующий вектор BC суммы боковых векторов направлен вдоль вектора OB несущего колебания. Результирующий вектор OC всего АМК также направлен вдоль вектора OB . Таким образом, с течением времени t будут изменяться длина и направление вектора BC и, следовательно, длина результирующего вектора OC , которая численно равна огибающей АМК $S(t)$ в текущий момент времени.

Корреляционное представление

Автокорреляционная функция гармонического колебания была найдена в примере 3 главы 3 [см. формулу (3.19)]. Представляя АМК в виде суммы трех гармонических составляющих (10.12), с учетом формулы (3.19) получим

$$\begin{aligned}
 K_{\text{АМК}}(\tau) &= \frac{1}{2} S_0^2 \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{S_0 M}{2} \right)^2 \cos(\omega_0 - \Omega) \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{S_0 M}{2} \right)^2 \cos(\omega_0 + \Omega) \tau = \\
 &= \frac{1}{2} S_0^2 \cos \omega_0 \tau + \left(\frac{S_0 M}{2} \right)^2 \cos \Omega \tau \cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} S_0^2 \left[1 + \frac{M^2}{2} \cos \Omega \tau \right] \cos \omega_0 \tau. \quad (10.14)
 \end{aligned}$$

АКФ тонального АМК проиллюстрирована на рис. 10.4.

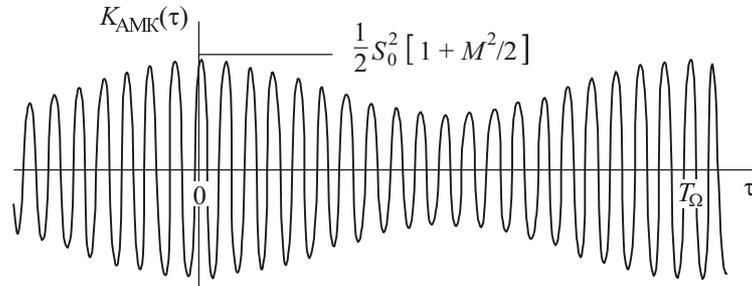


Рис. 10.4

АКФ – это четная и периодическая функция аргумента τ . Она максимальна при $\tau = 0$ и равна средней мощности P_{cp} за период повторения $T_{\Omega} = 2\pi / \Omega$, не несет информации о фазовых сдвигах φ_0 и α . При $M = 1$ минимальное значение огибающей АКФ (т. е. при $\cos \Omega\tau = -1$) не доходит до нуля и равно $S_0^2 / 4$.

Мощность АМК

Средняя мощность АМК

$$P_{\text{cp}} = K(0) = \frac{1}{2} S_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) = P_{\text{H}} (1 + M^2 / 2), \quad (10.15)$$

где

$$P_{\text{H}} = S_0^2 / 2 \quad (10.16)$$

– мощность несущего колебания.

Максимальная и минимальная мгновенные мощности АМК:

$$\begin{aligned} P_{\text{max}} &= S_{\text{max}}^2 / 2 = S_0^2 (1 + M)^2 / 2 = P_{\text{H}} (1 + M)^2, \\ P_{\text{min}} &= S_{\text{min}}^2 / 2 = P_{\text{H}} (1 - M)^2. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Мощность одной боковой составляющей

$$P_{\text{б}} = S_{\text{б}}^2 / 2 = (S_0 M / 2)^2 / 2 = P_{\text{H}} M^2 / 4. \quad (10.18)$$

При $M = 1$

$$P_{\max} = 4P_H, P_{\min} = 0, P_G = P_H / 4 \text{ и } P_G / P_{\max} = 1/16. \quad (10.19)$$

Усилительный элемент (лампа или транзистор) выходного каскада передатчика должен выдерживать максимальную мощность P_{\max} , в то время как для передачи полезной информации надо всего лишь P_G . Поэтому АМК – неэффективный переносчик информации. Можно применять АМК с подавленной несущей составляющей (рис. 10.5):

$$\begin{aligned} S_{\text{АМК}}(t) &= S_p(t) = S_0 M \cos(\Omega t + \alpha) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{S_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \alpha] + \frac{S_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \alpha]. \end{aligned} \quad (10.20)$$

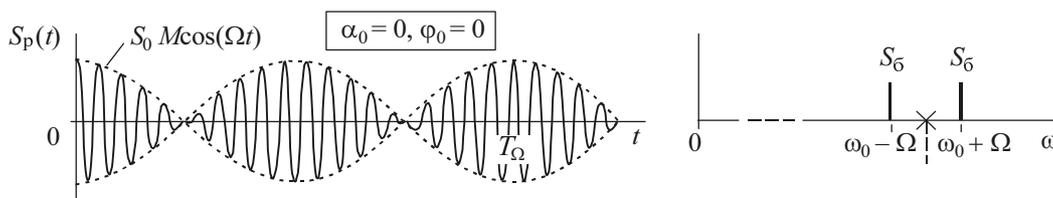


Рис. 10.5

Можно подавить еще одну боковую составляющую, например, с частотой $\omega_0 - \Omega$. Тогда $S_p(t) = 0.5 S_0 M \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \alpha]$.

Следует отметить, что при детектировании несущее колебание в обоих случаях должно быть восстановлено. Детектор выделяет огибающую АМК, а она в этих случаях не повторяет форму модулирующего сигнала.

10.1.3. СИГНАЛЫ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Временное представление

Мгновенное значение сигнала с угловой модуляцией (УМС) можно представить в виде

$$S_p(t) = S_0 \cos \psi(t) = S_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (10.21)$$

где аргумент $\psi(t)$ модулирован как при ЧМ, так и при ФМ. Это обстоятельство объединяет оба вида модуляции под единым термином *угловая модуляция*.

Однако из выражений (10.6) и (10.7), как уже отмечалось, следует, что в случае ЧМ по закону видеосигнала изменяется частота несущего колебания, а в случае ФМ – начальная фаза. В этом состоит их *различие*.

Связь между мгновенной угловой частотой и фазой:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}; \quad \psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t + \varphi(t). \quad (10.22)$$

Следовательно, при ЧМ начальная фаза тоже будет изменяться, но по закону интеграла от видеосигнала, а при ФМ будет изменяться и частота, но по закону производной.

Запишем общие выражения для ЧМС и ФМС:

$$S_{\text{ЧМС}}(t) = S_0 \cos \left[\omega_0 t + \omega_{\text{д}} \int_{-\infty}^t s_{\text{В}}(\tau) d\tau \right], \quad (10.23)$$

$$S_{\text{ФМС}}(t) = S_0 \cos [\omega_0 t + m s_{\text{В}}(\tau) + \varphi_0],$$

где $\omega_{\text{д}} = \Delta\omega$, $m = \Delta\varphi$ – девиация частоты и индекс модуляции, т. е. амплитуда изменения частоты и начальной фазы.

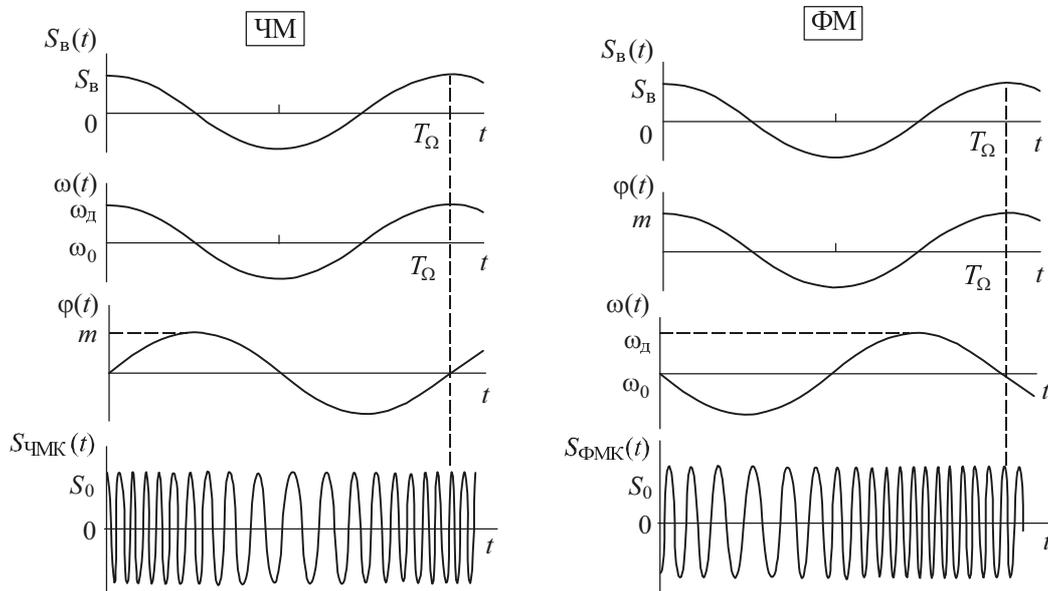


Рис. 10.6

Сигналы ЧМ и ФМ не отличаются по форме, если видеосигнал $S_B(t)$, его производная и интеграл сохраняют форму. Это имеет место, например, при тональной модуляции (рис. 10.6). Перейдем к ее рассмотрению.

ЧМК

У тонального ЧМК мгновенная частота модулированного колебания может быть представлена в виде

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t),$$

где $\omega_d = \Delta\omega = k_{\text{ч}} S_B$ – амплитуда частотного отклонения, или *девиация частоты*, пропорциональная амплитуде S_B видеосигнала. Девиация частоты не зависит от самой частоты Ω модулирующего сигнала (рис. 10.7, а).

Мгновенная фаза ЧМК

$$\psi(t) = \int_0^t [\omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t)] dt + \varphi_0 = \omega_0 t + m \sin(\omega_0 t) + \varphi_0,$$

где $m = \omega_d / \Omega$ – *индекс модуляции*, т. е. амплитуда фазового отклонения, обратно пропорциональная частоте Ω модулирующего сигнала (рис. 10.7, а).

Мгновенное значение модулированного колебания

$$S_{\text{ЧМК}}(t) = S_m \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t) + \varphi_0]. \quad (10.24)$$

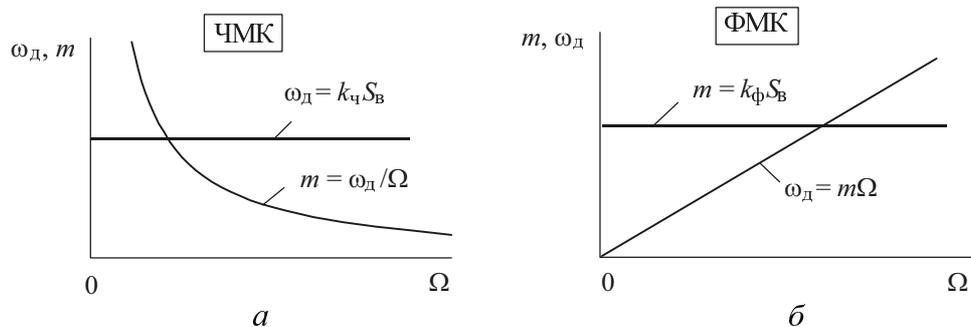


Рис. 10.7

ФМК

Если по гармоническому закону изменяется мгновенное значение фазы

$$\varphi(t) = m \cos(\Omega t) + \varphi_0,$$

то мгновенное значение частоты

$$\omega(t) = \omega_0 - m\Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \omega_d \sin \Omega t .$$

Мгновенное значение модулированного колебания

$$S_{\text{ФМК}}(t) = S_0 \cos[\omega_0 t + m \cos(\Omega t) + \varphi_0] . \quad (10.25)$$

При ФМК величина m пропорциональна амплитуде модулирующего колебания и не зависит от частоты Ω , а девиация частоты $\omega_d = m\Omega$ (рис. 10.7, б).

Спектральное представление

За исходное выражение для определения спектра примем (10.21),

$$S_{\text{УМК}}(t) = S_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = S_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - S_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t . \quad (10.26)$$

Из анализа (10.26) следует:

- УМК можно рассматривать как сумму двух АМК (с квадратурными несущими вида $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$);
- каждое из двух АМК можно разложить в ряд Фурье;
- в силу нелинейности функций $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$ своего аргумента $\varphi(t)$ спектры этих функций и, следовательно, спектры АМК будут отличаться от спектра функции $\varphi(t)$. Поэтому спектр УМК нельзя получить простым сдвигом спектра модулирующего сигнала (а значит, и $\varphi(t)$) на несущую частоту ω_0 , как в случае обычного АМК.

В случае *тональной модуляции* примем $\varphi(t) = m \sin \Omega t$. Тогда выражение (10.26) запишется

$$\begin{aligned} S_{\text{УМК}}(t) &= S_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= S_0 \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - S_0 \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t . \end{aligned} \quad (10.26')$$

Сомножители $\cos(m \sin \Omega t)$ и $\sin(m \sin \Omega t)$ – это периодические функции, которые при разложении в ряд Фурье выражаются через бесселевы функции:

$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\Omega t + 2J_4(m) \cos 4\Omega t + \dots, \quad (10.27)$$

$$\sin(m \sin \Omega t) = 2J_1(m) \sin \Omega t + 2J_3(m) \cos 3\Omega t + 2J_5(m) \cos 5\Omega t + \dots, \quad (10.28)$$

где $J_n(m)$ – бесселева функция первого рода n -го порядка от аргумента m .

Графики и таблицы функций Бесселя, а также разложение в ряд функций $\cos(m \cos \Omega t)$ и $\sin(m \cos \Omega t)$ приведены в прил. П.9.

Подстановка (10.27) и (10.28) в (10.26) после простых преобразований дает

$$S_{\text{УМК}}(t) = S_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + S_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos(\omega_0 + n\Omega)t + \\ + S_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(m) \cos(\omega_0 - n\Omega)t = S_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\omega_0 + n\Omega)t, \quad (10.29)$$

где $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$.

Из анализа выражения (10.29) и свойств бесселевых функций следует:

- спектр теоретически бесконечен;
- амплитуда несущей и боковых составляющих будет

$$|S_{\text{н}}| = S_0 |J_0(m)|, \quad |S_n| = S_0 |J_n(m)|; \quad (10.30)$$

- при $m = 0$ (отсутствие модуляции) $J_0(0) = 1$ и $|S_{\text{н}}| = S_0$, а все боковые составляющие равны нулю, так как $J_1(0) = J_2(0) = \dots = J_n(0) = 0$. Вся мощность обусловлена несущим колебанием $P = S_{\text{н}}^2 / 2 = S_0^2 / 2$. При $m \neq 0$ мощность УМК остается прежней, но перераспределяется между несущим и боковыми колебаниями;

- при некоторых значениях m отдельные составляющие могут исчезнуть, если $J_n(m) = 0$ (прил. П.8, табл. П.8.2);

- практически спектр ограничен (рис. 10.8), так как функция $J_n(m)$ быстро убывает при $n \geq m + 1$. Поэтому практическая ширина спектра

$$2\Delta\omega_{\text{пр}} = 2(m+1)\Omega = 2\omega_{\text{д}} + 2\Omega; \quad (10.31)$$

- спектр УМК в $(m+1)$ раз шире, чем спектр АМК. В основах теории помехоустойчивости доказывается, что УМК при больших отношениях сигнал/шум помехоустойчивей АМК.

На практике используются сигналы с $m \gg 1$. Тогда в формуле (10.31) единицей можно пренебречь:

$$2\Delta\omega_{\text{пр}} \approx 2m\Omega = 2\omega_{\text{д}}.$$

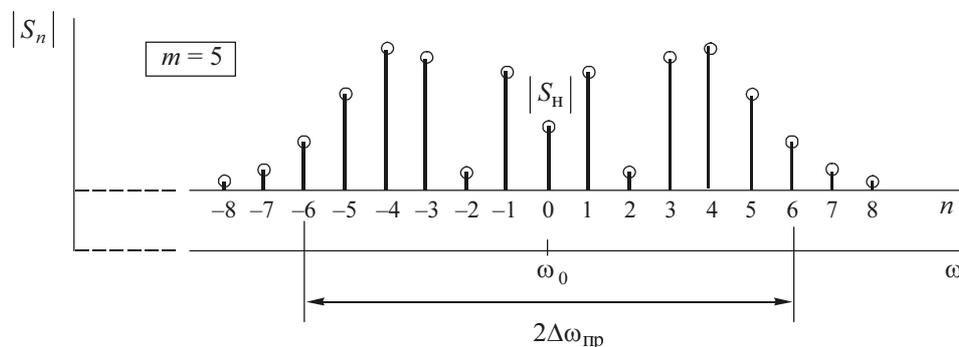


Рис. 10.8

В системах УКВ с частотной модуляцией практическая ширина спектра $2\Delta f_{\text{пр}} \approx 2f_{\text{д}} = 150$ кГц.

Частный случай. Полагая $m \ll 1$, можно приблизительно считать

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1, \quad \sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t. \quad (10.32)$$

С учетом (10.32) выражение (10.26') можно записать:

$$S_{\text{УМК}}(t) = S_0 \cos \omega_0 t - \frac{S_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{S_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (10.33)$$

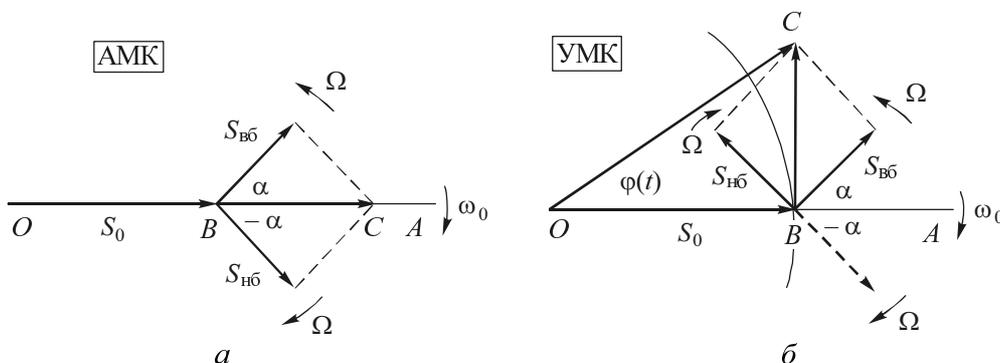


Рис. 10.9

Полученное выражение аналогично тональному АМК, но колебание нижней боковой частоты сдвинуто по фазе на 180° . На рис. 10.9 показаны векторные диаграммы АМК (а) и УМК (б). Поворачивая вектор нижней боковой частоты АМК, получаем УМК. Результирующий вектор BC суммы векторов

боковых составляющих направлен перпендикулярно вектору несущего колебания OB . Результирующий вектор OC всего УМК направлен по отношению к вектору OB под углом $\varphi(t)$, изменяющимся во времени с низкой частотой Ω . Но при этом происходит изменение величины OC , что соответствует паразитной амплитудной модуляции. Это обусловлено принятыми допущениями (10.32). Однако чем меньше m по сравнению с единицей, тем меньше различие между величинами OC и S_0 .

10.1.4. УЗКОПОЛОСНЫЕ, КОМПЛЕКСНЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Узкополосные сигналы

Выше были рассмотрены простейшие виды радиосигналов (АМ, ЧМ и ФМ), у которых модулировался один из параметров несущего колебания. В радиотехнике имеют место также сложно модулированные колебания, которые характеризуются одновременным изменением амплитуды $S(t)$ и фазы $\varphi(t)$:

$$S_p(t) = S(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (10.34)$$

Сигналы вида (10.34) либо формируются в передатчике, либо получаются при прохождении УМС через избирательные цепи.

Простейшие виды радиосигналов и сигналы вида (10.34) будут *узкополосными*, если практическая ширина $2\Delta\omega_{\text{пр}}$ их спектра расположена в узкой полосе относительно центральной частоты ω_0 , т. е.

$$2\Delta\omega_{\text{пр}} / \omega_0 \ll 1. \quad (10.35)$$

Таким образом, узкополосный сигнал представляет собой квазигармоническое колебание, у которого $S(t)$ и $\varphi(t)$ – это медленные процессы по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

Комплексный сигнал

Гармоническое колебание в комплексной форме было представлено в примере 1 главы 1, точно так же можно представить в комплексной форме узкополосный сигнал $S_p(t)$:

$$\dot{S}_p(t) = S(t)e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]} = \dot{S}(t)e^{j\omega_0 t} = \text{Re}(\dot{S}_p(t)) + j \text{Im}(\dot{S}_p(t)), \quad (10.36)$$

где

$$\dot{S}(t) = S(t)e^{j\varphi(t)} \quad (10.37)$$

– комплексная огибающая; $S(t)$ – физическая огибающая, или просто огибающая; $\varphi(t)$ – медленно изменяющаяся начальная фаза;

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \operatorname{Re}(\dot{S}_p(t)) = S(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \\ \tilde{S}_p(t) &= \operatorname{Im}(\dot{S}_p(t)) = S(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \end{aligned} \quad (10.38)$$

– действительная (исходный сигнал) и мнимая части комплексного узкополосного сигнала.

Из (10.37) следует, что комплексная огибающая содержит всю информацию, которая заключена в $S(t)$ (АМ) и $\varphi(t)$ (УМ).

Аналитический сигнал

Представление сигналов в комплексной форме распространено и на негармонические сигналы. Пусть задан физический сигнал $s(t)$. Соответствующий комплексный сигнал имеет вид

$$\dot{s}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t), \quad (10.39)$$

где $s(t)$ – исходный физический сигнал и $\tilde{s}(t)$ – сопряженный сигнал, связанные между собой парой преобразований Гильберта:

$$\begin{cases} \tilde{s}(t) = H^1 \{s(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau - \text{прямое преобразование,} \\ s(t) = H^{-1} \{\tilde{s}(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(\tau)}{\tau - t} d\tau - \text{обратное преобразование.} \end{cases} \quad (10.40)$$

Аналитический сигнал – это комплексный сигнал, описываемый формулами (10.39) и (10.40). Комплексное представление квазигармонического (узкополосного) $\dot{S}_p(t)$ и гармонического колебаний можно рассматривать как частный случай аналитического сигнала.

Основные свойства аналитического сигнала [1–3]

1. Произведение аналитического сигнала $\dot{s}(t)$ на комплексно-сопряженный ему сигнал $\dot{s}^*(t)$ равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала:

$$\dot{s}(t)\dot{s}^*(t) = S(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}S(t)e^{-j\varphi(t)}e^{-j\omega_0 t} = [S(t)]^2 = S^2(t). \quad (10.41)$$

2. Модуль аналитического сигнала равен физической огибающей $S(t)$:

$$|\dot{s}(t)| = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} = \sqrt{S^2(t)} = S(t). \quad (10.42)$$

3. Полная фаза и мгновенная частота сигнала

$$\psi(t) = \arctg [\tilde{s}(t) / s(t)], \quad \omega(t) = d\psi(t)/dt. \quad (10.42')$$

4. Спектральная плотность $\dot{S}_a(\omega)$ аналитического сигнала существует только в области положительных частот и равна удвоенному значению спектральной плотности исходного сигнала (рис. 10.10), т. е.

$$\dot{S}_a(\omega) = \dot{S}_{\text{ор}}(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 2\dot{S}(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (10.43)$$

где $\dot{S}_{\text{ор}}(\omega)$ – спектральная плотность комплексной огибающей $\dot{S}(t)$.

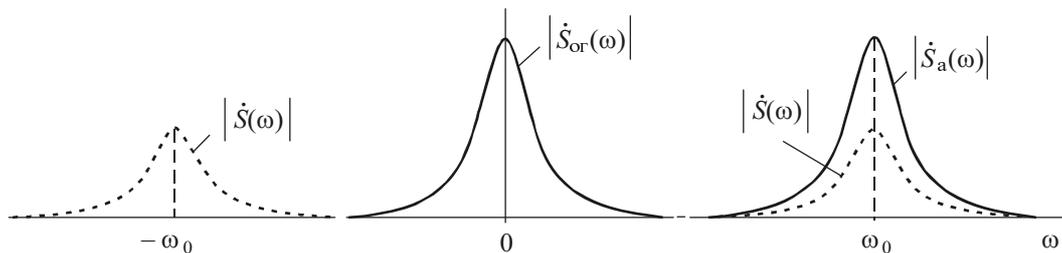


Рис. 10.10

5. АКФ, определяемая выражением

$$\dot{B}_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(t)\dot{s}^*(t-\tau)dt, \quad (10.44)$$

– это комплексная функция. Она связана с АКФ $\dot{B}_{ог}(\tau)$ комплексной огибающей выражением

$$\dot{B}_a(\tau) = \dot{B}_{ог}(\tau)e^{j\omega_0\tau}, \quad (10.45)$$

где АКФ $\dot{B}_{ог}(\tau)$ равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt. \quad (10.46)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{B}_a(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}S(t-\tau)e^{-j\varphi(t-\tau)}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega_0\tau}dt = \\ &= e^{j\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt = e^{j\omega_0\tau}\dot{B}_{ог}(\tau), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6. АКФ $B_p(\tau)$ исходного действительного сигнала $S_p(t)$ связана с АКФ $\dot{B}_a(\tau)$ аналитического сигнала $\dot{s}(t)$ соотношением

$$B_p(\tau) = \frac{1}{2}\text{Re}[\dot{B}_a(\tau)]. \quad (10.47)$$

При $\tau = 0$ АКФ равна энергии сигнала

$$\dot{B}_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = E.$$

Это согласуется с теоретическими сведениями главы 3 [см. формулу (3.2)].

10.2. ПРИМЕРЫ

10.2.1. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЙ СИГНАЛ (АМС)

Пример 1. Спектр многокомпонентного АМС. Пусть видеосигнал состоит из n гармонических составляющих:

$$S_B(t) = \sum_{k=1}^n S_{B,k} \cos(\Omega_k t + \alpha_k). \quad (10.48)$$

Тогда огибающая АМС в соответствии с (10.5) будет

$$S(t) = S_0 + k_a \sum_{k=1}^n S_{B,k} \cos(\Omega_k t + \alpha_k) = S_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n M_k \cos(\Omega_k t + \alpha_k) \right], \quad (10.49)$$

где $M_k = k_a S_{B,k}$ – коэффициент модуляции k -го компонента; k_a – коэффициент пропорциональности АМ.

Наконец, АМС согласно (10.9) и (10.49) запишется в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{АМС}}(t) &= S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= S_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n M_k \cos(\Omega_k t + \alpha_k) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (10.50)$$

После раскрытия скобок получим

$$\begin{aligned} S_{\text{АМС}}(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{S_0 M_1}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_1)t + \varphi_0 - \alpha_1] + \\ &+ \frac{S_0 M_1}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_1)t + \varphi_0 + \alpha_1] + \dots \\ &\dots + \frac{S_0 M_n}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_n)t + \varphi_0 - \alpha_n] + \frac{S_0 M_n}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_0 + \alpha_n]. \end{aligned}$$

Амплитудный спектр АМС показан на рис. 10.11. Здесь $2\Delta\omega_{\text{пр}}$ – практическая ширина спектра АМС, равная удвоенной максимальной частоте Ω_{max} в спектре видеосигнала, т. е.

$$2\Delta\omega_{\text{пр}} = 2\Omega_{\text{max}} = 2\Omega_n. \quad (10.51)$$

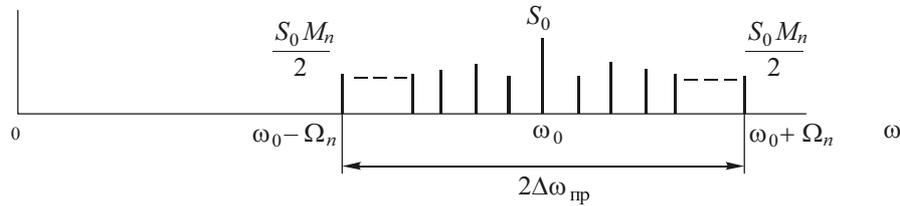


Рис. 10.11

Таким образом, как и в случае тонального АМК, спектр огибающей получается из спектра видеосигнала домножением каждого компонента на константу k_a и добавлением постоянной составляющей S_0 , равной амплитуде немодулированного несущего колебания. Спектр АМС отличается от спектра огибающей тем, что смещен по оси частот вправо на ω_0 , расположен симметрично относительно этой частоты; при этом амплитуды боковых составляющих вдвое меньше соответствующих компонентов в составе спектра огибающей.

Пример 2. Спектр АМС непериодического (импульсного) сигнала. В качестве непериодического сигнала рассмотрим одиночный импульс $S_B(t)$, спектр $\dot{S}_B(\omega)$ которого известен или может быть найден. АМС выразится:

$$S_{\text{АМС}}(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где огибающая $S(t)$ пропорциональна видеоимпульсу $S_B(t)$. Используя представление косинуса в виде двух комплексных экспоненциальных функций (формула Эйлера), запишем

$$S_{\text{АМС}}(t) = 0.5S(t)e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} + 0.5S(t)e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t}.$$

Спектральная плотность АМС

$$\dot{S}_{\text{АМС}}(\omega) = 0.5e^{j\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + 0.5e^{-j\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt.$$

Первый интеграл – это спектральная плотность $\dot{S}(\omega - \omega_0)$ огибающей $S(t)$ для частоты $\omega - \omega_0$, второй интеграл – то же, но для частоты $\omega + \omega_0$. Следовательно,

$$\dot{S}_{\text{АМС}}(\omega) = 0.5e^{j\varphi_0} \dot{S}(\omega - \omega_0) + 0.5e^{-j\varphi_0} \dot{S}(\omega + \omega_0). \quad (10.52)$$

В области положительных частот спектральная плотность АМС запишется в виде

$$\dot{S}_{\text{АМС}}(\omega) = 0.5e^{j\varphi_0}\dot{S}(\omega - \omega_0). \quad (10.53)$$

Спектр радиоимпульса $\dot{S}_{\text{АМС}}(\omega)$ (10.53) получается из спектра $\dot{S}(\omega)$ огибающей $S(t)$ переносом его вправо по оси частот на ω_0 , симметричным расположением относительно ω_0 и домножением на $0.5e^{j\varphi_0}$.

В частности, на рис. 10.12 показаны временные и спектральные диаграммы прямоугольного видео- и радиоимпульса.

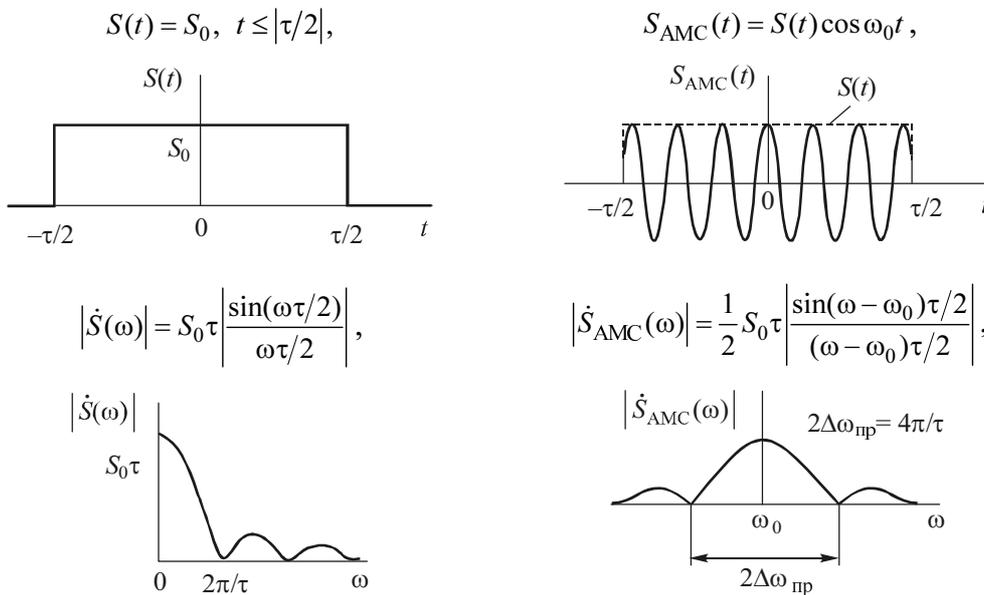


Рис. 10.12

Пример 3. Автокорреляционная функция АМК. Рассмотрим АМК вида

$$S_{\text{АМК}}(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10.54)$$

Определим АКФ по (3.10):

$$K_{\text{АМК}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T S_{\text{АМК}}(t) S_{\text{АМК}}(t - \tau) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) S(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \varphi_0] dt.$$

Воспользуемся тригонометрическими формулами:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cos 2\alpha, \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Тогда получим

$$K_{\text{АМК}}(\tau) = \frac{1}{T} \cos \omega_0 \tau \int_0^T S(t) S(t - \tau) dt + \frac{1}{T} \cos \omega_0 \tau \int_0^T S(t) S(t - \tau) \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) dt + \\ + \frac{1}{T} \sin \omega_0 \tau \int_0^T S(t) S(t - \tau) \sin 2(\omega_0 t + \varphi_0) dt.$$

Огибающая $S(t)$ – медленная функция времени по сравнению с $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$. За один период T она изменится несущественно, т. е. ее можно считать константой. Следовательно, произведение $S(t)S(t - \tau)$ можно вынести за знак второго и третьего интегралов, а интегрирование гармонической функции за период даст нуль. Поэтому останется только первый интеграл

$$K_{\text{АМК}}(\tau) = \frac{1}{T} \cos \omega_0 \tau \int_0^T S(t) S(t - \tau) dt = K_{\text{ог}}(\tau) (0.5 \cos \omega_0 \tau), \quad (10.55)$$

где

$$K_{\text{ог}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) S(t - \tau) dt, \quad (10.56)$$

– АКФ огибающей.

Таким образом, АКФ АМК равна произведению АКФ огибающей $K_{\text{ог}}(\tau)$ и высокочастотного заполнения $(0.5 \cos \omega_0 \tau)$.

Частным случаем этого примера будет рассмотренный ранее вопрос о АКФ тонально-модулированного колебания.

Пример 4. АКФ импульсного АМС. Огибающая $S(t)$ в выражении (10.54) – это импульс конечной энергии. Найдем АКФ огибающей и всего АМС, воспользовавшись выражениями (10.45) – (10.47) для аналитического сигнала. Учитывая, что для вещественного сигнала $\dot{S}(t) = \dot{S}^*(t) = S(t)$ и $\dot{S}_{\text{АМС}}(t) = \dot{S}_{\text{АМС}}^*(t) = S_{\text{АМС}}(t)$, получаем

$$B_{\text{ог}}(\tau) = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S(t-\tau) dt,$$

$$B_{\text{АМС}}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\dot{B}_{\text{АМС}}(\tau) \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\dot{B}_{\text{ог}}(\tau) e^{j\omega_0 \tau} \right] = B_{\text{ог}}(\tau) (0.5 \cos \omega_0 \tau). \quad (10.56')$$

Следовательно, как и в предыдущем примере, АКФ АМС равна произведению АКФ огибающей $B_{\text{ог}}(\tau)$ и высокочастотного заполнения $(0.5 \cos \omega_0 \tau)$.

Если огибающая импульсного сигнала (пропорциональная видеоимпульсу) имеет явно выраженные начало и конец, т. е. длительность импульса $\tau_{\text{и}}$, то

$$B_{\text{ог}}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_{\text{и}}} S(t) S(t-\tau) dt.$$

В частности, для радиоимпульса с прямоугольной огибающей (см. рис. 10.12) АКФ огибающей описывается выражением (3.18) (см. рис. 3.3), а АКФ всего импульса согласно (10.56') примет вид (рис. 10.13)

$$B_{\text{АМС}}(\tau) = B_{\text{ог}}(\tau) (0.5 \cos \omega_0 \tau) = 0.5 S_0^2 (\tau_{\text{и}} - |\tau|) \cos \omega_0 \tau, \quad \tau \leq |\tau_{\text{и}}|. \quad (10.57)$$

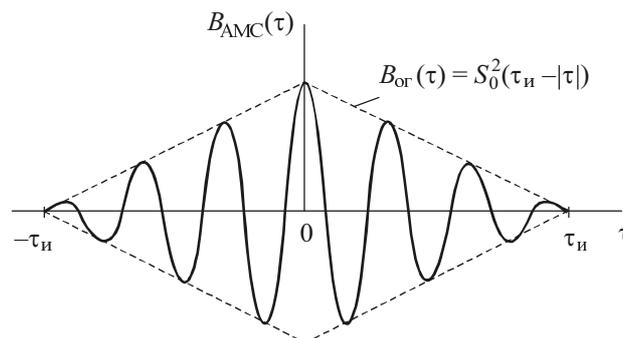


Рис. 10.13

Таким образом, АКФ не зависит от начальной фазы φ_0 высокочастотного заполнения радиоимпульса; ее огибающая совпадает с АКФ прямоугольного видеоимпульса (см. пример 1 главы 3).

10.2.2. СИГНАЛ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ (УМС)

Пример 5. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией. В локации широко применяются радиоимпульсы с *линейной частотной модуляцией*, или *ЛЧМ-импульсы* (рис. 10.14, а). Мгновенная частота изменяется в течение импульса по линейному закону (рис. 10.14, б)

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (10.58)$$

где

$$\beta = 2\omega_d / \tau_{\text{и}} \quad (10.59)$$

– скорость изменения частоты во времени;

$$\omega_d = \beta \tau_{\text{и}} / 2 \quad (10.60)$$

– девиация частоты за длительность импульса $\tau_{\text{и}}$; при $\beta > 0$ частота растет внутри импульса, а при $\beta < 0$ – убывает.

Прямоугольный ЛЧМ-импульс можно представить следующей математической моделью:

$$S_{\text{ЛЧМ}}(t) = \begin{cases} S_0 \cos(\omega_0 t + \beta t^2 / 2), & -\tau_{\text{и}} / 2 \leq t \leq \tau_{\text{и}} / 2, \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

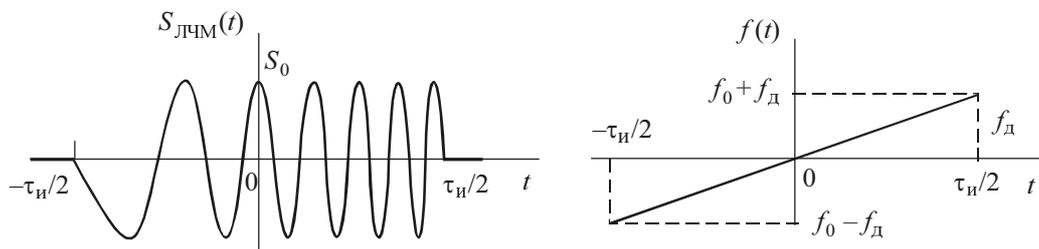


Рис. 10.14

База сигнала – произведение полной девиации частоты на длительность импульса

$$B = \omega_d \tau_{\text{и}} = \beta \tau_{\text{и}}^2 / 2 \quad (10.61)$$

служит основным параметром ЛЧМ-импульса.

В практически важных случаях, когда $B \gg 1$, модуль спектральной плотности ЛЧМ-импульса имеет следующую особенность: он практически постоянен и с хорошим приближением описывается выражением [1–3]

$$|\dot{S}(\omega)| = \begin{cases} S_0 \sqrt{\pi / (2\beta)}, & \omega_0 - \omega_d \leq \omega \leq \omega_0 + \omega_d, \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \quad (10.62)$$

Спектральная плотность энергии $|\dot{S}(\omega)|^2 = S_0^2 \pi / 2\beta$ также постоянна в интервале частот $(\omega_0 - \omega_d, \omega_0 + \omega_d)$ и обращается в нуль вне этого интервала. При $B \geq 100$ не менее 90 % всей энергии заключено в полосе $2\omega_d$.

Пример 6. АКФ ЛЧМ-импульса. Рассмотрим тот важный для практики случай, когда $B \gg 1$ и применима формула (10.62). Тогда, используя обратное преобразование Фурье, определим АКФ:

$$\begin{aligned} B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \omega_d}^{\omega_0 + \omega_d} |\dot{S}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \right] = \\ &= \frac{S_0^2}{2\beta} \int_{\omega_0 - \omega_d}^{\omega_0 + \omega_d} \cos \omega\tau \cdot d\omega = \frac{S_0^2}{\beta\tau} \sin(\omega_d\tau) \cos \omega_0\tau \frac{\omega_d}{\omega_d} = \frac{S_0^2 \omega_d}{\beta} \frac{\sin(\omega_d\tau)}{\omega_d\tau} \cos \omega_0\tau = \\ &= \frac{S_0^2 \tau_{\text{и}}}{2} \frac{\sin(\beta\tau_{\text{и}}\tau / 2)}{\beta\tau_{\text{и}}\tau / 2} \cos \omega_0\tau. \end{aligned} \quad (10.63)$$

График функции (10.63) показан на рис. 10.15.

Из формулы (10.60) и рис. 10.15 следуют важные свойства АКФ.

Во-первых, АКФ имеет лепестковый характер, ширина главного лепестка $\Delta\tau$ огибающей обратно пропорциональна девиации частоты ω_d и, следова-

тельно, произведению длительности импульса $\tau_{\text{и}}$ на коэффициент β , характеризующий скорость изменения частоты во времени, т. е.

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{\omega_{\text{д}}} = \frac{2\pi}{\beta\tau_{\text{и}}}. \quad (10.64)$$

Во-вторых, при $\tau = 0$ АКФ ЛЧМ равна энергии импульса:

$$B_{\text{ЛЧМ}}(0) = \frac{S_0^2 \tau_{\text{и}}}{2} = E. \quad (10.65)$$

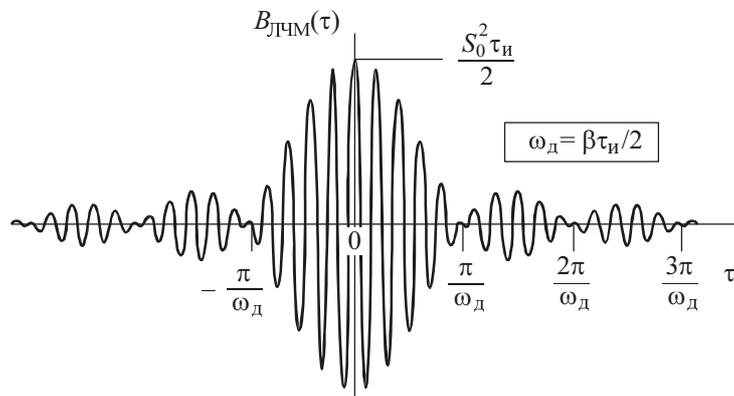


Рис. 10.15

Благодаря отмеченным важным свойствам АКФ ЛЧМ-сигналы широко применяются в радиолокации. При большой длительности и энергии излучаемых ЛЧМ-импульсов (что необходимо для обеспечения требуемой дальности обнаружения цели) высокое разрешение по дальности обеспечивается сжатием длительности эхосигнала при корреляционном (оптимальном) приеме, т. е. получением короткого и острого пика АКФ эхосигнала.

Пример 7. Преобразования Гильберта для гармонических колебаний. Задано гармоническое колебание $s(t) = U_m \cos \omega_0 t$. Найдём сопряжённую функцию $\tilde{s}(t)$, а также комплексную $\dot{S}(t)$ и физическую $S(t)$ огибающие.

Применим прямое преобразование Гильберта (10.40):

$$\tilde{s}(t) = H^1 \{s(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_m \cos \omega_0 \tau}{\tau - t} d\tau.$$

Перейдем к новой переменной $x = \tau - t$ ($\tau = x + t$). Тогда, представляя $\cos \omega_0 \tau$ в виде $\cos \omega_0 \tau = \cos \omega_0(x + t) = \cos \omega_0 t \cos \omega_0 x - \sin \omega_0 t \sin \omega_0 x$, получаем

$$\tilde{s}(t) = -\frac{U_m}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 x}{x} dx + \frac{U_m}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 x}{x} dx.$$

Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Тогда

$$\tilde{s}(t) = U_m \sin \omega_0 t.$$

Подставляя $s(t) = U_m \cos \omega_0 t$ и $\tilde{s}(t) = U_m \sin \omega_0 t$ в формулу (10.36), находим

$$\dot{S}_p(t) = \dot{s}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = U_m \cos \omega_0 t + jU_m \sin \omega_0 t = U_m e^{j\omega_0 t}.$$

Следовательно, выражение для огибающих

$$\dot{S}(t) = S(t) = U_m.$$

Выражение для физической огибающей можно найти также по формуле (10.42):

$$S(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} = U_m \sqrt{\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t} = U_m.$$

Таким образом, огибающая $S(t)$ равна амплитуде сигнала U_m и будет касательной к исходной гармонической функции в моменты ее максимума, Полная фаза и мгновенная частота согласно (10.42'): $\psi(t) = \omega_0 t$ и $\omega(t) = \psi'(t) = \omega_0$.

Аналогичный результат имеет место и для $s(t) = \sin \omega_0 t$, т. е. $\tilde{s}(t) = -\cos \omega_0 t$.

10.3. УПРАЖНЕНИЯ

10.3.1. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

1. На рис. 10.16 показана осциллограмма АМК: $U_{\max} = 15$ В, $U_{\min} = 5$ В.

Вычислите амплитуду U_m несущего колебания, амплитуду ΔU огибающей и коэффициент модуляции M .

2. Однотональное АМК описывается выражением

$$u(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \alpha)] \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (10.66)$$

где $U_m = 10$ В, $M = 0.8$, $\alpha = \pi/4$, $\varphi = 0$. Вычислите амплитуду колебания в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = T_\Omega/4$. Изобразите векторные диаграммы для этих моментов времени.

3. На рис. 10.17 показана временная диаграмма АМК при $M > 1$. Определите коэффициент модуляции M на основе известных значений U_{\max} и U_{\min} .

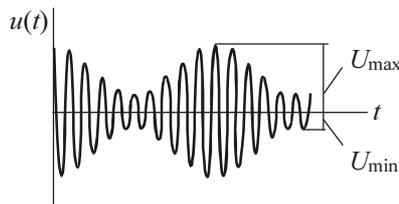


Рис. 10.16

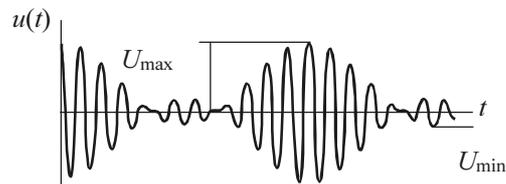


Рис. 10.17

4. Задано аналитическое выражение АМС:

$$u(t) = U(t) \cos \omega_0 t = U_m (1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t) \cos \omega_0 t \quad [\text{В}], \quad (10.67)$$

где $U_m = 10$ В, $M_1 = 0.7$, $M_2 = 0.2$ и $\Omega_2 = 3\Omega_1$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения огибающей $U(t)$ данного сигнала.

5. Найдите парциальные коэффициенты модуляции M_1 и M_2 АМС вида

$$u(t) = (U_m + \Delta U_1 \cos \Omega_1 t + \Delta U_2 \cos \Omega_2 t) \cos \omega_0 t,$$

если $U_m = 8$ В, $\Delta U_1 = 4$ В, $\Delta U_2 = 2$ и $\Omega_2 = 3\Omega_1$.

6. Спектральные диаграммы АМК, имеющего две модулирующие частоты $F_1 = F$ и $F_2 = 2F$, показаны на рис. 10.18 и 10.19.

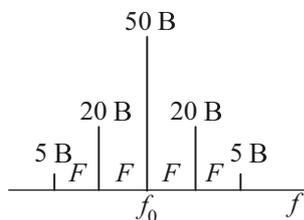


Рис. 10.18

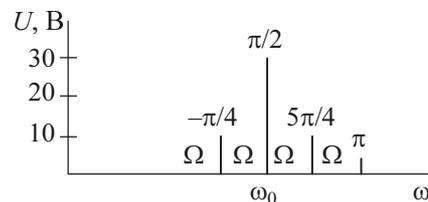


Рис. 10.19

На основе диаграмм определите парциальные коэффициенты модуляции и запишите аналитическое выражение данного колебания.

7. Задано аналитическое выражение для АМК

$$u(t) = U_m [1 + M_1 \cos(\Omega_1 t + \alpha_1) + M_2 \cos(\Omega_2 t + \alpha_2)] \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $M_1 = M_2 = 0.5$, $\Omega_1 = 2\pi \cdot 75$ рад/с, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 100$ рад/с, $\varphi = \pi/3$, $\alpha_2 = \pi/6$.

Определите начальную фазу α_1 , при которой коэффициент модуляции M_H (модуляции вниз) равен единице.

8. Напряжение $u(t) = U[1 + M \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$ приложено к резистору с сопротивлением R .

Получите выражение для средней мощности в нагрузке на боковых частотах ($\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$).

9. Мощность P_H сигнала радиопередатчика АМ в режиме «молчания», т. е. при отсутствии модулирующего сигнала, равна 4 кВт. Найдите пиковое (максимальное) значение мощности P_{\max} однотонового АМК, если $M = 0.75$.

10. Амплитудно-модулированный ток (мА)

$$i(t) = 100 [1 + 0,8 \cos(4 \cdot 10^3 t)] \cos(6 \cdot 10^6 t)$$

протекает по резистивной нагрузке $R = 100$ Ом. Найдите: а) максимальную (пиковую) мощность (P_{\max}) в нагрузке, развиваемую источником; б) среднюю мощность ($P_{\text{ср}}$) в нагрузке; в) относительную долю мощности, сосредоточенную в несущем колебании ($P_H / P_{\text{ср}}$).

11. Периодическая последовательность прямоугольных радиоимпульсов (рис. 10.20) имеет следующие параметры: $\tau_{\text{и}} = 1$ мкс, $T = 2$ мкс, $f_0 = 10$ МГц и $U_m = 10$ В. Найдите и изобразите спектр этого колебания.

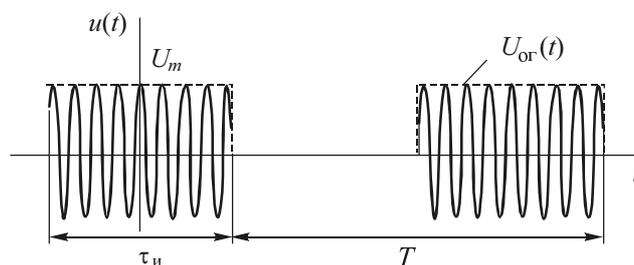


Рис. 10.20

12. По условию предыдущего упражнения определите выражение для расчета парциальных коэффициентов модуляции M_n .

13. Найдите выражение и постройте АКФ для сигнала, показанного на рис. 10.20. Данные сигнала те же, что и в упражнении 11.

14. На рис. 10.21 задан сигнал, отличающийся от сигнала рис. 10.20 наличием синфазной составляющей напряжения с амплитудой $\Delta U = 1$ В. Чем будет отличаться спектр этого сигнала от спектра сигнала, рассмотренного в упражнении 11? Как изменятся парциальные коэффициенты модуляции?

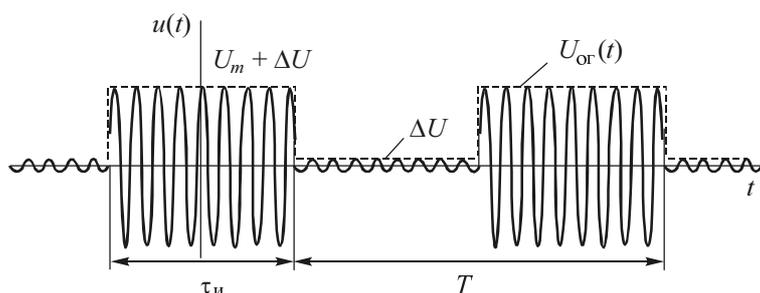


Рис. 10.21

15. Определите полосу частот телеграфного радиоканала. Канал работает по принципу амплитудной манипуляции со скоростью передачи 300 знаков/мин. Для упрощения положите, что передаваемый сигнал – это периодическая последовательность точек кода Морзе. Длительности паузы передаваемого радиоимпульса равны (см. рис. 10.20).

10.3.2. СИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

16. Временная диаграмма модулирующего сигнала показана на рис. 10.22. Изобразите временные диаграммы мгновенной частоты и сдвига фаз при частотной и фазовой модуляции.

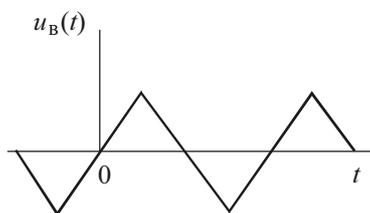


Рис. 10.22

17. Максимальная частота ЧМК $f_{\max} = 1.01 \cdot 10^7$ Гц, несущая частота $f_0 = 10^7$ Гц, частота модуляции $F = 10^4$ Гц. Определите девиацию частоты f_d и индекс модуляции m .

18. Найдите максимальное ω_{\max} и минимальное ω_{\min} значения мгновенной частоты $\omega(t)$ ЧМ-сигнала, представляемого выражением

$$u(t) = U \cos \left[2 \cdot 10^9 t + 2 \sin(10^7 t) + \pi / 6 \right].$$

19. ЧМК имеет несущую частоту $f_0 = 60$ МГц и частоту модуляции $F = 5$ кГц. Вычислите частоты f_{\min} и f_{\max} , в пределах которых должна изменяться мгновенная частота этого колебания для того, чтобы индекс модуляции m был равен 50.

20. УМК описывается выражением

$$u(t) = 10 \cos \left[10^8 t + 5 \sin(10^6 t) + 2 \sin(10^5 t) + \pi / 4 \right].$$

Найдите величину мгновенной частоты $\omega(t)$ данного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

21. ЧМК имеет частоту модуляции $F = 5$ кГц и индекс модуляции $m = 50$. Вычислите практическую ширину спектра $2\Delta f_{\text{пр}}$ этого колебания.

22. Аналитическое выражение ЧМК имеет вид

$$u(t) = 10 \cos \left[2\pi \cdot 10^6 t + 5 \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + \pi / 2 \right].$$

Определите девиацию частоты, практическую ширину спектра и число гармонических составляющих в пределах этой ширины.

23. Мгновенная частота (кГц) ЧМК изменяется по гармоническому закону

$$f(t) = 2 \cos(2\pi F t + \pi / 3).$$

Модулирующая частота F принимает значения в пределах от 200 Гц до 2 кГц. Определите значения m_n и F_n , при которых в спектре ЧМК будет отсутствовать составляющая с несущей частотой f_0 .

24. ЧМК имеет девиацию частоты 40 кГц. Определите частоту F_{\max} , при которой в спектре колебания будут отсутствовать компоненты на частотах $f_0 \pm F_{\max}$, где f_0 – частота несущего колебания.

25. Частота ФМК изменяется по закону (рад/с)

$$\omega(t) = 2\pi \cdot 10^7 \left[1 + 0,01 \cos(2\pi \cdot 10^4 t) \right].$$

Напишите аналитическое выражение этого колебания $U_{\text{ФМК}}(t)$, если его амплитуда равна 10 В.

26. Радиостанция работает на несущей частоте $f_0 = 80$ МГц и излучает ФМС. Частота модуляции 5 кГц, индекс модуляции $m = 50$. Найдите пределы (f_{\min} , f_{\max}), в которых меняется мгновенная частота сигнала. Определите практическую ширину ($2\Delta f_{\text{пр}}$) спектра ФМ-сигнала.

27. Рассчитайте амплитуды и мощности (на сопротивлении 1 Ом) спектральных составляющих в пределах практической ширины спектра ЧМК (В)

$$u(t) = 10 \cos \left[2\pi \cdot 10^6 t + m \cos(2\pi \cdot 10^3 t + \pi/2) \right].$$

Сравните суммарную мощность P_{Σ} спектральных составляющих со средней мощностью $P_{\text{ср}}$ всего ЧМК. Индекс модуляции принимает значения: а) $m = 0.5$; б) $m = 5$.

28. Оцените коэффициент паразитной модуляции в колебании, рассмотренном в упражнении 27 при $m = 0.5$ и удержании в спектре только трех составляющих.

29. Задано аналитическое выражение колебания с амплитудно-фазовой модуляцией

$$u(t) = U_m (1 + M \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t),$$

где $U_m = 10$ В, $M = 0.8$, $\Omega = 2\pi \cdot 10^3$ рад/с, $m = 0.2$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с.

Рассчитайте и постройте спектральную диаграмму.

10.3.3. ЛЧМ-ИМПУЛЬСЫ

30. ЛЧМ-импульс с прямоугольной огибающей имеет длительность $\tau_{\text{и}} = 50$ мкс и базу $B = 2\pi \cdot 500$. Вычислите девиацию частоты $f_{\text{д}}$ в импульсе.

31. Прямоугольный ЛЧМ-импульс имеет длительность $\tau_{\text{и}} = 15$ мкс. Определите базу (B) импульса и скорость нарастания частоты (β), если девиация частоты ($f_{\text{д}}$) равна 25 МГц.

32. Мгновенная частота ЛЧМ-импульса изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_{\min} + \beta t, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ мс},$$

где $\omega_{\min} = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с – начальное значение частоты; $\beta = 2\pi \cdot 10^8$ рад/с² – скорость изменения частоты. Длительность импульса 1 мс, амплитуда 10 В. Определите девиацию частоты f_d и базу B этого сигнала, а также запишите его аналитическое выражение, если начальная фаза колебания $\pi/3$.

33. По условию предыдущего упражнения определите спектральную плотность энергии (СПЭ) ЛЧМ-импульса. Вычислите энергию (E): а) через СПЭ ($B \gg 1$), б) непосредственным интегрированием во временной области.

34. По условию упражнения 32 вычислите ширину основного лепестка $\Delta\tau_{\text{ЛЧМ}}$ АКФ при $f_d = 50$ кГц и сравните с $\Delta\tau_{\text{АМС}}$ при $f_d = 0$. Вычислите $\Delta\tau_{\text{АМС}} / \Delta\tau_{\text{ЛЧМ}}$.

10.3.4. КОМПЛЕКСНЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

35. Задано гармоническое колебание $s(t) = U_m \sin \omega_0 t$. Найдите сопряженную по Гильберту функцию $\tilde{s}(t)$, а также огибающую $S(t)$.

36. Узкополосный сигнал имеет вид

$$s(t) = \begin{cases} S_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ S_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t, & t > 0, \quad \Omega \ll \omega_0. \end{cases}$$

Найдите выражение для комплексной огибающей $\tilde{S}(t)$ этого сигнала.

37. Дан радиоимпульс с прямоугольной огибающей

$$s(t) = \begin{cases} S_0 \cos \omega_0 t, & -\tau_n/2 < t < \tau_n/2, \\ 0, & t < -\tau_n/2, t > \tau_n/2. \end{cases}$$

Получите выражение для спектральной плотности $\dot{S}_{\text{ор}}(\omega)$ комплексной огибающей $\tilde{S}(t)$ аналитического сигнала $\dot{S}(t)$.

38. Определите комплексную огибающую $\tilde{S}(t) = \tilde{U}(t)$ следующих сигналов:

а) $s(t) = u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

б) $s(t) = u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi)$, $\Omega \ll \omega_0$.

39. Найдите сигнал $U(t)$, если его комплексная огибающая $\tilde{U}(t)$ имеет спектральную плотность

$$\dot{S}_{ог}(\omega) = U_m e^{j\varphi} / (\alpha + j\omega),$$

где $U_m = 10$ В, $\varphi = \pi/3$ рад, $\alpha = 10^3$ рад/с, а также имейте в виду, что $\omega_0 = 10^6$ рад/с.

40. Задан узкополосный сигнал

$$u(t) = \begin{cases} U_m e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Запишите его в комплексном виде $\dot{i}(t)$, найдите комплексную огибающую $\tilde{U}(t)$, спектральную плотность $\dot{S}_{ог}(\omega)$ комплексной огибающей, а также спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ сигнала $u(t)$.

41. Заданы узкополосный сигнал $u(t)$ и соответствующее ему преобразование Гильберта $\tilde{u}(t)$.

Докажите, что мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала определяется по формуле

$$\omega(t) = \frac{u\tilde{u}' - u'\tilde{u}}{u^2 + \tilde{u}^2}.$$

10.4. ЗАДАНИЯ

10.4.1. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОЕ КОЛЕБАНИЕ

Задано АМК с модуляцией двумя гармоническими сигналами. Частоты модулирующих сигналов F_1 и F_2 , их начальные фазы α_1 и α_2 и коэффициенты модуляции M_1 и M_2 возьмите в табл. 10.1 в соответствии со своим номером варианта. Значение несущей частоты f_0 , ее начальной фазы φ_0 и средней амплитуды U_m возьмите в табл. 10.2 в соответствии с номером подварианта.

Таблица 10.1

Параметр	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1 , кГц	5	1	10	5	10	0.5	1	5	8	2
F_2 , кГц	10	50	1	5	5	0.1	2	1	10	0.5
α_1	60°	$\pi/2$	20°	$\pi/2$	$\pi/8$	$\pi/4$	30°	$\pi/3$	60°	45°
α_2	120°	$3\pi/4$	30°	45°	60°	$\pi/8$	180°	$2\pi/3$	45°	$\pi/4$
M_1	0.6	0.7	0.2	0.3	0.7	0.3	0.4	0.5	0.4	0.1
M_2	0.2	0.1	0.6	0.5	0.2	0.4	0.5	0.3	0.4	0.6

Таблица 10.2

Параметр	Номер подварианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_0 , МГц	1	5	10	2	1	0.5	5	2	10	4
φ_0 , град	30	150	180	60	270	30	120	90	45	60
U_m , В	25	7	10	25	8	12	20	14	50	30

Требуется:

- записать аналитическое выражение АМК;
- определить практическую ширину спектра ($2\Delta f_{\text{пр}}$);
- построить спектральную диаграмму АМК;
- построить векторную диаграмму в момент времени $t = 0$;
- определить среднюю мощность колебания ($P_{\text{ср}}$).

10.4.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Задано АМК в виде гармонического сигнала, промодулированного периодической последовательностью видеоимпульсов с прямоугольной огибающей (рис. 10.21).

Длительность радиоимпульса $\tau_{и}$, период повторения T_1 и амплитуду сигнала ΔU в интервале между импульсами возьмите из табл. 10.3 в соответствии со своим номером варианта, а значение частоты заполнения f_0 и амплитуду радиоимпульсов U_m – из табл. 10.4 в соответствии с номером подварианта.

Требуется:

- записать аналитическое выражение АМК;
- определить практическую ширину спектра ($2\Delta f_{пр}$);
- построить спектральную диаграмму АМК.

Таблица 10.3

Параметр	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tau_{и}$, мкс	25	30	200	100	75	80	30	70	500	50
T_1 , мкс	50	100	400	300	150	240	60	210	1000	200
ΔU , В	2	0	1	0	1.5	0	3	0	2.5	0

Таблица 10.4

Параметр	Номер подварианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_0 , МГц	100	450	300	50	200	350	400	150	500	250
U_m , В	25	8	16	22	10	9	12	25	10	15

Примечание. Для всех $\tau_{и} / T_0 \gg 1$ T_0 можно определить из соотношения $T_0 = 1 / f_0$, момент начала отсчета можно выбрать произвольно.

10.4.3. ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОЕ КОЛЕБАНИЕ

Задано ЧМК с модуляцией одним гармоническим сигналом. Аналитическую запись ЧМК возьмите из табл. 10.5 в соответствии со своим номером варианта, а значение средней частоты f_0 и амплитуды колебания U_m – из табл. 10.6 в соответствии с номером подварианта.

Таблица 10.5

Номер варианта	Аналитическое выражение
0	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 5 \sin(3 \cdot 10^5 t) + \pi / 3]$
1	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t - 3 \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + \pi / 6]$
2*	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 0.1 \cos(2\pi \cdot 10^5 t) + 3\pi / 4]$
3	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 4 \sin(\pi \cdot 10^5 t) - \pi / 4]$
4	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t - 2 \sin(10^5 t) + \pi / 6]$
5*	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 0.15 \sin(\pi \cdot 10^5 t) - 5\pi / 6]$
6	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t - 3 \cos(2\pi \cdot 10^4 t) - \pi / 2]$
7	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 4 \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 t) - \pi / 4]$
8*	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + 0.1 \sin(3\pi \cdot 10^5 t) + \pi / 6]$
9	$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t - 5 \cos(10^5 t) + \pi / 8]$

Таблица 10.6

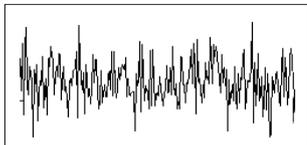
Параметр	Номер подварианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_0 , МГц	450	250	150	300	400	200	500	100	250	600
U_m , В	8	20	16	7	22	14	25	10	12	15

Требуется:

- а) определить недостающие параметры ЧМК:
 - F – частоту модулирующего сигнала;
 - f_{\max} – максимальную мгновенную частоту;
 - f_{\min} – минимальную мгновенную частоту;
 - Δf – девиацию частоты;
- б) записать аналитическое выражение для мгновенной частоты ЧМК ($f(t)$);
- в) определить практическую ширину спектра ($2\Delta f_{\text{пр}}$);
- г) построить спектральную диаграмму ЧМК;
- д) для вариантов, отмеченных *, построить векторную диаграмму (по спектральной) в момент времени $t = 0$.

Глава 11

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.
Опыт – отец всякой достоверности.
Мудрость – дочь опыта.

Леонардо да Винчи

11.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

11.1.1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СП

Наиболее полно вопросы темы изложены в книгах по статистической радиотехнике [22, 23], а руководства и учебные пособия [7, 20, 21] содержат большое число примеров и задач.

Описание во временной области

Случайный процесс (СП) $X(t)$ может быть охарактеризован во временной области совокупностью (ансамблем) N реализаций $x_i(t)$ (рис. 11.1), т. е.

$$X(t) = \{x_i(t)\}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (11.1)$$

Чем больше совокупность реализаций N , тем полнее охарактеризован СП.

Сечение СП. Вероятностное описание СВ

Если зафиксировать произвольный момент времени t_1 , то получим сечение СП – случайную величину (СВ) $X_1 = X(t_1)$. Выберем из ансамбля те n реализаций, которые в момент $t = t_1$ имеют значения меньше некоторого уровня (порога) x . Отношение n/N называется в теории вероятностей *частотой*

наступления события, состоящего в рассматриваемом случае в том, что случайная величина X_1 не превосходит значения заданного уровня x . При $N \rightarrow \infty$ отношение n/N обладает статистической устойчивостью, т. е. стремится к константе и определяет *функцию распределения вероятностей* (ФРВ):

$$F(x, t_1) = P(X_1 \leq x) = \lim_{N \rightarrow \infty} n/N. \quad (11.2)$$

Для упрощения записи далее опустим индекс при X и зависимость от времени.

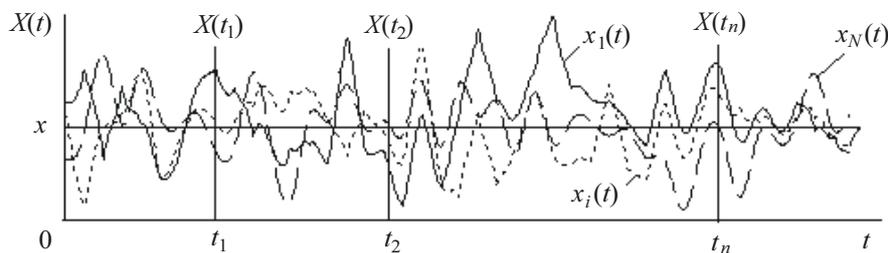


Рис. 11.1

Производная ФРВ (11.2) по x , т. е.

$$w(x) = dF(x)/dx, \quad (11.3)$$

называется *плотностью распределения вероятностей* (ПРВ) или *просто плотностью вероятности* (ПВ).

Очевидно, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (11.4)$$

Из теории **случайных величин** известны следующие свойства ФРВ (11.2) и ПРВ (11.3):

$$\left. \begin{aligned} F(-\infty) &= 0, & w(-\infty) &= 0. \\ F(x_2) &\geq F(x_1) \text{ при } x_2 \geq x_1, & w(x) &\geq 0. \\ F(x_2) - F(x_1) &= P(x_1 < X < x_2), & \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx &= P(x_1 < X < x_2). \\ F(\infty) &= 1, & \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx &= 1. \end{aligned} \right\} (11.5)$$

Характеристическая функция

$$\theta(j\nu) = M(e^{j\nu x}) = \overline{e^{j\nu x}} = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{j\nu x} dx \quad (11.6)$$

– преобразование Фурье от ПРВ, в равной степени описывает сечение СП. Здесь $M(\cdot)$ – математическое ожидание.

Широко используются числовые характеристики, или *моменты* случайной величины.

Начальные моменты n -го порядка:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx. \quad (11.7)$$

Центральные моменты n -го порядка:

$$\mu_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n w(x) dx. \quad (11.8)$$

Нетрудно показать, что центральные и начальные моменты связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 0, & \mu_2 &= m_2 - m_1^2, \\ \mu_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \\ \mu_4 &= m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Для практического использования наиболее важны моменты первых двух порядков: *математическое ожидание* (среднее значение СВ) $m_1 = m$, среднее значение квадрата m_2 и дисперсия $D = \mu_2 = \sigma^2$, при этом

$$D = \sigma^2 = \mu_2 = m_2 - m^2, \quad (11.10)$$

где $\sigma = \sqrt{D}$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) СВ.

Некоторые свойства математического ожидания и дисперсии:

$$\left. \begin{aligned} M(c) &= c, & D(c) &= 0, \\ M(cx) &= cM(x), & D(cx) &= c^2D(x), \\ M(x \pm y) &= M(x) \pm M(y), & D(x \pm y) &= D(x) \pm D(y), \\ M(xy) &= M(x)M(y). & D(xy) &= D(x)D(y). \end{aligned} \right\} (11.11)$$

Четвертое свойство справедливо только для независимых СВ

Третье и четвертое свойства справедливы только для независимых СВ

Центральные моменты третьего и четвертого порядка характеризуют форму ПРВ. Для симметричных ПРВ момент третьего порядка μ_3 и коэффициент асимметрии

$$\gamma_a = \mu_3 / \sigma^3 \quad (11.12)$$

равны нулю (рис. 11.2, а). Чем больше коэффициент асимметрии отличается от нуля, тем существеннее асимметрия ПРВ.

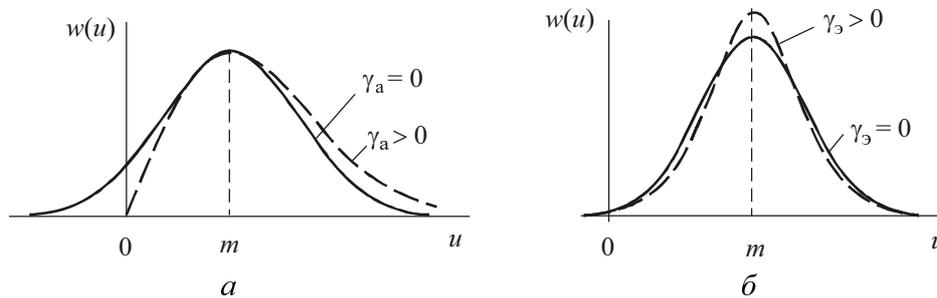


Рис. 11.2

Вводят так называемый коэффициент эксцесса

$$\gamma_3 = \mu_4 / \sigma^4 - 3, \quad (11.13)$$

который равен нулю для нормального закона. Этот коэффициент дает возможность сравнивать «характер вершины» некоторой симметричной ПРВ с вершиной нормального закона. Если $\gamma_3 > 0$, то вершина анализируемого закона более острая и более высокая, чем у нормального закона с тем же средним значением m и дисперсией $\mu_2 = D = \sigma^2$ (рис. 11.2, б), и наоборот.

Положение и форму ПРВ характеризуют также *модой* x_m и *медианой* $x_{\text{мед}}$ (рис. 11.3). Мода – это то значение абсциссы x_m , в котором ПРВ максимальна. Медианой СВ X будет такое ее значение $x_{\text{мед}}$, для которого $P(X < x_{\text{мед}}) = P(X > x_{\text{мед}})$.

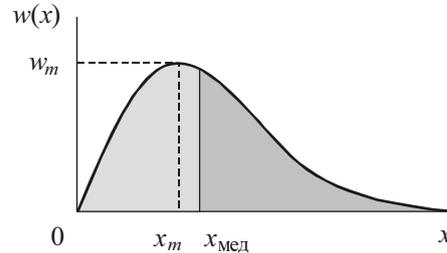


Рис. 11.3

Имеется еще числовая характеристика законов распределения СВ – так называемая *энтропия*, выражающая их неопределенность:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln[w(x)]w(x)dx . \quad (11.14)$$

Законы, имеющие одинаковые первые моменты, могут быть различной степени неопределенности.

Для определения моментов можно использовать также характеристическую функцию $\theta(v)$:

$$\begin{aligned} m_n &= j^{-n} d^n \theta(v=0) / dv^n, & \mu_2 &= D = -d^2 \psi(v=0) / dv^2, \\ \mu_3 &= -j^3 d^3 \psi(0) / dv^3, & \mu_4 &= j^4 d^4 \psi(0) / dv^4 + 3\mu_2^2, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где $\psi(v) = \ln[\theta(v)]$ – логарифмическая характеристическая функция, или *кумулянтная функция*.

В прил. П.9 приведены формулы для вычисления ПРВ ($w(u)$), ФРВ ($F(u)$), характеристической функции ($\theta(jv)$), моментов (m , μ_2 , μ_3 , μ_4), коэффициентов асимметрии (γ_a) и эксцесса (γ_3), а также энтропии (H) для различных законов распределения.

Вероятностное описание СП

Итак, сечение ансамбля случайного процесса характеризуется *одномерными* законами распределения случайной величины $X_1 = X(t_1)$. Если момент t_1 выбрать произвольно, то ФРВ и ПРВ будут функцией двух аргументов: x и t .

Для детерминированного процесса $X(t) = S(t)$, рассматриваемого как частный случай СП, плотность вероятности имеет вид дельта-функции

$$w(x, t) = \delta[x - S(t)]. \quad (11.16)$$

Наиболее полно процесс $X(t)$ может быть представлен *многомерной* (n -мерной) плотностью вероятности $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, или многомерной характеристической функцией:

$$\begin{aligned} \theta(v_1, \dots, v_n; t_1, \dots, t_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \times \\ &\times \exp[j(v_1 x_1 + \dots + v_n x_n)] dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Получение и исследование многомерных ФРВ, ПРВ и характеристических функций вызывают серьезные трудности.

11.1.2. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ. СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Во многих случаях можно ограничиться более простыми характеристиками случайных процессов – их *моментными функциями*: начальными и центральными.

Начальные, или просто моментные, функции k -го порядка:

$$m_k(t) = M\{x^k(t)\} = \overline{x^k(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x, t) dx. \quad (11.18)$$

Центральные моментные функции k -го порядка:

$$\mu_k(t) = \overline{[x(t) - m_1(t)]^k} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_1(t)]^k w(x, t) dx. \quad (11.19)$$

Количественной характеристикой скорости изменения случайных процессов служат корреляционные моментные функции, устанавливающие статистическую взаимосвязь значений процессов в различных сечениях (в моменты t_1 и $t_2 = t_1 + \tau$):

$$B(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (11.20)$$

$$K(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m(t_2)) w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= B(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2), \quad (11.21)$$

называемые соответственно (*авто*) ковариационной и (*авто*) корреляционной функциями. В этих формулах $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ – двумерная ПРВ случайных величин X_1 и X_2 в сечениях t_1 и t_2 . В формуле (11.21) $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m(t)$ – центрированная СВ в сечении t .

В практических приложениях часто рассматриваются так называемые *стационарные* процессы. Если n -мерный закон распределения не изменяется при любом сдвиге τ всей группы сечений вдоль оси времени, т. е. если он инвариантен относительно времени:

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad (11.22)$$

то случайный процесс называется стационарным в *строгом* или *узком* смысле. Следовательно, двумерный и одномерный законы инвариантны относительно времени. Моментные функции превращаются в моменты – числовые характеристики закона распределения, т. е. $m_1(t) = m_1 = m$, $m_2(t) = m_2$, $D(t) = \mu_2(t) = \mu_2$ и т. д.

В рамках корреляционной теории (для моментов не выше второго порядка) стационарность процесса определяется в *широком* смысле. Ограничиваются требованием, чтобы математическое ожидание и дисперсия не зависели от времени, а корреляционная функция определялась бы только интервалом $\tau = t_2 - t_1$, т. е.

$$m_1(t) = m, \quad D(t) = D = \mu_2, \quad K(t_1, t_2) = K(\tau). \quad (11.23)$$

Процесс, стационарный в строгом смысле, будет стационарным и в широком смысле; обратное утверждение в общем случае неправомерно. Но для нормальных (гауссовых) процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. Такие процессы исчерпывающим образом описываются указанием математического ожидания m и АКФ $K(\tau)$.

Среди стационарных выделяют так называемые *эргодические* процессы. *Стационарный в узком смысле* процесс называется *эргодическим*, если любая вероятностная характеристика такого процесса, полученная усреднением по ансамблю реализаций, равна временному среднему, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени наблюдения T из одной реализации. Для случайного процесса, *стационарного в широком смысле*, условие

эргодичности формулируется относительно математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции. Следовательно:

$$m = M[X(t)] = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \langle X(t) \rangle, \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = D = M[(X(t) - m)^2] &= \overline{(X(t) - m)^2} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - m)^2 dt = \langle (X(t) - m)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned} B(\tau) = M[X(t)X(t - \tau)] &= \overline{X(t)X(t - \tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t - \tau) dt = \langle X(t)X(t - \tau) \rangle, \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$K(\tau) = B(\tau) - m^2. \quad (11.27)$$

Прямая черта и символ математического ожидания $M[\cdot]$ означают усреднение по ансамблю реализаций, а ломаные скобки – усреднение по времени.

Математическое ожидание (11.24) можно измерить инерционным стрелочным прибором; по сути это постоянная составляющая СП (напряжения или тока).

Дисперсия $D = \sigma^2$ имеет смысл мощности флюктуационной составляющей СП (выделяемой в сопротивлении 1 Ом). Измеритель дисперсии согласно (11.25) должен иметь разделительный конденсатор, не пропускающий постоянную составляющую, квадратор – множитель сигналов (ПС) – и интегратор (И) (рис. 11.4). Инерционный квадратичный вольтметр выполняет операции возведения в квадрат и усреднения. Без разделительного конденсатора устройство измеряет среднюю мощность m_2 СП:

$$\begin{aligned} m_2 = P_{\text{cp}} = M[(X(t))^2] &= \overline{(X(t))^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X(t))^2 dt = \langle (X(t))^2 \rangle, \\ D = m_2 - m^2. \end{aligned} \quad (11.28)$$

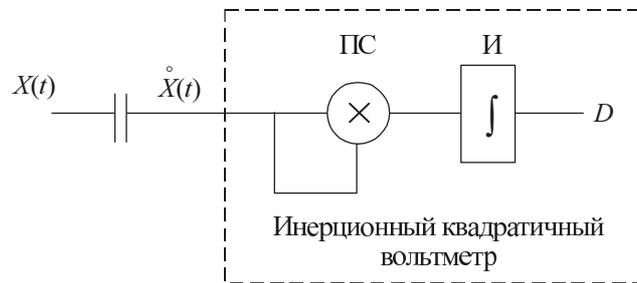


Рис. 11.4

Структурная схема устройства, реализующая алгоритм (11.26), была приведена в главе 3 (см. рис. 3.1).

Случайный процесс становится эргодическим, если выполняется условие Слуцкого

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau = 0.$$

11.1.3. КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СП

Корреляционные функции (КФ) СП общего типа описываются выражениями (11.20) и (11.21). Для стационарных СП $B(t_1, t_2) = B(\tau)$ и $K(t_1, t_2) = K(\tau)$; и, наконец, для эргодических СП вычисление КФ упрощается [(см. формулы (11.26) и (11.27)].

Корреляционные функции обладают следующими основными свойствами:

1. $B(\tau) = B(-\tau)$ и $K(\tau) = K(-\tau)$, т. е. они четные.
2. При $\tau = 0$ эти функции максимальны: $B(0) = m_2$, $K(0) = \mu_2 = D = m_2 - m^2$.
3. С ростом τ они убывают: $B(\tau) < B(0)$ и $K(\tau) < K(0)$.
4. При $\tau \rightarrow \infty$ $B(\infty) = m^2$ и $K(\infty) = 0$.

Типичные кривые $B(\tau)$ и $K(\tau)$, иллюстрирующие перечисленные свойства, показаны на рис. 11.5, а, б. На рис. 11.5, в дана нормированная корреляционная функция

$$R(\tau) = K(\tau) / K(0), \quad (11.29)$$

обладающая теми же свойствами (но при $R(0) = 1$).

5. Рассмотренные функции убывают не обязательно монотонно. Немонотонность имеет место, например, для процесса, содержащего детерминированную периодическую составляющую.

6. Для случайного процесса, не содержащего детерминированных составляющих, можно указать такой временной интервал, называемый *интервалом корреляции* τ_k , что при $\tau > \tau_k$ значения $X(t)$ и $X(t + \tau)$ практически не коррелированы, т. е. $K(\tau = \tau_k) \approx 0$.

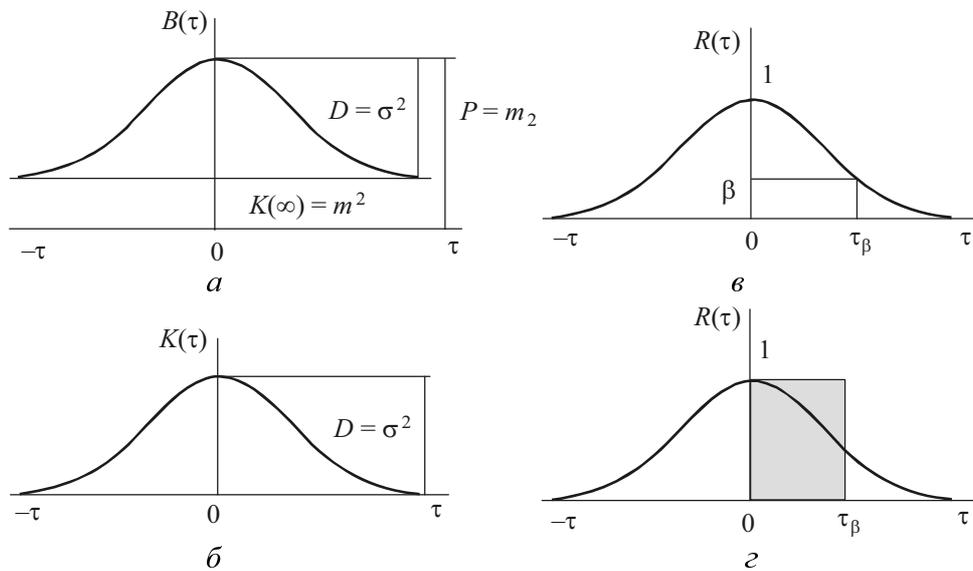


Рис. 11.5

Интервал корреляции определяют либо долей β от $R(0) = 1$, либо полушириной основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой $R(\tau)$. В первом случае для определения τ_β (рис. 11.4, в) нужно решить уравнение

$$R(\tau_\beta) = \beta, \quad (11.30)$$

а во втором для определения τ_k (рис. 11.5, г) необходимо вычислить интеграл

$$\tau_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau. \quad (11.31)$$

При колебательном характере изменения $R(\tau)$ интервал корреляции определяется координатой τ_0 прохождения $R(\tau)$ через первый нуль.

Заметим, что равенство $K(\tau)$ или $R(\tau)$ нулю еще не означает независимости случайных величин $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$, в то время как независимые случайные величины всегда не коррелированы и для них $K(\tau) = 0$. Однако для нормального случайного процесса отсутствие корреляции равносильно независимости.

7. Автокорреляционная функция $K(\tau)$ случайного процесса связана с его *спектральной плотностью* мощности (СПМ) $G(\omega)$. Эта связь согласно теореме Винера–Хинчина устанавливается парой преобразований Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \operatorname{Re} \left[2 \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (11.32)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (11.33)$$

АКФ и СПМ процессов присущи свойства, которые характерны для любой пары функций, связанных преобразованиями Фурье. В частности, чем уже АКФ $K(\tau)$, тем шире СПМ $G(\omega)$ и, наоборот, чем шире АКФ $K(\tau)$, тем уже СПМ $G(\omega)$.

СПМ для эргодического СП вычисляется усреднением энергетического спектра $|X(\omega)|^2$ по одной реализации (при большом ее интервале T):

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T}. \quad (11.34)$$

СПМ – это неотрицательная функция. Для СП с ненулевым математическим ожиданием m в формулу (11.34) добавляется еще слагаемое с дельта-функцией $m^2 2\pi\delta(\omega)$.

Если СП вещественный, то АКФ и СПМ – вещественные четные функции своих аргументов.

Если в качестве меры ширины спектра мощности ввести *эффективную (энергетическую) ширину*, определяемую основанием равновеликого по площади прямоугольника (на положительной полуоси частот), т. е.

$$\Delta\omega_3 = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad (11.35)$$

то произведение интервала корреляции τ_k на ширину спектра $\Delta\omega_3$ есть величина постоянная:

$$\tau_k \Delta\omega_3 = \pi/2 \quad \text{и} \quad \tau_k \Delta f_3 = 1/4, \quad (11.36)$$

где $\Delta f_3 = \Delta\omega_3 / 2\pi$.

Взаимная корреляционная функция двух СП

При суммировании двух случайных процессов, т. е.

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad (11.37)$$

обладающих известными характеристиками, автокорреляционная функция суммы

$$\begin{aligned} K_z(t_1, t_2) &= M \left\{ \overset{\circ}{Z}(t_1) \overset{\circ}{Z}(t_2) \right\} = M \left\{ \left(\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_1) \right) \left(\overset{\circ}{X}(t_2) \overset{\circ}{Y}(t_2) \right) \right\} = \\ &= M \left\{ \overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2) \right\} + M \left\{ \overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) \right\} + M \left\{ \overset{\circ}{X}(t_2) \overset{\circ}{Y}(t_1) \right\} + M \left\{ \overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) \right\} = \\ &= K_x(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (11.38)$$

т. е. равна сумме автокорреляционных функций $K_x(t_1, t_2)$, $K_y(t_1, t_2)$ и так называемых взаимных корреляционных функций (ВКФ) $K_{xy}(t_1, t_2)$ и $K_{yx}(t_1, t_2)$ этих процессов.

Случайные процессы называют *стационарно связанными*, если ВКФ $K_{xy}(t_1, t_2)$ и $K_{yx}(t_1, t_2)$ зависят не от самих аргументов t_1 и t_2 , а только от разности $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \quad (11.39)$$

Для *статистически независимых* процессов $K_{xy}(\tau) = K_{yx}(\tau) = 0$, и это означает, что процессы *не коррелированы*. Обратное утверждение в общем случае несправедливо.

Отметим, что ВКФ не обязательно обладает перечисленными свойствами автокорреляционной функции (АКФ).

Одномерный закон распределения суммарного процесса $Z(t)$ в случае статистически независимых процессов $X(t)$ и $Y(t)$ определится как *композиция* законов распределения слагаемых, т. е. как свертка:

$$w_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_x(x)w_y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} w_y(y)w_x(z-y)dy ; \quad (11.40)$$

при этом характеристическая функция $\theta_z(v)$ равна произведению характеристических функций исходных процессов, т. е.

$$\theta_z(v) = \theta_x(v)\theta_y(v) \quad (11.41)$$

и

$$w_z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\theta_x(v)\theta_y(v)]e^{-jvz} dv . \quad (11.42)$$

С помощью характеристических функций удобно также находить плотность вероятности стационарного случайного процесса, подвергнутого функциональному преобразованию. Так, если $z = f(x)$, то

$$\theta_z(v) = M\{\exp(jvz)\} = M\{\exp[jvf(x)]\} . \quad (11.43)$$

В заключение приведем условную схему (граф) основных характеристик случайного процесса (рис. 11.6)

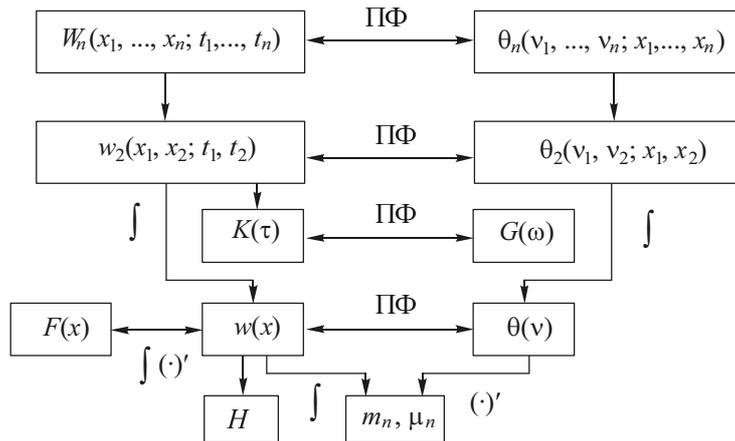


Рис. 11.6

Каждая из стрелок на схеме указывает на возможность перехода от одной характеристики к другой посредством математического преобразования; знак \int означает интегральное преобразование, знак $(\cdot)'$ указывает на производную, ПФ – преобразования Фурье.

11.2. ПРИМЕРЫ

11.2.1. ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СП В СЕЧЕНИИ

Пример 1. Определение вероятности событий. Напряжение $u(t)$ представляет собой стационарный нормальный процесс с математическим ожиданием $m = 0.1$ В и СКО $\sigma = 0.2$ мВ. Определим вероятность того, что мгновенное значение напряжения: 1) не превысит порогового значения $U_{\text{п}} = 0.4$ В, 2) превысит это значение.

Вероятность первого события

$$P(u < U_{\text{п}}) = \int_{-\infty}^{U_{\text{п}}} w(u) du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{U_{\text{п}}} \exp\left[-(u-m)^2 / 2\sigma^2\right] du.$$

Введем переменную $x = (u - m) / \sigma$. Тогда $dx = du / \sigma$ и

$$P(u < U_{\text{п}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_{\text{п}}} \exp(-x^2 / 2) dx = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности, приводимый в табл. П.10.2 (прил. П.10). В рассматриваемом случае $x = (0.4 - 0.1) / 0.2 = 1.5$ и $P(u < U_{\text{п}}) = \Phi(x) = 0.9332$.

Вероятность второго события

$$P(u > U_{\text{п}}) = \int_{U_{\text{п}}}^{\infty} w(u) du = 1 - P(u < U_{\text{п}}) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$

Пример 2. Математическое ожидание и дисперсия экспоненциального распределения. Найдем математическое ожидание m и дисперсию D СП, мгновенное значение которого распределено по экспоненциальному закону

$$w(u) = \lambda e^{-\lambda u}, \quad 0 < u < \infty.$$

(Параметр λ имеет размерность $[1/\text{В}]$.)

По формуле (11.7) для $n = 1$ имеем

$$m_1 = m = \int_{-\infty}^{\infty} u w(u) du = \lambda \int_0^{\infty} u e^{-\lambda u} du = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \text{ В.}$$

В соответствии с формулой (11.7) определим момент второго порядка:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 w(u) du = \lambda \int_0^{\infty} u^2 e^{-\lambda u} du = \lambda \frac{2}{\lambda^{2+1}} = \frac{2}{\lambda^2} \text{ В}^2.$$

Дисперсию вычислим из соотношения (11.10):

$$D = \sigma^2 = m_2 - m^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ В}^2.$$

Пример 3. Характеристическая функция и энтропия равномерного закона. Предлагается вывести формулы для определения характеристической функции $\theta(j\nu)$ и энтропии СП с равномерным распределением мгновенного значения (рис. 11.7).

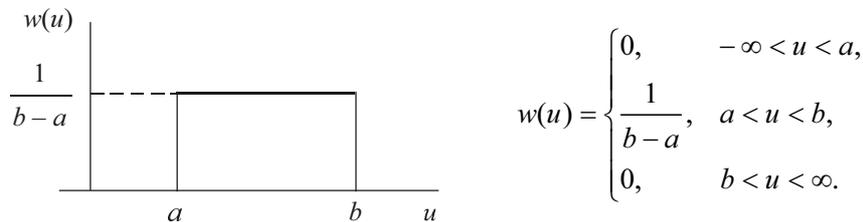


Рис. 11.7

Характеристическая функция согласно (11.6) запишется как

$$\theta(j\nu) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{j\nu u} du = \frac{1}{b-a} \frac{1}{j\nu} e^{j\nu u} \Big|_a^b = \frac{1}{\Delta\nu} \frac{1}{j2} (e^{j\nu b} - e^{j\nu a}) = \frac{\sin(\Delta\nu)}{\Delta\nu} e^{j\nu m},$$

где $\Delta = (b-a)/2$, $m = (a+b)/2$. На рис. 11.8 показан график модуля характеристической функции. Ширина лепестка $\nu_0 = \pi/\Delta = 2\pi/(b-a)$. Размерности величин: a, b, Δ, m — [В], ν — [рад/В].

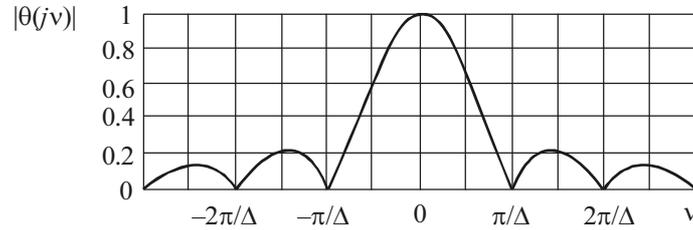


Рис. 11.8

Для определения энтропии воспользуемся выражением (11.14):

$$\begin{aligned} H &= - \int_{-\infty}^{\infty} \ln[w(u)]w(u)du = - \int_a^b \ln \left[\frac{1(B)}{b-a} \right] \frac{1}{b-a} du = - \ln \left[\frac{1}{b-a} \right] \frac{1}{b-a} \int_a^b du = \\ &= \ln \left[\frac{1}{b-a} \right] \frac{1}{b-a} (b-a) = - \ln(1/(b-a)) = \ln(b-a). \end{aligned}$$

Следует отметить, что ПРВ $w(u)$ имеет размерность $1/B$. Логарифм может быть вычислен только от безразмерной величины. Поэтому под знаком логарифма следует ввести размерную единицу, т. е. множитель $1/B$. Таким образом, энтропия – безразмерная величина.

Пример 4. Определение моментов СП по кумулянтным функциям. Случайный процесс в фиксированный момент времени характеризуется нормальным распределением, ПРВ и характеристическая функция которого имеют вид

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp(-(u-a)^2 / 2\sigma^2), \quad \theta(j\nu) = \exp(j\nu a - \sigma^2 \nu^2 / 2).$$

Определим первые четыре момента, используя аппарат кумулянтных функций.

Воспользуемся выражениями (11.15). Кумулянтная функция будет

$$\psi(\nu) = \ln[\theta(\nu)] = j\nu a - \sigma^2 \nu^2 / 2.$$

Начальный момент первого порядка $m_1 = m = j^{-1}\theta'(0)$. Из предыдущей формулы очевидно, что $\psi'(j\nu) = \theta'(j\nu)/\theta(j\nu)$. При $\nu = 0$ имеем $\theta(0) = 1$ и $\psi'(0) = \theta'(0)$. Тогда

$$m_1 = m = j^{-1}\theta'(0) = j^{-1}\psi'(0) = j^{-1}(ja - 2\sigma^2 \nu / 2)_{\nu=0} = j^{-1}(ja) = a.$$

Центральный момент второго порядка

$$\mu_2 = D = -\psi''(0) = -(jav - \sigma^2 v^2 / 2)''_{v=0} = \sigma^2.$$

Центральный момент третьего порядка

$$\mu_3 = -j^3 d^3 \psi(0) / dv^3 = 0.$$

Центральный момент четвертого порядка

$$\mu_4 = j^4 d^4 \psi(0) / dv^4 + 3\mu_2^2 = 3\mu_2^2 = 3\sigma^4.$$

Пример 5. ПРВ функции случайной величины. Пусть СВ Y связана с X однозначной зависимостью $y = f(x)$. Тогда вероятность того, что СВ Y заключена в интервале $[y, y + dy]$, должна быть равна вероятности пребывания случайной величины X в соответствующем интервале $[x, x + dx]$ (рис. 11.9), т. е.

$$P(y \leq Y \leq y + dy) = P(x \leq X \leq x + dx), \quad (11.44)$$

или

$$w(y)dy = w(x)dx. \quad (11.45)$$

Из (11.45) следует, что

$$w(y) = \frac{w(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = w(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = w[\varphi(y)] |\varphi'(y)|, \quad (11.46)$$

где $x = \varphi(y)$ – функция, обратная функции $y = f(x)$, $\varphi'(y) = d\varphi(y) / dy$. При этом производная берется по абсолютному значению (модулю), так как функция $\varphi(y)$ может быть отрицательной, а плотность вероятности отрицательной быть не может.

Если зависимость $y = f(x)$ и, следовательно, обратная зависимость $x = \varphi(y)$ неоднозначна (рис. 11.10), то

$$w(x) = \left[\frac{w(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \right]_{x=x_1} + \dots + \left[\frac{w(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \right]_{x=x_i}, \quad (11.47)$$

где x_1, \dots, x_i – значения величины x , соответствующие рассматриваемому значению y .

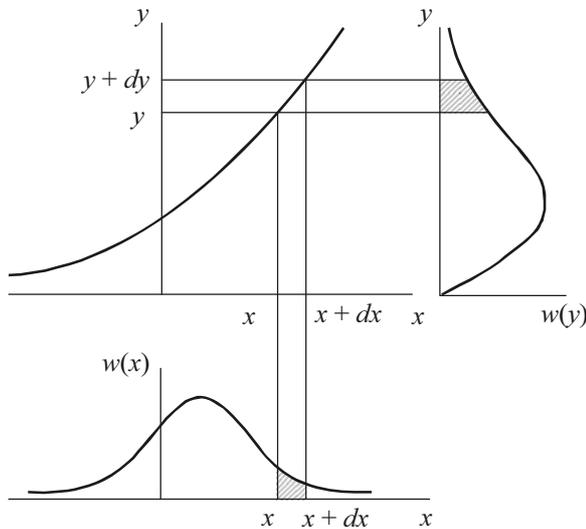


Рис. 11.9

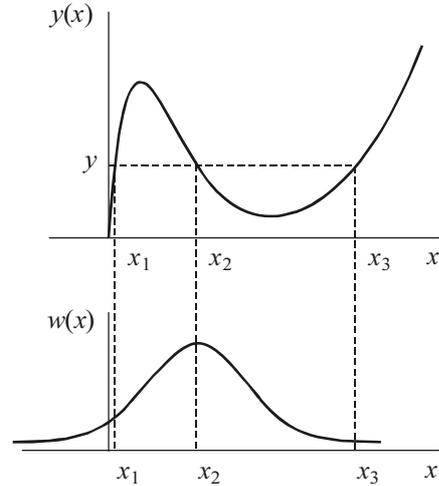


Рис. 11.10

Пример 6. Функциональное преобразование СП. Нормальный случайный процесс $X(t)$ в фиксированный момент времени t описывается ПРВ:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \exp\left[-(x - m_x)^2 / 2\sigma_x^2\right].$$

Этот процесс воздействует на линейную безынерционную цепь, описываемую линейным преобразованием $y = ax + b$. Требуется найти ПРВ $w(y)$ СП $Y(t)$ на выходе цепи.

Согласно (11.45) получаем

$$w(y) = \frac{w(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = \frac{w(x)}{|a|} = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \exp\left[-(x - m_x)^2 / 2\sigma_x^2\right].$$

Выразим функцию $x = \varphi(y)$, обратную функции $y = f(x) = ax + b$:

$$x = \varphi(y) = (y - b) / a.$$

Подставляя эту функцию в выражение $w(y)$, получаем

$$w(y) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \exp\left[-\left(\frac{y - b}{a} - m_x\right)^2 / 2\sigma_x^2\right] =$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(y - (am_x + b))^2 / 2a^2\sigma_x^2\right] = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(y - m_y)^2 / 2\sigma_y^2\right].$$

Таким образом, закон распределения случайной величины Y также нормальный, но с новыми параметрами: математическим ожиданием $m_y = am_x + b$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

11.2.2. РАЗЛИЧНЫЕ СП

Пример 7. Гармоническое колебание со случайной начальной фазой. Рассмотрим СП $X(t)$, реализации которого представляют собой гармоническое колебание (рис. 11.11):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \psi(t).$$

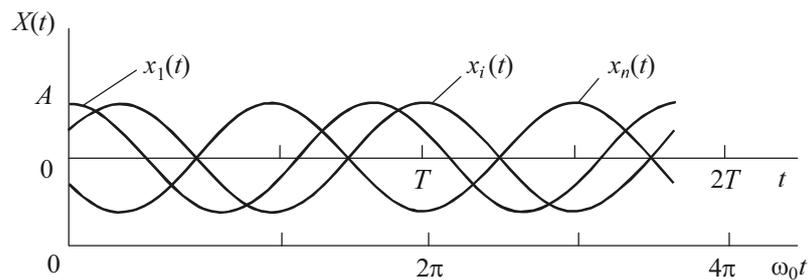


Рис. 11.11

Амплитуда A и частота ω_0 – заранее известные константы, а начальная фаза φ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π , т. е.

$$w(\varphi) = 1 / (2\pi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Полная фаза $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi$ – также случайная величина

$$w(\psi) = \frac{w(\varphi)}{|d\psi/d\varphi|} = 1 / (2\pi), \quad \omega_0 t - \pi \leq \varphi \leq \omega_0 t + \pi.$$

Найдем вероятность того, что в интервале времени от t_1 до $t_1 + dt$ мгновенное значение колебания будет находиться в интервале от x до $x + dx$. Эта вероятность $w(x)dx$ равна вероятности попадания полной фазы ψ в один из двух фазовых интервалов, закрашенных на рис. 11.12, а. Поэтому $w(x)dx = 2w(\psi)d\psi$ и

$$w(x) = \frac{2w(\psi)}{\left| \frac{dx}{d\psi} \right|} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{A |\sin \varphi|} = \frac{1}{\pi A \sqrt{1 - \cos^2 \psi}} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, \quad -A \leq x \leq A.$$

ПРВ $w(x)$ изображена графически на рис. 11.12, б.

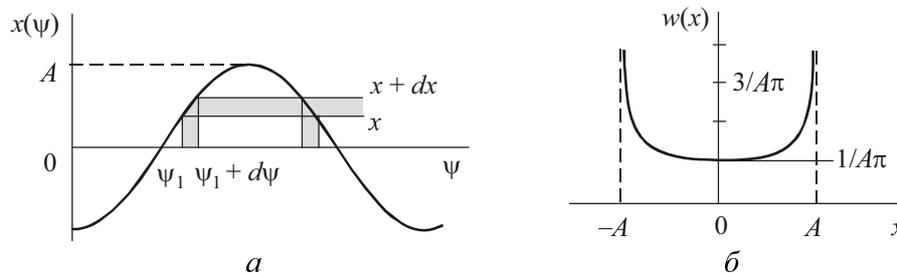


Рис. 11.12

Таким образом, ПРВ случайной величины X не зависит от момента времени t .

Определим основные моменты этого СП и классифицируем его по признакам стационарности и эргодичности.

Математическое ожидание (среднее по ансамблю)

$$m = \overline{X(t)} = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left(-\sqrt{A^2 - x^2} \Big|_{-A}^A \right) = 0.$$

Дисперсия

$$D = \mu_2 = m_2 - m^2 = m_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{x^2}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2} \Big|_{-A}^A + \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{x}{A} \Big|_{-A}^A \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{A^2}{2} \arcsin(1) - \frac{A^2}{2} \arcsin(-1) \right) = \frac{1}{\pi} \frac{A^2}{2} \pi = \frac{A^2}{2}.$$

Здесь использованы неопределенные интегралы № 27 и № 28 из прил. П.3. АКФ, совпадающая с автоковариационной функцией (так как $m = 0$),

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M[x(t_1)x(t_2)] = M\left[A^2 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\right] = \\ &= \frac{A^2}{2} M[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)] + \frac{A^2}{2} M[\cos \omega_0(t_2 - t_1)]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое при статистическом усреднении с использованием ПРВ $w(\varphi) = 1/2\pi$ обращается в нуль, а второе слагаемое – это детерминированная функция, математическое ожидание которой равно самой функции. Следовательно, АКФ примет вид

$$K(t_1, t_2) = K(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \tau,$$

и она не зависит от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси времени.

Таким образом, рассматриваемый случайный процесс отвечает условиям (11.23) *стационарности* в широком смысле.

Нетрудно показать (проделайте самостоятельно), что такой же результат получится при вычислении m , D и $K(\tau)$ с помощью усреднения по времени для любой реализации процесса. Следовательно, процесс – *эргодический*.

Пример 8. Производная от эргодического СП. Любая реализация СП $Y(t)$ есть производная реализации стационарного СП $X(t)$, т. е. $Y(t) = dX(t)/dt$. Определим математическое ожидание m_y , СПМ $W_y(\omega)$ и АКФ $K_y(\tau)$.

Математическое ожидание производной по реализациям

$$m_y = \bar{y} = \frac{d}{dt} m_x = 0.$$

По теореме о спектре производной имеем $Y(j\omega) = j\omega Y(\omega)$. Следовательно, СПЭ производной будет $W_y(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |j\omega X(\omega)|^2 = \omega^2 W_x(\omega)$. Тогда СПМ

$$G_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} W_y(\omega) = \omega^2 \lim_{T \rightarrow \infty} W_x(\omega) = \omega^2 G_x(\omega). \quad (11.48)$$

Определим АКФ. Полагаем, что $m_x = 0$ (в противном случае можно перейти к центрированному процессу $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x$). По теореме Винера–Хинчина СПМ и АКФ связаны парой преобразований Фурье. Тогда

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = -K_x''(\tau).$$

Докажем это соотношение от обратного. Формально спектральное представление производных АКФ процесса $X(t)$ будет

$$K_x'(\tau) \leftrightarrow j\omega G_x^{(1)}(\omega), \quad K_x''(\tau) \leftrightarrow j\omega G_x^{(1)}(\omega) = -\omega^2 G_x(\omega) = -G_y(\omega).$$

Учитывая, что СПМ $G_y(\omega)$ соответствует АКФ $K_y(\tau)$, получаем

$$G_y(\omega) = \omega^2 G_x(\omega) \leftrightarrow K_y(\tau) = -K_x''(\tau) = -\sigma_x^2 R_x''(\tau). \quad (11.49)$$

Таким образом, для дифференцируемости СП необходимо, чтобы дисперсия производной $\sigma_y^2 = -K_x(0) = -\sigma_x^2 R_x''(0)$, т. е. вторая производная его АКФ в нуле, была конечной величиной, а это значит, что первая производная не должна иметь разрыва в этой точке.

К числу недифференцируемых относится СП с АКФ вида $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$.

Пример 9. Узкополосный СП. Узкополосный, или радиосигнал, был рассмотрен в главе 10. В общем виде он может быть записан как

$$x(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (11.50)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – огибающая и начальная фаза – медленные функции по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

Выражением (11.50) можно представить как детерминированные, так и случайные процессы.

Рассмотрим гауссовский узкополосный СП с нулевым математическим ожиданием, сформированный, например, из белого шума вырезанием узкой полосы частот с центральной частотой ω_0 (при прохождении СП через поло-

совой фильтр). Для нахождения ПРВ огибающей и фазы используем модель СП в виде двух ортогональных (квадратурных) колебаний:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - A(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t = \\ &= A_1 \cos \omega_0 t - A_2 \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (11.51)$$

где $A_1 = A(t) \cos \varphi(t)$ и $A_2 = A(t) \sin \varphi(t)$ – амплитуды косинусной и синусной составляющих процесса $x(t)$, при этом $A = A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Так как нормальный стационарный процесс $x(t)$ инвариантен относительно выбора начала отсчета времени t , то амплитуды A_1 и A_2 его ортогональных составляющих также имеют нормальный закон распределения. Поскольку эти составляющие для одного и того же времени t независимы, совместный (двумерный) закон распределения A_1 и A_2 можно записать в виде

$$w(A_1, A_2) = w(A_1)w(A_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\left(A_1^2 + A_2^2\right)/2\sigma^2\right) = \frac{1}{2\pi} \exp(-A^2 / 2\sigma^2),$$

где $\sigma^2 = \overline{A_1^2(t)} = \overline{A_2^2(t)} = \overline{x^2(t)}$ – дисперсия; A – вектор, величина которого равна значению огибающей $A(t)$ в фиксированный момент времени t . Вероятность попадания конца вектора A в элементарную прямоугольную площадку $dA_1 dA_2$ (рис. 11.13, а) будет $w(A_1, A_2) dA_1 dA_2$.

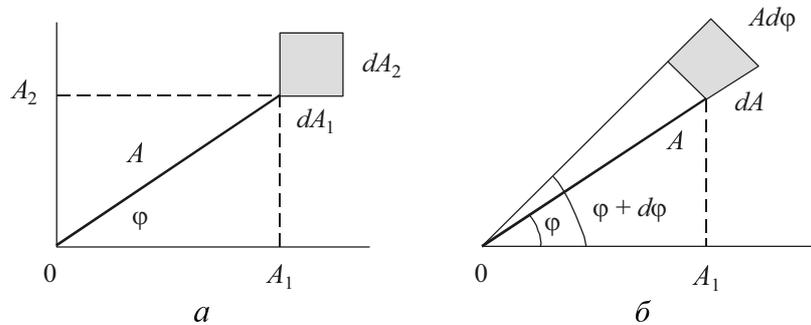


Рис. 11.13

При переходе к полярным координатам A и φ равновеликая площадка (рис. 11.13, б) будет $AdA d\varphi$. Вероятность попадания в нее вектора A :

$$w(A, \varphi) dA d\varphi = w(A_1, A_2) dA_1 dA_2.$$

Подставляя сюда $dA_1 dA_2 = AdAd\varphi$ и используя обратные функции перехода из полярных координат в декартовы, для совместной плотности ПРВ огибающей и фазы получим

$$\begin{aligned} w(A, \varphi) &= \frac{w(A_1, A_2) dA_1 dA_2}{dAd\varphi} = \frac{w(A_1, A_2) AdAd\varphi}{dAd\varphi} = \\ &= \frac{A}{\sigma^2} \exp(-A^2 / 2\sigma^2) \frac{1}{2\pi} = w(A)w(\varphi). \end{aligned} \quad (11.52)$$

ПРВ огибающей

$$w(A) = \int_0^{2\pi} w(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{2\sigma^2} \exp(-A^2 / 2\sigma^2), \quad 0 < A < \infty, \quad (11.53)$$

называется *распределением Рэлея*. Его характеристики и параметры приведены в прил. П.10.

Интегрирование $w(A, \varphi)$ по переменной A дает одномерную плотность вероятности фазы

$$w(\varphi) = \int_0^{\infty} w(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (11.54)$$

Таким образом, начальная фаза φ распределена по равномерному закону.

Пример 10. Распределение огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного нормального шума. Имеется сумма нормального узкополосного шума $x(t)$ вида (11.50) и гармонического колебания $u_c(t) = U_m \cos \omega_0 t$, т. е.

$$u(t) = u_c(t) + x(t) = U_m \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Представим это выражение в виде, аналогичном (11.50), но с учетом (11.51):

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] = (U_m + A_1) \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t,$$

где $U = U(t) = \sqrt{(U_m + A_1)^2 + A_2^2}$, $A_1 = A(t) \cos \varphi(t)$, $A_2 = A(t) \sin \varphi(t)$. На векторной диаграмме рис. 11.14 показано геометрическое представление $U(t)$ и $\Phi(t)$.

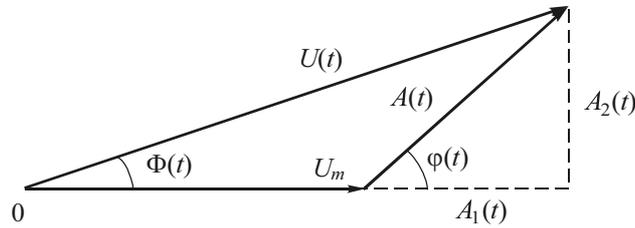


Рис. 11.14

Как отмечалось в примере 9, ортогональные компоненты амплитуды результирующего процесса имеют нормальные законы распределения и совместная ПРВ U и Φ будет

$$w(A_1, A_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(A_1 - U_m)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{A_2^2}{2\sigma^2}\right).$$

Рассуждая аналогично тому, как это сделано в примере 9, можно записать равенство

$$w(A_1, A_2) dA_1 dA_2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(A_1 - U_m)^2 + A_2^2}{2\sigma^2}\right] dA_1 dA_2.$$

После преобразования прямоугольных координат в полярные получим

$$w(U, \Phi) = \frac{U}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{U^2 + U_m^2 - 2UU_m \cos \Phi}{2\sigma^2}\right]. \quad (11.55)$$

Интегрирование (11.55) по Φ дает выражение ПРВ огибающей:

$$w(U) = \frac{U}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{UU_m}{\sigma^2}\right), \quad (11.56)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (рис. 11.15). Она получена как результат интегрирования функции $\exp(UU_m \cos \Phi / \sigma^2)$ в выражении (11.55) по Φ в интервале $(0, 2\pi)$.

Распределение (11.56) называют *обобщенным законом Рэлея* или *законом Райса*. Сведения об этом законе приведены в прил. П.10. На рис. 11.16 проиллюстрирована зависимость (11.56) для различных значений U_m . В частном

случае, когда $U_m = 0$, функция Бесселя $I_0(0) = 1$ и формула (11.56) переходит в (11.53) – распределение по Рэлею. При $U_m / \sigma > 3$ практически считают, что распределение нормализуется.

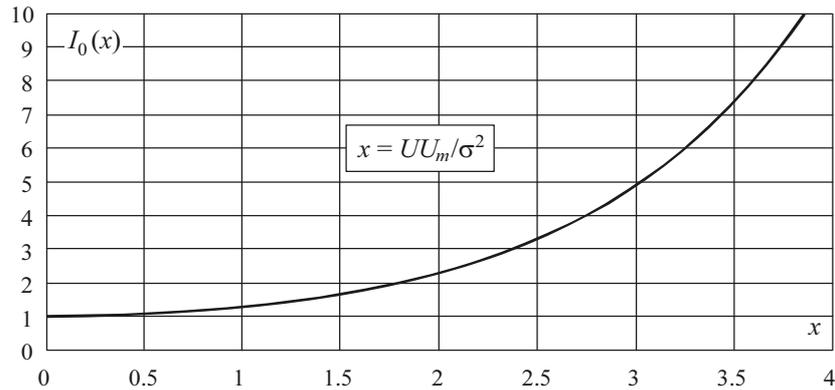


Рис. 11.15

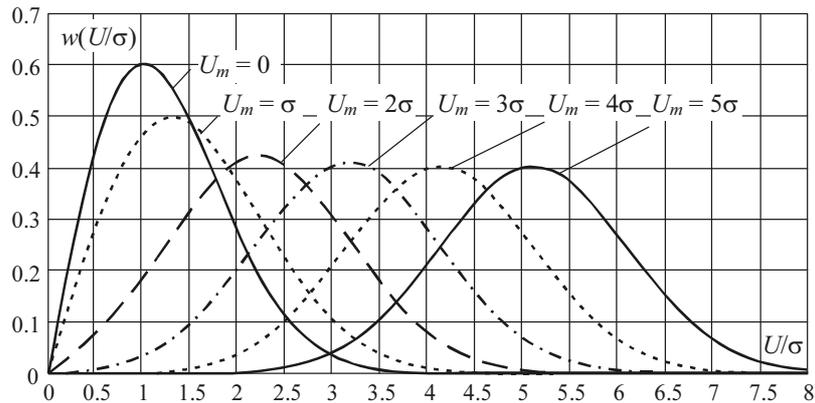


Рис. 11.16

Формула (11.55) отличается от формулы (11.52) не только присутствием амплитуды сигнала U_m , но и зависимостью сдвига фазы от ожидаемого значения. Усредняя (11.55) по всем возможным значениям A (от нуля до бесконечности), получаем распределение для результирующей фазы:

$$w(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-U_m^2 / 2\sigma^2\right) +$$

$$+ \frac{U_m \cos \Phi}{\sigma \sqrt{2\pi}} \Phi(U_m \cos \Phi) \exp\left(-\frac{U_m^2 \sin^2 \Phi}{2\sigma^2}\right), \quad (11.57)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция Лапласа (прил. П.9.2). Графический ход распределения изображен на рис. 11.17.

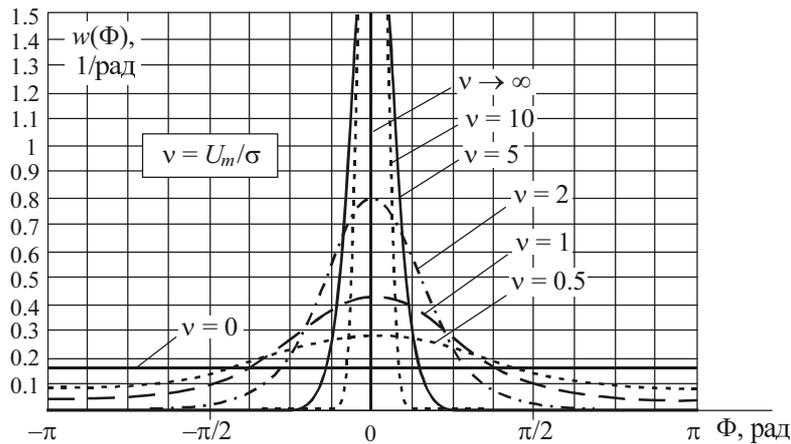


Рис. 11.17

При отсутствии гармонического сигнала ($U_m = 0$) $\Phi = \varphi$ (см. рис. 11.17) все значения фазы равновероятны. По мере увеличения амплитуды гармонической составляющей, т. е. с ростом отношения сигнал/шум ($v = U_m / \sigma$), дисперсия фазы стремится к нулю, и фаза Φ результирующего процесса все меньше и меньше отличается от фазы φ_0 этой составляющей. В пределе при $U_m / \sigma \rightarrow \infty$ сдвиг фазы Φ из случайного становится достоверным, равным сдвигу фазы φ_0 сигнала (в рассмотренном случае φ_0).

11.3. УПРАЖНЕНИЯ

11.3.1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В СЕЧЕНИИ

1. Случайный процесс $X(t)$ в фиксированный момент времени определяется одномерной плотностью вероятности вида

$$w(x) = ae^{-bx} \quad \text{при } x > 0.$$

Установите связь между параметрами a и b .

2. Задан одномерный интегральный закон распределения вероятностей случайного процесса $X(t)$

$$F(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите значение параметра a , плотность вероятности $w(x)$, а затем вероятность того, что случайная переменная X будет лежать в интервале от x_1 до x_2 , причем: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$; б) $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$; в) $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$.

3. По графически заданной функции распределения $F(x)$ стационарного случайного процесса (рис. 11.18) определите и постройте ПРВ $w(x)$.

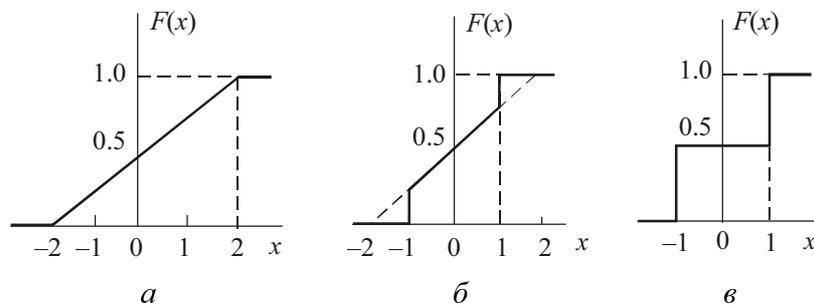


Рис. 11.18

4. По известной ПРВ гармонического колебания со случайной начальной фазой

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad -A \leq x \leq A,$$

найдите интегральный закон распределения вероятностей $F(x)$ и определите вероятность того, что X будет находиться в интервале $[-A+b, A-c]$. Проведите расчет для случая, когда $b = c = A/2$.

5. Функция распределения вероятностей описывается выражением (закон Рэлея)

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2 / 2\sigma^2).$$

Определите, начиная с какого значения x_0 $F(x) > 0.999$.

6. Найдите моду и медиану соответствующего одномерного закона распределения вероятностей:

а) нормального

$$w(x) = \left(1 / \sigma \sqrt{2\pi}\right) \exp\left[-(x-a)^2 / 2\sigma^2\right];$$

б) линейно-экспоненциального

$$w(x) = x \exp(-ax), \quad x > 0, \quad a = 1;$$

в) Рэлея

$$w(x) = (x / \sigma^2) \exp(-x^2 / 2\sigma^2), \quad x > 0.$$

7. Задана ПРВ нормального стационарного процесса:

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-(u-m)^2 / 2\sigma^2\right),$$

где $m = 0$, $\sigma = 2$ В. Определите вероятность того, что мгновенное значение напряжения: а) находится в пределах от 0 до 2 В; б) превышает 2 В.

8. На пороговую схему (электронное реле) воздействует случайное напряжение, распределенное по рэлеевскому закону:

$$w(u) = (u / \sigma^2) \exp(-u^2 / 2\sigma^2), \quad u > 0.$$

Какова вероятность срабатывания схемы в некоторый фиксированный момент времени t_1 , если пороговое значение $U_n = 3$ В, $\sigma = 1$ В?

9. На входе пороговой схемы действует случайное напряжение, имеющее нормальный закон распределения вероятностей с параметрами: $m_u = 5$ В, $\sigma_u = 0.5$ В. Пороговое напряжение схемы $U_n = 5.55$ В. Какова вероятность срабатывания схемы в некоторый фиксированный момент времени?

10. Напряжение на выходе пороговой схемы представляет собой случайный процесс $U(t)$, каждая реализация которого $u(t)$ (рис. 11.19) становится последовательностью прямоугольных импульсов одинаковой амплитуды A и случайной длительности τ . Известно, что $P(0) = P(A) = 0.5$. Найдите и изобразите функцию распределения и плотность вероятности этого случайного процесса.

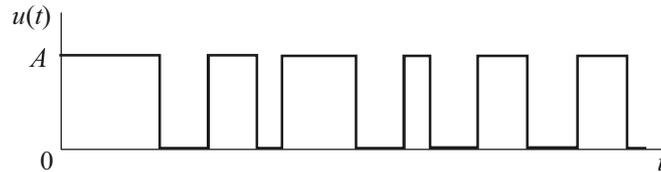


Рис. 11.19

11. Случайная величина X в сечении процесса $X(t)$ имеет ПРВ вида (рис. 11.20, а):

$$w(x) = Ae^{-|x|}.$$

Определите: коэффициент A , математическое ожидание m , дисперсию D , СКО σ , коэффициенты асимметрии γ_a и эксцесса γ_3 .

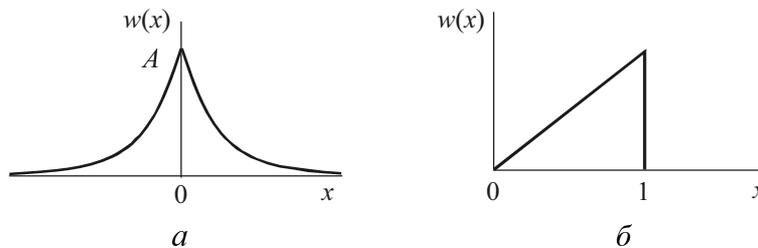


Рис. 11.20

12. ПРВ $w(x)$ случайной величины X представлена графически на рис. 11.20, б. Запишите выражение ПРВ и вычислите математическое ожидание m , дисперсию D , СКО σ и коэффициент асимметрии γ_a .

13. По заданному двумерному закону распределения вероятностей

$$w_2(x_1, x_2) = \left(2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}\right)^{-1} \exp\left\{-\left[2\sigma^2(1-R)^2\right]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[(x_1 - m)^2 - 2R(x_1 - m)(x_2 - m) + (x_2 - m)^2\right]\right\},$$

статистически связывающему мгновенные значения X_1 и X_2 нормального стационарного случайного процесса $X(t)$ в сечениях t_1 и t_2 , в котором m , σ и R – параметры распределения, найдите двумерный закон в независимых сечениях и одномерный закон в сечении t_1 .

Найдите также вероятность $P(X_1 > C)$, $C = m + 3\sigma$, т. е. вероятность превышения случайной величиной X_1 порогового уровня $X_n = C = m + 3\sigma$.

11.3.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЭНТРОПИЯ

14. Найдите характеристическую функцию $\theta(j\nu)$ случайной величины X , имеющей плотность вероятности

$$w(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad \lambda > 0, \quad x > 0.$$

Запишите модуль $|\theta(j\nu)|$ и аргумент $\varphi(\nu)$ характеристической функции и постройте графики.

15. Используя результаты, полученные в предыдущем упражнении, определите математическое ожидание m случайной величины X с помощью характеристической функции.

16. Покажите, что если закону $w(x)$ соответствует характеристическая функция $\theta(j\nu)$, то закону $w(x \mp x_0)$ – характеристическая функция $\theta(j\nu)\exp(\pm j\nu x_0)$.

17. Найдите характеристическую функцию $\theta(j\nu)$ нормального закона с нулевым математическим ожиданием

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

18. Определите плотность вероятности $w_z(z)$ случайной величины Z , каждая реализация которой представляет сумму независимых случайных величин X и Y с экспоненциальным законом распределения:

$$w_x(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x > 0, \quad w_y(y) = \lambda \exp(-\lambda y), \quad y > 0.$$

Решение выполните как прямым методом [по формуле свертки (11.40)], так и на основе характеристических функций [по формулам (11.41) и (11.42)].

19. Закон распределения случайных независимых величин X и Y одинаков – нормальный (гауссов):

$$w_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad w_y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right).$$

Определите закон распределения $w_z(z)$ суммы $z = x + y$.

20. Найдите энтропию H равномерного закона распределения вероятностей

$$w(x) = 1/(b-a), \quad a < x < b.$$

21. Определите энтропию нормального шума $U(t)$; плотность вероятности определяется выражением

$$w(u) = \left(1/\sigma\sqrt{2\pi}\right) \exp\left[-(u-m)^2/2\sigma^2\right].$$

22. Используя результат, полученный в упражнениях 17 и 18, найдите разность энтропий $\Delta H = H_n - H_p$ нормального и равномерного законов при одном и том же среднеквадратическом отклонении σ .

11.3.3. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ. СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

23. Задан случайный процесс в виде постоянного напряжения случайного уровня $X(t) = X = U$, изменяющегося от одной реализации к другой. Найдите математическое ожидание, дисперсию и АКФ процесса. Можно ли процесс $X(t)$ назвать стационарным и эргодическим?

24. Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса

$$Z(t) = XS(t),$$

где X – случайная величина с заданными математическим ожиданием m_x и дисперсией $D_x = \sigma_x^2$, а $S(t)$ – детерминированная функция времени. Классифицируйте процесс $Z(t)$ по признакам стационарности и эргодичности.

25. Определите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса

$$Z(t) = X(t)S(t),$$

где $X(t)$ – эргодический случайный процесс с известными математическим ожиданием m_x , дисперсией D_x и корреляционной функцией $K_x(\tau)$, а $S(t)$ – детерминированная функция. Можно ли процесс $Z(t)$ назвать стационарным?

26. Определите математическое ожидание и корреляционную функцию процесса

$$Z(t) = X(t)S_1(t) + Y(t)S_2(t),$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ – некоррелированные стационарные случайные процессы с известными математическими ожиданиями m_x и m_y , дисперсиями D_x и D_y и корреляционными функциями $K_x(\tau)$ и $K_y(\tau)$, а $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – детерминированные функции времени. Стационарен ли процесс $Z(t)$?

27. Задан случайный процесс

$$Z(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где A и ω_0 – положительные постоянные (амплитуда и частота), а φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е. $w(\varphi) = 1/2\pi$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и АКФ, а также классифицируйте процесс по признакам стационарности.

28. Докажите, что процесс $Z(t)$, рассмотренный в предыдущем упражнении, эргодичен относительно математического ожидания и корреляционной функции. Найдите $m_z(t)$ и $K_z(\tau)$ усреднением по времени.

29. Стационарный случайный процесс $U(t)$ имеет функцию распределения $F(u) = 1 - \exp(-au)$, $u > 0$, $a > 0$. Определите математическое ожидание m_u , средний квадрат m_{2u} и дисперсию D_u этого процесса.

30. Стационарный случайный процесс $X(t)$ с заданными математическим ожиданием m_x , дисперсией D_x и одномерной плотностью вероятности $w(x)$ умножили на константу K , например, пропустили через широкополосную линейную цепь с коэффициентом передачи K . Как изменятся указанные параметры случайного процесса?

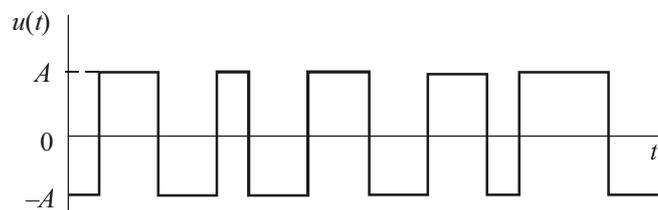


Рис. 11.21

31. Найдите плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию стационарного процесса $U(t)$ вида «телеграфного сигнала», реализация которого $u(t)$ показана на рис. 11.21. Известно, что $u(t)$ может принимать значения $+A$ и $-A$ с равной вероятностью, т. е. $P(A) = P(-A) = 0.5$.

11.3.4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

32. Определите СПМ $G_x(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ по его АКФ $K_x(\tau) = D \exp(-a|\tau|)$. Рассчитайте эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и интервал корреляции τ_β и τ_k . Изобразите графики $K_x(\tau)$ и $G_x(\omega)$.

33. Найдите и изобразите функцию корреляции $K_x(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ со спектральной плотностью мощности $G_x(\omega) = G_0$ при $-\omega_1 < \omega < \omega_1$. Определите также интервал корреляции τ_0 и τ_k .

34. Заданы автокорреляционные функции стационарного СП:

а) $K_1(\tau) = D / (1 + a^2\tau^2)$;

б) $K_2(\tau) = D \exp(-a^2\tau^2)$.

Изобразите нормированные функции $R(\tau) = K(\tau) / K(0)$ и рассчитайте интервал корреляции τ_k и τ_β , а также эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ [по формуле (11.36)].

35. Найдите АКФ $K_y(\tau)$ и дисперсию D_y производной стационарного СП $X(t)$, АКФ которого имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-|\alpha\tau|^2}.$$

11.3.5. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

36. Задан нормальный узкополосный случайный процесс

$$X(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (11.58)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленные функции по сравнению с $\sin(\omega_0 t)$. Дисперсия $D_x = \sigma_x^2 = 1 \text{ В}^2$. Найдите вероятность того, что в фиксированный момент времени огибающая $A(t)$ процесса $X(t)$ превысит уровень $A_0 = 2 \text{ В}$.

37. Для процесса вида (11.58) выразите математическое ожидание m_A и дисперсию D_A огибающей $A(t)$ через его среднеквадратическое значение σ_x .

38. Выразите корреляционную функцию $K_x(\tau)$ процесса вида (11.58) через известную функцию корреляции $K_A(\tau)$ огибающей $A(t)$, приняв $\varphi(t) = \varphi_0$.

39. Найдите СПМ $G_x(\omega)$ узкополосного случайного процесса $X(t)$, если его АКФ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0\tau).$$

Изобразите графики $K_x(\tau)$ и $G_x(\omega)$.

40. По условию предыдущего упражнения найдите АКФ $K_A(\tau)$ и СПМ $G_A(\omega)$ огибающей $A(t)$ случайного процесса $X(t)$. Рассчитайте интервал корреляции τ_k и эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ огибающей $A(t)$, если $\sigma_x = 1$ В, $\alpha = 10^4$ 1/с.

41. Найдите корреляционную функцию $K_x(\tau)$ процесса $X(t)$, если спектральная плотность мощности равномерна в полосе частот $\Delta\omega$ (рис. 11.22).

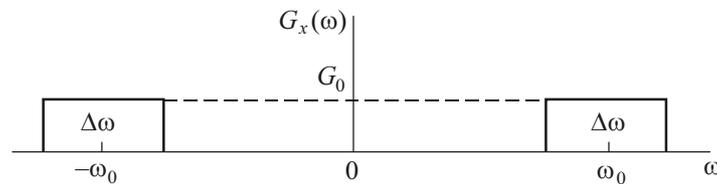


Рис. 11.22

$$G_x(\omega) = \begin{cases} G_0, & -\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega/2, \\ G_0, & \omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2, \\ 0, & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Изобразите график $K_x(\tau)$ и определите интервал корреляции τ_0 огибающей этой функции.

11.4. ЗАДАНИЯ

11.4.1. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРЕВЫШЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ

На пороговую схему воздействует случайное напряжение, распределенное по нормальному закону

$$w(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(u-m)^2 / 2\sigma^2\right].$$

Какова вероятность P срабатывания схемы в фиксированный момент времени (t_1), если схема срабатывает ($U_{\text{вых}} = "1"$) всякий раз, когда напряжение на ее выходе превышает пороговое значение $U_{\text{п}}$?

Параметры m и σ даны в табл. 11.1, а $U_{\text{п}}$ – в табл. 11.2.

Таблица 11.1

Параметр	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m, \text{В}$	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	-0.5	0	0.5	1.0	1.5
$\sigma, \text{В}$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Таблица 11.2

Параметр	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_{\text{п}}, \text{В}$	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5

Указание. При решении задачи можно воспользоваться значениями табулированного интеграла вероятности, приведенного в прил. П.10 (см. табл. П.10.2).

11.4.2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Стационарный случайный процесс $U(t)$ описан плотностью вероятности $w(u)$ (табл. 11.3); параметры функции $w(u)$ приведены в табл. 11.4.

Требуется:

- получить выражение для функции распределения $F(u)$;
- построить график $F(u)$;
- найти выражение для характеристической функции $\theta(v)$ и энтропии H .

Указание. Характеристики и параметры различных законов распределения приведены в прил. П.10.

Таблица 11.3

Номер варианта	Закон распределения	Плотность вероятности $w(u)$	
		Аналитическая запись	График
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & -\infty < u < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < u < b, \\ 0, & b < u < \infty. \end{cases} w(u)$	
2	Нормальный (Гаусса)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < u < \infty$	
3	Коши	$\frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + (u - U_0)^2}, \quad -\infty < u < \infty$	
4	Рэлея	$\frac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/2\sigma^2}, \quad 0 < u < \infty$	

Окончание табл. 11.3

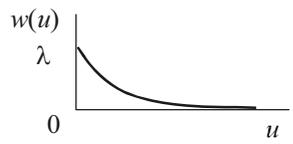
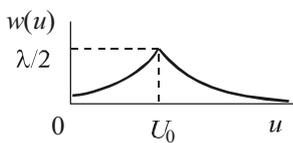
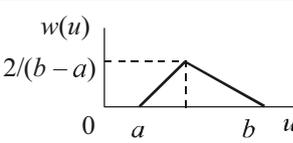
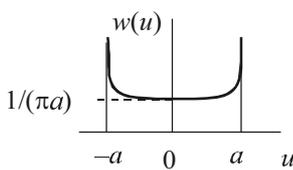
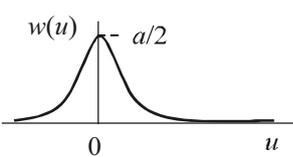
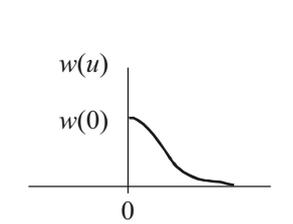
Номер варианта	Закон распределения	Плотность вероятности $w(u)$	
		Аналитическая запись	График
5	Экспоненциальный	$\lambda e^{-\lambda u}, 0 < u < \infty$	
6	Лапласа	$(\lambda / 2)e^{-\lambda u-U_0 }, -\infty < u < \infty$	
7	Симпсона (треугольный)	$\begin{cases} 4(u-a)/(b-a)^2, & a < u < (a+b)/2, \\ 4(b-u)/(b-a)^2, & (a+b)/2 < u < b \end{cases}$	
8	Арксинуса	$\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-u^2}}, -a < u < a$	
9		$\frac{a}{2ch^2au}, -\infty < u < \infty$	
0	Односторонний нормальный	$w(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < 0, \\ w(0)\exp(-u^2 / 2\sigma^2), & 0 < u < \infty, \end{cases}$ $w(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}$	

Таблица 11.4

Параметр	Номер подварианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a, B	0.2	0.4	0.60	0.80	1.00	1.2	1.4	1.6	1.80	2.0
b, B	1.2	1.6	2.00	2.40	2.80	3.2	3.6	4.0	4.40	4.8
m, B	0.0	0.0	0.00	0.50	0.50	0.5	1.0	1.0	1.00	2.0
σ, B	0.5	1.0	2.00	0.50	1.00	2.0	0.5	1.0	2.00	2.0
h, B	0.5	1.0	2.00	0.50	1.00	2.0	0.5	1.0	2.00	2.0
U_0, B	0.0	0.0	0.00	0.50	0.50	0.5	1.0	1.0	1.00	2.0
$\lambda, 1/B$	0.5	1.0	1.50	2.00	2.50	3.0	3.5	4.0	4.50	5.0
$\alpha, 1/B$	5.0	4.5	4.00	3.50	3.00	2.5	2.0	1.5	1.00	0.5

11.4.3. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ. СТАЦИОНАРНОСТЬ И ЭРГОДИЧНОСТЬ

В табл. 11.5 задан процесс $Z(t)$. При описании $Z(t)$ приняты следующие обозначения:

$S_1(t)$ и $S_2(t)$ – детерминированные функции времени, описываемые с помощью постоянных параметров $S_0, \alpha, \omega_0, p, \tau$ и n (табл. 11.5);

Таблица 11.5

Номер варианта	$Z(t)$	Номер подварианта	$S_1(t)$	$S_2(t)$
1	$XS_1(t) + Y$	1	$S_0 \sin \omega_0 t$	$S_0 [1 - \exp(-at)]$
2	$X(t) + S_1(t)$	2	$S_0 (at)^2$	$S_0 \exp(-at)$
3	$XS_1(t) + YS_2(t)$	3	$S_0 \cos \omega_0 t$	$S_0 [\exp(-at)]^n$
4	$X + YS_2(t)$	4	S_0 / at	$S_0 \cos \omega_0 t$
5	$S_2(t) + Y(t)$	5	$S_0 [\exp(-at)]^n$	$S_0 at$
6	$Y \sin \omega_0 t + S_2(t)$	6	$S_0 \exp(-\beta^2 t^2)$	$S_0 (at)^2$
7	$XS_2(t)$	7	$S_0 \exp(-at)$	$S_0 \sin \omega_0 t$
8	$XS_1(t)$	8	$S_0, 0 < t < \tau$	S_0 / at
9	$Y(t) + S_1(t)$	9	$S_0 [1 - \exp(-at)]$	$S_0, 0 < t < \tau$
0	$XS_1(t)$	0	$S_0 at$	$S_0 \exp(-\beta^2 t^2)$

X и Y – некоррелированные случайные величины с известными математическими ожиданиями m_x и m_y и дисперсиями $D_x = \sigma_x^2$ и $D_y = \sigma_y^2$;

$X(t)$ и $Y(t)$ – некоррелированные эргодические случайные процессы, которые соответственно имеют известные математические ожидания m_x и m_y , дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ и $D_y = \sigma_y^2$ и автокорреляционные функции $K_x(\tau)$ и $K_y(\tau)$.

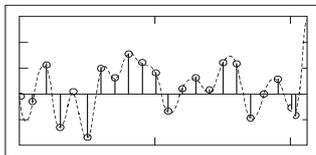
Требуется:

а) определить математическое ожидание $m_z(t)$, дисперсию $D_z(t)$ и корреляционную функцию $K_z(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$;

б) классифицировать процесс $Z(t)$ по признакам стационарности и эргодичности.

Глава 12

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ



Моя вера – это вера в то, что счастье человечеству даст прогресс науки.

И.П. Павлов

12.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

12.1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Последовательность $\{x[n]\}$ называется случайной, если каждый отсчет $x[n]$ – случайная величина. Случайная последовательность называется также случайной решетчатой функцией или случайным временным рядом.

Задача определения основных характеристик случайной последовательности может быть разбита на частные задачи, такие как определение:

- числовых характеристик (моментных функций);
- одномерной плотности вероятности;
- корреляционной функции;
- спектральной плотности мощности (энергетического спектра).

В главе 11 отмечалось, что в общем случае аналоговый случайный процесс (СП) $x(t)$ описывается ансамблем реализаций. Следовательно, и дискретный случайный процесс описывается совокупностью случайных последовательностей. Что касается одномерной плотности вероятности дискретного сигнала, то нет особых отличий от случая аналогового сигнала, просто сечения берутся в

моменты дискретизации: $t_1 = kT$, $w_x(x, k)$. Тогда в сечении получим последовательность отсчетов

$$x_n = x[n], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (12.1)$$

где N – число реализаций СП.

Двумерные и многомерные сечения СП также берутся только в моменты дискретизации: $t_1 = kT$, $t_2 = nT$ и т. д. Поэтому, например, двумерная плотность вероятности зависит от двух номеров отсчетов k и n : $w_x(x_1, x_2, k, n)$.

Для стационарного в широком смысле СП его одномерная плотность инвариантна относительно времени, а двумерная зависит только от промежутка времени между сечениями, т. е. в дискретном случае – от номеров отсчетов $k - n$.

Важным классом стационарных СП, встречающихся на практике, являются *эргодические* СП, для которых статистические характеристики, полученные усреднением как по ансамблю выборок, так и по времени, совпадают. Для таких процессов формулу (12.1) следует рассматривать как выборки одной реализации длительности T_c , состоящей из N отсчетов; при этом $N = T_c / T$, $T \leq 1 / f_m$, f_m – максимальная частота в спектре аналогового сигнала.

12.1.2. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для аналогового эргодического СП $x(t)$ начальные m_n и центральные μ_n моменты определяются по формулам, т. е.

$$m_k = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} X^k(t) dt, \quad \mu_k = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} (X(t) - m_1)^k dt.$$

При переходе от аналогового СП к дискретному можно записать для оценок соответствующих моментов следующие *выборочные* значения:

$$m_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^k, \quad (12.2)$$

$$\mu_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m_1^*)^k. \quad (12.3)$$

Обычно при анализе СП и случайных последовательностей используются первые четыре момента.

Выборочное среднее значение. За оценку первого начального момента, или иначе математического ожидания, принимается выборочное среднее значение

$$m_1^* = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^k. \quad (12.4)$$

Выборочное среднее значение m^* представляет собой среднее значение последовательности, т. е. постоянную составляющую сигнала.

Из определения центрального момента (12.3) ясно, что первый центральный момент равен нулю, поэтому по отношению к нему слово «начальный» можно опустить.

Оценки моментов второго порядка. Выборочная дисперсия и СКО. Из (12.2) и (12.3) следует, что

$$m_2^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2, \quad \mu_2^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^2.$$

Оценки по этим формулам получаются смещенными, для получения несмещенных оценок следует пользоваться соотношениями:

$$m_2^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2, \quad (12.5)$$

$$\mu_2^* = D^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^2. \quad (12.6)$$

Величины m_2^* и μ_2^* характеризуют соответственно полную среднюю мощность и мощность флуктуаций (на единичном сопротивлении $R = 1$ Ом).

Оценка среднеквадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^2}. \quad (12.7)$$

Оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса. Центральные моменты третьего и четвертого порядка характеризуют форму ПРВ (рис. 11.2). Оценка коэффициента асимметрии

$$\gamma_a^* = \mu_3^* / (\sigma^*)^3 = \frac{1}{(\sigma^*)^3 N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^3. \quad (12.8)$$

Оценка коэффициента эксцесса

$$\gamma_3^* = \mu_4^* / (D^*)^2 - 3 = \frac{1}{(D^*)^2 N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^4 - 3. \quad (12.9)$$

В главе 11 отмечалось, что для симметричных ПРВ $\mu_3 = 0$ и $\gamma_a = 0$, а для нормального закона распределения $\mu_4 = 3$ и $\mu_3 = 0$.

12.1.3. ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

При обработке экспериментальных данных вместо функции распределения (ФР) $F(x)$ и плотности распределения вероятностей (ПРВ) $w(x)$ используют их оценки $F^*(x)$ и $w^*(x)$. Поскольку $F(x)$ и $w(x)$ взаимосвязаны, достаточно найти оценку одной из них, например $w^*(x)$. При этом $w^*(x)$ выбирается, как правило, в виде ступенчатой аппроксимации исходной функции $w(x)$ (рис. 12.1)

$$w^*(x) = w_j(x) = n_j / (N\Delta x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (12.10)$$

где $k = (x_{\max} - x_{\min}) / \Delta x$ – количество интервалов (сегментов) разбиения; $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ – ширина каждого из k обычно равных между собой интервалов; n_j – число выборов $\{x_i\}$, попавших в интервал $\{x_{j-1}, x_j\}$.

Подсчитанные согласно (12.10) значения n_j или $w_j(x)$ можно представить графически в виде ступенчатой кривой, называемой гистограммой (рис. 12.1).

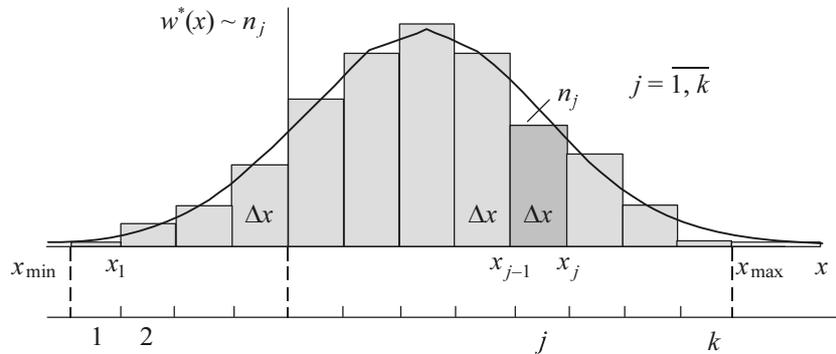


Рис. 12.1

Число интервалов k не должно быть слишком большим, иначе гистограмма становится невыразительной: значения n_j обнаруживают незакономерные колебания. С другой стороны, оно не должно быть слишком малым, так как при малом k свойства распределения описываются слишком грубо. Практика показывает, что в большинстве случаев рационально выбирать k от 10 до 20, если N лежит в пределах от 100 до 1000.

12.1.4. ОЦЕНКА АКФ

Оценка автокорреляционной функции последовательности из N отсчетов при сдвиге k находится в виде

$$K(k) = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=0}^{N-k-1} (x_i - m^*)(x_{i+k} - m^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.11)$$

АКФ $K(k)$ последовательности $\{x_i\}$ обладает теми же свойствами, что и АКФ $K(\tau)$ аналогового СП $x(t)$. В частном случае при $k=0$ оценка АКФ представляет собой оценку дисперсии

$$K(0) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m^*)^2 = D^*. \quad (12.12)$$

Нормированная АКФ запишется

$$R(k) = \frac{K(k)}{D^*} = \frac{1}{D^*(N-k-1)} \sum_{i=0}^{N-k-1} (x_i - m^*)(x_{i+k} - m^*). \quad (12.13)$$

Интервал корреляции

$$k_K = \tau_K / T = \sum_0^k |R(l)|. \quad (12.14)$$

Важно отметить, что суммирование произведений смещенных выборочных значений в (12.11) и (12.13) можно выполнять по всем i от 0 до N лишь в случае, когда $k=0$. С ростом k число слагаемых сокращается и при $k \rightarrow N-1$ стремится к нулю. Таким образом, с ростом k точность получаемого результата уменьшается. Чтобы заметным образом не снизить точность, следует придерживаться условий

$$k = 0, 1, \dots, k_{\max}; \quad k_K < k_{\max} < N/3. \quad (12.15)$$

Весьма желательно, чтобы $N \gg k_K$.

12.1.5. ОЦЕНКА СПМ

При оценке СПМ $G[m]$ последовательности $\{x_i\}$ применяются: стандартный метод, основанный на преобразовании Фурье корреляционной функции, и метод прямого преобразования Фурье исходной реализации с использованием алгоритма БПФ, рассмотренного в предыдущей главе.

Остановимся на первом методе. Для аналогового процесса СПМ определяется по формуле (11.32). По аналогии СПМ $G[m]$ для последовательности $\{x_i\}$ запишем

$$G[m] = 2 \sum_{k=0}^{k_{\max}} K[k] \cos(2\pi km / N) = D^* g[m], \quad m = 0, 1, \dots, m_{\max}, \quad (14.16)$$

где $g[m]$ – нормированная СПМ

$$g[m] = 2 \sum_{k=0}^{k_{\max}} R[k] \cos(2\pi km / N).$$

По аналогии с эффективной полосой частот $\Delta\omega_{\text{эф}}$ СП для последовательности вводится эффективное число отсчетов $m_{\text{эф}}$ дискретного спектра

$$m_{\text{эф}} = \frac{1}{g[0]} \sum_{m=0}^{m_{\max}} g[m] = \frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{\Omega}, \quad (12.17)$$

где $\Omega = 2\pi / T_c = 2\pi / NT$ – интервал между соседними спектральными отсчетами.

При выборе m_{\max} следует придерживаться условия

$$m_{\text{эф}} < m_{\max} < N / 2. \quad (12.18)$$

В главе 11 показано, что $\tau_k \Delta \omega_{\text{эф}} = \pi/2$ (или $\tau_k \Delta f_{\text{эф}} = 1/4$). Подставляя сюда значения τ_k и $\Delta \omega_{\text{эф}}$ соответственно из (12.14) и (12.17), получим для последовательности

$$k_k m_{\text{эф}} = N / 4. \quad (12.19)$$

При втором методе значения $G[m]$ могут быть определены как

$$G[m] = |\dot{X}[m]|^2, \quad (12.20)$$

а $\dot{X}[m]$ – по реализации последовательности $\{x[n]\}$ с использованием БПФ [см. главу 14, формулу (14.3)].

12.1.6. ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПАКЕТЕ Mathcad

Вычисление основных характеристик случайных последовательностей возможно и удобно проводить в самом популярном из компьютерных пакетов – в Mathcad [37, 38]. Во-первых, вычислительный процессор позволяет выполнять расчеты по введенным формулам. Во-вторых, имеется большое количество встроенных специальных функций для статистической обработки данных. Случайные последовательности могут как вводиться пользователем из файлов, так и создаваться генераторами случайных чисел. В пакете запрограммировано большое количество генераторов псевдослучайных чисел с различными законами распределения вероятностей. Некоторые типовые встроенные функции приведены в прил. П.11.

В последующих примерах использован пакет Mathcad.

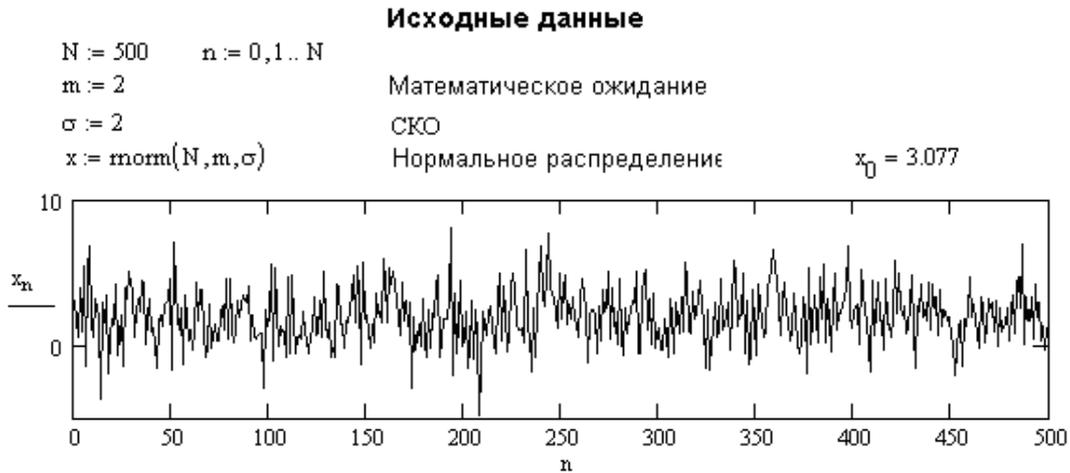
Читатель может самостоятельно воспользоваться и пакетом MATLAB, позволяющим также создавать различные сигналы и проводить их статистическую обработку [32, 33].

12.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Числовые характеристики последовательности. Сформируем последовательность с помощью генератора случайных чисел в Mathcad: $\text{rngnm}(N, m, \sigma)$ – вектор N независимых случайных чисел, каждое из которых

имеет нормальное распределение; m – математическое ожидание; σ – СКО. Расчеты числовых характеристик иллюстрируются листингом.

Листинг



Оценка числовых характеристик

$m1 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n$	Выборочное среднее значение	m1 = 1.771
$m2 := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n)^2$	Оценка средней мощности	m2 = 7.102
$D := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - m1)^2$	Выборочная дисперсия (смещенная оценка)	D = 3.952
$D1 := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - m1)^2$	Выборочная дисперсия (несмещенная оценка)	D1 = 3.96
$\sigma1 := \sqrt{D1}$	Оценка СКО	σ1 = 1.99
$\gamma_a := \frac{1}{(\sigma1)^3 \cdot N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - m1)^3$	Оценка коэффициента асимметрии	γ _a = -0.133
$\gamma_3 := \frac{1}{D1^2 \cdot N} \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} (x_n - m1)^4 \right] - 3$	Оценка коэффициента эксцесса	γ ₃ = 0.035

Последовательность содержала сравнительно большое число выборок: $N = 500$. Поэтому оценки и точные значения числовых характеристик хорошо совпадают. При этом смещенная и несмещенная оценки дисперсии незначительно отличаются друг от друга ($< 1\%$). Иначе обстоит дело при относительно малом N . Сравните результат расчета для $N = 50$ ($x_0 = 7.876$): $m_1 = 2.037$, $m_2 = 7.279$, $D = 3.128$, $D_1 = 3.192$, $\sigma_1 = 1.787$, $\gamma_a = 0.836$, $\gamma_3 = 0.561$. В этом случае повторные запуски программ расчета приводили к значительным случайным отклонениям результатов. Следовательно, чем больше N , тем точнее и стабильнее оценки числовых характеристик случайных последовательностей.

Пример 2. То же, но с использованием встроенных функций Mathcad. В Mathcad имеется ряд встроенных функций для расчета числовых характеристик случайных последовательностей (рядов). Воспользуемся ими. Пример приведен на листинге.

Листинг

Исходные данные		
$N := 500$	$n := 0, 1.. N$	
$m := 2$	Математическое ожидание	
$\sigma := 2$	СКО	
$x := \text{norm}(N, m, \sigma)$	Нормальное распределение	$x_n = 3.077$
Оценка числовых характеристик		
$m1 := \text{mean}(x)$	Выборочное среднее значение	$m = 2$
$me := \text{median}(x)$	Выборочная медиана	$me = 1.876$
$D := \text{Var}(x)$	Выборочная дисперсия	$D = 3.785$
$\sigma1 := \text{Stdev}(x)$	Оценка СКО	$\sigma1 = 1.945$
$\sqrt{\text{Var}(x)} = 1.945$	Оценка СКО	
$\gamma_a := \text{skew}(x)$	Оценка коэффициента асимметрии	$\gamma_a = 0.103$
$\gamma_3 := \text{kurt}(x)$	Оценка коэффициента эксцесса	$\gamma_3 = 0.112$

Пример 3. Расчет и построение гистограммы. Исходные данные те же, что и в примерах 1 и 2. Воспользуемся встроенными функциями, имеющимися в пакете Mathcad. Расчет и построение гистограммы иллюстрируется листингом.

При расчете гистограммы вначале определяются x_{\max} и x_{\min} значения x_n , для чего организуется циклический перебор и сравнение элементов массива

x_n . Далее задается количество интервалов $k = \text{bin}$, которое охватывает весь диапазон x . Последующие строки листинга поясняют методику округления x_{\max} и x_{\min} (`upper`, `lower`), нахождения ширины интервала Δx анализа, в какой из интервалов j попадает анализируемый отсчет x_n , а также подсчета числа n_j в соответствующем интервале. В результате N значений последовательности $\{x_n\}$ будут отсортированы таким образом, что последовательность чисел $\{n_j\}$ будет удовлетворять условию

$$N = \sum_{j=0}^{\text{bin}} n_j.$$

В третьей снизу строке листинга осуществляется нормировка значений гистограммы для того, чтобы она правильно аппроксимировала плотность вероятности (`w1:=dnorm(.)` – последняя строка листинга), также показанную на графике (рис. 12.2, *a*). Обратите внимание, что в предпоследней строке листинга происходит переопределение вектора `int`, которое необходимо для перехода от левой границы каждого элементарного интервала к его середине.

Листинг

```
N := 500      n := 0,1..N
m := 2          Математическое ожидание
σ := 2          СКО
x := norm(N,m,σ)  Нормальное распределение      x0 = 3.077
```

Гистограмма с равными интервалами

```
xmax := max(x)      Максимальное и минимальное      xmax = 8.096
min(x)      значение выборки      min(x) = -4.247
bin := 15      Количество интервалов (сегментов)
lower := floor(min(x))  Наибольшее целое число, меньшее  lower = -5
                min(x) или равное действительному
upper := ceil(max(x))  Наименьшее целое число,        upper = 9
                не превышающее max(x)
Δx := (upper - lower) / bin  Ширина интервала      Δx = 0.933
```

$j := 0..bin$	Номер интервала
$int_j := lower + \Delta x \cdot j$	Последовательность интервалов
$n := hist(int, x)$	Число выборов в интервале
$w := \frac{n}{N \cdot \Delta x}$	Вероятность попадания в k -й сегмент
$int1_j := int_j + 0.5 \cdot \Delta x$	Переопределение вектора int_j
$w1 := dnorm(int1, m, \sigma)$	Плотность вероятности нормального распределения

При создании графика гистограммы (рис. 12.2, *а*) следует установить в поле **Тип (Type)** элемент списка **solidbar** (гистограмма) (рис. 12.2, *б*).

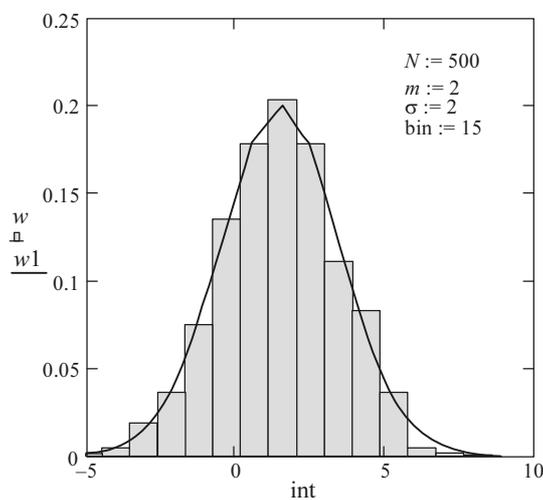
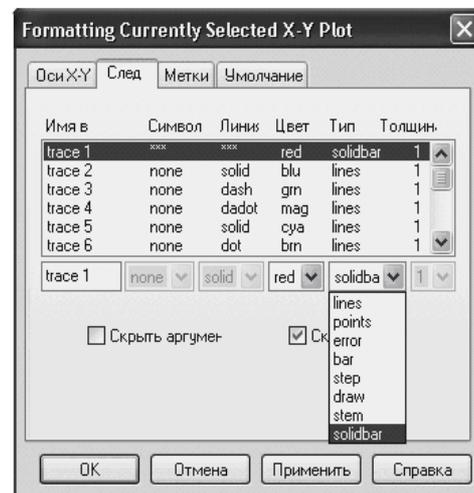
*а**б*

Рис. 12.2

При малом числе интервалов (рис. 12.3, *а*) свойства распределения описываются слишком грубо. Однако оно не должно быть слишком большим, так как гистограмма становится «изрезанной» ввиду малой статистики попаданий отсчетов в соответствующие интервалы (рис. 12.3, *б*).

Лишь значительное увеличение числа выборов приближает гистограмму w к кривой исходного распределения w_1 (рис. 12.3, *в, г*). Поэтому рационально выбирать число интервалов порядка 10...20 при $N = 100...1000$ и 30...50 при $N = 5000...10000$.

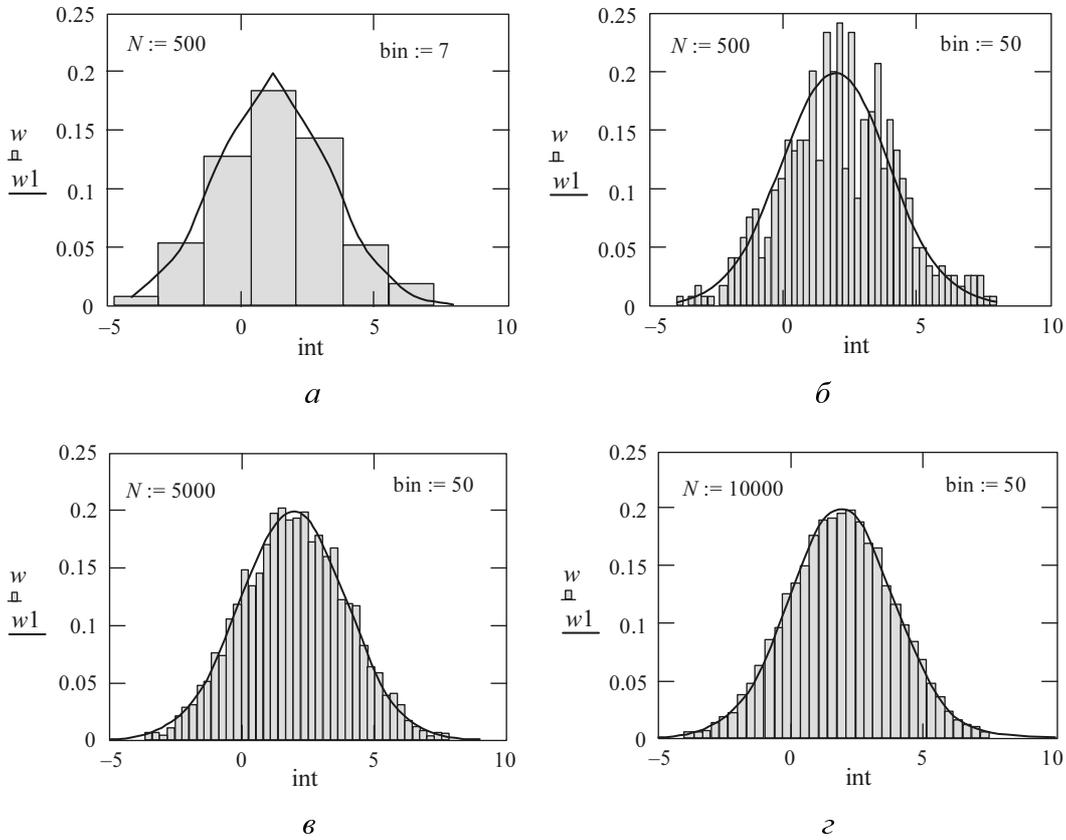


Рис. 12.3

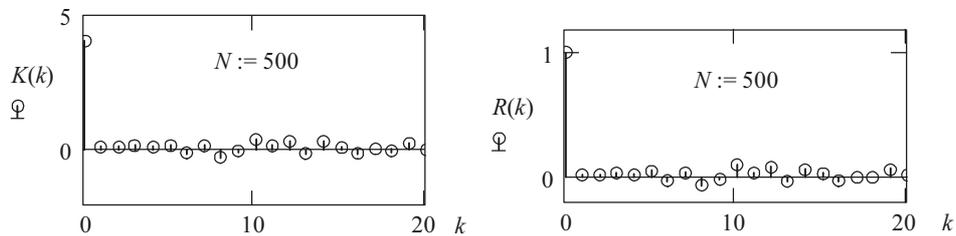
Пример 4. Вычисление АКФ. Исходные данные те же, что и в предыдущих примерах.

Тогда, воспользовавшись соотношениями (14.11) – (14.13), запишем процедуру расчета АКФ в приводимом ниже листинге.

Листинг

```

k_max := 100   k := 0, 1..k_max
K(k) := 1 / (N - k - 1) * sum_{n=0}^{N-k-1} (x_n - m) * (x_{n+k} - m)   АКФ последовательности {x[n]}
K(0) = 3.999   Дисперсия
R(k) := K(k) / K(0)   R(0) = 1   Нормированная АКФ
    
```



Как и следовало ожидать, нормированная АКФ $R(k)$ некоррелированной случайной последовательности $\{x_n\}$, $n = \overline{0, N-1}$, представляет собой почти единичный импульс (дискретную дельта-функцию) $\delta(l)$, но имеет флуктуации при $n > 0$.

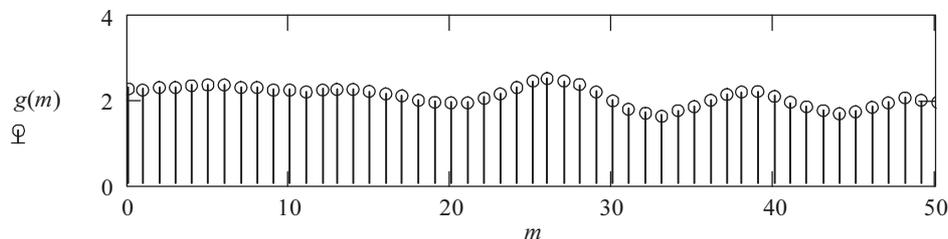
Пример 5. Вычисление СПМ. Определим СПМ через АКФ по формуле (12.16). Этот пример является продолжением предыдущих примеров.

Листинг

$$m := 0, 1 \dots 100$$

$$G(m) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{k_{\max}} K(k) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{m}{N}\right) \quad \text{СПМ последовательности} \quad G(0) = 8.499$$

$$g(m) := \frac{G(m)}{D} \quad \text{Нормированная СПМ}$$



Неравномерность СПМ обусловлена наличием флуктуаций в АКФ.

Пример 6. АКФ и СПМ коррелированной последовательности. На первом этапе сформируем некоррелированную последовательность и на ее основе – случайный процесс.

Листинг

$N1 := 40$	Последний отсчет последовательности $\{y[j]\}$
$y := \text{morm}(N1, 0, 1)$	Генератор последовательности $\{y[j]\}$
$T1 := 0.5$	Шаг дискретизации, мс

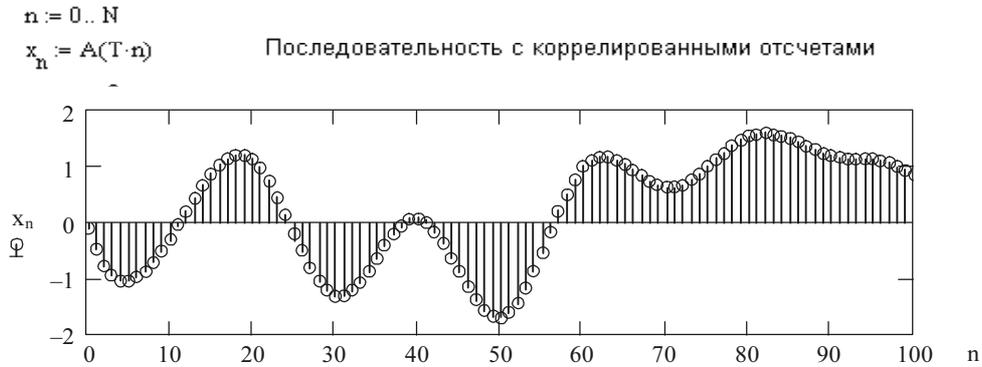


Первые две строки листинга формируют случайную нормальную последовательность $\{y_n\}$. В следующих двух строках определены значения шага дискретизации T_1 (интервала корреляции τ) и длительности T_c нормального случайного процесса $A(t)$, который формируется с помощью сплайн-интерполяции – последних двух строчек. В результате получается случайный процесс $A(t)$, интервал корреляции которого τ определяется шагом (интервалом) T_1 между точками, для которых выполняется интерполяция.

На втором этапе (листинг) формируется коррелированная последовательность $\{x_n\}$ посредством дискретизации случайного процесса $A(t)$ с шагом T . При выборе $T = 0.05$ мс в одном интервале ($T_1 = \tau_k$) последовательности $\{y_j\}$ укладывается 10 интервалов последовательности $\{x_n\}$.

Листинг

$\tau_k := T1$	Интервал корреляции, мс	
$T := 0.05$	$f_d := \frac{1}{T}$	Шаг (мс) и частота (кГц) дискретизации случайного процесса $A(t)$
		$f_d = 20$
$n_k := \frac{T1}{T}$	Число отсчетов в интервале корреляции	$n_k = 10$
$N := \text{floor}\left(\frac{T_c}{T}\right)$	Число отсчетов последовательности $\{x[n]\}$	$N = 400$



На третьем, заключительном, этапе осуществляется вычисление АКФ и СПМ.

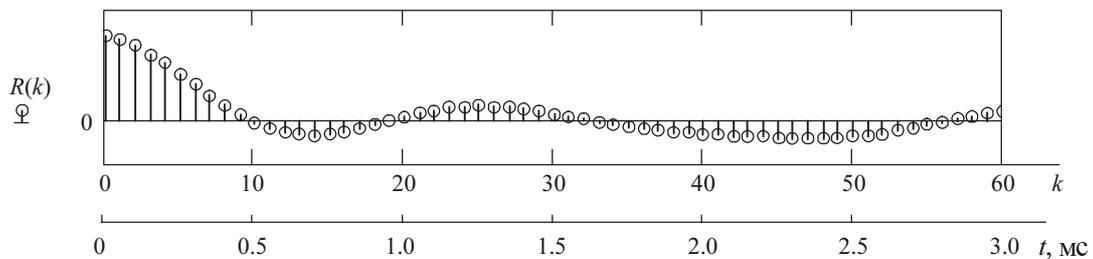
Листинг

$m := \text{mean}(x)$ Выборочное среднее значение $m = 0.109$
 $D := \text{var}(x)$ Выборочная дисперсия $D = 0.985$

Нормированная АКФ последовательности $\{x(n)\}$

$$k_{\max} := \frac{N}{4} \quad k := 0..k_{\max}$$

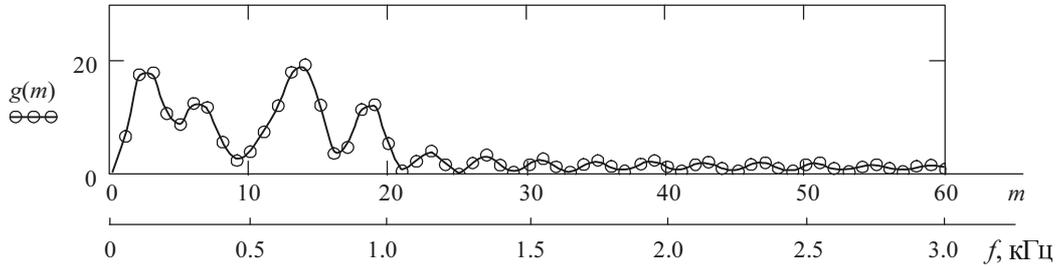
$$R(k) := \frac{1}{(N-k) \cdot D} \cdot \sum_{n=0}^{N-k} (x_n - m) \cdot (x_{n+k} - m) \quad R(0) = 1.002$$



Нормированная СПМ

$$m := 0, 1..100$$

$$g(m) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{k_{\max}} R(k) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{m}{N}\right)$$



Пример 7. Корреляционная функция и СПМ двух коррелированных последовательностей. Приведем пример программы, создающей две коррелированные последовательности $\{x1_n\}$ и $\{x2_n\}$ одинакового размера и вычисляющей их ВКФ и СМП.

Листинг

Исходные данные

$N := 500$ $n := 0, 1.. N$
 $m := 2$ Математическое ожидание
 $\sigma := 2$ СКО
 $R := 0.6$ Коэффициент корреляции
 $x1 := \text{norm}(N, m, \sigma)$ Нормальное распределение последовательности $\{x1\}$
 $x2 := R \cdot x1 + \sqrt{1 - R^2} \cdot \text{norm}(N, m, \sigma)$ Последовательность $\{x2\}$

Оценка числовых характеристик

$m1 := \text{mean}(x1)$	$m2 := \text{mean}(x2)$	Выборочные средние значения	$m1 = 1.771$	$m2 = 2.655$
$\sigma1 := \text{Stdev}(x1)$	$\sigma2 := \text{Stdev}(x2)$	Оценка СКО	$\sigma1 = 1.99$	$\sigma2 = 1.969$
$\text{covar}(x1, x2) = 2.394$		Коэффициент ковариации двух выборок		
$\text{corr}(x1, x2) = 0.612$		Коэффициент корреляции двух выборок		

ВКФ последовательностей

$k_{\max} := 100$ $k := 0, 1.. k_{\max}$

$$K12(k) := \frac{1}{N - k - 1} \cdot \sum_{n=0}^{N-k-1} (x1_n - m1) \cdot (x2_{n+k} - m2)$$
 $K12(0) = 2.399$
 $R12(k) := \frac{K12(k)}{K12(0)}$ Нормированная ВКФ

Расчет СПМ

$m := 0, 1.. 100$

$$G(m) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{50} K12(k) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{m}{N}\right)$$
 $G(0) = 5.053$
 $g(m) := \frac{G(m)}{\sigma1 \cdot \sigma2}$ Нормированная СМП $g(0) = 1.29$

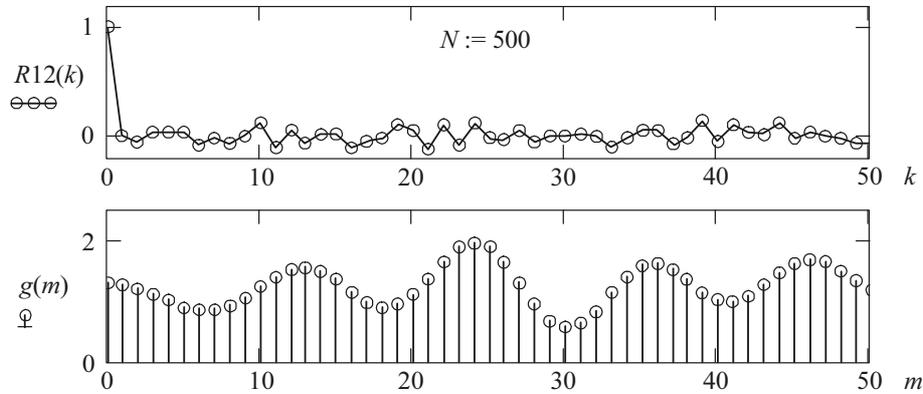


Рис. 12.4

Результат действия программы для $R = 0.6$ показан на рис. 12.4. Сравните полученный результат с результатами примеров 4 и 5.

12.3. ЗАДАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Случайная последовательность $\{x[n]\}$ описывается плотностью распределения вероятностей $w(x)$ (табл. 12.1); число отсчетов N и параметры ПРВ $w(x)$ приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.1

Номер варианта	Закон распределения	Функции в Mathcad (прил. П.10)	
		Плотность вероятности $w(x)$	Генератор случайных чисел
0	Равномерный	$\text{dunif}(x, a, b)$	$\text{runif}(N, a, b)$
1	Нормальный	$\text{dnorm}(x, m, \sigma)$	$\text{rnorm}(N, m, \sigma)$
2	Логарифмически нормальный	$\text{dlnorm}(x, m, \sigma)$	$\text{rlnorm}(N, m, \sigma)$
3	Коши	$\text{dcauchy}(x, U, h)$	$\text{rcauchy}(N, U, h)$
4	Вейбулла	$\text{dweibull}(x, s)$	$\text{rweibull}(N, s)$
5	Экспоненциальный	$\text{dexp}(x, \alpha)$	$\text{rexp}(N, \alpha)$
6	Стьюдента	$\text{dt}(x, d)$	$\text{rt}(N, d)$
7	Хи-квадрат	$\text{dchisq}(x, d)$	$\text{rchisq}(N, d)$
8	Фишера	$\text{dF}(x, d1, d2)$	$\text{rF}(N, d1, d2)$
9	Гамма-распределение	$\text{dgamma}(x, s)$	$\text{rgamma}(N, s)$

Таблица 12.2

Номер подварианта	Параметры распределения										
	a	b	m	σ	U	h	s	α	d	$d_1 = d_2$	λ
0	0.2	1.2	1.0	0.1	0.2	0.5	10	0.5	10	10	0.5
1	0.4	1.6	0.9	0.2	0.4	1.0	9	1	9	15	1.0
2	0.6	2.0	0.8	0.3	0.6	2.0	8	2	8	20	1.5
3	0.8	2.4	0.7	0.4	0.8	0.5	7	3	7	25	2.0
4	1.0	2.8	0.6	0.5	1.0	1.0	6	4	6	30	2.5
5	1.2	3.2	0.5	0.6	1.2	2.0	5	5	5	40	3.0
6	1.4	3.6	0.4	0.7	1.4	0.5	4	6	4	45	3.5
7	1.8	4.0	0.3	-0.8	1.8	1.0	3	7	3	50	4.0
8	1.8	4.4	0.2	0.9	1.8	2.0	2	8	2	60	4.5
9	2.0	4.8	0.1	1/0	2.0	2.0	1	9	1	70	5.0

Требуется:

а) построить график ПРВ $w(x)$;

б) построить график последовательности $x[n]$;

в) вычислить оценки следующих параметров: m^* , m_2^* , σ^* , D^* , γ_a^* , γ_3^* .

Расчеты выполнить для случаев: $N_1 = N$, $N_2 = N/10$, $N_3 = 10N$. Проанализировать влияние числа выборок N на числовые характеристики СП;

г) рассчитать и построить гистограмму $w_j(x)$, $j = \overline{1, k}$ для различных значений k : $k_1 = N/50$, $k_2 = k_1/4$, $k_3 = 4k_1$. Повторить расчет и построение для случая: $k = k_1$ и $N = N_3$. Проанализировать влияние величин k и N на форму гистограммы;

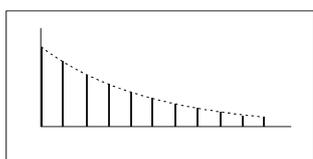
д) рассчитать и построить график нормированной АКФ $R(k)$;

е) рассчитать и построить график нормированной СПМ $g[m]$.

Примечание. Все вычисления и построения рекомендуется провести в пакете Mathcad.

Глава 13

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ



Круглое невежество – не самое плохое зло: накопление плохо усвоенных знаний еще хуже.

Платон

13.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

13.1.1. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Дискретные и цифровые сигналы, понятие о которых дано во введении, лежат в основе бурно развивающегося направления науки и техники – цифровой обработки сигналов (ЦОС) [24–29 и др.].

Дискретные сигналы (см. рис. В.1) образуются:

- либо непосредственно дискретным источником информации (рис. В.1);
- либо в результате *дискретизации* непрерывных сигналов (см. разд. 8.1.5).

Важное свойство дискретных сигналов заключается в том, что они образуют подобно аналоговым сигналам линейное пространство. Линейная комбинация этих сигналов также становится дискретным сигналом.

Дискретные сигналы подобно аналоговым можно представить несколькими способами. Наиболее распространенные из них:

- – дискретные последовательности;
- – преобразования Фурье и Лапласа;
- – Z -преобразование;
- – дискретное преобразование Фурье;
- – дискретное преобразование Лапласа;
- – дискретное вейвлет-преобразование;
- – и др.

Дискретные последовательности. Представление дискретного сигнала дискретной последовательностью аналогично представлению аналогового сигнала во временной области. Дискретные последовательности есть выборки аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = n\Delta t = nT$, где $T = \Delta t$ – интервал между отсчетами, а n – последовательность целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$ (см. рис. 8.4, б).

$$X_d(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \quad (13.1)$$

Часто удобно вводить безразмерное время $t_\zeta = t/T = nT/T = n$. Математически дискретные сигналы представляются в виде решетчатой функции – последовательности значений из непрерывного множества вещественных или комплексных чисел, для описания которой может быть использовано одно из обозначений:

$$\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), \quad x(nT), \quad x[n], \quad (13.2)$$

Единичный импульс, или дискретная дельта-функция (рис. 13.1):

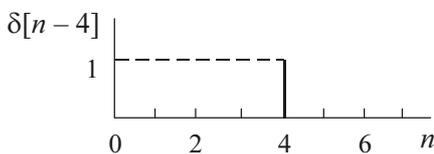
$$\delta((n-m)T) = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$


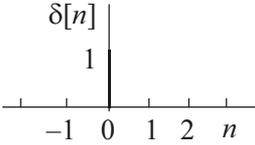
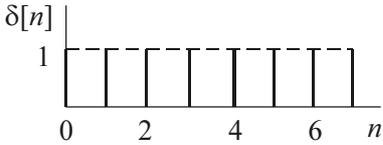
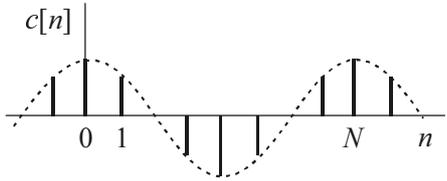
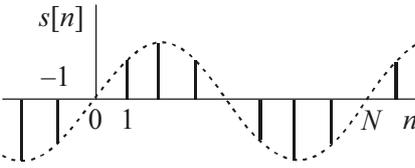
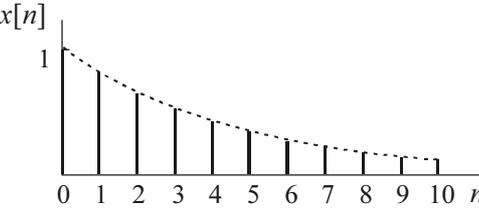
Рис. 13.1

В дискретных цепях единичный импульс выполняет ту же роль, что и δ -функция в аналоговых цепях. Тогда любая последовательность $x[n]$ может быть выражена согласно формуле (13.1) суммой единичных задержанных импульсов:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m]. \quad (13.3)$$

В табл. 13.1 приведены важные простейшие дискретные последовательности, которые широко используются при исследовании цифровых цепей.

Таблица 13.1

Последовательность	График
Дельта-последовательность $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	
Единичная ступенчатая $\sigma[n] = 1[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	
Косинусоидальная $c[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} nT\right) = \cos(2\pi n / N),$ где T_0 – период сигнала; $N = T_0 / T$ – целое число отсчетов за период T_0	
Синусоидальная $s[n] = \sin(2\pi n / N) = \sin(\omega_\sigma n),$ где $\omega_\sigma = 2\pi T / T_0 = 2\pi / N$ – угловая частота (измеряемая в угловой мере)	
Вещественная степенная $x[n] = e[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \quad a < 1, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	
Комплексная степенная $\exp[n] = (ae^{j\omega_\sigma})^n = a^n (\cos \omega_\sigma n + j \sin \omega_\sigma n).$ При $a = 1$ вещественная и мнимая части представляют собой гармонические последовательности: $c[n] = \text{Re}\{\exp[n]\} = \cos \omega_\sigma n$, $s[n] = \text{Im}\{\exp[n]\} = \sin \omega_\sigma n$. При $\omega_\sigma = 0$ получается вещественная степенная последовательность	

13.1.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

Применим преобразование Фурье (7.3) к выражению (13.1) и, воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функции [см. формулу (1.25)], получим

$$\begin{aligned}\dot{X}_d(\omega) &= \int_0^{\infty} x_d(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}.\end{aligned}$$

Таким образом, прямое преобразование Фурье запишется в виде

$$\dot{X}_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}, \text{ или } \dot{X}_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (13.4)$$

С другой стороны, согласно теореме Котельникова спектральная плотность дискретного сигнала вида (13.1) может быть представлена выражением (8.19), т. е.

$$\dot{X}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - k\omega_d). \quad (13.5)$$

Сигнал $x_d(t)$ можно определить по его спектру с помощью обратного преобразования Фурье:

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_d(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (13.6)$$

Перейдем к комплексной частоте $p = \sigma + j\omega$. Тогда подставляя в выражения (13.4) и (13.6) вместо $j\omega$ и $d\omega$ соответственно p и dp/j , получаем выражения для прямого и обратного преобразований Лапласа:

$$X_d(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-pn}, \quad (13.7)$$

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_d(p) e^{pt} dp. \quad (13.8)$$

Для определения одного n -го отсчета $x(nT)$ в формуле (13.1), т. е. без множителя $\delta(t - nT)$, применяется более простое выражение [1]

$$x(nT) = T \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\pi/T}^{\sigma + j\pi/T} X(p) e^{pnT} dp. \quad (13.9)$$

13.1.3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Перейдем в преобразованиях Лапласа от аргумента p к новому аргументу z :

$$z = e^{pT}, \quad (13.10)$$

$$p = \frac{1}{T} \ln z. \quad (13.11)$$

Тогда формула (13.7) принимает иной вид:

$$X(z) = X_d(p) \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (13.12)$$

Функцию $X(z)$ называют **прямым Z-преобразованием** (ПЗП) или Z-образом последовательности $x(nT)$. Сомножитель $x[n]$ – это отсчет сигнала в момент времени $n\Delta t$, а сомножитель z^{-n} указывает на задержку этого отсчета на n шагов дискретизации. Функция $X(z)$ определена только для тех значений z , для которых ряд (13.12) сходится.

Преобразовать плоскость $p = \sigma + j\omega$ в плоскость $z = x + jy$ (рис. 13.2) можно с помощью соотношений

$$z_1 = x_1 + jy_1 = e^{(\sigma_1 + j\omega_1)T}, \quad x_1 = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T, \quad y_1 = e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T \quad (13.13)$$

и в полярных координатах на плоскости z :

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\sigma_1 T}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \omega_1 T + m2\pi, \quad (13.14)$$

где m – любое целое число (0, 1, 2, ...).

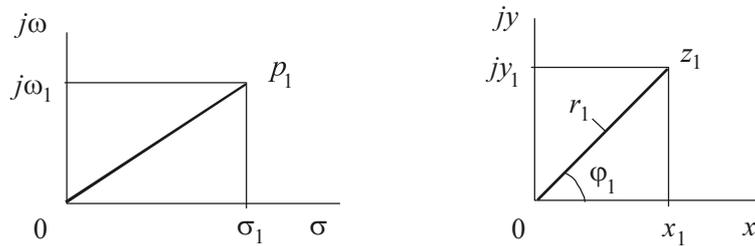
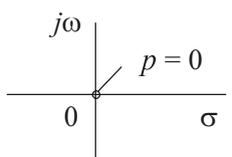
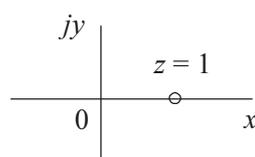
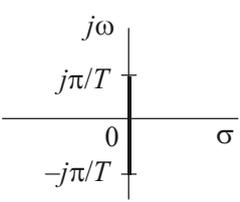
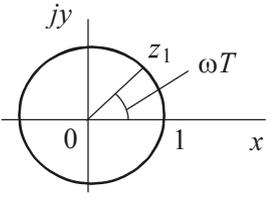
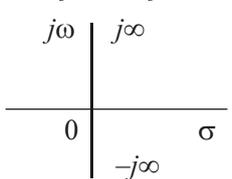
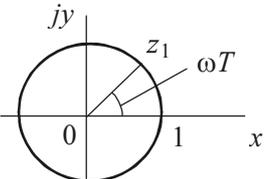


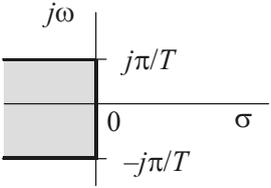
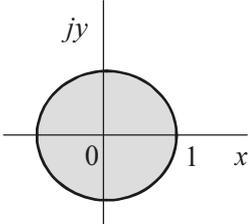
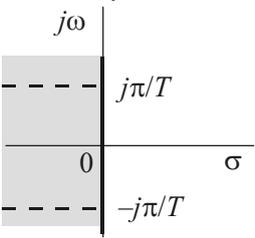
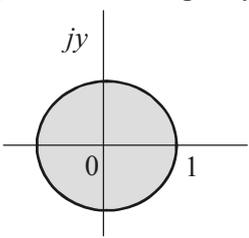
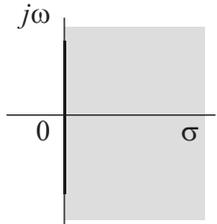
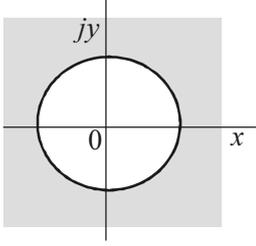
Рис. 13.2

В табл. 13.2 даны отображения ряда характерных точек, линий и областей из p -плоскости на z -плоскость.

Таблица 13.2

№ п/п	Точки и области на p -плоскости	Точки и области на z -плоскости
1	Точка $p = 0$ 	Точка $z = 0$ 
2	Отрезок мнимой оси от $-j\pi/T$ до $j\pi/T$ 	Окружность единичного радиуса 
3	Мнимая ось от $-j\infty$ до $j\infty$ 	Окружность единичного радиуса 

Окончание табл. 13.2

№ п/п	Точки и области на p -плоскости	Точки и области на z -плоскости
4	<p>Часть левой полуплоскости</p> 	<p>Круг единичного радиуса</p> 
5	<p>Левая полуплоскость</p> 	<p>Круг единичного радиуса</p> 
6	<p>Правая полуплоскость</p> 	<p>Вся z-плоскость кроме единичного круга</p> 

Рассмотрим **основные свойства** Z -преобразования.

Линейность. Пусть $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ – последовательности, а $X_1(z)$ и $X_2(z)$ – Z -образы этих последовательностей; a_1 и a_2 – константы. Если $x_3(nT) = a_1x_1(nT) + a_2x_2(nT)$, то

$$X_3(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z). \quad (13.15)$$

Задержка (теорема сдвига). Если $x_2(nT) = x_1((n-m)T)$, т. е. если последовательность задержана на m элементов, то ее Z -образ будет

$$X_2(z) = z^{-m} X_1(z). \quad (13.16)$$

Инвертирование последовательности во времени. Если последовательность $y(nT)$ связана с последовательностью $x(nT)$ инвертированием во времени

$$y(nT) = x(-nT),$$

то Z -образ последовательности $y(nT)$ будет

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nT)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(-mT)(z^{-1})^{-m} = X(z^{-1}). \quad (13.17)$$

Следовательно, инвертирование последовательности во времени соответствует замене z на $1/z$ в выражении ее Z -образа.

Вставка нулей. Если последовательность $y(nT)$ образована из последовательности $x(nT)$ вставкой нулей между соседними элементами

$$y(nT) = \begin{cases} x(nT/N), & n = mN, \text{ где } m - \text{любое целое число,} \\ 0, & n \neq mN, \end{cases}$$

то Z -преобразование

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(-mT)z^{-Nm} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(-mT)(z^N)^{-m} = X(z^N). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Итак, вставка нулей в последовательности соответствует замене z на z^N в выражении ее Z -образа.

Свертка последовательностей. Если $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ – последовательности, а $X_1(z)$ и $X_2(z)$ – их Z -образы, то произведению этих образов

$$X_3(z) = X_1(z)X_2(z)$$

соответствует свертка последовательностей

$$x_3(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(mT)x_2((n-m)T). \quad (13.19)$$

Теорема о комплексной свертке. Произведению последовательностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$

$$x_3(nT) = x_1(nT)x_2(nT)$$

соответствует комплексная свертка их Z -образов:

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X_2(z/v)v^{-1}dv. \quad (13.20)$$

Одностороннее Z -преобразование. Вычисляется как

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = x(0) + \frac{x(T)}{z} + \frac{x(2T)}{z^2} + \dots, \quad (13.21)$$

т. е. не учитывается поведение последовательности $x(nT)$ до точки $nT = 0$.

Перечисленные важные свойства Z -преобразования важны при исследовании дискретных цепей и цифровой обработке сигналов.

Z -преобразование некоторых дискретных последовательностей приведено в табл. 13.3 [3, 6, 44].

Таблица 13.3

№ п/п	Дискретная последовательность $x[n]$	Z -преобразование
1	$\sigma[n] = 1[n]$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
2	n	$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$
3	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\binom{n}{k} (k=0, 1, 2, \dots)^*$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$

Окончание табл. 13.3

№ п/п	Дискретная последовательность $x[n]$	Z-преобразование
5	a^n	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$
6	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
7	$\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
8	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} a^{n-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$
9	$\binom{n}{k} a^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots)^*$	$\frac{z}{(z-a)^{k+1}}$
10	$\frac{a^n - b^n}{a - b} \quad (a \neq b)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
11	$a^n \sin(bn)$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
12	$a^n \cos(bn)$	$\frac{z(z - a \cos b)}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$

* Символом $\binom{n}{k}$ обозначено число сочетаний из n элементов по k .

Обратное Z-преобразование (ОЗП). Это определение отсчетов сигнала по его Z-образу. Если Z-образ сигнала задан в виде степенного ряда

$$X(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}, \quad (13.22)$$

то коэффициенты этого ряда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ согласно (12.21) и есть отсчеты $x(nT)$ сигнала $x(t)$ в моменты времени nT (или, что то же самое, отсчеты $x[n]$ в безразмерные моменты n).

В общем случае ОЗП определяется по формуле

$$x(nT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) dz, \quad (13.23)$$

где C – замкнутый контур интегрирования (контур сходимости) на z -плоскости, охватывающий начало координат и все особенности функции $F(z) = X(z)z^{n-1}$. Обход контура интегрирования проводится против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении. При этом можно пользоваться выражением (согласно теореме Коши):

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases} \quad (13.24)$$

Обратное Z -преобразование можно вычислить несколькими способами.

1. Прямым вычислением интеграла (12.23) с использованием теоремы Коши (13.24) (см. пример 5).

2. Разложением в степенной ряд (см. пример 6).

3. С использованием теоремы о вычетах (см. пример 7)

$$x(nT) = x[n] = \sum \operatorname{res} [F(z)]_z \text{ внутри } C, \quad (13.25)$$

где $\sum \operatorname{res}$ – сумма вычетов в полюсах подынтегральной функции (см. пример 6).

4. Разложением $X(z)$ на простые дроби (см. пример 8).

5. Делением числителя $X(z)$ на его знаменатель (см. пример 9).

13.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Единичный дискретный скачок. Это последовательность отсчетов, полученная дискретизацией функции включения (Хевисайда) $\sigma(t) = 1$ при $t \geq 0$ (рис. 13.3, а). Следовательно,

$$\sigma(nT) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.26)$$

Найдем прямое преобразование Фурье согласно (13.4)

$$\dot{X}_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} = 1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots$$

Этот бесконечный ряд будет суммой геометрической прогрессии [42]. Суммируем прогрессию и получаем

$$\dot{X}_d(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}}. \quad (13.27)$$

Прямое преобразование Лапласа можно получить в соответствии с формулой (13.6) или из формулы (13.27), положив $p = j\omega$. Тогда

$$X_d(p) = \sigma_d(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT} = 1 + e^{-pT} + e^{-p2T} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-pT}}. \quad (13.28)$$

Полюс функции $X_d(p)$ имеет место при $p = p_{\Pi} = 0$ (рис. 13.3, б).

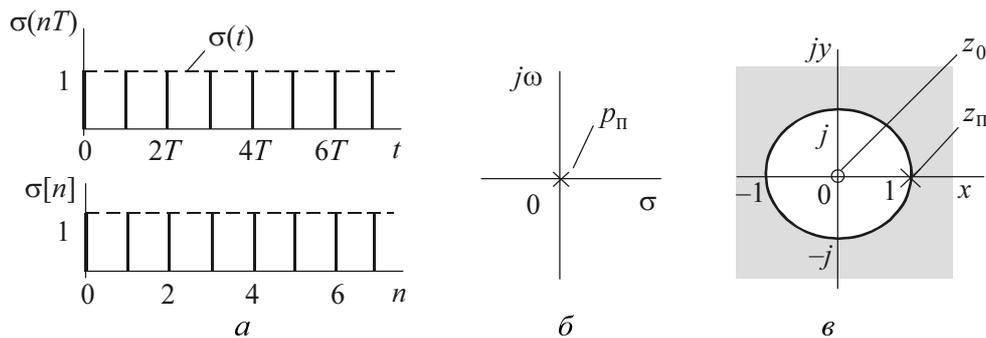


Рис. 13.3

И, наконец, прямое Z -преобразование согласно (13.12) или (13.28) примет вид

$$X(z) = \sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (13.29)$$

Функция $X(z)$ имеет нуль в точке $z_0 = 0$ и полюс – в точке $z_{\Pi} = 1$ (рис. 13.3, в); радиус сходимости $r_0 = 1$, область сходимости включает в себя всю Z -плоскость, за исключением круга радиуса $r_0 = 1$ (ряд сходится при $r_0 < |z| < \infty$).

Пример 2. Экспоненциальная дискретная последовательность. Она получается из сигнала $x(t) = 1e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$ (рис. 13.4, а). В этом случае

$$x(nT) = 1e^{-\alpha nT}. \quad (13.30)$$

Определим прямое преобразование Фурье, Лапласа и Z-преобразование аналогично тому, как это было выполнено в предыдущем примере:

$$\dot{X}_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} e^{-j\omega nT} = 1 + e^{-(\alpha+j\omega)T} + e^{-(\alpha+j\omega)2T} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+j\omega)T}}, \quad (13.31)$$

$$\dot{X}_d(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} e^{-pnT} = 1 + e^{-(\alpha+p)T} + e^{-(\alpha+p)2T} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+p)T}}. \quad (13.32)$$

Полус $p_{\Pi} = -\alpha$ функции $X_d(p)$ (рис. 13.4, б):

$$\begin{aligned} \dot{X}_d(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} z^{-n} = 1 + e^{-\alpha T} z^{-1} + e^{-\alpha 2T} z^{-2} + \dots = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Нуль $z_0 = 0$, полюс $z_{\Pi} = e^{-\alpha T}$, $r_0 = e^{-\alpha T}$; область сходимости – вся Z-плоскость, за исключением круга радиуса r_0 (рис. 13.4, в)

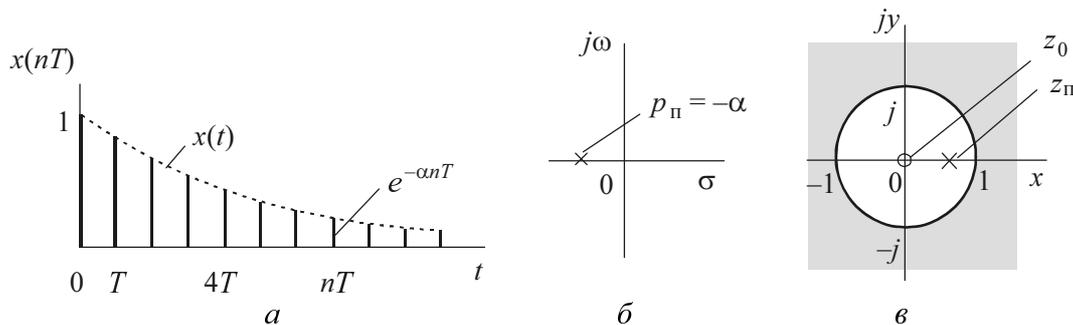


Рис. 13.4

Следует отметить, что пример 1 – частный случай этого примера при $\alpha = 0$.

Пример 3. Косинусоидальная последовательность. Получим выражение Z-преобразования последовательности отсчетов $c(nT)$ из сигнала $x(t) = S_0 \cos \omega_0 t$, $S_0 = 1$, $t > 0$ с шагом дискретизации T :

$$c(nT) = x(nT) = \cos(\omega_0 nT) = \cos(2\pi n / N),$$

$N = T_0 / T$ – целое число отсчетов за период сигнала $T_0 = 2\pi / \omega_0$.

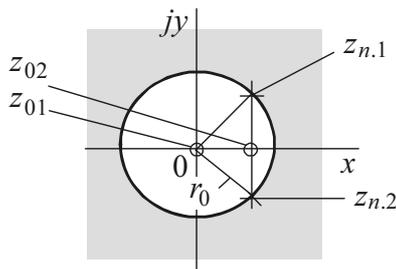


Рис. 13.5

Найдем нули, полюсы, область и радиус сходимости. Представим последовательность $c(nT)$ в виде суммы двух комплексных экспоненциальных последовательностей:

$$c(nT) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 nT} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 nT}.$$

Применяя основную формулу Z-преобразования (13.12), получим

$$\begin{aligned} X(z) = C(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega_0 T} z^{-1})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\omega_0 T} z^{-1})^n = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 T} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 T} z^{-1}} = \\ &= \frac{z^2 (1 - e^{-j\omega_0 T} z^{-1}) + (1 - e^{j\omega_0 T} z^{-1})}{2(z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1)} = \frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}. \end{aligned}$$

Функция $X(z)$ имеет нули $z_{01} = 0$, $z_{02} = \cos \omega_0 T$, полюсы $z_{n,1,2} = \cos \omega_0 T \pm j \sin \omega_0 T$, радиус сходимости $r_0 = 1$ и область сходимости $|z| > 1$ (рис. 13.5).

Пример 4. Свертка последовательностей. Зададим отсчеты последовательностей в виде

$$x_1(nT) = (5, 10, 15, 20, 0, 0, \dots), \quad x_2(nT) = (4, 3, 2, 1, 0, 0, \dots).$$

Используем алгоритм дискретной свертки (13.19).

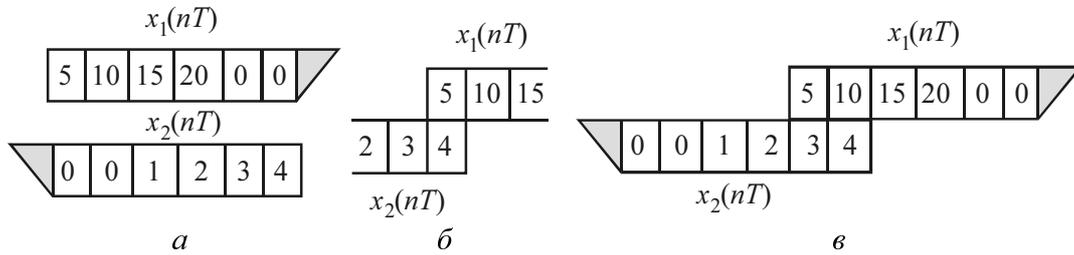


Рис. 13.6

Поясним вычисление с помощью двух полосок бумаги. На первой полоске запишем через равные интервалы отсчеты первой последовательности $x_1(nT)$, а на второй полоске – отсчеты $x_2(nT)$, но в обратном порядке, т. е. справа налево (рис. 13.6, а). Совместим первые позиции записей (рис. 13.6, б). Перемножив отсчеты, перекрывающиеся на одной вертикали, получим $x_3(0) = 5 \cdot 4 = 20$. Передвинув полоски на одну позицию (рис. 13.6, в), найдем значение $x_3(1) = 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 55$. Эти операции выполняем до тех пор, пока не перестанут перекрываться ненулевые отсчеты.

В результате получаем $x_3(nT) = (20, 55, 90, 150, 0, 0, \dots)$.

Пример 5. Вычисление ОЗП с использованием теоремы Коши. Требуется найти дискретный сигнал $x_d(t) = \{x(nT)\}$, если его Z -образ $X(z)$ имеет вид

$$X(z) = (z+1)/z.$$

Обратимся к формулам (13.22) и (13.23). Находим:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} \frac{(z+1)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (z^{-1} + z^{-2}) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-2} dz = 1 + 0 = 1, \\ x(T) &= \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-0} \frac{(z+1)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (1 + z^{-1}) dz = 0 + 1 = 1, \\ x(2T) &= \frac{1}{2\pi j} \oint z \frac{(z+1)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (z+1) dz = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-1} \frac{(z+1)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-n-2} (z-1) dz = 0 \text{ при любых } n \geq 2.$$

Таким образом, дискретный сигнал согласно (13.1) имеет вид

$$x_d(t) = \{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sigma(t-nT) = 1\delta(0) + 1\delta(t-T) + 0 + 0 + \dots,$$

или $x[n] = (1, 1, 0, 0, \dots)$

Пример 6. Определение ОЗП разложением Z-образа в степенной ряд. Используя степенной ряд, найдем последовательность $x[n]$, Z-образ которой

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < a. \quad (13.34)$$

Это выражение представляет собой сумму геометрической прогрессии вида [42]

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots = a^0 z^0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}.$$

Следовательно, $x[0] = a^0 = 1$, $x[1] = a^1 = a$, $x[2] = a^2$ и т. д. При $a < 1$ прогрессия сходится.

С другой стороны, Z-образ связан с последовательностью $x[n]$ соотношением (13.12):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

Из сравнения правых частей формул функции $X(z)$ можно записать

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \quad a < 1, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (13.35)$$

Пример 7. Вычисление $x[n]$ с помощью вычетов. Для сложных функций $F(z) = X(z)z^{n-1}$ можно перейти от интеграла (13.23) к сумме вычетов (13.25):

$$x(nT) = x[n] = \sum \operatorname{res} [F(z)]_z \text{ внутри } C.$$

Если функция $F(z)$ имеет в точке $z_{\Pi i}$ полюс кратности m (при этом m – целое положительное число), то

$$\operatorname{res}_i = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[F(z)(z - z_{\Pi i})^m \right]_{z=z_{\Pi i}}. \quad (13.36)$$

Пусть $X(z) = (3z^2 + 2z) / (z-1)^2$. Тогда

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = X(z) = \frac{(3z^2 + 2z)z^{n-1}}{(z-1)^2} = \frac{3z^{n+1} + 2z^n}{(z-1)^2}.$$

Двукратный полюс ($m = 2$) функции $F(z)$: $z_{\Pi} = 1$. Вычисление вычета в соответствии с (13.36) дает

$$\begin{aligned} x[n] = \operatorname{res} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[F(z)(z - z_{\Pi})^2 \right]_{z_{\Pi}=1} = \frac{d}{dz} \left[\frac{3z^{n+1} + 2z^n}{(z-1)^2} (z-1)^2 \right]_{z_{\Pi}=1} = \\ &= \frac{d}{dz} \left[3z^{n+1} + 2z^n \right]_{z_{\Pi}=1} = 3(n+1) + 2n = 3 + 5n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x[n] = \begin{cases} 3 + 5n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Следовательно, отсчеты сигнала можно записать в виде $\{x_n\} = (3, 8, 13, 18, \dots)$.

Пример 8. Вычисление ОЗП разложением функции $X(z)$ на простые дроби. При использовании этого способа функцию $X(z)$ записывают в виде дроби

$$X(z) = \prod_{i=1}^m (1 - z_{0,i} z^{-1}) / \prod_{i=1}^N (1 - z_{\Pi,i} z^{-1}) \quad (13.37)$$

и далее представляют суммой

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - b_i z^{-1}}, \quad (13.38)$$

где коэффициенты разложения определяются как

$$\alpha_i = X(z)(z - z_{\text{п.}i}) \Big|_{z=z_{\text{п.}i}}. \quad (13.39)$$

Каждое слагаемое $\alpha_i / (1 - b_i z^{-1})$ имеет обратное Z-преобразование вида $\alpha_i (b_i)^n$. Тогда получим

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{i=0}^N \alpha_i (b_i)^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (13.40)$$

Пример 9. Нахождение последовательности делением числителя ее Z-образа на знаменатель. Пусть Z-образ последовательности имеет вид

$$X(z) = \frac{5 + z^{-1}}{1 + z^{-2}}.$$

Найдем первые пять значений $x[n]$.

$$\begin{array}{r} \frac{5 + z^{-1}}{5 + 15z^{-1}} \quad \Big| \quad \frac{1 + z^{-2}}{5 + 2z^{-1} - 15z^{-2} - 6z^{-3} + 45z^{-4} + \dots} \\ \underline{2z^{-1} - 15z^{-2}} \\ 2z^{-1} + 6z^{-3} \\ \underline{-15z^{-2} - 6z^{-3}} \\ -15z^{-2} - 45z^{-4} \\ \underline{-6z^{-3} + 45z^{-4}} \\ -6z^{-3} - 18z^{-5} \\ \underline{45z^{-4} + 18z^{-5}} \\ -45z^{-4} + 135z^{-6} \\ \text{и т. д.} \end{array}$$

Итак, получаем $\{x_n\} = (5, 2, -15, -6, 45, \dots)$.

13.3. УПРАЖНЕНИЯ

13.3.1. ДИСКРЕТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

1. Аналоговый сигнал $x(t) = Ae^{-\alpha t} \sigma(t)$ дискретизирован с шагом $T = 0.1$ мс. Параметры сигнала: $A = 10$ В, $\alpha = 2000$ 1/с.

Запишите дискретную последовательность $x_d(t) = x(nT)$ и вычислите первые 13 отсчетов. Восстановите (аппроксимируйте) сигнал по этим отсчетам рядом Котельникова. С помощью Mathcad изобразите графики $x(t)$, $x_d(t)$, $\tilde{x}(t)$.

2. По данным предыдущего упражнения определите спектральную плотность $\dot{X}(\omega)$ аналогового сигнала. Ограничьте спектр полосой от $-\omega_m$ до ω_m , где $\omega_m = \omega_d / 2 = \pi / T$. Определите спектральную плотность дискретизированного сигнала $\dot{X}_d(\omega)$. Изобразите график $|\dot{X}_d(\omega)|$.

3. Найдите и изобразите модуль $|\dot{X}_d(\omega)|$ прямого преобразования Фурье последовательности отсчетов $x(nT)$, полученной из прямоугольного импульса $x(t) = U_0$, $0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$ с шагом квантования $T = \tau_{\text{и}} / 4$. Спектральную плотность $|\dot{X}(j\omega)|$ аналогового сигнала ограничьте полосой от от $-\omega_m$ до ω_m , где $\omega_m = 4\pi / \tau_{\text{и}}$.

4. Найдите преобразование Лапласа последовательности

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \quad a < 1, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

13.3.2. ПРЯМОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

5. Заданы отсчеты дискретного сигнала: $x(0) = 0$, $x(T) = 1$, $x(2T) = 2$, $x(3T) = 3$, $x(nT) = 0$ при $n \geq 4$. Запишите Z-образ сигнала.

6. Прямоугольный импульс после дискретизации представлен в виде последовательности

$$x[n] = \begin{cases} 3, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & n \leq 0, \quad n > 3. \end{cases}$$

Найдите Z-образ этой последовательности.

7. Определите Z -преобразование последовательности отсчетов $x[n]$ из прямоугольного импульса $x(t) = U_0$, $0 < t < \tau_{\text{и}}$, где $\tau_{\text{и}} = NT$. Воспользуйтесь также Z -образом единичного дискретного скачка (13.28).

8. Найдите Z -преобразование последовательности

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & n \geq 0. \end{cases}$$

9. Получите выражение Z -преобразования последовательности отсчетов $x(nT)$ из сигнала $x(t) = S_0 e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t}$, $S_0 = 1$, $t \geq 0$, дискретизированного с шагом T . Определите полюсы функции $X(z)$ в точках: 1) $\sigma_1 = 0$, $\omega_1 \neq 0$ и 2) $\sigma_1 < 0$, $\omega_1 = 0$.

10. Получите выражение Z -преобразования последовательности отсчетов $x(nT)$ из сигнала $x(t) = S_0 \sin \omega_0 t$, $S_0 = 1$, $t > 0$ с шагом дискретизации T :

$$x(nT) = \sin(\omega_0 nT) = \sin(2\pi n / N),$$

$N = T_0 / T$ – целое число отсчетов за период сигнала $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Найдите нули, полюсы, радиус и область сходимости.

11. Единичный дискретный скачок $\sigma[n]$ прорежен $N-1$ нулевыми отсчетами так, что прореженный сигнал $\sigma_1[n]$ для $N = 5$ имеет вид (рис. 13.7, а)

$$\sigma_1[n] = \begin{cases} \sigma[m], & n = mN, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Найдите Z -образ $\sigma_1(z)$ прореженной последовательности $\sigma_1[n]$.

12. Дискретный прямоугольный импульс $x[n]$

$$x[n] = U_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad N = 7$$

прорежен нулевыми отсчетами с нечетными номерами, т. е. получена последовательность из $2N$ отсчетов (рис. 13.7, б)

$$x_1[n] = \begin{cases} U_0, & n = 0, 2, \dots, 2(N-1), \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Выразите $X_1(z)$ через Z -образ $X(z)$ непрореженного дискретного прямоугольного импульса $x[n]$.

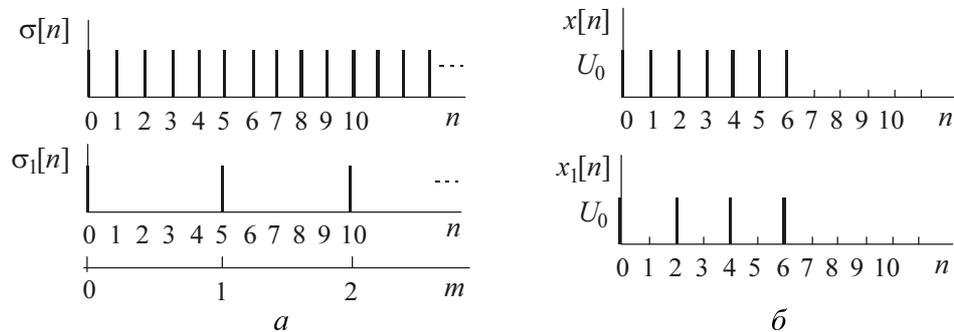


Рис. 13.7

13. Вычислите свертку $f(nT)$ последовательностей $x(nT) = (0, 2, 0, 1, 0, \dots)$ и $y(nT) = (1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots)$.

13.3.3. ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

14. Найдите отсчеты $x[n]$ сигнала, Z-преобразование которого $X(z) = 3z^{-3}$.

15. Найдите дискретный сигнал $\{x_n\}$, Z-преобразование которого $X(z) = 1 + 3z^{-2} - 3z^{-3} + z^{-4}$.

16. Найдите обратное Z-преобразование функции $X(z) = 1/(1 - 0.5z^{-1})$.

17. Вычислите пятый отсчет $x[4]$ дискретной последовательности, Z-преобразование которой $X(z) = 10/(1 - 0.8z^{-1})$.

18. Найдите обратное Z-преобразование функции $X(z) = (z^2 + z)/(z - 1)^2$ с использованием теоремы о вычетах.

19. Решите предыдущее упражнение с использованием табличных преобразований.

20. Найдите обратное Z-преобразование функции $X(z) = 10z^{-2}/(z + 0.8)$ разложением ее в степенной ряд.

21. Z-образ $X(z)$ сигнала $x(nT)$ задан выражением

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}.$$

Вычислите обратное Z-преобразование путем разложения функции $X(z)$ на простые дроби.

22. Найдите обратное Z -преобразование функции

$$X(z) = \frac{5z + 1}{5z^{-2} - 9z^{-1} + 4}.$$

Вычисление проведите разложением функции $X(z)$ на простые дроби.

23. Найдите последовательность, Z -образ которой

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 - 2z + 1},$$

посредством разложения функции $X(z)$ на сумму простых дробей и использования табличных преобразований.

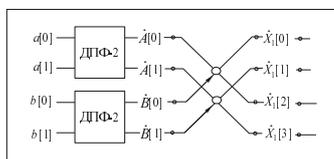
24. Z -образ $X(z)$ последовательности $x[n]$ задан:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})}, \quad |z| < |a|.$$

Найдите последовательность $x[n]$ делением числителя функции $X(z)$ на ее знаменатель.

Глава 14

ДИСКРЕТНОЕ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ



Наука выигрывает, когда ее крылья раскованы фантазией.

М. Фарадей

14.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

14.1.1. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В главе 8 было показано, что в соответствии с теоремой Котельникова аналоговый сигнал с ограниченной частотой f_m (рис. 14.1, а) полностью характеризуется дискретным сигналом, т. е. совокупностью своих отсчетов (выборок), взятых через интервал $T = \Delta t = 1/2f_m$. Количество отсчетов $N = T_c / T = 2T_c f_m$, где T_c – длительность сигнала. Спектральная плотность дискретного сигнала выражается в соответствии с зависимостью (8.19)

$$\dot{X}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - k\omega_d). \quad (14.1)$$

Спектр дискретного сигнала отличается от спектра аналогового сигнала периодичностью по частоте, при этом «период» равен частоте дискретизации $\omega_d = 2\omega_m$ (рис. 14.1, б). При этом оба спектра непрерывные.

При цифровой обработке сигналов требуется дискретизация и сигнала и его спектра. В главе 8 показано, что в соответствии с теоремой отсчетов спектральная плотность сигнала может быть полностью охарактеризована выбор-

ками в области положительных частот с интервалом дискретизации по частоте $\Delta\omega = 2\pi/T_c$ и их числом $N = 2T_c f_m$. При этом дискретный спектр будет соответствовать периодической последовательности дискретного сигнала $x_d(t)$ с периодом $T_c = NT$ (рис. 14.1, в).

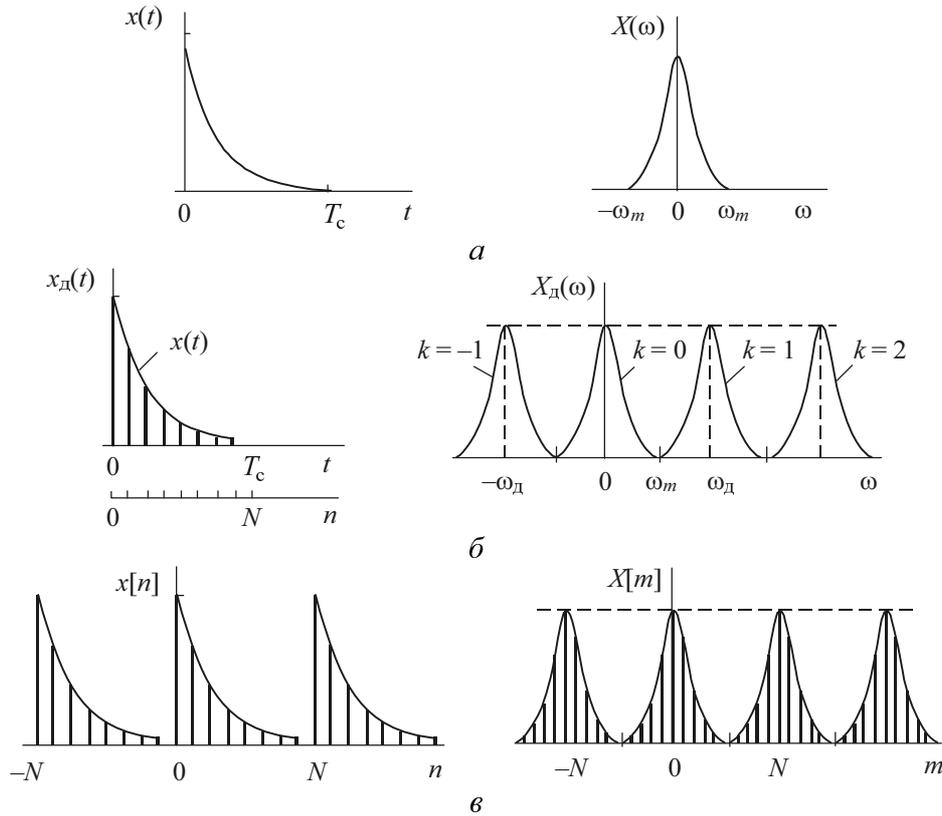


Рис. 14.1

Обратимся к выражению (13.4) и подставим в него $\omega = m\Delta\omega$. Тогда получим

$$\dot{X}_d(m\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jm\Delta\omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, N-1. \quad (14.2)$$

Выражение (14.2) называется *прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)*.

В дальнейшем аргументы $m\Delta\omega$ и nT обозначим просто как m и n . Тогда ДПФ примет вид

$$\dot{X}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, N-1, \quad (14.3)$$

и будет представлять собой алгоритм расчета спектральных коэффициентов $\{\dot{X}[m]\}$ по известным отсчетам сигнала $\{x[n]\}$.

Сопоставление формул (13.4) и (14.3) показывает, что спектральный коэффициент $\dot{X}[m]$ – это m -й отсчет спектральной плотности $\dot{X}_d(\omega_m)$ дискретного сигнала $x_d(t)$ на частоте $\omega_m = m\Delta\omega = m \cdot 2\pi / T_c = m \cdot 2\pi / NT = \omega_d m / N$:

$$\dot{X}[m] = \dot{X}_d(\omega_m) = \dot{X}_d(\omega_d m / N). \quad (14.4)$$

Поскольку преобразование Фурье обладает свойством дуальности, существует обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \dot{X}[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, N-1. \quad (14.5)$$

Эту формулу можно рассматривать как алгоритм вычисления отсчетов $\{x[n]\}$ сигнала $x(t)$ по коэффициентам $\{\dot{X}[m]\}$ спектральной плотности $\dot{X}_d(\omega)$.

Формулы (14.3) и (14.5) отличаются лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и наличием множителя $1/N$ в обратном ДПФ. Пара (прямое и обратное) ДПФ применяется к конечной последовательности из N отсчетов или к периодической последовательности, у которой период состоит из N отсчетов.

Прямое и обратное ДПФ проиллюстрировано на рис. 14.1, в.

Итак, в результате дискретизации спектральной плотности $\dot{X}_d(\omega)$ дискретный сигнал становится периодическим и, следовательно, все его отсчеты повторяются с периодом N : $x[n] = x[n \pm lN]$, $l = 0, 1, \dots, \infty$.

В главе 7 было показано, что спектральная плотность $\dot{X}(m\Omega)$ периодического сигнала и спектральные коэффициенты \dot{C}_m комплексного ряда Фурье связаны простым соотношением (7.7), т. е.

$$\dot{C}_m = \frac{1}{T_c} \dot{X}(m\Omega), \quad m = 0, \pm 1, \dots, N-1; \quad \Omega = 2\pi / T_c. \quad (14.6)$$

Аналогично и для периодического дискретного сигнала, характеризующегося отсчетами $\{x[n]\}$, можно вычислить комплексные спектральные амплитуды \dot{C}_m :

$$\dot{C}_m = \frac{1}{N} \dot{X}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}. \quad (14.7)$$

Постоянная составляющая C_0 (гармоника с нулевым номером), т. е. среднее значение всех отсчетов, как следует из (14.7),

$$C_0 = \frac{1}{N} \dot{X}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

Добавление конечных нулей. Если добавить к конечному числу отсчетов сигнала некоторое количество конечных нулей, то, как следует из (14.4), ДПФ будет иметь большее число спектральных отсчетов, при этом соответствующие частоты будут более тесно расположены в пределах от нуля до частоты дискретизации ω_d (см. пример 10). Увеличение N (при сохранении числа отсчетов собственно сигнала) равносильно увеличению периода повторения сигнала T_c , уменьшению частоты Ω (13.6) и спектральных коэффициентов \dot{C}_m (14.7).

Обратная задача, т. е. расчет отсчетных значений $x[n]$ по заданным коэффициентам \dot{C}_n , решается с помощью обратного ДПФ:

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \dot{C}_m e^{j \frac{2\pi}{N} mn}. \quad (14.8)$$

Что касается свойств ДПФ, то они в общем аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье и Z -преобразования.

Связь ДПФ с Z -преобразованием. Обратимся к формуле (13.12). Вычисляя сумму на интервале $0 \leq m \leq N-1$ при $z = e^{j(2\pi/N)m}$ (т. е. в точках на единичной окружности с углом $2\pi m / N$), получаем

$$\dot{X}[m] = X[z]_{z=e^{j(2\pi/N)m}} = X \left[e^{j(2\pi/N)m} \right]. \quad (14.9)$$

Таким образом, коэффициенты ДПФ $\{\dot{X}[m]\}$ периодической последовательности или последовательности конечной длины N равны значениям Z -преобразования этой последовательности в N точках. Эти точки равномерно распределены на единичной окружности с полярным углом $2\pi m / N$.

14.1.2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА ПО ДПФ

Первый способ. Пусть на основании последовательности $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ вещественного сигнала определены (или заданы) коэффициенты ДПФ $\{C_0, C_1, \dots, C_{N-1}\}$. Тогда исходный сигнал можно найти как ряд Фурье конечной суммы

$$x(t) = C_0 + 2|C_1|\cos(\Omega t + \varphi_1) + \dots + |C_i|\cos(i\Omega t + \varphi_i),$$

$$i = 1, \dots, N/2, \quad (14.10)$$

где $\varphi_i = \arg C_i$ – фазовый сдвиг соответствующего коэффициента ДПФ; $\Omega = 2\pi / T_c$ – круговая частота первой гармоники. Верхняя (максимальная) частота ω_m в спектре дискретизируемого сигнала, как это следует из теоремы Котельникова,

$$\omega_m = \frac{1}{2} \omega_d = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} = \frac{N2\pi}{2T_c} = \frac{N}{2} \Omega. \quad (14.11)$$

Таким образом, при любом четном N число определяемых гармоник конечно и составляет половину числа отсчетов N .

Второй способ. По известным коэффициентам ДПФ $\{\dot{X}[0], \dot{X}[1], \dots, \dot{X}[N-1]\}$ или $\{C_0, C_1, \dots, C_{N-1}\}$ находим последовательность отсчетов $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\} = \{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ соответственно по формуле (14.5) или (14.8). Далее переходим к непрерывному сигналу с помощью ряда Котельникова (8.1).

Но следует отметить, что ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально содержит бесконечное число слагаемых. Поэтому часто первый способ восстановления предпочтителен.

14.1.3. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Основной недостаток ДПФ – это весьма большое число вычислительных операций. Для вычисления одного коэффициента $\dot{X}[m]$ ДПФ по формуле (14.3) требуется выполнить примерно N комплексных операций умножения и сложения. Следовательно, для расчета ДПФ из N коэффициентов потребуется N^2 пар операций «умножение–сложение». С увеличением N число операций возрастает пропорционально квадрату N .

Алгоритмы, получившие название алгоритмов **быстрого преобразования Фурье (БПФ)**, позволяют существенно уменьшить время вычисления ДПФ. Эти остроумные алгоритмы во многих практических случаях позволяют в сотни и более раз сократить время вычисления ДПФ. Основная идея БПФ сводится к преобразованию одномерного массива чисел в двумерный, а это можно выполнить разными способами. Поэтому известны несколько способов реализации БПФ.

Алгоритмы с основанием 2 используются при $N = 2^r$, где r – целое число. Алгоритмы, реализация которых требует перестановки отсчетов: $x[n]$ входной (исходной) последовательности, называются *алгоритмами с прореживанием по времени*; $\dot{X}[m]$ выходной последовательности – *алгоритмами с прореживанием по частоте*.

Обе эти разновидности алгоритмов эквивалентны по эффективности – они требуют примерно $N \log_2 N = Nr$ операций. Следовательно, они уменьшают количество вычислительных операций примерно в N/r раз по сравнению с прямым вычислением ДПФ.

Ниже рассмотрим один из таких алгоритмов.

Алгоритм БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени. Выразим ДПФ N -точечной исходной последовательности $\{x[n]\}$ согласно (14.3) в виде

$$\dot{X}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn}, \quad (14.12)$$

где $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$. Разделим последовательность $\{x[n]\}$ на две $N/2$ -точечные, состоящие соответственно из $\{x[n]\}$ с четными и нечетными номерами:

$$x_1[n] = x[2n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad \text{и} \quad x_2[n] = x[2n+1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Тогда (14.15) запишется

$$\begin{aligned} \dot{X}[m] &= \sum_{n\text{-четное}}^{N/2-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)mn} + \sum_{n\text{-нечетное}}^{N/2-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)mn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{(2n+1)mn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{mn} = \dot{X}_1[m] + W_N^m \dot{X}_2[m], \quad (14.13) \end{aligned}$$

где $\dot{X}_1[m]$ и $\dot{X}_2[m]$ – двухточечные ДПФ последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$.

Так как $\dot{X}[m]$ следует выполнять при $0 \leq m \leq N-1$, а $\dot{X}_1[m]$ и $\dot{X}_2[m]$ определяются при $0 \leq m \leq N/2-1$, то формула (13.13) должна быть доопределена при $m \geq N/2$:

$$\dot{X}[\leq m] = \begin{cases} \dot{X}_1[m] + W_N^m \dot{X}_2[m], & 0 \leq m \leq N/2-1, \\ \dot{X}_1[m-N/2] + W_N^m \dot{X}_2[m-N/2], & N/2 \leq m \leq N-1. \end{cases} \quad (14.14)$$

Отметим, что значения $\dot{X}_1[m-N/2]$ и $\dot{X}_2[m-N/2]$ совпадают с соответствующими значениями $\dot{X}_1[m]$ и $\dot{X}_2[m]$.

Основу алгоритма (14.14) составляет операция «сложение–вычитание» с умножением одного из слагаемых на коэффициент W_N^m . Это базовая операция для БПФ, она представлена на рис. 14.2 в виде направленного графа, называемого «бабочкой».

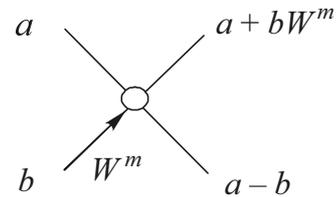


Рис. 14.2

На рис. 14.3 проиллюстрирован алгоритм (13.14) при выполнении восьмиточечного ДПФ с применением двух четырехточечных ДПФ.

Каждое из двух ДПФ размерности $N/2$ требует $N^2/4$ операций, а все ДПФ – $2N^2/4$ операций плюс $N/2$ операций умножения на комплексный коэффициент W_N^m . В итоге получается

$$2N^2/4 + N/2 = N(N+1)/2 \approx N^2/2,$$

т. е. почти в два раза меньше, чем при расчете ДПФ прямым способом.

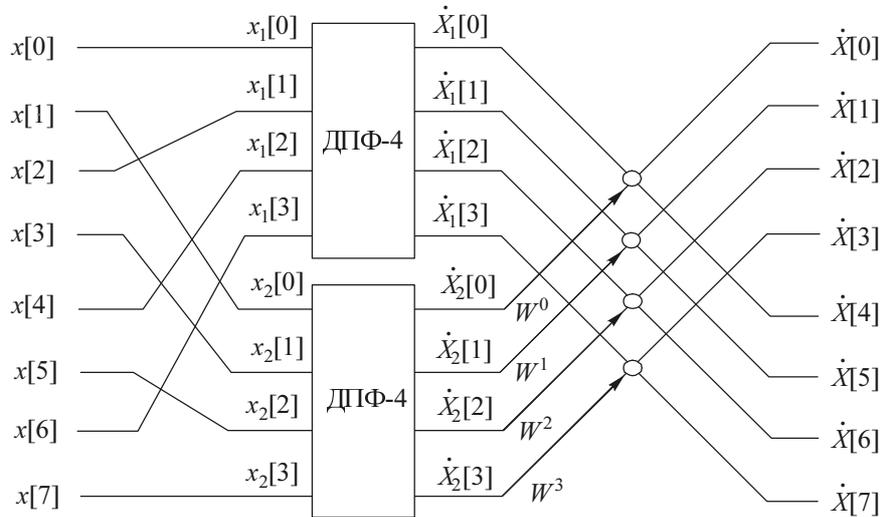


Рис. 14.3

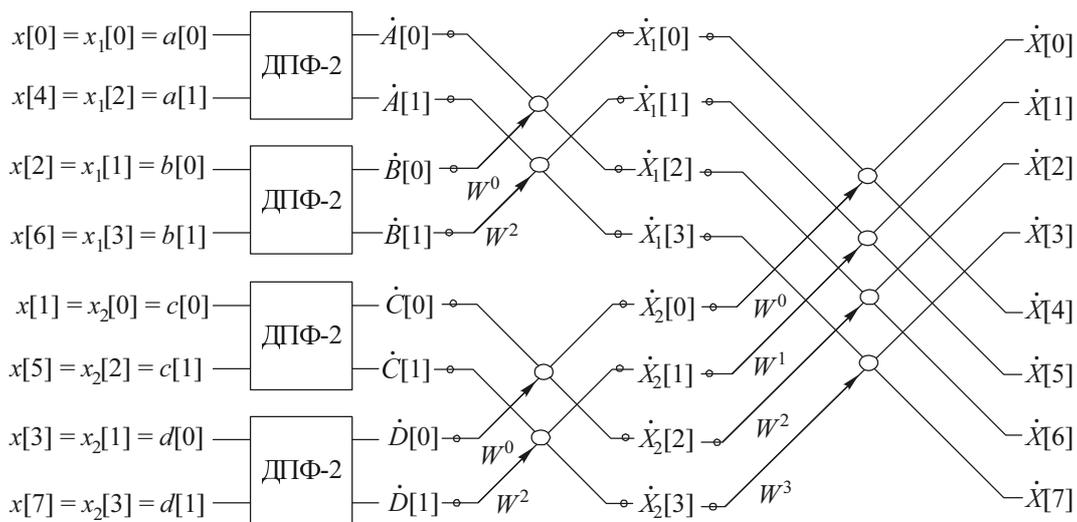


Рис. 14.4

Каждая из последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ может быть разделена аналогичным образом пополам. Тогда N -точечное ДПФ сводится к четырем $N/4$ -точечным. На рис. 14.4 приведен пример вычисления восьмиточечного ДПФ через два четырехточечных, каждое из которых, в свою очередь, вычисляется через два двухточечных ДПФ.

Последовательное разбиение N -точечного ДПФ пополам продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Таких ступеней разбиения всего $r = \log_2 N$; при этом число операций уменьшается примерно до $N \log_2 N = Nr$ вместо N^2 при прямом ДПФ.

Отметим, что алгоритмы с прореживанием по времени – это прямое ДПФ, а с прореживанием по частоте – обратное ДПФ, и оба они – дуальные. Каждый из них можно получить из другого заменой входа и выхода и обращения направления всех стрелок в направленном графе; возможен также обобщенный подход к БПФ с прореживанием по времени и по частоте [25].

14.1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ БПФ В ПАКЕТЕ Mathcad

Алгоритмы БПФ реализованы в нескольких встроенных функциях Mathcad, отличающихся нормирующими множителями [37, 38]:

$\text{fft}(x)$ – выполняет прямое БПФ для исходного вектора x , представленного действительными числами. При этом вектор x должен иметь $N = 2^r$ составляющих, где r – целое число. Если число составляющих другое, то функция вычисляет не БПФ, а прямое ДПФ значительно медленнее, либо следует дополнить недостающие элементы нулями;

$\text{cfft}(x)$ – функция, аналогичная предыдущей, но реализует прямое БПФ для вектора x с комплексными элементами;

$\text{FFT}(x)$ и $\text{CFFT}(x)$ – альтернативное прямое БПФ – вектор прямого БПФ в другой нормировке, вычисляющий коэффициенты (\dot{C}_m) комплексного ряда Фурье соответственно с вещественными и комплексными элементами;

$\text{ifft}(X)$ – выполняет обратное БПФ для вектора X с комплексными элементами;

$\text{icfft}(X)$ – выполняет обратное БПФ по полному алгоритму, когда как исходный, так и результирующий вектор (или матрица) содержат комплексные элементы;

$\text{ICFFT}(X)$ – альтернативное обратное БПФ – вектор обратного комплексного БПФ в другой нормировке.

14.1.5. МАТЛАВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ БПФ

Прямое и обратное ДПФ осуществляется в MATLAB с помощью алгоритмов БПФ; для этого предназначены функции [39, 40]:

- $y = \text{fft}(x)$ – осуществляет прямое БПФ для вектора x , переводящее представление сигнала из временной области в частотную область. Элементы

вектора y соответствуют частотам, равномерно распределенным от нуля до частоты дискретизации;

- $y = \text{fftshift}(x)$ – то же, что и $y = \text{fft}(x)$, но при выводе спектра нулевая частота находится в центре графика, а диапазон частот простирается от $-f_d/2$ до $f_d/2$;

- $y = \text{fft}(x, N)$ – вычисляет прямое БПФ, но предварительно приводит исходные данные к размеру N (урезая их или дополняя нулями);

- $x = \text{ifft}(y)$ или $x = \text{ifft}(y, N)$ – аналогичные варианты для обратного БПФ. Здесь $N = \text{length}(x)$ – длина вектора исходных данных.

14.2. ПРИМЕРЫ

14.2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДПФ

Пример 1. Экспоненциальная дискретная последовательность. Эта последовательность, как уже указывалось в примере 2 главы 13, получается из сигнала $x(t) = 1 \cdot e^{-at}$, $t \geq 0$, $a > 0$ (рис. 14.5). В этом случае

$$x(nT) = 1e^{-anT} \quad \text{и} \quad x[n] = 1e^{-\alpha n},$$

$\alpha = aT$ – безразмерная (нормированная) константа.

Найдем ДПФ $\dot{X}[m]$ и \dot{C}_m последовательности $x[n] = 1 \cdot e^{-\alpha n}$. Воспользуемся выражением (14.3). Тогда

$$\begin{aligned} \dot{X}[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n} e^{-j \frac{2\pi}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)n} = \\ &= 1 + e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)} + \dots + e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)n} + \dots + e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)(N-1)}. \end{aligned}$$

С учетом формулы геометрической прогрессии [43] получим

$$\dot{X}[m] = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)}}.$$

Согласно (14.7) спектральные коэффициенты \dot{C}_m комплексного ряда Фурье запишем

$$\dot{C}_m = \frac{1}{N} \dot{X}[m] = \frac{1}{N} \frac{1}{1 - e^{-(\alpha + j \cdot 2\pi m/N)}}.$$

На рис. 14.5 показана последовательность $x[n]$ для $T_c = 20$ мкс, $T = 1$ мкс, $a = 0.2 \cdot 10^6$ 1/с ($\alpha = 0.2$ и $N = T_c / T = 20$), а на рис. 14.6 – модуль $|\dot{X}[m]|$ ее спектральной плотности (а) и модуль коэффициентов $|\dot{C}_m| = |C(m)|$ комплексного ряда Фурье (б); здесь частота дискретизации $f_d = 1/T = 1$ МГц и частота повторения сигнала $F = 1/T_c = 20$ кГц. Напомним, что спектр дискретного сигнала периодичен с «периодом» f_d .

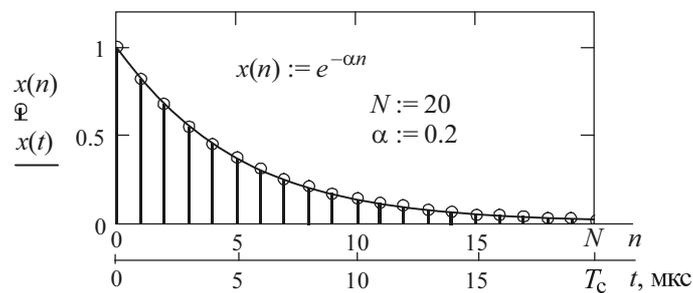


Рис. 14.5

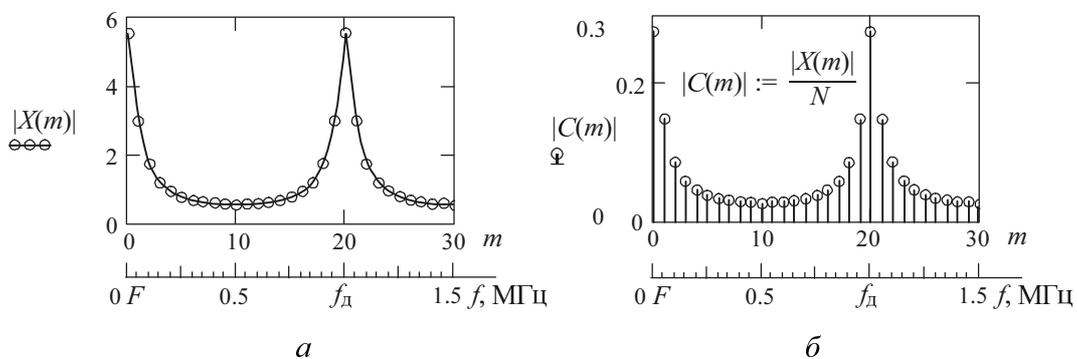


Рис. 14.6

Если шаг дискретизации T при постоянном периоде сигнала T_c уменьшить, например, в два раза, то частота дискретизации и число отсчетов N увеличатся в два раза, а коэффициенты $\{|C(m)|\}$ уменьшатся в два раза.

Если показатель экспоненты a уменьшать при неизменном периоде сигнала T_c и шаге дискретизации T , то экспонента затухать (спадать) будет

медленнее (рис. 14.7, а), а форма спектральной плотности будет изменяться следующим образом (рис. 14.7, б): будут увеличиваться значения $|X(0)| = |X(N)|$ и уменьшаться перекрытия отдельных спектров $|X(n - lN)|$, $l = 0, \pm \infty$ исходного сигнала.

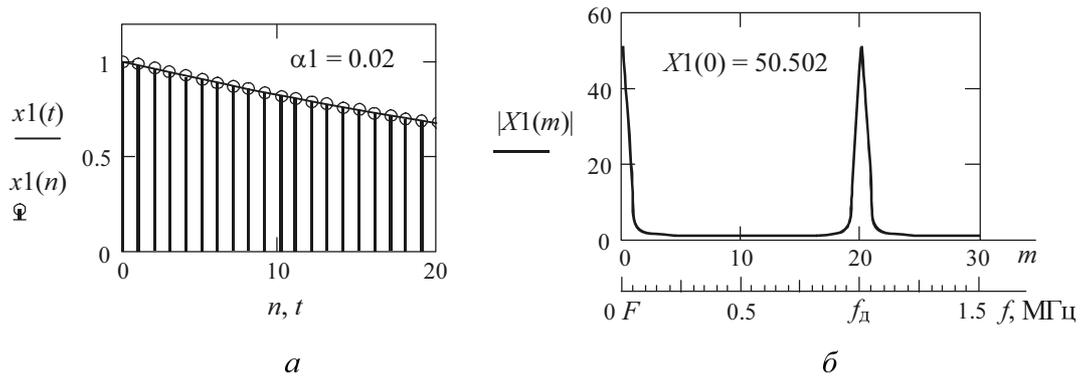


Рис. 14.7

Пример 2. Вычисление коэффициентов ДПФ. Дискретный периодический сигнал задан отсчетами

$$\{x[n]\} = \{x[0] = 2, x[1] = 0, x[2] = -2, x[3] = 0\} = (2, 0, -2, 0).$$

Требуется вычислить коэффициенты ДПФ $\{\dot{C}[m]\}$.

Согласно (14.7) имеем

$$\dot{C}_m = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn},$$

откуда:

- для $m = 0$ $\dot{C}_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] = \frac{1}{4}(2 + 0 - 2 + 0) = 0,$
- для $m = 1$ $\dot{C}_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j \frac{2\pi}{4} n} = \frac{1}{4}(2 + 0 - 2e^{-j\pi} + 0) = \frac{1}{4}(2 + 2) = 1,$

- для $m = 2$ $\dot{C}_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\pi n} = \frac{1}{4} (2 + 0 - 2e^{-j2\pi} + 0) = \frac{1}{4} (2 - 2) = 0,$
- для $m = 3$ $\dot{C}_3 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{3\pi}{2}n} = \frac{1}{4} (2 + 0 - 2e^{-j3\pi} + 0) = \frac{1}{4} (2 + 2) = 1.$

Пример 3. Выполнение обратного ДПФ. Дискретный периодический сигнал задан спектральными коэффициентами $\{\dot{C}[m]\}$:

$$\{\dot{C}[m]\} = \{\dot{C}[0] = 0, \dot{C}[1] = 1, \dot{C}[2] = 0, \dot{C}[3] = 1\} = (0, 1, 0, 1).$$

Требуется вычислить отсчеты $x[n]$ сигнала, т. е. выполнить обратное ДПФ (это обратное решение предыдущего примера).

Согласно (14.8) имеем

$$x[n] = \sum_{m=0}^{4-1} \dot{C}[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mn}.$$

Тогда:

- для $n = 0$ $x[0] = \sum_{m=0}^3 \dot{C}[m] = 0 + 1 + 0 + 1 = 2,$
- для $n = 1$ $x[1] = \sum_{m=0}^3 \dot{C}[m] e^{-j\frac{2\pi}{4}m} = 0 + 1e^{j\pi/2} + 0 + 1e^{j3\pi/2} = j - j = 0,$
- для $n = 2$ $x[2] = \sum_{m=0}^3 \dot{C}[m] e^{-j\pi m} = 0 + 1e^{j\pi} + 0 + 1e^{j3\pi} = -1 - 1 = -2,$
- для $n = 3$ $x[3] = \sum_{m=0}^3 \dot{C}[m] e^{-j3\pi m/2} = 0 + 1e^{j3\pi/2} + 0 + 1e^{j9\pi/2} = -j + j = 0.$

14.2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ БПФ В ПАКЕТЕ Mathcad

Пример 4. Прямое и обратное БПФ для векторов. Пусть исходный сигнал задан вектором x с комплексными элементами. С помощью функции $\text{fft}(x)$ он преобразуется в вектор X (прямое БПФ). Затем с помощью функции $\text{ifft}(X)$ вектор X преобразуется в вектор $x1$ (обратное БПФ), который идентичен исходному вектору x .

$i := \sqrt{1} \quad n := 0 \dots 8$ $x := \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+2i \\ 3+3i \\ 4+4i \\ 5+5i \\ 6+6i \\ 7+7i \\ 8+8i \end{pmatrix}$	$X := \text{cfft}(x)$ $x := \begin{pmatrix} 12.728 + 12.728i \\ 2 - 4.828i \\ -2.828i \\ -0.828 - 2i \\ -1.414 - 1.414i \\ -2 - 0.828i \\ -2.828 \\ -4.828 + 2i \end{pmatrix}$	$x1 := \text{icfft}(X)$ $x1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+2i \\ 3+3i \\ 4+4i \\ 5+5i \\ 6+6i \\ 7+7i \\ 8+8i \end{pmatrix}$
--	---	---

Пример 5. Синусоида как вектор. Исходный сигнал – синусоида – задан вектором

$$x = \{x[n]\} = (0, 0.5, 0.866, 1, 0.866, 0.5, 0, -0.5, -0.866, -1, -0.866, -0.5, 0).$$

Вычислим прямое БПФ $\hat{C}[n]$. Проверим полученный результат, выполнив обратное БПФ $x1 = \{x1[n]\}$, т. е. восстановим исходный сигнал. Построим графики $x[n]$, $|\hat{C}[n]|$ и $x1[n]$.

Листинг

$j := \sqrt{-1} \quad n := 0 \dots 13$ $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \\ 1 \\ 0.866 \\ 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ -0.866 \\ -1 \\ -0.866 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C := \text{CFFT}(x)$ <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.113-0.46i</td></tr> <tr><td>2</td><td>-0.028+0.053i</td></tr> <tr><td>3</td><td>-0.023+0.026i</td></tr> <tr><td>4</td><td>-0.021+0.015i</td></tr> <tr><td>5</td><td>-0.021+7.897i·10⁻³</td></tr> <tr><td>6</td><td>-0.021+2.506i·10⁻³</td></tr> <tr><td>7</td><td>-0.021-2.506i·10⁻³</td></tr> <tr><td>8</td><td>-0.021-7.897i·10⁻³</td></tr> <tr><td>9</td><td>-0.021-0.015i</td></tr> <tr><td>10</td><td>-0.023-0.026i</td></tr> <tr><td>11</td><td>-0.028-0.053i</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.113+0.46i</td></tr> </table>		0	0	0	1	0.113-0.46i	2	-0.028+0.053i	3	-0.023+0.026i	4	-0.021+0.015i	5	-0.021+7.897i·10 ⁻³	6	-0.021+2.506i·10 ⁻³	7	-0.021-2.506i·10 ⁻³	8	-0.021-7.897i·10 ⁻³	9	-0.021-0.015i	10	-0.023-0.026i	11	-0.028-0.053i	12	0.113+0.46i	$x1 := \text{ICFFT}(C)$ <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.5</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.866</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.866</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.5</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>-0.5</td></tr> <tr><td>8</td><td>-0.866</td></tr> <tr><td>9</td><td>-1</td></tr> <tr><td>10</td><td>-0.866</td></tr> <tr><td>11</td><td>-0.5</td></tr> <tr><td>12</td><td>0</td></tr> </table>		0	0	0	1	0.5	2	0.866	3	1	4	0.866	5	0.5	6	0	7	-0.5	8	-0.866	9	-1	10	-0.866	11	-0.5	12	0
	0																																																									
0	0																																																									
1	0.113-0.46i																																																									
2	-0.028+0.053i																																																									
3	-0.023+0.026i																																																									
4	-0.021+0.015i																																																									
5	-0.021+7.897i·10 ⁻³																																																									
6	-0.021+2.506i·10 ⁻³																																																									
7	-0.021-2.506i·10 ⁻³																																																									
8	-0.021-7.897i·10 ⁻³																																																									
9	-0.021-0.015i																																																									
10	-0.023-0.026i																																																									
11	-0.028-0.053i																																																									
12	0.113+0.46i																																																									
	0																																																									
0	0																																																									
1	0.5																																																									
2	0.866																																																									
3	1																																																									
4	0.866																																																									
5	0.5																																																									
6	0																																																									
7	-0.5																																																									
8	-0.866																																																									
9	-1																																																									
10	-0.866																																																									
11	-0.5																																																									
12	0																																																									

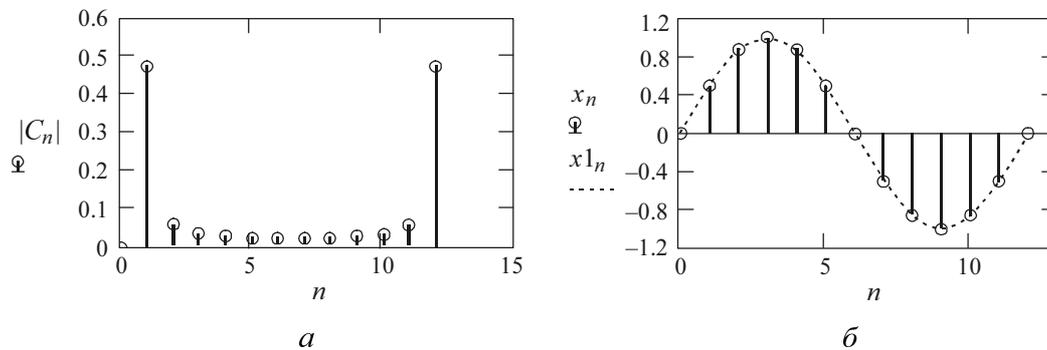


Рис. 14.8

С помощью функции $\text{fft}(x)$ вектор x преобразуется в вектор C (прямое БПФ – рис. 14.8, а). Затем с помощью функции $\text{ifft}(C)$ вектор C преобразуется в вектор $x1$ (обратное БПФ – штрихпунктирные линии на рис. 14.8, б), который идентичен исходному вектору x (кружочки на рис. 14.8, б).

Пример 6. Сумма трех синусоидальных составляющих. Расчет прямого БПФ проведен по 64 точкам, шаг дискретизации исходного сигнала равен Δ .

Листинг

$A1 := 1.6$	$A2 := 0.8$	$A3 := 0.6$	Амплитуды (В) и частоты (кГц) гармонических составляющих исходного сигнала
$F1 := 5$	$F2 := 10$	$F3 := 20$	
$N := 64$			Число отсчетов сигнала
$\Delta := \frac{1}{F1 \cdot N}$	$\Delta = 3.125 \times 10^{-3}$		Шаг дискретизации (мс)
$k := 1..N - 1$	$n_k := k \cdot \Delta$		Текущие отсчеты по оси абсцисс
$x_k := A1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F1 \cdot n_k) + A2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F2 \cdot n_k) + A3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F3 \cdot n_k)$			Дискретный сигнал
$C := \text{FFT}(x)$			Прямое БПФ
$C_1 = -0.8i$	$C_4 = -0.3i$	$C_8 = 0$	Остальные коэффициенты равны нулю
$f_k := k \cdot F1$			Шаг по оси частот (кГц)
$x1 := \text{IFFT}(C)$			Обратное БПФ (восстановленный дискретный сигнал)

На рис. 14.9, а показан исходный (континуальный) сигнал (в виде штриховой линии). На рис. 14.9, б дан результат вычисления прямого БПФ в нормировке коэффициентов \dot{C}_n комплексного ряда Фурье. При выводе графика на экран использованы установки: «След» → «Тип (линии)» – stem, «Символ» – o's. Обратите внимание на то, что, как и следовало ожидать, амплитуды $|\dot{C}_n|$ составляющих спектра вдвое меньше амплитуд соответствующих синусоид.

В последней строке листинга использована функция обратного БПФ. Результат $x1$ обратного БПФ показан на рис. 14.9, *а* кружками, при этом очевидно, что сигнал восстановлен с большой точностью.

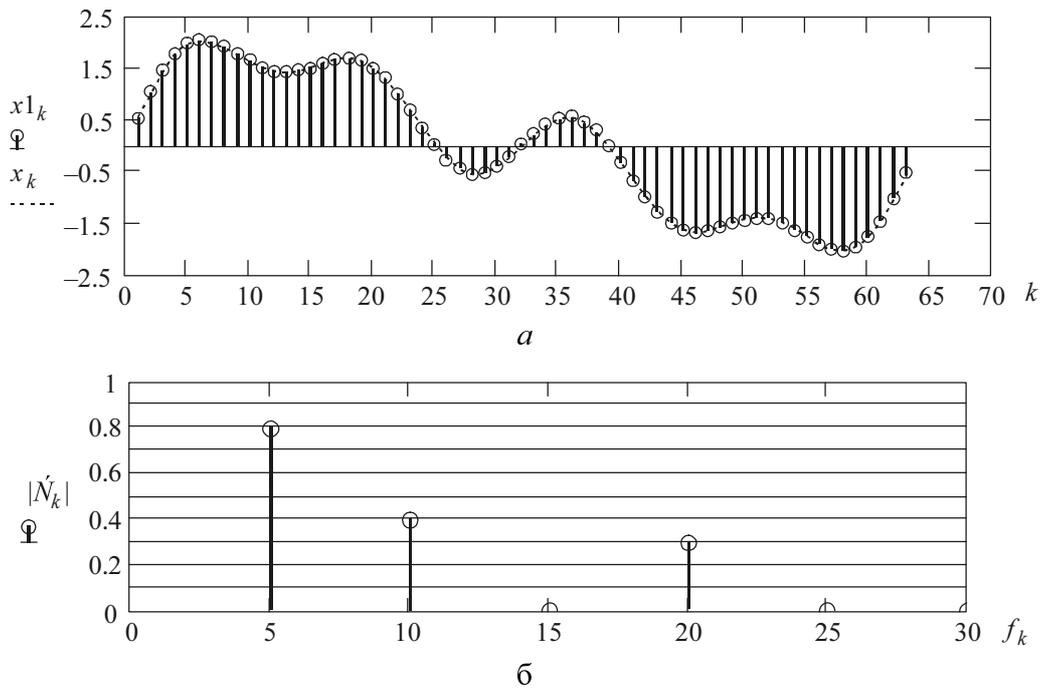


Рис. 14.9

Пример 7. Разложение и последующий синтез прямоугольного импульса. Техника проведения прямого и обратного БПФ представлена на листинге и проиллюстрирована на рис. 14.10, *а*, *б*. Как и следовало ожидать (см. пример 2 главы 6), в спектре отсутствуют гармонические составляющие с номерами, кратными скважности q импульса (4, 8, 12-я и т. д.). Синтезированный сигнал (штриховые линии на рис. 14.10, *а*) хорошо совпадает с исходным (кружки).

Листинг

$N := 32$	$n_0 := 8$	Общее число отсчетов за период и число отсчетов импульса
$q := \frac{N}{n_0}$	$q = 4$	Скважность импульсов
$U := 10$		Амплитуда импульсов
$n := 0..N - 1$		Текущие отсчеты

$x_n := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq n \leq n_0 - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ Задание прямоугольного импульса
 $C := \text{CFFT}(x)$ Прямое БПФ - переход в частотную область
 $x1 := \text{ICFFT}(C)$ Обратное БПФ - переход во временную область

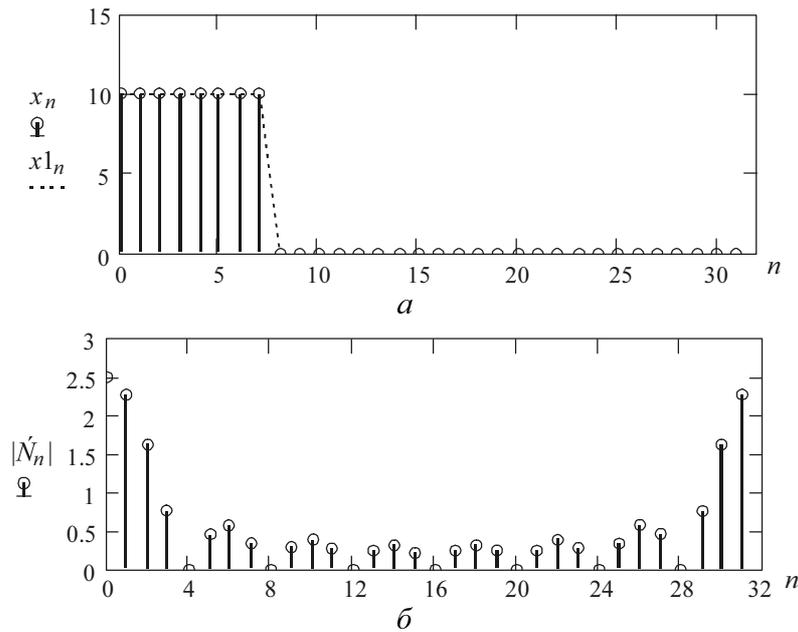


Рис. 14.10

14.2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ БПФ В ПАКЕТЕ МАТЛАВ

Пример 8. Прямое и обратное БПФ для векторов. Условия те же, что и в примере 4.

Листинг

```

>> x=[1+1*i 2+2*i 3+3*i 4+4*i 5+5*i 6+6*i 7+7*i 8+8*i]; % Вектор сигнала
>> X=fft(x) % Прямое БПФ вектора x
X =
Columns 1 through 5
36.0000 +36.0000i -13.6569 + 5.6569i -8.0000 -5.6569 - 2.3431i -4.0000 -4.0000i
Columns 6 through 8
-2.3431 - 5.6569i 0 - 8.0000i 5.6569 -13.6569i
>> x1=ifft(X) % Обратное БПФ
x1 =
  
```

```

Columns 1 through 5
1.0000 + 1.0000i 2.0000 + 2.0000i 3.0000 + 3.0000i 4.0000 + 4.0000i 5.0000 + 5.0000i
Columns 6 through 8
6.0000 + 6.0000i 7.0000 + 7.0000i 8.0000 + 8.0000i

```

Следовательно, результат абсолютно такой же, что и в примере 4.

Пример 9. Сумма трех синусоид. Исходные данные те же, что и в примере 6.

Листинг

```

>> t=(0:1/99:1); % Вектор времени (мс), N=100
>> x=1.6*sin(2*pi*5*t)+0.8*sin(2*pi*10*t)+0.6*sin(2*pi*20*t); % Вектор сигнала
% (частота в кГц)

>> y=fft(x); % Вектор ДПФ сигнала
>> m=abs(y); p=unwrap(angle(y)); % Векторы амплитуд и фаз
>> f=(0:length(y)-1)*99/length(y); % Вектор частот (N=100)
>> plot(f,m); title('Magnitude'); % График АЧХ
>> figure,plot(f,m); title('Magnitude');
>> set(gca,'XTick',[ 10 30 70 90]);
>> figure; plot(f,p*180/pi); title('Phase'); % График ФЧХ

```

Графики АЧХ и ФЧХ спектра показаны на рис. 14.11, а, б.

Если от спектральной плотности перейти к амплитудному спектру, поделив $\dot{X}[m]$ на $N = 100$, то получим коэффициенты комплексного ряда Фурье: $C_1 = 0.8$ В, $C_2 = 0.4$ В, $C_3 = 0.3$ В. Амплитуды соответствующих гармоник, как следует из теории спектров, вдвое больше этих коэффициентов. Значит, результат БПФ соответствует исходным данным.

Пример 10. АМК на фоне шума. Амплитудно-модулированное колебание

$$x(t) = U_m [1 + M \cos(2\pi Ft)] \cos(2\pi f_0 t),$$

где $U_m = 2$ В и $f_0 = 200$ кГц – амплитуда и частота несущего колебания; $F = 20$ кГц – частота модуляции; $M = 0.8$ – коэффициент модуляции. Шум создается генератором случайных чисел (СКО $\sigma = 1$ В).

Листинг

```

>> t=0:0.0005:1; % Вектор времени (мс)
>> x=2*cos(2*pi*200*t)+0.8*cos(2*pi*180*t)+0.8*cos(2*pi*220*t); % АМК (частота
% в кГц)

>> y=x+1.0*randn(size(t)); % Смесь сигнала с шумом

```

```

>> plot(y(1:300),'b');      % График смеси сигнала с шумом (по первым 300 от-
счетом)
>> Y=fft(y,1024);          % Прямое ДПФ
>> Pyy=Y.*conj(Y)/1024;
>> f=2000*(0:150)/1024;
>> plot(f,Pyu(1:151)), grid; % График спектральной плотности (до 300 кГц)

```

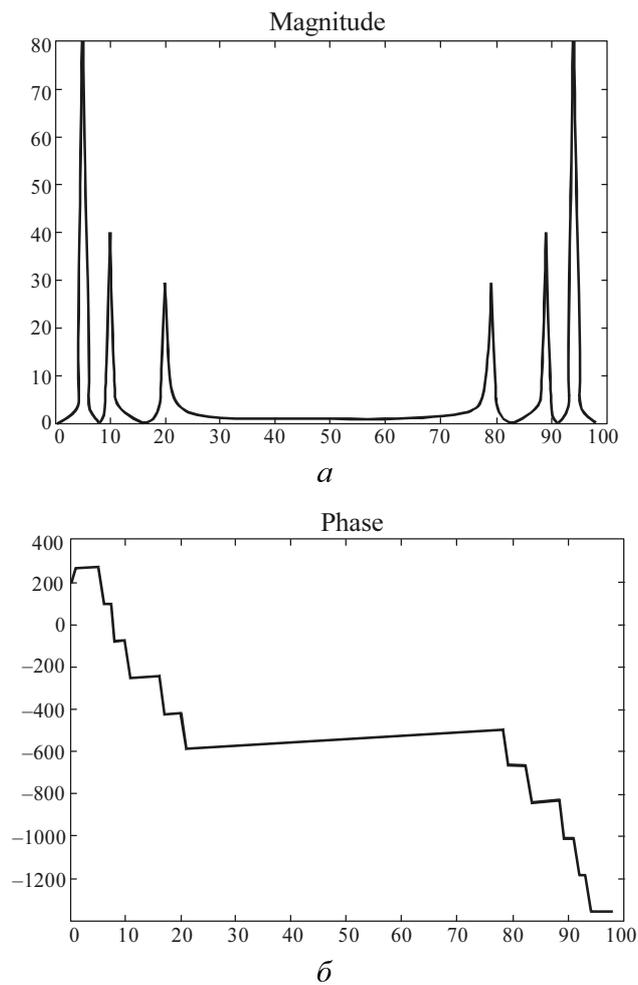
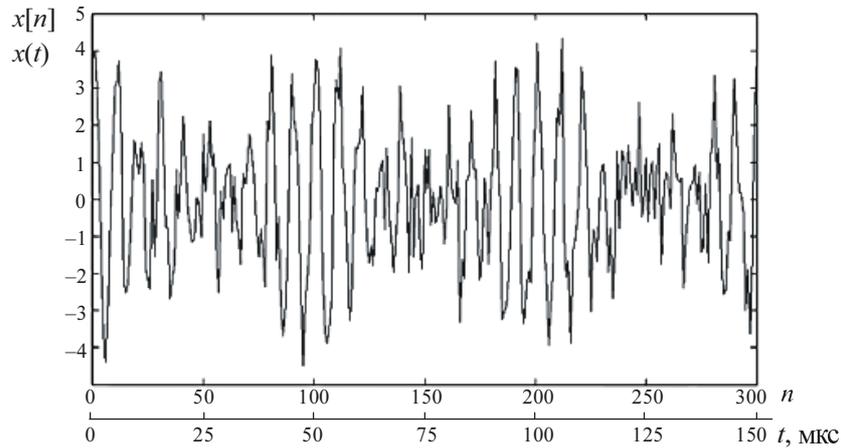


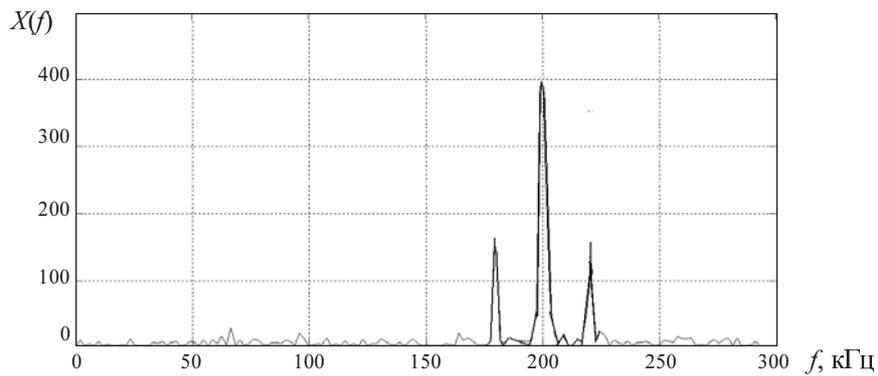
Рис. 14.11

Временная (*a*) и спектральная (*б*) диаграммы сигнала показаны на рис. 14.12. Все три составляющие явно выделяются на спектрограмме, хотя сигнал (см. рис. 14.12, *a*) значительно зашумлен. Коэффициент модуляции,

найденный по спектрограмме как $M = 2X_{\text{бок}} / X_{\text{нес}} \approx 0.8$, совпадает с заданным.



а



б

Рис. 14.12

Пример 11. Прямоугольный импульс. Добавление нулей к набору отсчетов. Вычислим ДПФ для отсчетов прямоугольного импульса при различном количестве конечных нулей.

Листинг

```
>> x1=[10*ones(8,1); zeros(8,1)]; % Сигнал.16 отсчетов из них 8 конечных нулей
>> y1=fft(x1); % БПФ сигнала x1
>> x2=[x1; zeros(16,1)]; % Сигнал x2. Это сигнал x1 с добавлением 16 нулей
>> y2=fft(x2); % БПФ сигнала x2
```

```

>> subplot(2, 2, 1)
>> stem(0:15, x1)           % График сигнала x1
>> xlim([0 31])
>> subplot(2, 2, 2)
>> stem(0:15, abs(y1))     % Модуль БПФ сигнала x1
>> subplot(2, 2, 3)
>> stem(0:31, x2)         % График сигнала x2
>> xlim([0 31])
>> subplot(2, 2, 4)
>> stem(0:31, abs(y2))     % Модуль БПФ сигнала x2
>> x=ifft(y1)'             % Обратное БПФ сигнала x1
x =
Columns 1 through 8
10.0000 10.0000 10.0000 10.0000 10.0000 10.0000 10.0000 10.0000
Columns 9 through 16
0 0 -0.0000 -0.0000 0 -0.0000 -0.0000 0

```

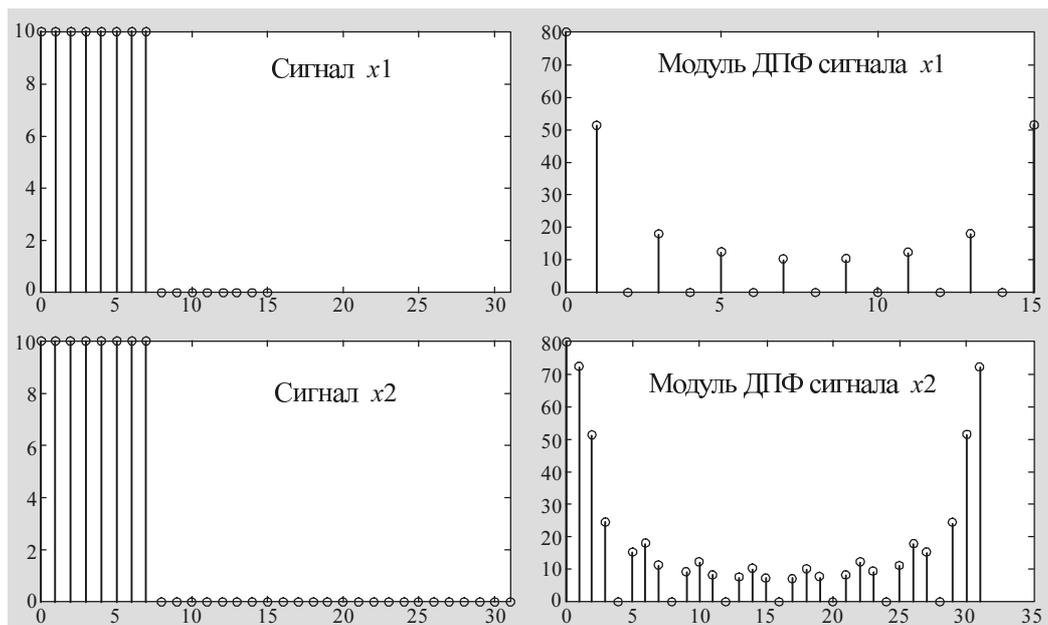


Рис. 14.13

Результат, представленный на рис. 14.13, подтверждает вывод теории о том, что увеличение (вдвое) периода сигнала за счет добавления конечных нулей повышает (вдвое) спектральное разрешение при расчете БПФ.

14.3. УПРАЖНЕНИЯ

14.3.1. ВЫЧИСЛЕНИЯ ДПФ

1. Дискретный сигнал задан N отсчетами. Все отсчеты равны единице. Запишите выражение для расчета спектральных коэффициентов \dot{C}_m ДПФ. Вычислите коэффициент C_0 и докажите, что все остальные коэффициенты равны нулю.

2. Рассчитайте постоянную составляющую ДПФ C_0 периодического дискретного сигнала $x_d(t)$, заданного на интервале периодичности шестью равноотстоящими отсчетами.

3. Дискретный периодический сигнал задан тремя отсчетами:

$$\{x[0]=10, x[1]=5, x[2]=0\}.$$

Вычислите коэффициенты \dot{C}_m ДПФ ($m=0, 1, 2$).

4. Дискретная периодическая последовательность прямоугольных импульсов содержит N отсчетов. Длительность импульса составляет $n_{\text{и}} = n/4$ отсчетов, а его амплитуда $U=1$ В. Рассчитайте значения коэффициента \dot{C}_1 в ДПФ при $N=8$ и $N=32$.

5. Дискретный периодический сигнал задан спектральными коэффициентами $\{\dot{C}[m]\}$:

$$\{\dot{C}[m]\} = \{\dot{C}[0]=0, \dot{C}[1]=0.5, \dot{C}[2]=0, \dot{C}[3]=0.5\} = (0, 0.5, 0, 0.5).$$

Запишите отсчеты исходного сигнала.

6. Запишите аналоговый сигнал в виде ряда Фурье (13.3) по данным предыдущего упражнения.

7. Восстановите аналоговый сигнал $x(t)$ по коэффициентам ДПФ, рассчитанным в упражнении 3, т. е. по коэффициентам $C_0=5$, $\dot{C}_1=2.887e^{-j\pi/6}$, $\dot{C}_2=1.667$.

8. Найдите коэффициенты ДПФ $\dot{X}[m]$ и $\dot{C}[m]$ дискретной последовательности, если ее Z -преобразование имеет вид

$$X(z) = (z+1)/z.$$

14.3.2. ВЫЧИСЛЕНИЯ БПФ

Замечание. Последующие задачи можно решить с использованием средств как Mathcad, так и MATLAB.

9. Экспоненциальный импульс $x(t) = 1e^{-at}$, $t \geq 0$, $a = 0.2 \cdot 10^6$ 1/с (см. рис. 14.5) дискретизирован с шагом $T = 1$ мкс:

$$x(nT) = 1e^{-anT} \quad \text{и} \quad x[n] = 1e^{-\alpha n},$$

где $\alpha = aT$ – безразмерная (нормированная) константа. Импульс ограничен длительностью $T_c = NT = 20$ мкс. Найдите БПФ $\dot{X}[n]$ последовательности отсчетов $x[n]$. Листинг и результат расчетов $x[n]$ и $|\dot{C}[n]|$ выведите на экран монитора.

10. Как изменится $|\dot{C}[n]|$ при уменьшении (увеличении) шага дискретизации T исходного сигнала $x(t)$ в два раза?

11. Найдите прямое $\dot{C}[n]$ и обратное $x[n]$ БПФ синусоиды из примера 5, т. е. $x[n] = A \sin(2\pi F n_k)$, где $n_k = k\Delta$, $\Delta = 1/(FN)$, $N = 16$, $F = 5$ – частота сигнала (кГц), $A = 1.6$ – амплитуда сигнала (В). Изобразите графики $x[n]$ и $|\dot{C}[n]|$.

12. Дискретный периодический сигнал (полуволна синусоиды) задан отсчетами:

$$x = \{x[n]\} = (0, 0.5, 0.866, 1, 0.866, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Вычислите прямое БПФ $\dot{C}[n]$. Проверьте полученный результат, выполнив обратное БПФ $x_1 = \{x_1[n]\}$, т. е. восстановите исходный сигнал. Изобразите графики $x[n]$, $|\dot{C}[n]|$ и $x_1[n]$.

13. Задан дискретный периодический сигнал. Его отсчеты на интервале периодичности образуют вектор

$$x = \{x[n]\} = (0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -3, -2, -1, 0).$$

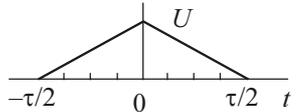
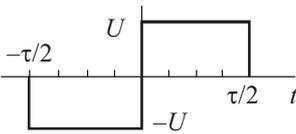
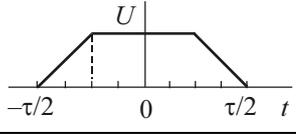
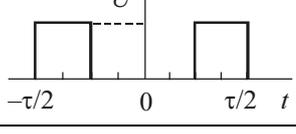
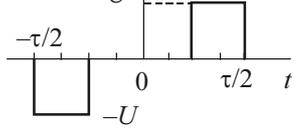
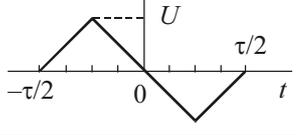
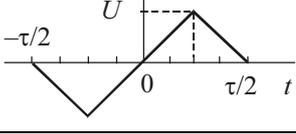
Найдите прямое БПФ $\dot{C}[n]$ исходного сигнала. Проверьте полученный результат, выполнив обратное БПФ $x_1 = \{x_1[n]\}$, т. е. восстановите исходный сигнал. Изобразите графики $x[n]$, $|\dot{C}[n]|$ и $x_1[n]$.

14.4. ЗАДАНИЕ

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ БПФ

В табл. 14.1 и 14.2 заданы варианты и подварианты периодических импульсных сигналов. Шаг дискретизации $T = \tau/8$.

Таблица 14.1

Вариант	Сигнал $x(t)$	Спектральная плотность $\dot{X}(\omega)$
0		$\frac{1}{2}U\tau \left(\frac{\sin \pi f \tau / 2}{\pi f \tau / 2} \right)^2$
1		$-jU\tau \frac{(\sin(\pi f \tau / 2))^2}{\pi f \tau / 2}$
2		$\frac{3}{4}U\tau \frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \frac{\sin(3\pi f \tau / 4)}{3\pi f \tau / 4}$
3		$\frac{1}{2}U\tau \frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \cos(3\pi f \tau / 4)$
4		$-j\frac{1}{2}U\tau \frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \sin(3\pi f \tau / 4)$
5		$j\frac{1}{2}U\tau \left(\frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \right)^2 \sin(\pi f \tau / 2)$
6		$-j\frac{1}{2}U\tau \left(\frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \right)^2 \sin(\pi f \tau / 2)$

Окончание табл. 14.1

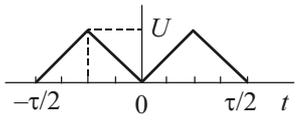
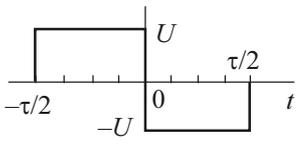
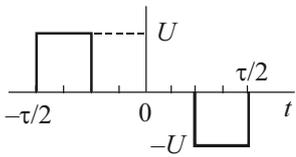
Вариант	Сигнал $x(t)$	Спектральная плотность $\dot{X}(\omega)$
7		$\frac{1}{2}U\tau \left(\frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \right)^2 \cos(\pi f \tau / 2)$
8		$jU\tau \frac{(\sin(\pi f \tau / 2))^2}{\pi f \tau / 2}$
9		$j\frac{1}{2}U\tau \frac{\sin(\pi f \tau / 4)}{\pi f \tau / 4} \sin(3\pi f \tau / 4)$

Таблица 14.2

Подвариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U, \text{ В}$	10	8	4	2	1	10	8	4	2	1
$\tau, \text{ мс}$	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1
$T, \text{ мс}$	3	6	9	12	15	20	16	12	8	4

Требуется

а) построить модуль спектральной плотности $\dot{X}(f)$ одиночного импульса и амплитудный спектр $\left\{ \left| \dot{A}_n \right| \right\}$ периодической последовательности импульсов;

б) построить график $x[n]$ дискретизированного сигнала и определить число отсчетов N ;

в) определить частоту дискретизации f_d и максимальную частоту f_m в спектре сигнала;

г) ограничив спектр исходного сигнала частотой f_m , определить спектральную плотность $\dot{X}_d(f)$ дискретизированного сигнала и построить диаграмму модуля спектральной плотности $|\dot{X}_d(f)|$. Вычислить $X_d(0)$, C_0 и A_0 ;

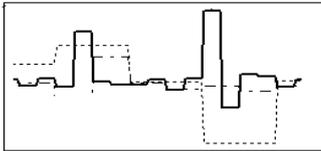
д) выполнить прямое БПФ и построить график совокупности коэффициентов $|\dot{C}_n|$. Сравнить значение коэффициента C_0 с результатом по пункту «г»);

е) выполнить обратное БПФ, т. е. определить $x_1[n]$. Построить на одном графике последовательности $x[n]$ и $x_1[n]$.

При выполнении всех расчетов и построений следует воспользоваться средствами Mathcad.

Глава 15

ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ



В любом деле важно определить приоритеты. Иначе второстепенное, хотя и нужное, отнимет все силы и не даст прийти до главного.

Игорь Курчатков

15.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

15.1.1. ДИАДНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

\mathcal{P} ри непрерывном изменении параметров a и b для расчета вейвлет-спектра необходимы большие вычислительные затраты. Множество функций $\psi_{ab}(t)$ избыточно. Необходима дискретизация этих параметров при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация, как правило, осуществляется через степени двойки [15–19]:

$$a = 2^m, \quad b = k \cdot 2^m, \quad \psi_{mk}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - k), \quad (15.1)$$

где m и k – целые числа. В этом случае плоскость ab превращается в соответствующую сетку mk . Параметр m , иногда обозначаемый как j , называется *параметром масштаба*.

Рассмотренная дискретизация наиболее распространена. Сетка дискретизации называется *диадной* и соответственное преобразование – *диадным* (dyadic) ВП.

На примере вейвлета Хаара рис. 15.1 иллюстрирует дискретизацию a, b . При фиксированном параметре m вейвлеты имеют одинаковые масштабы и

лишь смещаются во времени. При увеличении параметра m на единицу масштаб увеличивается вдвое и вейвлеты вдвое растягиваются. Для различных значений m ширина $\psi_{mk}(t)$ различна и выбор $b = k \cdot 2^m$ гарантирует, что растянутые вейвлеты на уровне m «покрывают» ось времени так же, как это делают исходные вейвлеты на уровне $m = 0$.

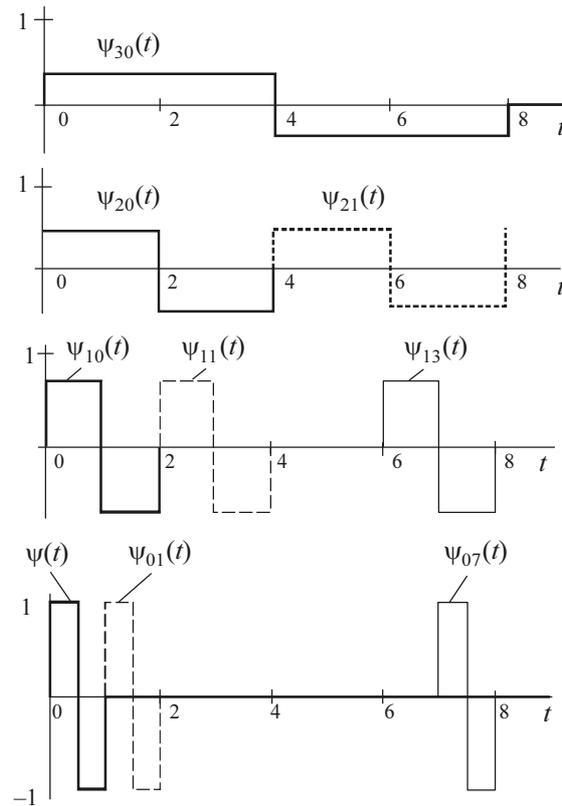


Рис. 15.1

Прямое и обратное диадное ВП непрерывных сигналов запишутся в виде

$$c_{mk} = (S(t), \psi_{mk}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad (15.2)$$

$$S(t) = \sum_{m,k} c_{mk} \psi_{mk}(t). \quad (15.3)$$

Проводя аналогию с преобразованием Фурье, коэффициенты c_{mk} разложения (15.2) можно определить через непрерывное ВП $W(a, b)$:

$$c_{mk} = W(2^m, k \cdot 2^m). \quad (15.4)$$

Обращаясь к (15.2) и (15.4), видим, что вейвлет-спектр c_{mk} можно представить как «лес» из вертикальных отрезков, размещенных над mk , – плоскостью (сеткой); при этом целочисленные координаты m и k указывают соответственно на скорость изменения сигнала и положение вдоль оси времени.

Из (15.3) следует, что сигнал $S(t)$ может быть представлен суммой «вейвлетных волн» с коэффициентами c_{mk} . Формально обобщенный ряд Фурье (15.3) отличается от традиционного тем, что суммирование проводится не по одному, а по двум индексам. Однако это несущественно, так как обе системы индексации принадлежат одному классу бесконечных счетных множеств.

Диадное ВП часто называют дискретным. Однако, по мнению ряда авторов, например В.П. Дьяконова [16], такая подмена формулировки не совсем корректна: правильнее называть его диадным, представляющим особую разновидность непрерывного ВП и позволяющим устранить избыточность последнего.

Примечание. Фреймы. Это особый вид вейвлетов, занимающих промежуточное положение между непрерывным и диадным ВП. Вейвлет-фреймы используют кратное двум масштабирование ($a = 2^m$), но непрерывный сдвиг. Следовательно, они сохраняют избыточность, которая присуща непрерывному ВП, но в гораздо меньшей мере по сравнению с ним. Они не входят в пакеты расширения систем компьютерной математики (СКМ). Но если необходимо, то соответствующие им инструментальные средства легко получить незначительной модификацией средств непрерывного ВП.

15.1.2. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ДВП)

Работы, касающиеся практического использования ВП, содержат в основной своей массе результаты компьютерных расчетов, в которых использовано дискретное вейвлет-преобразование (ДВП или DWT). При этом не только параметры a и b , но и сигналы также дискретизируются во времени.

Если число отсчетов составляет $N = 2^{n_0}$, то максимальное значение m в формулах (15.1) будет равно $n_0 - 1$. Наибольшее значение k для текущего m определяется: $k = 2^{n_0 - m} - 1$. В частности, для $m = 0$ (т. е. $a = 1$) число сдвигов k базисного вейвлета составит $2^{n_0} - 1 = N - 1$; с каждым последующим значе-

нием $m(1, 2, \dots)$ вейвлет $\psi_{mk}(t)$ расширяется в два раза, а число сдвигов k уменьшается в два раза. Для максимального значения $m = m_{\max}$, равного $n_0 - 1$, $k = 0$, т. е. один вейвлет $\psi_{m_{\max}0}(t)$ «накрывает» весь интервал сигнала (рис. 15.1; $N = 8$).

Вейвлет-коэффициенты c_{mk} можно вычислить с помощью итерационной процедуры, известной под названием **быстрого вейвлет-преобразования БВП** [15–19]. При этом, если необходимо, можно *сжать* полученные данные, отбросив некоторую несущественную часть закодированной таким образом информации. Выполняется это *квантованием*, в процессе которого приписываются разные весовые множители различным вейвлет-коэффициентам. Аккуратно проведенная процедура позволяет не только удалить некоторые статистические флуктуации и повысить роль динамических характеристик сигнала, но и существенно сократить компьютерную память и требования к передаче информации, а следовательно, снизить расходы.

15.2. ПРИМЕРЫ

15.2.1. ДВП В ПАКЕТЕ Mathcad

Системы компьютерной математики Mathcad первыми использовали прямое и обратное ДВП. В ядро систем (начиная с версии Mathcad 8) встроен единственный вейвлет – Добеши db4 (или DB4). При этом реализация ВП происходит с большой скоростью (т. е. эффективностью) и можно выполнять практическое исследование различных сигналов и временных рядов на выявление как их свойств, так и свойств ВП.

Ядро систем Mathcad содержит две функции ВП [37, 38]:

- $\text{wave}(x)$ – вектор прямого ВП;
- $\text{iwave}(w)$ – вектор обратного ВП.

Вектор данных x и вектор вейвлет-спектра w должны иметь ровно $N = 2^{n_0}$ элементов (n_0 – целое число). Результатом функции $\text{wave}(x)$ является вектор, скомпонованный из коэффициентов двухпараметрического вейвлет-спектра c_{mk} .

Пример 1. Прямоугольный импульс с шумом. Исследуемый сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь *прямоугольного видеопульса* $s(t)$ и *белого нормального шума* $n(t)$ (листинг и рис. 15.2). Такая модель может

характеризовать в первом приближении сигнал в видеотракте приемника радара (радиолокатора), сонара (гидролокатора) и оптического локатора.

Листинг

```

U := 5      t0 := 40      tau := 60      Параметры сигнала
s(t) := { U if t0 ≤ t ≤ t0 + tau      Сигнал в аналоговом виде
         0 otherwise
n0 := 8      N := 2n0      N := 256      i := 0.. N - 1
si := s(i)      Сигнал в дискретном виде
sigma := 0.3      m := 0      СКО и математическое ожидание шума
n := morm(N, m, sigma)      Последовательность белого нормального шума
x1 := s1 + n1      Аддитивная смесь сигнала и шума

```

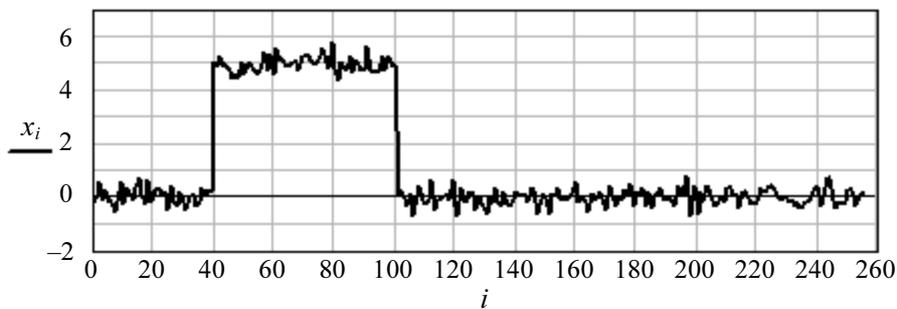


Рис. 15.2

Вейвлет-анализ (прямое ДВП) описан в листинге.

Листинг

```

W := wave(x)      Прямое ДВП (вейвлет-анализ)
z := n0 - 1      z = 7      m := 0, 1..z
coeffs(level) := submatrix(W, 2level, 2level+1 - 1, 0, 0)
c1, z-m := coeffs(m)      Расчет коэффициентов (вейвлет-спектр)
               floor( [ i
                       ( N
                       2m ) ] )

```

Семейства коэффициентов вычисленного вейвлет-спектра показаны на рис. 15.3, а весь спектр – на рис. 15.4.

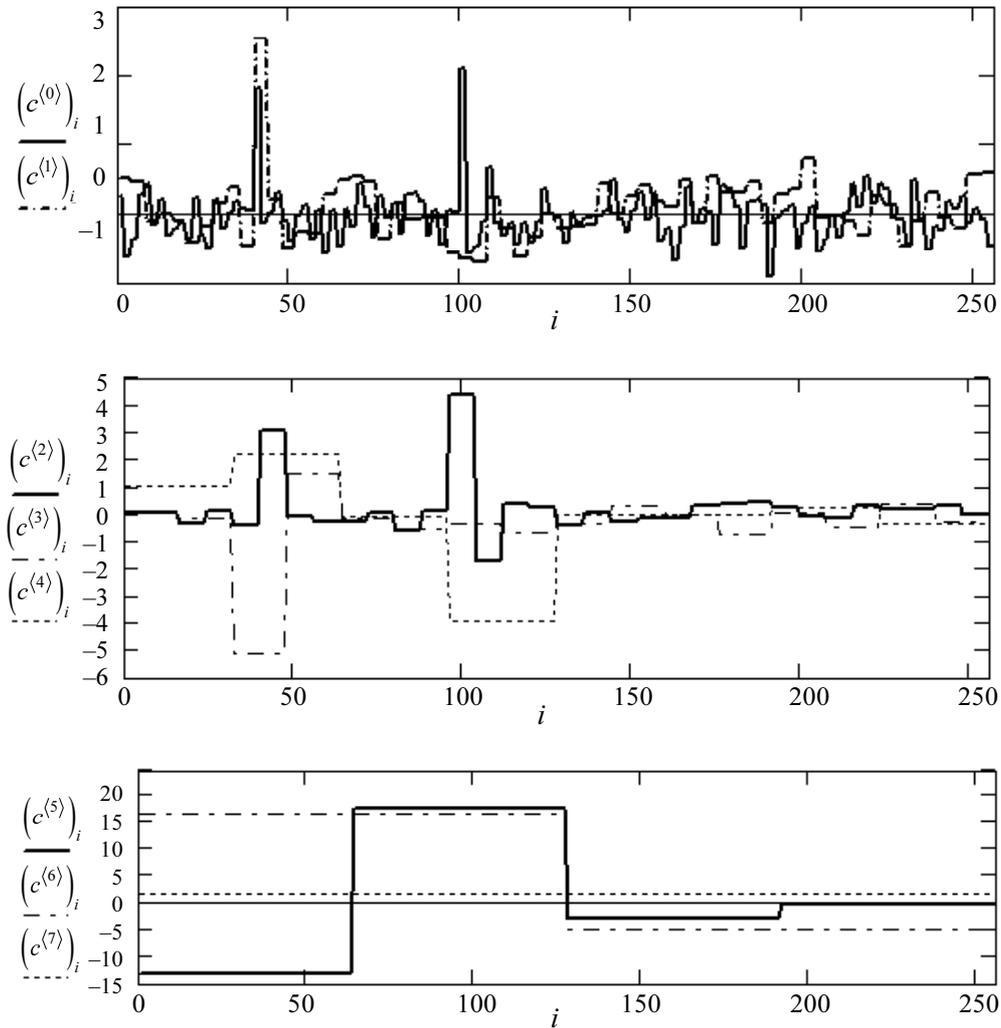
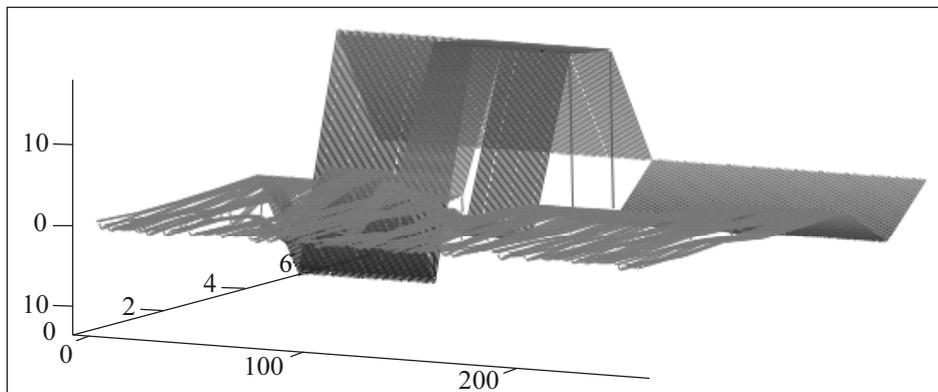


Рис. 15.3

Примечание. У коэффициентов $(c^{(m)})_i$ нижний индекс i означает номер текущего отсчета времени и принимает N значений от 0 до $N - 1$, а верхний m имеет тот же смысл, что и у вейвлет-коэффициентов c_{mk} , определяемых по формуле (15.2). Напомним, что параметры m и k (которым соответствуют индексы вейвлет-коэффициентов) характеризуют дискретные изменения временного масштаба ($a = 2^m$) вейвлета и его сдвига ($b = k \cdot 2^m$) во времени. Для текущего масштаба m параметр k

имеет 2^{n_0-m} значений от 0 до $2^{n_0-m} - 1$. В частности, для $m=0$ ($a=1$) вейвлет $\psi_{0k}(x)$ смещается N раз (включая нуль), т. е. индекс k в c_{mk} и индекс i в $(c^{(0)})_i$ совпадают. При $m=1$ вейвлет $\psi_{1k}(x)$ расширяется по сравнению с вейвлетом $\psi_{0k}(x)$ в два раза и общее число сдвигов будет в два раза меньше; при этом значение k будет изменяться через два отсчета i . Для наибольшего временного масштаба, когда $m = n_0 - 1$ (в данном случае 7), $k = 0$ и один вейвлет $\psi_{7,0}(x)$ «накрывает» весь временной интервал; при этом значение $(c^{(7)})_i$ будет постоянным и равным $c_{7,0}$ при всех значениях i от 0 до $N - 1$.



С

Рис. 15.4

Вейвлет-синтез, т. е. обратное ДВП. Синтезируемый сигнал:

$$x1_i := i \text{ wave}(w).$$

Выполним синтезирование сигнала с подавлением коэффициентов c_{mk} при быстрых (высокочастотных) слагаемых обобщенного ряда (15.3):

$$j := 2^{z-m} \dots N - 1 \quad w_j := 0.$$

Результаты показаны на рис. 15.5. Очевидно, что при $m = 0$ синтез происходит без подавления составляющих и исследуемый x_i и синтезируемый $x1_i$ сигналы полностью совпадают.

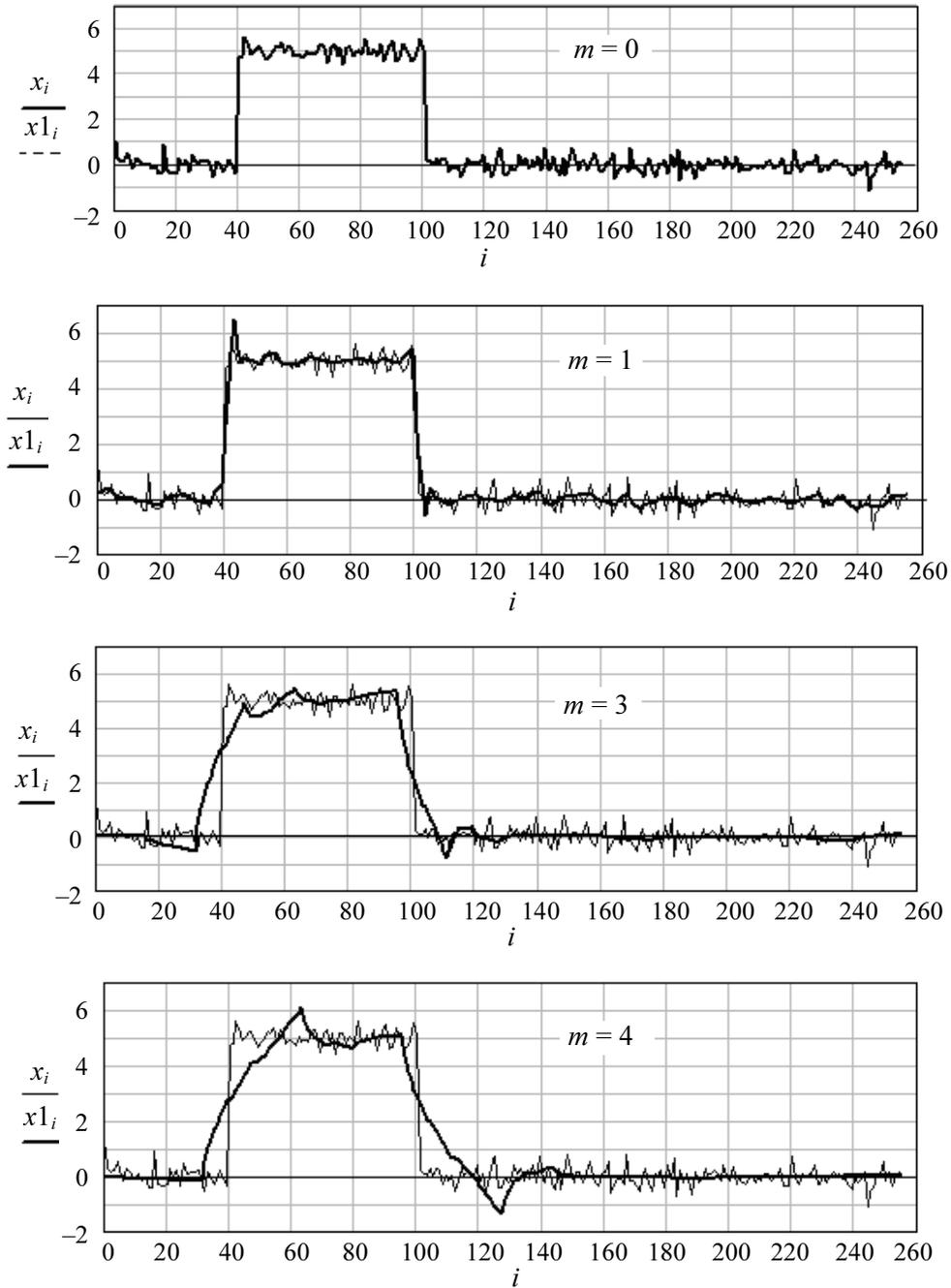


Рис. 15.5

С увеличением параметра m расширяется полоса подавления составляющих в вейвлет-спектре, что эквивалентно пропусканию сигнала через фильтр низких частот с уменьшающейся полосой пропускания фильтра и, следовательно, росту подавления шума и относительно высокочастотных компонентов сигнала; последнее приводит к искажению (затягиванию) фронтов импульса.

Пример 2. Вейвлет-фильтрация бигармонического импульсного сигнала с шумом. На вход низкочастотного приемного тракта фазового параметрического гидролокатора [17] поступает сигнал

$$x(t) = n(t) + s_3(t),$$

где $n(t)$ – помеха в виде белого гауссова шума с математическим ожиданием $m_n = 0$ и среднеквадратическим отклонением σ ; $s_3(t)$ – бигармонический (двухкомпонентный) импульсный сигнал

$$s_3(t) = A_1 \sin[2\pi F_1 t - \varphi_1(t)] + A_2 \sin[2\pi F_2 t - \varphi_2(t)], \quad t_3 < t < t_3 + \tau_{\text{и}},$$

где A_1, A_2 – амплитуды компонентов эхосигнала на частотах $F_1 = F$ и $F_2 = 2F$; $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – фазовые сдвиги, зависящие от акустической жесткости и структуры подводных объектов; t_3 и $\tau_{\text{и}}$ – время задержки и длительность эхоимпульса. Измеритель фазового сдвига приемника дает на своем выходе: во время действия сигнала $s_3(t)$ напряжение, пропорциональное фазовому сдвигу $\Psi(t) = 2\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, и равномерный шум вне интервала $t_3 < t < t_3 + \tau_{\text{и}}$. Присутствие шума $n(t)$ вносит случайную ошибку в измерения $\Psi(t)$.

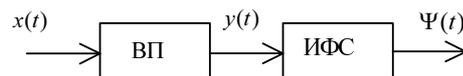


Рис. 15.6

Задача ВП – это осуществление фильтрации $s_3(t)$ из шума $n(t)$. Отфильтрованный сигнал подается на измеритель фазового сдвига (ИФС на рис. 15.6).

Моделирование сигнала $x(t)$, его ВП, алгоритма измерения фазового сдвига $\psi(t)$ и оценки параметров входного и выходного сигналов выполнено в пакете Mathcad (2001).

Дискретное ВП осуществлено на основе встроенной в пакет Mathcad базисной функции Добеши db4 : $wave(x)$ – вектор прямого ВП, $iwave(w)$ – вектор обратного ВП. Сигнал $x(t)$ был подвергнут (как и в примере 1) прямому ВП, и по найденному вектору коэффициентов c_{mk} выполнено обратное ВП с подавлением коэффициентов при быстрых (высокочастотных) слагаемых ряда (15.3):

$$y_i := iwave(w), \quad j := 2^{z-m}, \dots, N-1, \quad w_j := 0.$$

На рис. 15.7 представлены входной сигнал $x(t)$ и результат его вейвлет-фильтрации $y(t)$. Здесь $A_1 = A_2 = 1$ В, $F = 10$ кГц, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi = 90^\circ$, $\sigma = 0,5$ В, $t_3 = 0,2$ мс, $\tau = 0,6$ мс, $n_0 = 10$ ($z = 9$), $N = 1024$.

В ходе исследований изменялся параметр m и измерялись: среднеквадратическое значение шума σ_y после ВП, фазовый сдвиг $\tilde{\Psi}$, отклонение $\Delta_\Psi = \tilde{\Psi} - \varphi$ измеренного фазового сдвига $\tilde{\Psi}$ от истинного $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$ и среднеквадратическое отклонение фазового сдвига σ_Ψ . Результаты сведены в табл. 15.1.

При $m = 0$ восстановление (синтез) сигнала происходит без подавления шума и синтезируемый y_1 и исследуемый x_i сигналы полностью совпадают. С увеличением m (на рис. 15.7 $m = 3$) расширяется полоса подавления спектра, сужается полоса пропускания низкочастотной части спектра, что уменьшает уровень шума (σ_y).

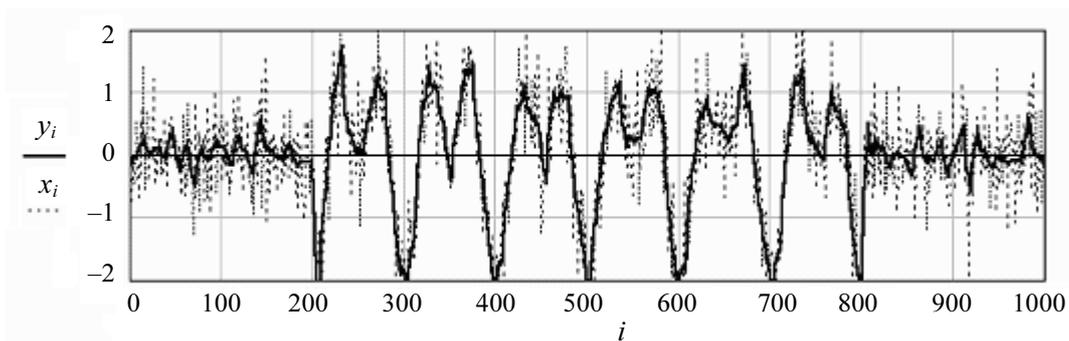


Рис. 15.7

Таблица 15.1

m	0	1	2	3	4	5	6
$\sigma_y, \text{В}$	0.493	0.327	0.198	0.125	0.105	0.078	0.05
$\Delta_\psi, \text{град}$	-5.73	-5.35	-5.01	-4.24	-4.84	-6.91	120.
$\sigma_\psi, \text{град}$	14.87	14.81	18.47	14.08	14.54	18.8	116

Установлено, что существует оптимальное m_{opt} , при котором отклонение Δ_ψ (или среднеквадратическая ошибка σ_ψ) в измерении фазового сдвига эхосигнала минимально. При $m > m_{\text{opt}}$ наряду с дальнейшим подавлением шума искажается форма бигармонического импульсного сигнала, что приводит к росту Δ_ψ и σ_ψ . Отметим, что при отсутствии шума ($\sigma = 0$) измерение фазового сдвига происходит без ошибок (т. е. $\Delta_\psi = 0$ и $\sigma_\psi = 0$).

15.2.2. ДВП В ПАКЕТЕ MATLAB

Изучать ДВП, как и непрерывный ВП, лучше с помощью графического интерфейса GUI. Для вызова меню следует исполнить команду `wavemenu`. В появившемся окне со списком разделов ВП активизировать позицию Wavelet 1-D, а далее установить File → Demo Analys и выбрать один из 32 примеров применения вейвлет-технологии.

Пакет расширения систем MATLAB 6.0/6.1 Wavelet Toolbox 2/2.1 содержит несколько функций нахождения вейвлет-коэффициентов, например, `coef = detcoef(C, L, M)` (см. прил. П.12) [16, 39, 40].

Пример 3. Бигармонический импульсный сигнал с шумом. Модель такого сигнала приведена в примере 2. Найдем его непрерывный и дискретный вейвлет-спектры согласно листингу.

Листинг

```
function binar_rauch_wav_1
t = 0:0.000001:0.001; A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000; F2 = 2*F1; a1 = 0; a2 = 0;
s1(1:200) = 0; t2 = 0.0002:0.000001:0.0008;
s2 = A1*sin(2*pi*F1*t2 + a1) + A2*sin(2*pi*F2*t2+a2);
s3(1:200) = 0; s = [s1 s2 s3]; randn('state',0); g = 0.5; n = g*randn(size(t));
x = s + n; figure (1); subplot(311), plot(t,x,'k'); title('Сигнал x(t)'); grid on;
gtext('F=10кГц, A1=A2=1В, g=0.5 В');
subplot(312), c = cwt(x,1:64,'mexh','absglb',[0 400]);
title('Вейвлет-спектр'); xlabel('Временной сдвиг, b');
```

```

ylabel('Временной масштаб, a'); set(gca,'Xlim',[0 1000]);
[c,l] = wavedec(s,6,'db4');
for m = 1:6
    d = detcoef(c,l,m); d = d(ones(1,2^m),:);
    cfd(m,:) = wkeep(d(:),1000);
end
cfd = cfd(:); I = find(abs(cfd)<sqrt(eps));
cfd(I) = zeros(size(I)); cfd = reshape(cfd,6,1000);
subplot(313), colormap(pink(16));
img = image(flipud(wcodemat(cfd,64,'row')));
set(get(img,'parent'),'YtickLabel',[]);
title('Дискретное преобразование');
ylabel('Уровень, m'); xlabel('Временной сдвиг, b'); end

```

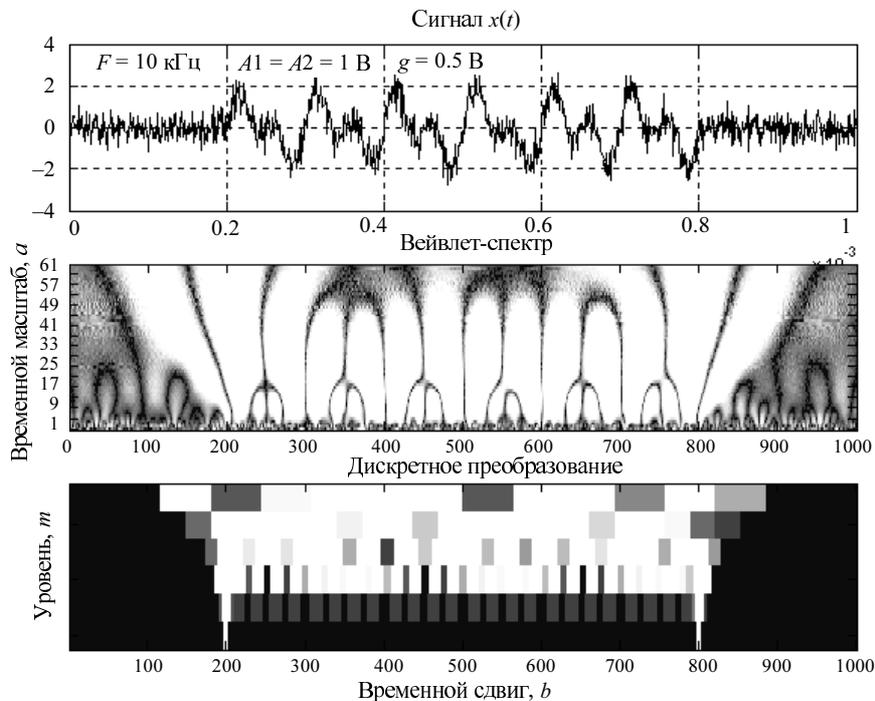


Рис. 15.8

На рис. 15.8 показаны диаграмма сигнала и его спектрограммы. Особенности спектрограммы непрерывного ВП этого сигнала обсуждены в примере 6 главы 9. Очевидно, что детали сигнала просматриваются и на спектрограмме дискретного ВП, но с худшим разрешением.

Пример 4. Звуковой сигнал. Загрузим звуковой сигнал из файла `mtlb` с выборкой в 200 отсчетов (см. пример 8 главы 9) и построим в соответствии с листингом его график и две спектрограммы – непрерывного и дискретного ВП (рис. 15.9).

Листинг

```
function ss_cd
load mtlb; v = mtlb(1:200); lv = length(v);
subplot(311), plot(v); title('Звуковой сигнал');
set(gca, 'Xlim',[0 200]); [c,l] = wavedec(v,6,'sym2');
cfd = zeros(6,lv); subplot(312), cfs = cwt(v,4:127,'sym2','plot');
title('Непрерывное преобразование'), colormap(pink(32));
ylabel('Временной масштаб, a'); xlabel('Временной сдвиг, b');
for m = 1:6
    d = detcoef(c,l,m); d = d(ones(1,2^m),:);
    cfd(m,:) = wkeep(d(:),lv);
end
cfd=cfd(:); I = find(abs(cfd)<sqrt(eps));
cfd(I) = zeros(size(I)); cfd = reshape(cfd,6,lv);
subplot(313), colormap(pink(32));
img = image(flipud(wcodemat(cfd,64,'row')));
set(get(img,'parent'),'YtickLabel',[]);
title('Дискретное преобразование');
ylabel('Уровень, m'); xlabel('Временной сдвиг, b');
end
```

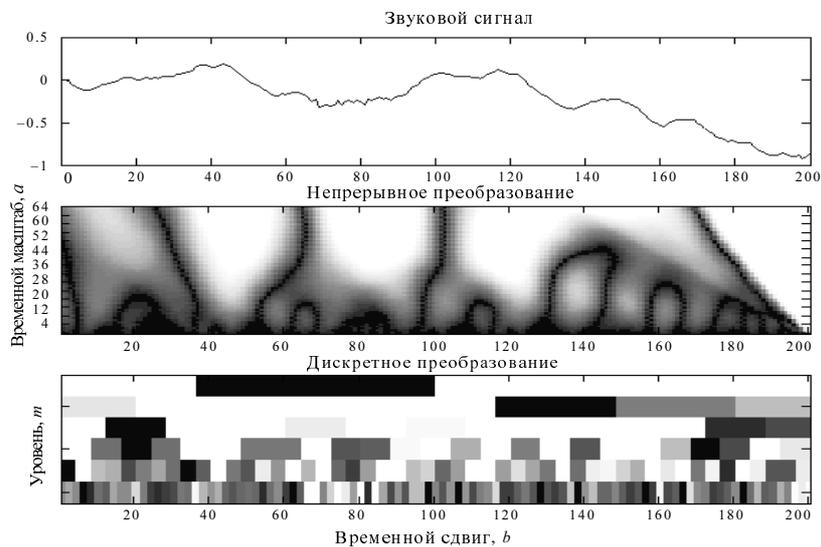


Рис. 15.9

Из рис. 15.9 очевидно, что все мельчайшие детали сложной временной зависимости $S(t)$ отчетливо просматриваются на спектрограмме как непрерывного, так и дискретного ВП. Однако последнее выполняется значительно быстрее, хотя по детальности представления уступает непрерывному ВП.

В заключение о возможностях MATLAB с пакетом Wavelet. Пакет Wavelet, прилагаемый к MATLAB, предоставляет пользователю полный набор программ для исследования с помощью вейвлетов многомерных нестационарных процессов. Пакет весьма полезен для таких приложений, как обработка речевых сигналов и аудиосигналов, телекоммуникация, локация, геофизика, финансы, медицина и др.

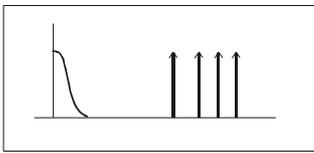
Основные свойства пакета [39, 40]:

- усовершенствованный графический пользовательский интерфейс и набор команд для анализа, синтеза, фильтрации сигналов и изображений;
- преобразование многомерных непрерывных сигналов;
- дискретное преобразование сигналов;
- декомпозиция сигналов и изображений;
- широкий выбор базисных функций, включая корректировку граничных эффектов;
- пакетная обработка сигналов и изображений;
- анализ пакетов сигналов, основанный на энтропии;
- фильтрация с возможностью установления жестких и нежестких порогов;
- оптимальное сжатие сигналов.

Пакет позволяет анализировать такие особенности, которые упускают другие методы анализа сигналов, а именно тренды, выбросы, разрывы в производных высоких порядков. Пользуясь пакетом, можно сжимать и фильтровать сигналы без явных потерь даже в тех случаях, когда нужно сохранить и низко-, и высокочастотные компоненты сигнала. В пакет включены следующие материнские наборы вейвлетов: «мексиканская шляпа», Хаара, Мейера, биортогональный и др. Обширное руководство пользователя поясняет принципы работы с пакетом, сопровождая их многочисленными примерами и ссылками.

Глава 16

КЕПСТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ



Нет преград человеческой мысли.

С.П. Королев

16.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

16.1.1. КОМПЛЕКСНЫЙ КЕПСТР

Термин «кепстр», а также другие общеупотребительные термины по кепстральной обработке сигналов были введены впервые Богертом, Хили и Таки* и образованы по правилу анаграммы – перестановки букв в слове спектр (spectrum) – кепстр (cepstrum).

Наиболее употребительны комплексный кепстр (complex cepstrum) и кепстр мощности (power cepstrum) [1, 30–36].

Для *аналогового сигнала* $x(t)$ – это обратное преобразование Фурье (ОПФ) $F^{-1}\{\}$ логарифма спектральной плотности $\dot{X}(\omega) = F^1[x(t)]$ сигнала (рис. 16.1):

$$\dot{C}(q) = F^{-1} \left\{ \ln \left[F^1 \{ x(t) \} \right] \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{X}(\omega) e^{j\omega q} d\omega. \quad (16.1)$$

Аргумент q имеет размерность времени, но это особое, кепстральное время, называемое иногда «сачтота» (анаграмма от «частота»).

* Bogert B.P., Healy M.J., Tuckey J.W. The quefreny alanysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, crosscepstum, and saphe cracking. «Proc. Symp. on Time Series Analysis», N. York, Willy, 1963, ch. 15, pp.209 – 243.



Рис. 16.1

По комплексному кепстру $\dot{C}(q)$, как и по комплексному спектру $\dot{X}(\omega)$, можно восстановить исходный сигнал $x(t)$. Для этого необходимо выполнить следующие преобразования: ППФ, потенцирование и ОПФ (рис. 16.2):

$$x(t) = F^{-1} \left\{ \exp \left[F[\dot{C}(q)] \right] \right\}. \quad (16.2)$$



Рис. 16.2

Комплексный кепстр *дискретного сигнала* $x[n]$ определяется выражением

$$\dot{C}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(e^{j\omega T}) e^{j\omega m T} d(\omega T) \quad (16.3)$$

или эквивалентным ему выражением

$$\dot{C}[m] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \ln X(z) z^{m-1} dz. \quad (16.4)$$

В выражениях (16.3) и (16.4) использованы преобразование Фурье и Z-преобразование сигнала:

$$X(e^{j\omega T}) = \dot{X}_{\text{a}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega n T}, \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

16.1.2. КЕПСТР МОЩНОСТИ (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КЕПСТР)

Для аналогового сигнала $x(t)$ он определяется выражением

$$\begin{aligned} C_p(q) &= F^{-1} \left\{ \ln |F[x(t)]|^2 \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |X(\omega)|^2 e^{j\omega q} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln |X(\omega)|^2 \cos \omega q d\omega. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Если сравнить (16.5) с (3.6), то можно сказать, что кепстр мощности представляет собой модифицированную АКФ $B(\tau)$ сигнала $x(t)$, но в противоположность последней кепстр не может быть получен непосредственно из $x(t)$ без перехода к спектру.

Определение кепстра мощности по формуле (16.4) иллюстрирует рис. 16.3.

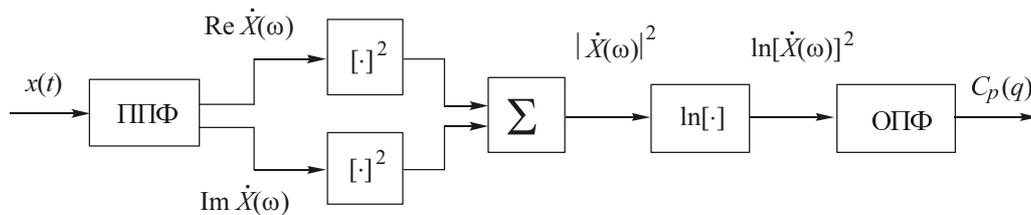


Рис. 16.3

Для дискретного сигнала $x[n]$ кепстр мощности определится как

$$C_p[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |\dot{X}[n]|^2 e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad m = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (16.6)$$

или в эквивалентной форме

$$C_p[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| X(e^{j\omega T}) \right|^2 \cos(\omega m T) d(\omega T), \quad (16.7)$$

где $\dot{X}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$, $m = 0, \pm 1, \dots, N-1$.

ППФ и ОПФ определяются, как правило, с использованием алгоритмов БПФ и ОБПФ.

16.1.3. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Метод, основанный на логарифмически-спектральном преобразовании, получил название *кепстральный анализ*. Он развивался бурными темпами и широко применяется к решению задач прикладного анализа процессов различного физического происхождения. Этому способствовали успехи как цифровой обработки сигналов, так и технология изготовления больших интегральных схем, микропроцессоров и устройств на поверхностных акустических волнах (ПАВ).

Области применения кепстрального анализа непрерывно расширяются, но уже сейчас можно указать на такие определившиеся, как исследование речи, обработка изображений, обработка сигналов в сейсмологии, гидро- и радиолокации, медицина, и др. Обширная библиография приведена в первых обзорах [30, 32]. Количество публикаций по свойствам и применению кепстрального анализа неуклонно растет. В большинстве публикаций авторы ссылаются на одни и те же основополагающие работы Богерта, Хассаба, Ноля, Кемерейта, Чайлдерса и других, сыгравшие важную роль в становлении кепстральной обработки сигналов как нового направления.

Ниже приведены примеры по определению кепстров и применению кепстрального анализа.

16.2. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Кепстр дельта-импульса. Напомним (см. пример 11 главы 7), что спектральная плотность дельта-импульса (дельта-функции) равна единице, т. е. $\hat{S}_\delta(\omega) = 1$. Логарифм единицы равен нулю: $\ln \hat{S}_\delta(\omega) = \ln 1 = 0$. Тогда согласно (16.1) $\dot{C}_\delta(q) = 0$. Согласно (16.5) будет равен нулю кепстр мощности: $C_p(q) = 0$. Следовательно, кепстральное преобразование полностью подавляет дельта-функцию.

Пример 2. Кепстр дискретного прямоугольного импульса. Импульс прямоугольной формы $x(t)$ дискретизирован с шагом $T = \tau / N$ (рис. 16.4, а)

$$x(nT) = \begin{cases} S_0, & 0 < n < N-1, \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1. \end{cases}$$

Требуется определить комплексный спектр этого сигнала.

Запишем прямое преобразование Фурье, используя теорему о спектре сигнала, смещенного во времени:

$$X(e^{jn\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} S_0 e^{-jn\omega T} = S_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega T}.$$

С учетом формулы геометрической прогрессии [42, 43] получим

$$\begin{aligned} X(e^{jn\omega T}) &= S_0 \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{(e^{jN\omega T/2} - e^{-jN\omega T/2})e^{-jN\omega T/2}}{(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})e^{-j\omega T/2}} = \\ &= S_0 \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \left[\cos\left(\frac{N-1}{2}\omega T\right) - j \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega T\right) \right]. \end{aligned}$$

Модуль и логарифм квадрата модуля этого выражения будут

$$\begin{aligned} |X(e^{jn\omega T})| &= S_0 \frac{|\sin(N\omega T/2)|}{|\sin(\omega T/2)|}, \\ \ln |X(e^{jn\omega T})|^2 &= \ln S_0^2 + 2 \ln |\sin(N\omega T/2)| - |\sin(\omega T/2)|. \end{aligned}$$

Кепстр мощности определим по формуле (16.7):

$$\begin{aligned} C[m] &= \ln S_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\omega T) d(\omega T) + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin\left(\frac{N\omega T}{2}\right) \right| \cos(m\omega T) d(\omega T) - \\ &\quad - 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| \cos(m\omega T) d(\omega T). \end{aligned}$$

При $m = 0$ первый интеграл равен нулю, а второй и третий равны $-2\pi \ln 2$ [43, (4.224.3)]. Следовательно, $C[0] = \ln S_0^2$. При $m \neq 0$ первый интеграл равен нулю, второй также равен нулю из-за ортогональности функций $\ln |\sin(N\omega T/2)|$ и $\cos(m\omega T)$ на интервале от $-\pi$ до π , третий интеграл будет $(-\pi/m)$ [43, (4.384.7)].

Окончательно имеем

$$C[0] = \ln S_0^2, \quad C[m] = -2 \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{m}\right) = \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

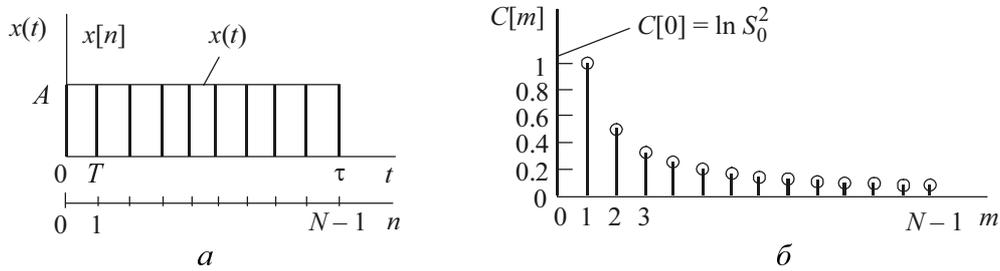


Рис. 16.4

Результат проиллюстрирован графиком на рис. 16.4, б.

Пример 3. Комплексный кепстр АМК. Пусть амплитудно-модулированное колебание задано в виде

$$s(t) = A(t)e^{j\omega_0 t},$$

где $A(t)$ – огибающая АМК (обусловленная модулирующим сигналом) со спектральной плотностью $S_A(j\omega) = \dot{S}_A(\omega)$; $e^{j\omega_0 t}$ – несущее колебание.

Спектр АМК определится ППФ:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \dot{S}_A(\omega - \omega_0).$$

Кепстр АМК будет

$$\begin{aligned} \dot{C}(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{S}_A(\omega - \omega_0) e^{j\omega q} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{S}_A(\Omega) e^{j\Omega q} d\Omega e^{j\omega_0 q} = \dot{C}_A(q) e^{j\omega_0 q}, \end{aligned} \quad (16.8)$$

где $\Omega = \omega - \omega_0$; $\dot{C}_A(q)$ – кепстр огибающей $A(t)$.

Следовательно, кепстр $\dot{C}(q)$ АМК находится из кепстра $\dot{C}_A(q)$ огибающей умножением последнего на $e^{j\omega_0 q}$. Эффект модуляции – перенос спектра модулирующего сигнала – проявляется одинаково для $A(t)$ и $\dot{C}_A(q)$, т. е. домножением на несущее колебание.

Пример 4. Комплексный кепстр свертки двух сигналов. Пусть заданы два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ со спектральными плотностями $\dot{S}_1(\omega)$ и $\dot{S}_2(\omega)$. Тогда

согласно теоремам о свойствах спектров (см. прил. П.5) свертке сигналов $s(t) = s_1(t) \otimes s_2(t)$ соответствует произведение спектров этих сигналов, т. е.

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega) \Leftrightarrow s(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(t-\tau) d\tau.$$

Тогда, подвергнув логарифмированию произведение $\dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega)$, получим сумму

$$\ln \dot{S}(\omega) = \ln[\dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega)] = \ln \dot{S}_1(\omega) + \ln \dot{S}_2(\omega).$$

Обратное преобразование Фурье даст кепстр свертки исходных сигналов

$$\begin{aligned} \dot{C}(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{X}(\omega) e^{j\omega q} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{X}_1(\omega) e^{j\omega q} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \dot{X}_2(\omega) e^{j\omega q} d\omega, \\ \dot{C}(q) &= \dot{C}_1(q) + \dot{C}_2(q). \end{aligned} \quad (16.9)$$

Таким образом, кепстр $\dot{C}(q)$ свертки двух сигналов равен сумме кепстров $\dot{C}_1(q)$ и $\dot{C}_2(q)$ каждого сигнала.

Пример 5. «Развертка» свернутых сигналов.

Задан сигнал $y(t)$ на выходе линейного тракта (рис. 16.5). Требуется получить некоторые сведения о входном сигнале $x(t)$ и импульсной характеристике $g(t)$ тракта.

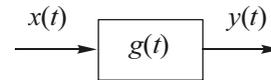


Рис. 16.5

Такая задача имеет место при анализе сигналов речи, сейсмических и локационных сигналов и др.

Выходной сигнал является сверткой входного $x(t)$ и импульсной характеристики $g(t)$:

$$y(t) = x(t) \otimes g(t).$$

Процедуры, обратной свертке, в явном виде нет. Эта процедура «развертки», или иначе инверсной свертки, может быть решена кепстральным методом.

В случае, когда один из свернутых сигналов известен, проблема развертки решается сравнительно просто и рассматривается во многих работах, например в [1, 30].

Кепстральная обработка может быть представлена в виде, показанном на рис. 16.6 [1, 32]. Характеристические системы D и D^{-1} взаимно обратны, а L является лифтром (фильтром) – линейной системой с постоянными параметрами.

рами. Кепстр $\dot{C}_y(q)$ выходного сигнала, как следует из предыдущего примера, равен сумме кепстров $\dot{C}_x(q)$ входного сигнала и $\dot{C}_g(q)$ импульсной характеристики тракта:

$$\dot{C}_y(q) = \dot{C}_x(q) + \dot{C}_g(q).$$

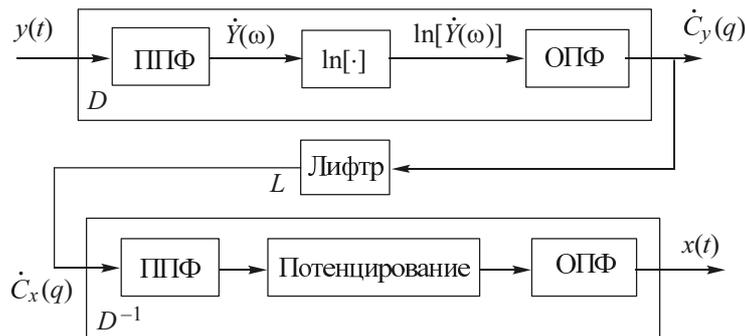


Рис. 16.6

Если составляющие $\dot{C}_x(q)$ и $\dot{C}_g(q)$ занимают различные области сачтот q , то одна из них может быть выделена соответствующим лифтром L : коротких сачтот, длинных сачтот и полосовым. Их аналогами в частотной области будут соответственно фильтры нижних и верхних частот, полосовые фильтры. Для восстановления одного из свернутых сигналов (например, $x(t)$) система должна выполнять операции: прямое преобразование Фурье, потенцирование и обратное преобразование Фурье.

В общем случае, когда ни один из сигналов не известен, а в распоряжении имеется только их свертка, проблема разделения, названная «неопределенной инверсной сверткой», решается лишь при условии, что один из сигналов имеет большую длительность, чем другой [30].

Пример 6. Анализ речевого сигнала [1]. При исследовании речевых сигналов в качестве линейного тракта (см. рис. 16.5) рассматривается электронный синтезатор речи. О входном сигнале $x(t)$ известно лишь то, что его спектральная плотность $\dot{X}(\omega)$ ограничена частотой ω_{\max} , а его АЧХ имеет периодическую изрезанность с периодом $1/T$ (по оси частот). О самом речевом тракте известно то, что импульсная характеристика $g(t)$ имеет малую продолжительность по сравнению с T , следовательно, передаточная функция $\dot{K}(\omega)$ изменяется более плавно по сравнению с $\dot{X}(\omega)$.

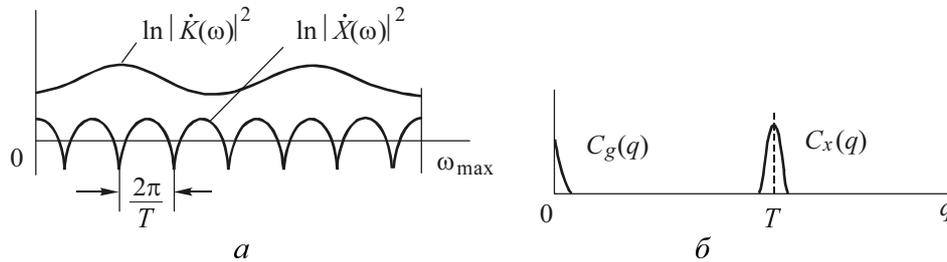


Рис. 16.7

Результаты обработки сигнала $y(t) = x(t) \otimes g(t)$ по алгоритму (16.5), проиллюстрированному на рис. 16.3, приведены на рис. 16.7. На рис. 16.7, *а* показан примерный вид функций $\ln|\dot{X}(\omega)|^2$ и $\ln|\dot{K}(\omega)|^2$, получаемых после преобразования Фурье, определения квадрата модуля спектра и логарифмирования. На рис. 16.7, *б* приведены соответствующие кепстры мощности. Кепстр $C_g(q)$ с пиком на сачтоте вблизи нуля соответствует медленной функции $\ln|\dot{K}(\omega)|^2$, а кепстр $C_x(q)$ с пиком на сачтоте $q = T$ – функции $\ln|\dot{X}(\omega)|^2$.

Итак, в результате кепстрального анализа можно определить основную частоту $1/T$ речевого сигнала, а также получить некоторые сведения о форме АЧХ речевого тракта.

Пример 7. Определение задержки сигналов. В локации (радио-, гидро- и акустической локации, сейсмологии) приходится иметь дело с обработкой сигналов, которые составляют сумму зондирующего (исходного) сигнала и эхосигнала.

1. Рассмотрим кепстральный анализ для наиболее простого случая [31–33], когда анализируемый сигнал $x(t)$ на входе устройства обработки состоит из суммы излучаемого сигнала $s(t)$ и эхосигнала $s_3(t)$, который есть копия сигнала $S(t)$, уменьшенная в α ($\alpha \ll 1$) раз и задержанная на время задержки τ_3 , т. е.

$$x(t) = s(t) + s_3(t) = s(t) + \alpha s(t - \tau_3). \quad (16.10)$$

Прямое преобразование Фурье от $x(t)$ дает

$$\dot{X}(\omega) = \dot{S}(\omega) + \alpha \dot{S}(\omega) e^{-j\omega\tau_3} = \dot{S}(\omega) (1 + \alpha e^{-j\omega\tau_3}),$$

откуда

$$X(\omega) = |\dot{X}(\omega)| = |\dot{S}(\omega)| \left(1 + 2\alpha \cos \omega \tau_3 + \alpha^2\right)^{1/2}$$

и

$$\ln [X(\omega)]^2 = 2 \ln |\dot{S}(\omega)| + \ln \left(1 + 2\alpha \cos \omega \tau_3 + \alpha^2\right). \quad (16.11)$$

При выполнении условия $\alpha \ll 1$ (что справедливо для локации в силу затухания при распространении) получим

$$\ln [X(\omega)]^2 = 2 \ln S(\omega) + \ln(1 + 2\alpha \cos \omega \tau_3),$$

где $S(\omega) = |\dot{S}(\omega)|$.

Разлагая второе слагаемое в ряд $\ln(1 + \alpha) = \alpha - \alpha^2/2 + \alpha^3/3 - \dots$ и ограничиваясь первым членом ряда из-за малости α ($\alpha \ll 1$), т. е. $\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$, получим

$$\ln [X(\omega)]^2 = 2 \ln S(\omega) + 2\alpha \cos \omega \tau_3. \quad (16.12)$$

Выражение (16.12) содержит периодическую составляющую $2\alpha \cos \omega \tau_3$, которую можно представить суммой $\alpha e^{+j\omega \tau_3} + \alpha e^{-j\omega \tau_3}$. Следуя определению кепстра мощности согласно (16.5), находим ОПФ:

$$\begin{aligned} C_x(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [S(\omega)]^2 e^{j\omega q} d\omega + \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \tau_3} e^{j\omega q} d\omega + \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau_3} e^{j\omega q} d\omega = \\ &= C_s(q) + \alpha \delta(q + \tau_3) + \alpha \delta(q - \tau_3). \end{aligned} \quad (16.13)$$

Здесь $C_s(q) = F^{-1} \left\{ \ln [S(\omega)]^2 \right\}$ – кепстр излучаемого сигнала $s(t)$, т. е. его модифицированная АКФ.

Таким образом, кепстр $C_x(q)$ сигнала $x(t)$ состоит из суммы кепстра $C_s(q)$ излучаемого (зондирующего) сигнала $s(t)$ и дельта-функции $\alpha \delta(q - \tau_3)$, смещенной на τ_3 , что дает возможность определить время задержки τ_3 эхосигнала $s_3(t)$.

На рис. 16.8 показаны соответствующие функции. Для сравнения приведена АКФ $B_x(\tau)$ сигнала $x(t)$. Кепстральный анализ позволяет более точно определить время задержки, но это преимущество перед корреляционным анализом достигается усложнением обработки – введением дополнительной операции логарифмирования перед ОПФ.

Пример определения задержки дискретного сигнала приведен в работе [1].

2. Случай, когда эхосигнал состоит из n составляющих. Он имеет место для локации сложных целей, содержащих n элементарных отражателей. Тогда обрабатываемый сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = s(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i s(t - \tau_{3i}),$$

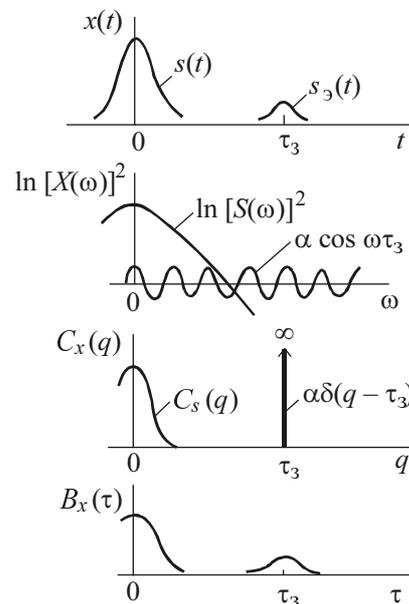


Рис. 16.8

где α_i и τ_{3i} – относительная амплитуда и время задержки i -го эхосигнала.

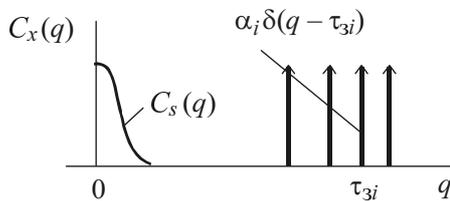


Рис. 16.9

Нетрудно показать [31–33], что при $\alpha_i \ll 1$ кепстр $C_x(q)$ обрабатываемого сигнала $x(t)$ содержит для положительной полуоси сачтот q сумму дельта-импульсов (рис. 16.9):

$$C_x(q) = C_s(q) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(q - \tau_{3i}). \quad (16.14)$$

Полученный результат имеет практическое приложение при распознавании сложных эхосигналов и, следовательно, сложных объектов локации [36].

Пример 8. Влияние шума [1, 33, 34]. Рассмотрим влияние аддитивного шума $n(t)$. Обрабатываемый процесс $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = s(t) + \alpha s(t - \tau_3) + n(t). \quad (16.15)$$

Логарифм квадрата модуля преобразования Фурье можно привести к виду

$$\ln |F[x(t)]|^2 = \ln[S(\omega)]^2 + \ln \{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \omega \tau_3 + N^2(\omega) / S^2(\omega) +$$

$$+ 2 \frac{N(\omega)}{S(\omega)} \left[\cos(\varphi_s(\omega) - \varphi_N(\omega)) + \alpha \cos(\varphi_s(\omega) - \varphi_N(\omega) - \omega\tau_3) \right], \quad (16.16)$$

где

$$S(\omega) = \sqrt{\{\operatorname{Re} F[s(t)]\}^2 + \{\operatorname{Im} F[s(t)]\}^2}; \quad \varphi_s(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F[s(t)]}{\operatorname{Re} F[s(t)]};$$

$$N(\omega) = \sqrt{\{\operatorname{Re} F[n(t)]\}^2 + \{\operatorname{Im} F[n(t)]\}^2}; \quad \varphi_N(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F[n(t)]}{\operatorname{Re} F[n(t)]}.$$

Выражение (16.16) можно привести при $\alpha \ll 1$ к виду

$$\begin{aligned} \ln |F[x(t)]|^2 = & \ln[S(\omega)]^2 + \ln[1 + B(\omega)] + H(\omega) \cos[\varphi_s(\omega) - \varphi_N(\omega)] + \\ & + G(\omega) \cos \left(\omega\tau_3 + \int_0^\omega \Delta\xi d\omega \right), \end{aligned} \quad (16.17)$$

где

$$B(\omega) = N^2(\omega) / S^2(\omega); \quad H(\omega) = 2 \frac{N(\omega)}{S(\omega)} \left/ \left[1 + N^2(\omega) / S^2(\omega) \right]; \right.$$

$$G(\omega) = 2\alpha \left/ \sqrt{1 + \frac{|N(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2} + 2 \frac{|N(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2} \cos[\varphi_s(\omega) - \varphi_N(\omega)]}; \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi = & \left[S' \frac{N}{S^2} - \frac{N^2}{S^2} (\varphi_s - \varphi_N)' - \frac{N'}{S} \sin(\varphi_s - \varphi_N) - \right. \\ & \left. - \frac{N}{S} \sin(\varphi_s - \varphi_N)' \cos(\varphi_s - \varphi_N) \right] \left/ \left[1 + \frac{N^2}{S^2} + 2 \frac{N}{S} \cos(\varphi_s - \varphi_N) \right]. \right. \end{aligned}$$

Здесь N , S , φ_s и φ_N – по-прежнему функции частоты ω . В частном случае, при $N(\omega) = 0$ (отсутствии шума) выражения (16.16) и (16.17) превращаются в (16.11) и (16.12).

Из рассмотрения выражения (16.17) следует, что при определении кепстральной функции первый член дает детерминированный кепстр излучаемого сигнала, второй и третий члены дают аддитивные шумовые составляющие, а четвертый – кепстр эхо, который флуктуирует как по величине, так и по местоположению по оси частот около τ_3 .

Пример 9. Статистические свойства кепстра. Статистические характеристики составляющих кепстра были изучены автором еще в конце 1970-х годов при проведении эксперимента на ЦВМ (БЭСМ-6). Использовался метод статистических испытаний (Монте-Карло); при этом процесс $x(t)$ вида (16.14) дискретизировался и моделировался по огибающей. Сигнал и эхосигнал были взяты колокольной формы, а шум – рэлеевским двух типов: а) белый с АКФ $B(\tau) = N_0\delta(\tau)$, где N_0 – СПМ шума; б) окрашенный (соответствующий реверберационной помехе [36]) с АКФ:

$$B(\tau) = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \exp\left(-\tau^2/2a^2\right),$$

где σ и a – параметры рэлеевского распределения и колокольного импульса.

При проведении эксперимента учитывалось влияние эффекта «частотола» в частотной области и наложение искажений, обусловленных нелинейным характером преобразования (логарифмированием) над спектральными коэффициентами. Эти коэффициенты вычислялись с помощью ДПФ, посредством выбора соответствующего интервала дискретизации.

Поскольку кепстральный анализ – это, по существу, модификация корреляционного анализа, представляет определенный интерес сравнить результаты обоих методов по определению времени задержки (прихода) эхосигнала.

Результаты испытаний подробно описаны и проанализированы в работах [32, 35]. Некоторые из них проиллюстрированы на рис. 16.10–16.12 [34]. За отношение сигнал/шум (ОСШ) взято отношение первого момента смеси сигнала и шума к корню квадратному из второго момента для шума: $ОСШ = M_{1(c+ш)} / \sqrt{M_{2(ш)}}$. Для каждого заданного ОСШ число испытаний было равно 100. Статистики для шумовой составляющей получены усреднением по 10 000 случайных значений, т. е. усреднением как по ансамблю, так и по времени.

На рис. 16.10 показаны графики для ОСШ после обработки в зависимости от ОСШ на входе при различных функциях корреляции для шума (1 – корреляционный метод, 2 – энергетический спектр, 3 – вход, 4 – кепстральный метод). Если судить по этим данным о качественной стороне методов применительно к обнаружению эхосигнала, то при белом шуме выигрывает корреляционный метод, а при реверберационном – кепстральный метод (кепстр мощности).

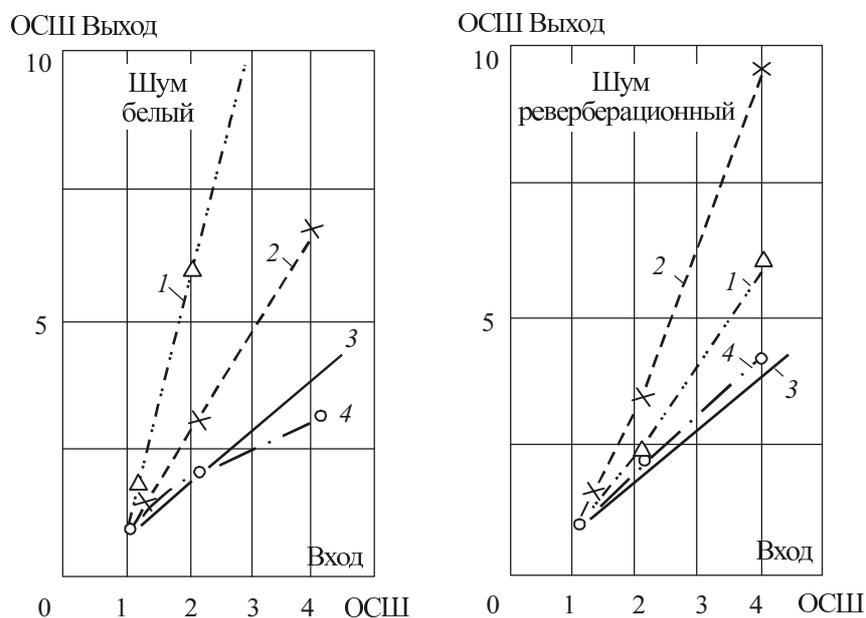


Рис. 16.10

Плотность вероятности шума $w(s)$ при корреляционной (треугольники) и кепстральной (кружки) обработках и при различных ОСШ приобрела единую форму (рис. 16.11) и хорошо аппроксимируется зависимостью (сплошная линия на рис. 16.11)

$$w(S) = \frac{1}{\sqrt{0.5\pi M_{2(\text{ш})}}} \exp\left(-S^2 / 2M_{2(\text{ш})}\right).$$

Для установления временной флуктуации пиков корреляционной и кепстральной функций, наблюдающихся на τ_3 , была проделана следующая процедура. Выделялась область разумной ширины (т. е. $2\Delta q = 2\Delta\tau$ порядка $20 a$) с центром в точке τ_3 . Для каждой серии испытаний задавался порог, обеспечивающий вероятность обнаружения пика $P_{\text{п}} = 0.9$, и фиксировалось количество пересечений этого порога. После этого находилось среднеквадратическое отклонение (СКО) σ_τ , нормированное относительно $\Delta\tau$ (при такой нормировке максимально возможное значение составило $\sigma_\tau / \Delta\tau = 1/\sqrt{3}$, что соответствует равновероятному распределению).

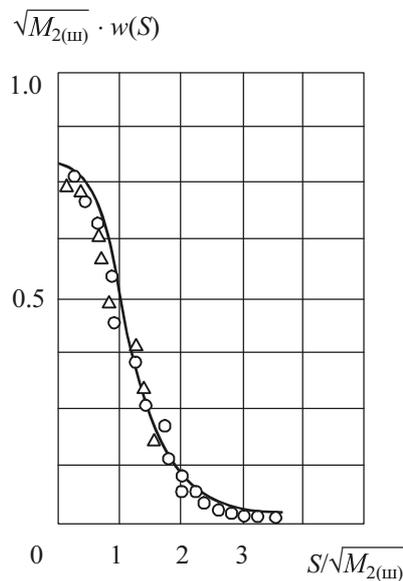


Рис. 16.11

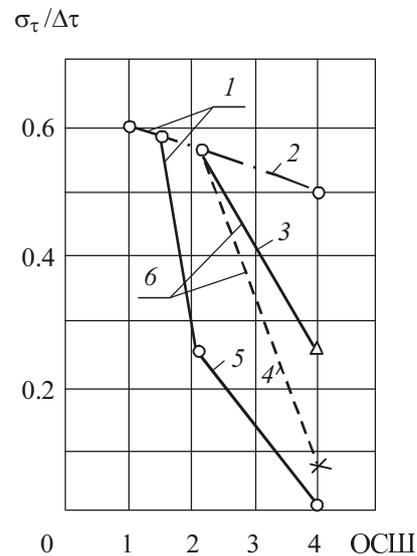


Рис. 16.12

На рис. 16.12 показана зависимость нормированного СКО флуктуаций пика от ОСШ (1 – белый шум; 2, 3 – кепстральная обработка; 4, 5 – корреляционная обработка; 6 – реверберационный шум). По этим результатам кепстральный пик имеет большую величину флуктуаций, чем корреляционный.

16.3. УПРАЖНЕНИЯ

16.3.1. КОМПЛЕКСНЫЙ КЕПСТР

1. Вычислите кепстр $\hat{C}(q)$ сигнала $s(t) = A\delta(t)$.
2. Сигнал представляет собой последовательность вида

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta(t - nt_0), \quad t_0 > 0.$$

Определите комплексный кепстр $\hat{C}(q)$ этого сигнала.

3. Задан сигнал $s(t) = 1/\pi t$, $-\infty < t < \infty$. Определите комплексный кепстр.
4. Сигнал имеет вид $s(t) = a/[\pi(a^2 + t^2)]$, для которого спектральная плотность $\hat{S}(\omega) = \exp(-a|\omega|)$. Вычислите комплексный кепстр.

5. Комплексный кепстр сигнала $x(t)$ задан в виде

$$\dot{C}(q) = \ln A \delta(q).$$

Определите $\ln \dot{X}(\omega)$, $\dot{X}(\omega)$ и $x(t)$.

16.3.2. КЕПСТР МОЩНОСТИ. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

6. Сигнал на входе приемного устройства локатора можно представить (при отсутствии шума) в виде

$$x(t) = s(t) + s_3(t) = s(t) + \alpha s(t - \tau_3),$$

где $s(t)$ – зондирующий сигнал; $s_3(t) = \alpha \cdot s(t - \tau_3)$ – эхосигнал, т. е. ослабленная ($\alpha \ll 1$) и задержанная (на время τ_3) копия зондирующего сигнала.

Представьте сумму сигналов $s(t) + s_3(t)$ в виде свертки $s_1(t) \otimes s_2(t)$ и определите спектральную плотность $\dot{S}_2(\omega)$ и сигнал $s_2(t)$. Как зависит $s_2(t)$ от $s_1(t) = s(t)$?

7. Преобразуйте дискретную последовательность $x[n] = s_1[n] + \alpha s_1[n - n_0]$ в свертку $x[n] = s_1[n] \otimes s_2[n]$. Исходной последовательности $s_1[n]$ соответствует Z-преобразование $S_1[z]$. Определите Z-преобразование $S_2[z]$ последовательности $s_2[n]$ и запишите выражение самой последовательности $s_2[n]$.

8. По данным упражнения 6 вычислите и изобразите графически кепстр мощности $C_2(q)$ сигнала $s_2(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - \tau_3)$, $\alpha \ll 1$.

9. Вычислите и изобразите графически кепстр мощности $C_2(q)$ сигнала $s_2(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - \tau_3)$, $\alpha < 1$ (а в упражнении 8 $\alpha \ll 1$), что имеет место при измерении относительного времени запаздывания двух эхосигналов, соответствующих разным путям распространения.

10. Спектральная плотность сигнала $s(t) = A \sin(\omega_0 t) / (\omega_0 t)$ имеет вид

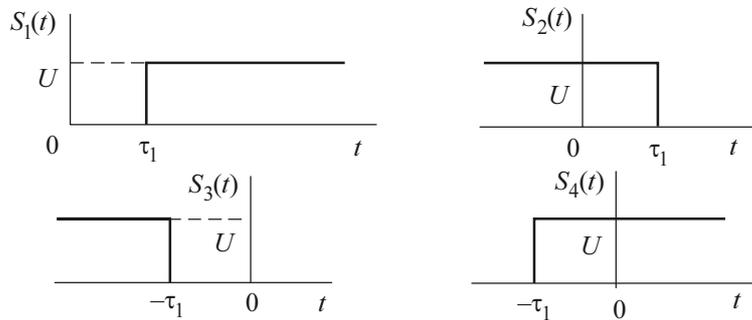
$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) = \begin{cases} A\pi / \omega_0, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

Выведите выражение для кепстра мощности $C(q)$ и постройте график для случая, когда $A = 1$ (В), $\omega_0 = \pi / t_0$ (рад/мс), $t_0 = 1$ (мс).

ОТВЕТЫ

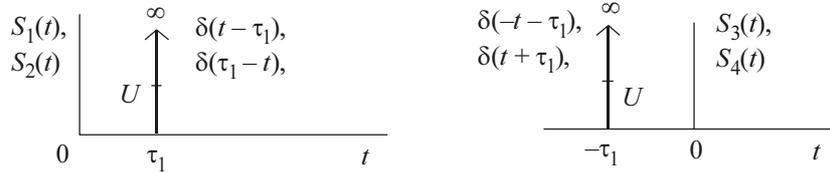
Глава 1

1.

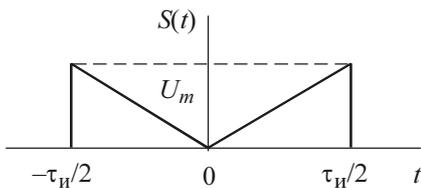


2. Графики этих функций будут «зеркальными» относительно оси абсцисс.

3.



4.



$$S(t) = \frac{2U_m}{\tau_H} |t| \left[\sigma\left(\frac{\tau_H}{2} + t\right) - \sigma\left(-\frac{\tau_H}{2} - t\right) \right],$$

$$S(t) = \frac{2U_m}{\tau_H} |t| \left[\sigma\left(\frac{\tau_H}{2} + t\right) \sigma\left(-\frac{\tau_H}{2} - t\right) \right]$$

5.

$$a) S_1(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_1, \\ U, & -\tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2, \end{cases} \quad S_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_1, \\ -Ut/\tau_1, & -\tau_1 < t < 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

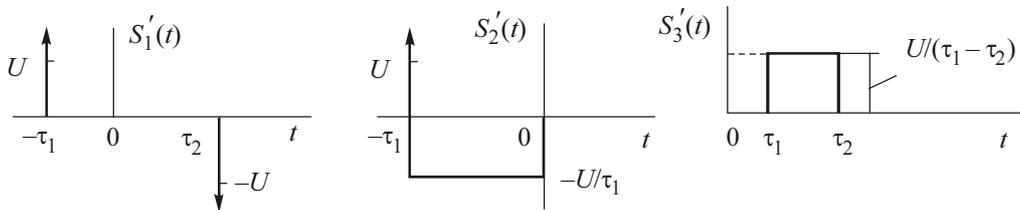
$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ U(t - \tau_1) / (\tau_2 - \tau_1), & \tau_1 < t < \tau_2, \\ U, & t > \tau_2, \end{cases}$$

$$\text{б) } S_1(t) = U[\sigma(t + \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)] = U[\sigma(t + \tau_1)\sigma(-t - \tau_2)],$$

$$S_2(t) = (-Ut / \tau_1)[\sigma(t + \tau_1) - \sigma(t)] = (-Ut / \tau_1)[\sigma(t + \tau_1)\sigma(-t)],$$

$$S_3(t) = U[(t - \tau_1) / (\tau_2 - \tau_1)][\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)] + U\sigma(t - \tau_2).$$

6.



Математические модели:

а) на временных интервалах

$$S_1'(t) = \begin{cases} \infty, & t = -\tau_1, \\ \infty, & t = \tau_2, \\ 0, & t \neq \tau_1, t \neq \tau_2, \end{cases} \quad S_2'(t) = \begin{cases} \infty, & t = -\tau_1, \\ -U / \tau_1, & -\tau_1 < t < 0, \\ 0, & t < \tau_1, t > 0, \end{cases}$$

$$S_3'(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ U / (\tau_2 - \tau_1), & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2, \end{cases}$$

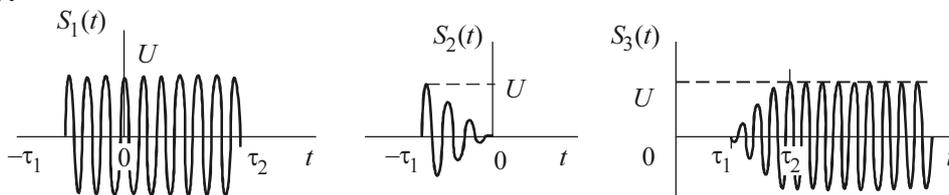
б) с помощью функций Хевисайда

$$S_1'(t) = U\delta(t + \tau_1) - U\delta(t - \tau_2),$$

$$S_2'(t) = -U / \tau_1[\sigma(t + \tau_1) - \sigma(t)] + U\delta(t + \tau_1),$$

$$S_3'(t) = U / (\tau_2 - \tau_1)[\sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)].$$

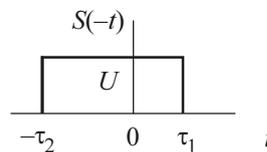
7.



8.

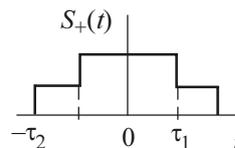
Нечетная функция $S(-t)$

$$S(-t) = U[\sigma(-t + \tau_1) - \sigma(-t - \tau_2)]$$



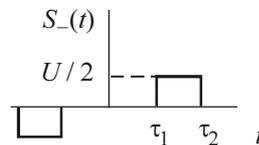
Четная часть $S_+(t)$ сигнала $S(t)$

$$S_+(t) = \frac{S(t) + S(-t)}{2}$$



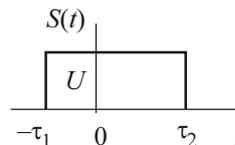
Нечетная часть $S_-(t)$ сигнала $S(t)$

$$S_-(t) = \frac{S(t) - S(-t)}{2}$$



Исходный сигнал

$$S(t) = S_+(t) + S_-(t)$$



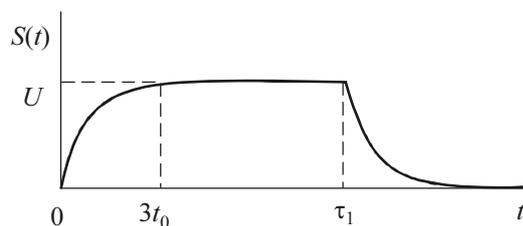
9. Последовательность импульсов прямоугольной формы (рис. 1.14, а):

$$S_{1.k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[\sigma(t + \tau_1 - kT) - \sigma(t - \tau_2 - kT)].$$

Последовательность импульсов треугольной формы (рис. 1.14, б):

$$S_{2.k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[-(t - kT) / \tau_1][\sigma(t + \tau_1 - kT) - \sigma(t - kT)].$$

10.

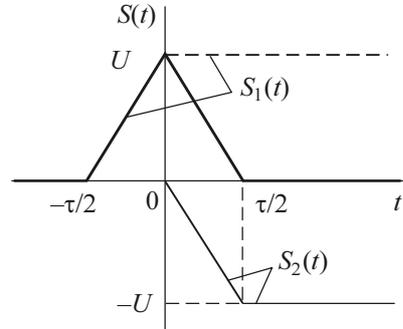


11.

$$S_1(t) = \frac{2U}{\tau} \int_{-\tau/2}^t [\Phi(t + \tau/2) - \Phi(t)] dt$$

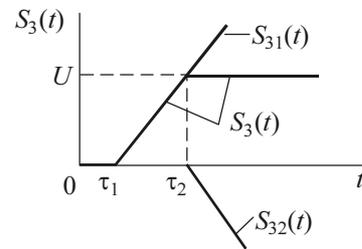
$$S_2(t) = -\frac{2U}{\tau} \int_0^t [\Phi(t) - \Phi(t - \tau/2)] dt$$

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$$



12.

$$S_3(t) = S_{31}(t) + S_{32}(t) = \frac{U(t - \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \sigma(t - \tau_1) - \frac{U(t - \tau_2)}{\tau_2 - \tau_1} \sigma(t - \tau_2).$$



13.

Шелест листьев	63.25 мкПа
Речь диктора	0.6325 мПа
Художественное чтение	6.325 мПа
Громкий разговор	20 мПа
Симфонический оркестр	1.125 Па
Громкая музыка	20 Па

14. $V_c = 74.4 \cdot 10^6$.

15. $T_c = 202$ с.

16. $B_k = 3\,720\,000$, $F_k = 62\,000$ Гц.

17. $n_p = 49 \cdot 10^3$, $n_T \approx 37$.

18. $n = 23.25 \cdot 10^6$.

19. $E_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $E_2 = 0.1 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$.

20. $E_{12} = 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $E = 0.1025 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$.

21. $E_{12} = 0$, сигналы $\dot{S}_1(t)$ и $\dot{S}_2(t)$ ортогональны.

Глава 2

1. $\tilde{S}_3(t) = S_0\sigma(t) + \sum_{n=1}^N S_n\sigma(t - n\Delta t) = \Delta S \sum_{n=1}^N \sigma(t - n\Delta t)$, где $S_0 = 0$, $S_n = \Delta S = 1$ В, $N = 10$.

2.

$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0 t / t_1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ U_0, & t > t_1. \end{cases} \quad S'_3(t) = \frac{U_0}{t_1} [\sigma(t) - \sigma(t - t_1)],$$

$$S'_3(t) = \frac{U_0}{t_1} \left[\int_0^t \delta(t) dt - \int_0^t \delta(t - t_1) dt \right].$$

3. $u(t) = 5 \cos(2\pi Ft) [\sigma(t) - \sigma(t - 2)]$ В, где $F = 1/T = 1$ Гц;
 $u_1(t) = 5e^{-2(t-2)}\sigma(t - 2)$ В.

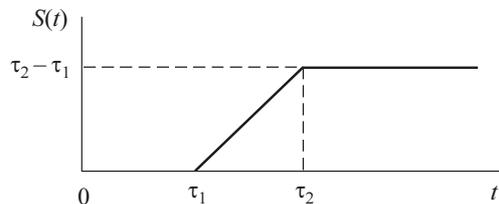
4. $u_2(t) = 2U \int_0^t \tau \sigma(t - \tau) d\tau$; $u_3(t) = U \left(\sigma(t) - \alpha \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sigma(t - \tau) d\tau \right)$.

Суть результата состоит в том, что высота элементарных ступенек, из которых суммируется сигнал, для сигнала $u_2(t)$ линейно возрастает во времени ($du/d\tau = 2U\tau$), а для сигнала $u_3(t)$ убывает по экспоненциальному закону ($du/d\tau = -\alpha Ue^{-\alpha\tau}$).

5. Независимо от величины α площадь каждого из этих импульсов равна единице. При $\alpha \rightarrow \infty$ амплитуды импульсов также стремятся к бесконечности, а их длительность – к нулю. Следовательно, эти импульсы в пределе описываются дельта-функцией $\delta(t)$.

6. $S_1 = S_1 = S_1 = 1(\tau_2 - \tau_1)$.

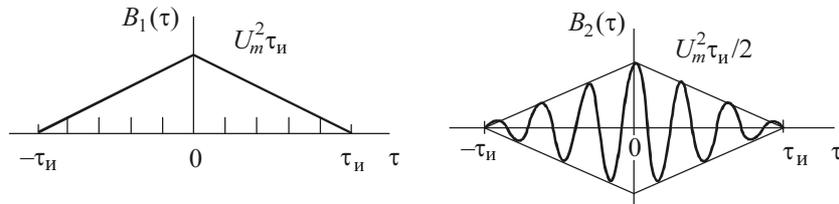
7. $S_1(t) = S_2(t) = S_3(t) = S(t) = (t - \tau_1)\sigma(t - \tau_1) - (t - \tau_2)\sigma(t - \tau_2)$.



8. $u_1(t) = \sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - \tau_2)$, $u_3(t) = e^{-\alpha \cdot 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Глава 3

$$1. B_1(\tau) = U_m^2 (\tau_{и} - |\tau|), \quad |\tau| \leq \tau_{и}; \quad B_{12}(\tau) = 0.5U_m^2 (\tau_{и} - |\tau|) \cos \omega_0 \tau, \quad |\tau| \leq \tau_{и}.$$



$$2. K_3(\tau) = 0.5U_m^2 \cos \omega_0 \tau; \quad K_4(\tau) = \frac{1}{T} U_m^2 (\tau_{и} - |\tau - nT|), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. АКФ непериодического сигнала является непериодической функцией аргумента τ и имеет размерность энергии. АКФ периодического сигнала (с периодом T) периодична (с тем же периодом). Добавляется множитель $1/T$ и, следовательно, изменяется размерность с энергии на мощность.

4. Изменений не произойдет, так как АКФ – четная функция аргумента τ : $B(\tau) = B(-\tau)$ и $K(\tau) = K(-\tau)$.

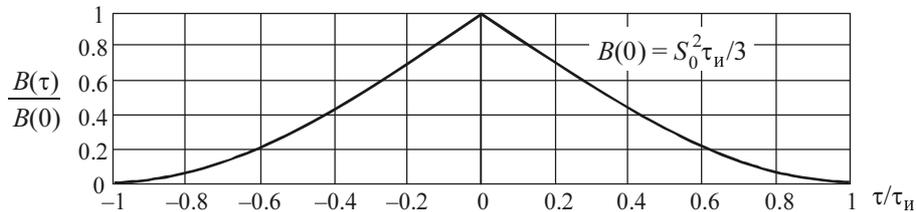
$$5. E_1 = U_m^2 \tau_{и}, \quad E_2 = U_m^2 \tau_{и} / 2, \quad P_3 = U_m^2 / 2, \quad P_4 = U_m^2 \tau_{и} / 2T.$$

$$6. B(\tau) = 2S_0^2 (\tau_{и} - |\tau|), \quad |\tau| \leq \tau_{и}; \quad B(\tau) = -S_0^2 (|\tau| + \tau_{и} - t_0), \quad t_0 - \tau_{и} \leq |\tau| \leq t_0;$$

$$B(\tau) = -S_0^2 (t_0 + \tau_{и} - |\tau|), \quad t_0 \leq |\tau| \leq t_0 + \tau_{и}.$$

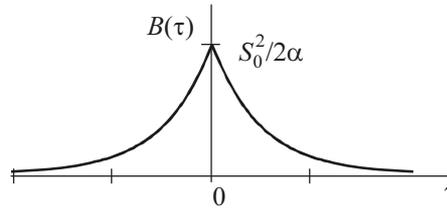
7.

$$B(\tau) := \begin{cases} \left(\frac{S_0}{\tau_{и}} \right)^2 \left[\frac{1}{3} [(\tau_{и})^3 - (|\tau|)^3] - \frac{|\tau|}{2} [(\tau_{и})^2 - (|\tau|)^2] \right] & \text{if } 0 \leq |\tau| \leq \tau_{и}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



8.

$$B(\tau) = \frac{S_0^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$



9. $S^2(\omega) = S_0^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$.

10. $\tau_k = \tau_H = 1 / \Delta f$.

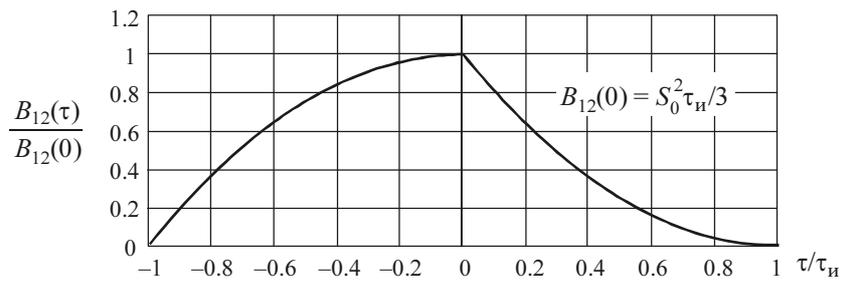
11. $\tau_k = 1 / \alpha$.

12. $B_{12}(\tau) = (U_1 U_2 / \alpha) e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$, $B_{12}(\tau) = U_1 U_2 / \alpha$, $\tau < 0$.

13. $K_{12}(\tau) = 0.5 U_m^2 \cos(\omega_0 \tau - \pi/2)$; $\tau_0 = \pi / (2\omega_0)$.

14.

$$B_{12}(\tau) := \begin{cases} \left(\frac{S_0}{\tau_H}\right)^2 \left[\frac{1}{2} [(\tau_H - |\tau|)^2] + |\tau|(\tau_H - |\tau|) \right] & \text{if } -\tau_H \leq \tau \leq 0, \\ \left(\frac{S_0}{\tau_H}\right)^2 \left[\frac{1}{2} [(\tau_H)^2 - (\tau)^2] - \tau(\tau_H - \tau) \right] & \text{if } 0 \leq \tau \leq \tau_H, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Глава 4

1. Если сложим импульсы с амплитудами, например, 10 и 8 В, то получим импульс с амплитудой 15 В, не содержащийся в множестве M . Следовательно, не выполняется одна из аксиом линейного пространства.

2. а) $E_1 = U_1^2 \tau_n$, $\|S_1\| = \sqrt{E_1} = U_1 \sqrt{\tau_n}$;

б) $E_2 = U_2^2 \tau_n / 3$, $\|S_2\| = \sqrt{E_2} = U_2 \sqrt{\tau_n / 3}$;

в) $E_3 = U_3^2 (1 - e^{-2a\tau_n}) / 2a$, $\|S_3\| = \sqrt{E_3}$; б) $E_4 = U_4^2 \tau_n / 2$, $\|S_2\| = U_4 \sqrt{\tau_n / 2}$.

3. а) $E_1 = 0.1 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $\|S_1\| = 0.316 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$;

б) $E_2 = 0.036 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $\|S_2\| = 0.182 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$;

в) $E_3 = 0.017 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $\|S_3\| = 0.13 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$; б) $E_4 = 0.05 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$,

$\|S_2\| = 0.224 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$.

4. $d(S_1, S_4) = \sqrt{\frac{U_4^2 \tau_n}{2} - \frac{4U_4 U_1}{\pi} \tau_n + U_1^2 \tau_n} = 0.151 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$.

5. $U_1 = 2U_4 / \pi = 6.366 \text{ В}$,

$d(S_1, S_4)_{\min} = U_4 \sqrt{(1/2 - 4/\pi^2) \tau_n} = 0.0975 \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}$.

6. $a = 1$, $b = -1/6$.

7. $(S_3, S_{3,\tau}) = (U_3^2 / 2a) e^{-a\tau}$; $\psi = \arccos(e^{-a\tau})$ при $\tau = 0$ $\psi = 0$,
а при $\tau > 5/a$ $\psi \rightarrow 90^\circ$.

8. $(S_4, S_{4,\tau}) = U_4^2 \tau_n / 2\pi$; $\psi = \arccos(1/\pi) = 1.247 \text{ рад} = 71.439^\circ$.

9. $E = U_5^2 \tau_n / 2$, $\|S_5\| = U_5 \sqrt{\tau_n / 2}$.

10. $(S_5(t), S_6(t)) = E_{5,6} = 0$, $\psi_{5,6} = \pi/2$.

11. $d(S_5, S_6) = \sqrt{\frac{U_5^2}{2} \tau_n \left(1 + \frac{U_6^2}{U_5^2}\right)}$, $d(S_5, S_5) = 0$.

12. $(S_7(t), S_8(t)) = 0$.

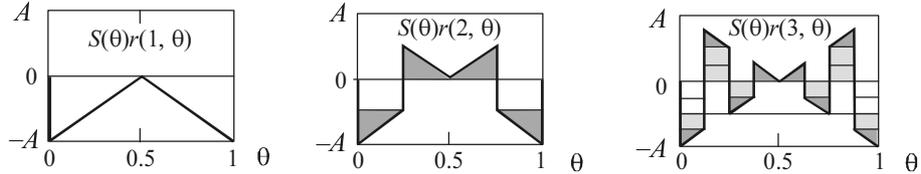
13. $(S_2(t), S_7(t)) = UU_2 T / 4$, $(S_2(t), S_8(t)) = UU_2 T / 8$.

14. $(S_4(t), S_7(t)) = 0$, $(S_4(t), S_8(t)) = 0$.

Глава 5

1. $\tilde{S}(t) = C_1 r(1, \theta) + C_2 r(2, \theta) = 0.5 S_0 [r(1, \theta) + r(2, \theta)], \mu = 0.$

2.

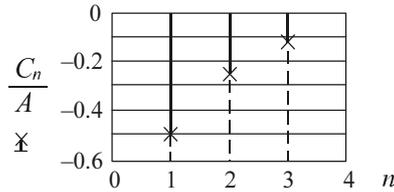


$$C_1 = -A/2,$$

$$C_2 = -A/4,$$

$$C_3 = -A/8,$$

$$C_4 = -A/16.$$



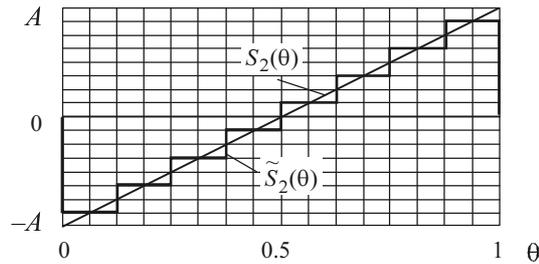
3.

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_{n=1}^3 C_n r(n, \theta),$$

$$P_s = 0.333 A_0^2,$$

$$P_{as} = 0.328 A_0^2,$$

$$\mu = 0.016 \text{ (1.6 \%)}.$$



4.

$$H_{16} = \begin{vmatrix} H_8 & H_8 \\ H_8 & -H_8 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & - & - & - & - & - \\ + & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & + & - & + & + & - & - & + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + \end{matrix} \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 1 \dots 15 \\ 2 \dots 7 \\ 3 \dots 8 \\ 4 \dots 3 \\ 5 \dots 12 \\ 6 \dots 4 \\ 7 \dots 11 \\ 8 \dots 1 \\ 9 \dots 14 \\ 10 \dots 6 \\ 11 \dots 9 \\ 12 \dots 2 \\ 13 \dots 13 \\ 14 \dots 5 \\ 15 \dots 10 \end{matrix}$$

5. а) 4; б) 13; в) 10.

6. $\text{wal}(1, \theta) = r(1, \theta) = \text{sign}[\sin(2^1 \pi \theta)]$, $\text{wal}(3, \theta) = r(2, \theta) = \text{sign}[\sin(2^2 \pi \theta)]$,
 $\text{wal}(7, \theta) = r(3, \theta) = \text{sign}[\sin(2^3 \pi \theta)]$, $\text{wal}(15, \theta) = r(4, \theta) = \text{sign}[\sin(2^4 \pi \theta)]$,
 $\text{wal}(0, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(1, \theta)$, $\text{wal}(2, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(3, \theta)$,
 $\text{wal}(4, \theta) = \text{wal}(3, \theta)\text{wal}(7, \theta)$, $\text{wal}(5, \theta) = \text{wal}(2, \theta)\text{wal}(7, \theta)$,
 $\text{wal}(6, \theta) = \text{wal}(1, \theta)\text{wal}(7, \theta)$, $\text{wal}(8, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(7, \theta)$,
 $\text{wal}(9, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(6, \theta)$, $\text{wal}(10, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(5, \theta)$,
 $\text{wal}(11, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(4, \theta)$, $\text{wal}(12, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(3, \theta)$,
 $\text{wal}(13, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(2, \theta)$, $\text{wal}(14, \theta) = \text{wal}(15, \theta)\text{wal}(1, \theta)$.

7. а) $B_0 = B_1 = S_0 / 2$, б) $B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = S_0 / 4$, в) $B_0 = \dots = B_7 = S_0 / 8$.

8. а) Все составляющие спектра $\{B_{1,n}\} = B_{0,1}, \dots, B_{1,n}$ возрастут в S_0 раз.

б) Спектр второго сигнала отличается от спектра первого сигнала изменением B_0 на S_0 .

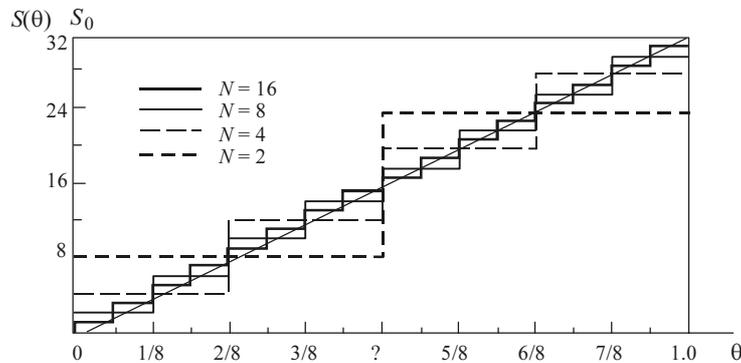
в) Спектр второго сигнала отличается от спектра первого сигнала изменением как коэффициента B_0 , так и остальных коэффициентов.

9. Вместо $B_1 = S_0 / 2$ появится $B_2 = -S_0 / 2$. Все остальные $B_n \equiv 0$.

10. 1) Для исходного колебания: $E = 10^{-3} / 3 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$; $P = 1/3 \text{ В}^2$.

2) Для аппроксимированного: $E = 0.3330 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$; $P = 0.3330 \text{ В}^2$.

11.



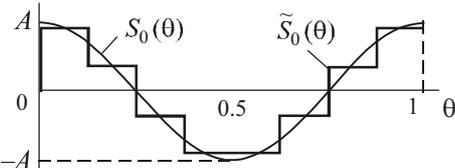
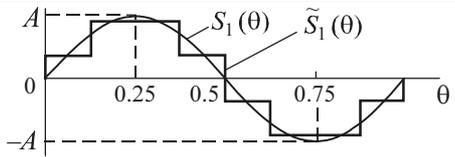
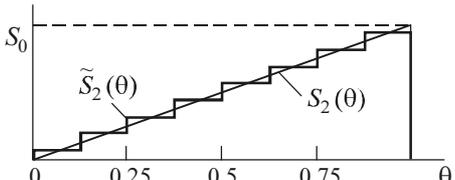
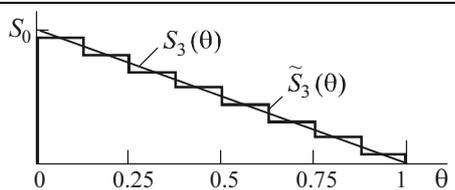
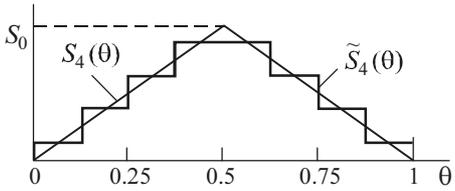
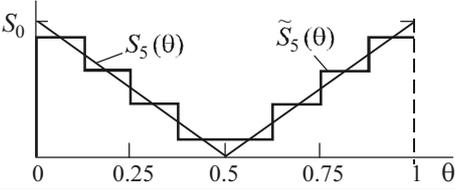
а) $\mu_2 = 6.25 \%$; б) $\mu_4 = 1.5625 \%$; в) $\mu_8 \approx 0.39 \%$; г) $\mu_{16} \approx 0.09766 \%$.

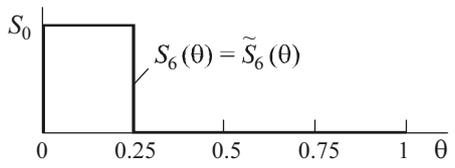
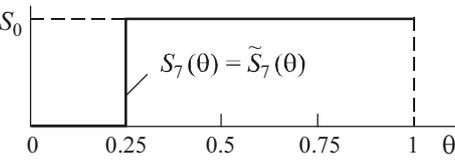
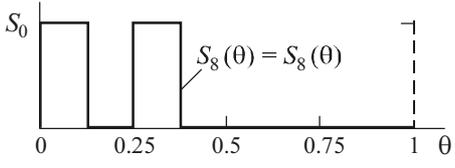
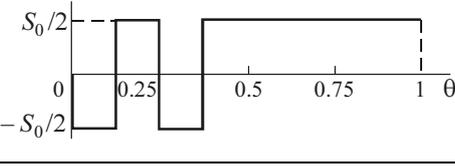
12. Результаты расчета коэффициентов B_n приведены в табл. 5.2.

13. Синтезируемый $\tilde{S}(\theta)$ и исходный $S(\theta)$ сигналы на интервале $[0, 1]$ приведены в табл. 5.2.

14. Результаты вычисления мощностей исходного (E) и синтезированного (E_a) сигналов, а также относительной среднеквадратической ошибки μ аппроксимации (синтеза) приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

№	Сигналы $S_n(\theta)$ и $\tilde{S}_n(\theta)$	B_n	E_s	E_{as}	μ
0		$B_2 = 0.636A,$ $B_6 = 0.264A$	$0.5A^2$	$0.475A^2$	0.05
1		$B_1 = 0.636A,$ $B_5 = -0.264A$	$0.5A^2$	$0.475A^2$	0.05
2		$B_0 = S_0 / 2,$ $B_1 = -S_0 / 4,$ $B_3 = -S_0 / 8,$ $B_7 = -S_0 / 16$	$S_0^2 / 3$	$0.332S_0^2$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
3		$B_0 = S_0 / 2,$ $B_1 = S_0 / 4,$ $B_3 = S_0 / 8,$ $B_7 = S_0 / 16$	$S_0^2 / 3$	$0.332S_0^2$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
4		$B_0 = S_0 / 2,$ $B_1 = -S_0 / 4,$ $B_6 = -S_0 / 8$	$S_0^2 / 3$	$0.328S_0^2$	0.016
5		$B_0 = S_0 / 2,$ $B_1 = S_0 / 4,$ $B_6 = S_0 / 8$	$S_0^2 / 3$	$0.328S_0^2$	0.016

№	Сигналы $S_n(\theta)$ и $\tilde{S}_n(\theta)$	B_n	E_s	E_{as}	μ
6		$B_0 = S_0 / 4,$ $B_1 = S_0 / 4,$ $B_2 = S_0 / 4,$ $B_3 = S_0 / 4$	$S_0^2 / 4$	$S_0^2 / 4$	0
7		$B_0 = S_0 / 4,$ $B_1 = -S_0 / 4,$ $B_2 = -S_0 / 4,$ $B_3 = -S_0 / 4$	$S_0^2 / 4$	$S_0^2 / 4$	0
8		$B_0 = S_0 / 4,$ $B_1 = S_0 / 4,$ $B_6 = S_0 / 4,$ $B_7 = S_0 / 4$	$S_0^2 / 4$	$S_0^2 / 4$	0
9		$B_0 = S_0 / 4,$ $B_1 = -S_0 / 4,$ $B_6 = -S_0 / 4,$ $B_7 = -S_0 / 4$	$S_0^2 / 4$	$S_0^2 / 4$	0

$$15. \tilde{S}(t) = C_0 + C_2 \frac{1}{2} \left[12 \left(\frac{t}{T} \right)^2 - 1 \right] + C_4 \left[560 \left(\frac{t}{T} \right)^4 - 120 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 3 \right],$$

где $C_0 = S_0 / 2$, $C_2 = -15S_0 / 16$, $C_4 = 135S_0 / 256$.

$$16. \tilde{f}(x) = C_1 p_1(x) + C_3 p_3(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{8} \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right).$$

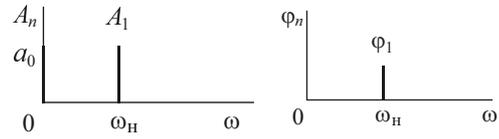
$$17. C_0 = S_0, C_1 = C_2 = \dots = 0.$$

$$18. \tilde{S}(t) = S_0 \left(1.392 - 0.786t / \tau + 0.09t^2 / \tau^2 \right) e^{-t/\tau}, \quad \mu \approx 0.168.$$

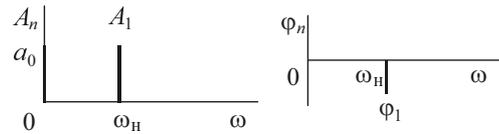
Глава 6

1.

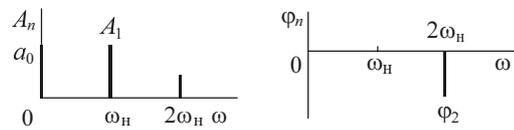
a)
 $a_0 = U_0 = 10 \text{ В}$, $A_1 = U_m = 10 \text{ В}$,
 $\varphi_1 = \varphi_0 = \pi/4$, $\Omega = \omega_H$.



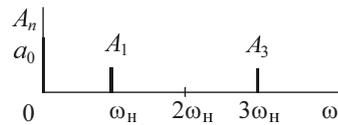
б)
 $a_0 = U_0 = 10 \text{ В}$, $A_1 = U_m = 10 \text{ В}$,
 $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2 = -\pi/4$, $\Omega = \omega_H$.



в)
 $a_0 = U_0 = 10 \text{ В}$, $A_1 = U_m = 10 \text{ В}$,
 $A_2 = U_{m2} = 5 \text{ В}$, $\varphi_1 = 0$,
 $\varphi_2 = -\pi/2$, $\Omega = \omega_H$, $2\Omega = 2\omega_H$.

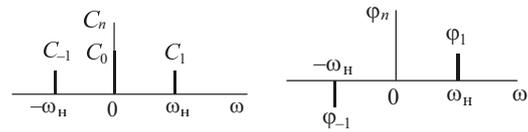


г)
 $a_0 = U_0 = 10 \text{ В}$,
 $A_1 = A_3 = U_m/2 = 5 \text{ В}$,
 $\Omega = \omega_H$, $3\Omega = 3\omega_H$.

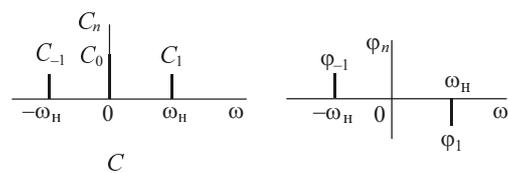


2.

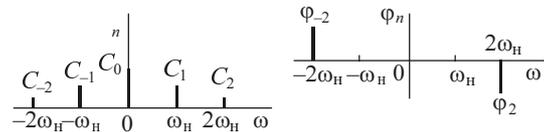
a)
 $C_0 = U_0 = 10 \text{ В}$,
 $C_1 = C_{-1} = U_m/2 = 5 \text{ В}$,
 $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_{-1} = -\varphi_1 = -\pi/4$.



б)
 $C_0 = U_0 = 10 \text{ В}$,
 $C_1 = C_{-1} = U_m/2 = 5 \text{ В}$,
 $\varphi_1 = -\pi/4$, $\varphi_{-1} = -\varphi_1 = \pi/4$.



в)
 $C_0 = U_0 = 10 \text{ В}$, $C_1 = C_{-1} = 5 \text{ В}$,
 $C_2 = C_{-2} = 2.5 \text{ В}$, $\varphi_2 = -\pi/2$,
 $\varphi_{-2} = \pi/2$.



г)
 $C_0 = U_0 = 10 \text{ В}, C_1 = C_{-1} = 2.5 \text{ В},$
 $C_3 = C_{-3} = 2.5 \text{ В}, \varphi_n = 0.$

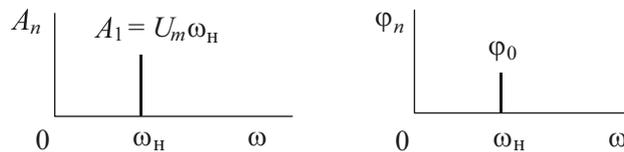
3.

$P_n, \text{В}^2$	$\bar{P}, \text{В}^2$	Спектр мощности
а) $P_0 = U_0^2 = 100,$ $P_1 = U_m^2 / 2 = 50$	150	
б) $P_0 = U_0^2 = 100,$ $P_1 = U_m^2 / 2 = 50$	150	
в) $P_0 = U_0^2 = 100,$ $P_1 = U_{m1}^2 / 2 = 50,$ $P_2 = U_{m2}^2 / 2 = 12.5$	162.5	
г) $P_0 = U_0^2 = 100,$ $P_1 = U_m^2 / 8 = 12.5,$ $P_3 = U_m^2 / 8 = 12.5.$	125	

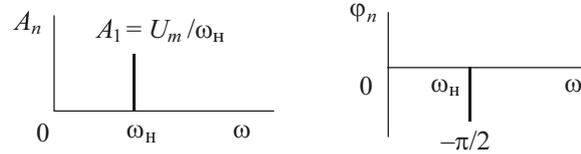
4. Амплитудный спектр и спектр мощности не изменятся. Изменится только фазовый спектр: на частоте ω_H фазовый сдвиг будет $\varphi_0 \pm \omega_H \tau$.

5. Составляющие амплитудного спектра изменятся в α раз. Фазовый спектр останется без изменений.

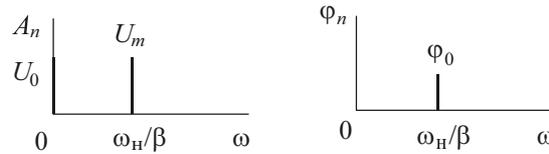
6.



7.



8.

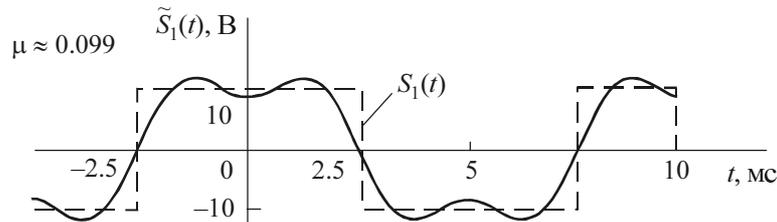


9. $S(t) = U_0 + U \cos(\omega_0 t + \pi/2) + (U/2) \cos(\omega_0 t + \pi) + (U/3) \cos(\omega_0 t + 3\pi/2),$

$T = 2\pi / \omega_0, \bar{P} = U_0^2 + U^2 / 2 + (U/2)^2 / 2 + (U/3)^2 / 2 = U_0^2 + 49U^2 / 72.$

10. $A_n = a_n = \frac{4A}{n\pi} \sin(n\pi/2).$

11.



12. Будут отсутствовать гармоники с номерами 3, 6, 9 и т. д. $a_0 = U/q = 4.$

13. $a_0 = S_0 / \pi, A_1 = a_1 = S_0 / 2.$

14. $A_n = b_n = -\frac{2U_m}{n\pi} \cos(n\pi).$

15. $\tilde{S}_2(t) = \sum_{n=1}^3 A_n \sin n\Omega t = -\sum_{n=1}^3 \frac{2U_m}{n\pi} \cos n\pi \sin n\Omega t, A_1 = \frac{2}{\pi} U_m,$

$A_2 = -\frac{2}{2\pi} U_m \cos 2\pi = -\frac{U_m}{\pi},$

$A_3 = -\frac{2}{3\pi} U_m \cos 3\pi = \frac{2U_m}{3\pi}, \mu = 1 - P_a / P = 1 - \frac{49U_m^2}{18\pi^2} \frac{3}{U_m^2} = 0.173.$

$$16. a_0 = S_0 / 2, A_n = a_n = \frac{2S_0}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1].$$

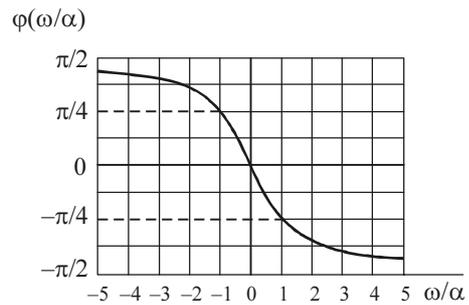
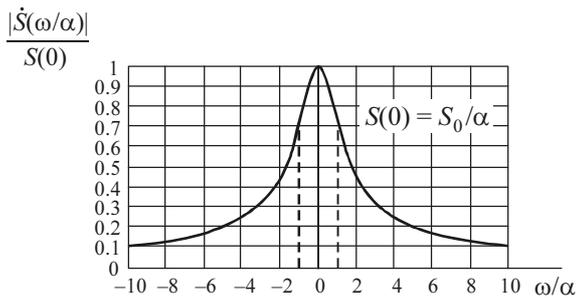
$$17. \tilde{S}_2(t) = \frac{S_0}{2} - \frac{4S_0}{\pi^2} \cos \Omega t - \frac{4S_0}{9\pi^2} \cos 3\Omega t = S_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \Omega t - \frac{1}{9} \cos 3\Omega t \right) \right],$$

$$P = S_0^2 / 3, P_a = 0.333S_0^2, \mu = 0.001.$$

Глава 7

$$1. \dot{S}(\omega) = \frac{S_0}{\alpha + j\omega} = \frac{S_0/\alpha}{1 + j\omega/\alpha}, \quad |\dot{S}(\omega/\alpha)| = \frac{S_0/\alpha}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}},$$

$$\varphi(\omega/\alpha) = -\text{arctg}(\omega/\alpha).$$

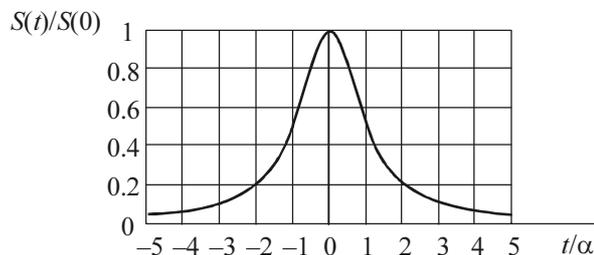


$$A_2 = \frac{2}{T} |\dot{S}(2\Omega)| = 1.479 \text{ В.}$$

$$2. \omega_{10} = 9.95 \cdot 10^3 \text{ рад/с, } \omega_{45^\circ} = 10^3 \text{ рад/с.}$$

3.

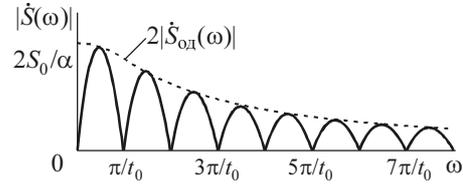
$$S(t) = \frac{S_0/\alpha}{1 + (t/\alpha)^2}.$$



4.

$$\dot{S}(\omega) = 2j \frac{S_0}{\alpha + j\omega} \sin \omega t_0,$$

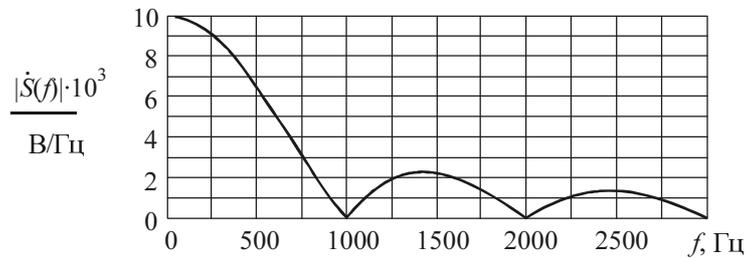
$$|\dot{S}(\omega)| = 2 \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} |\sin \omega t_0|.$$



5. $n = \Delta f / F = 10$, $A_n = \frac{2}{T} S(n\Omega) = 2$ В.

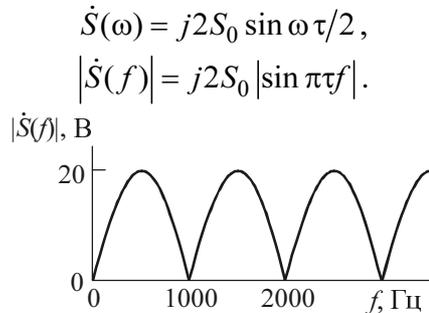
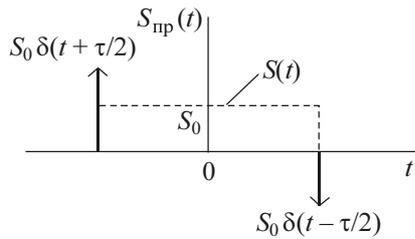
6. $\dot{S}(\omega) = S_0 \tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}$.

7.



8. $A_0 = S_0 / q = 5$ В, $A_1 = \frac{2S_0}{\pi} = 6.366$ В, $A_2 = S_0 \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$.

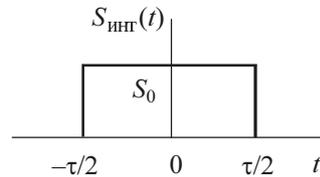
9.



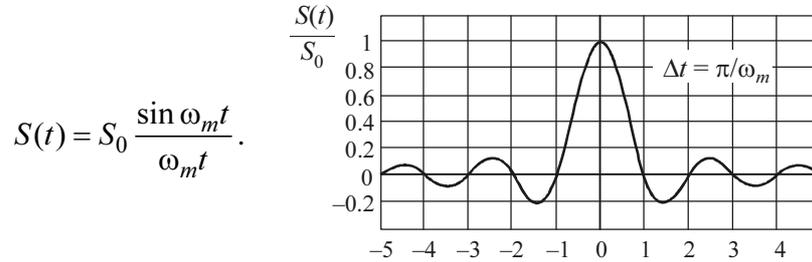
10.

$$S_{\text{ИИТ}}(t) = S_0 [\sigma(t + \tau/2) - \sigma(t - \tau/2)],$$

$$\dot{S}_{\text{ИИТ}}(\omega) = S_0 \tau \frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2}.$$

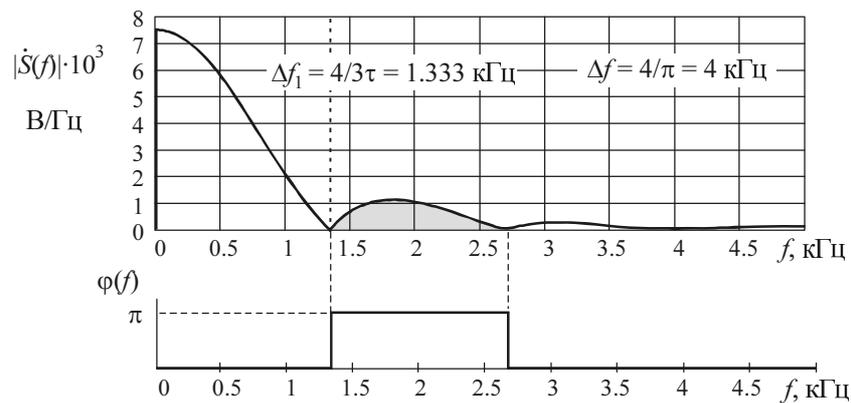


11.



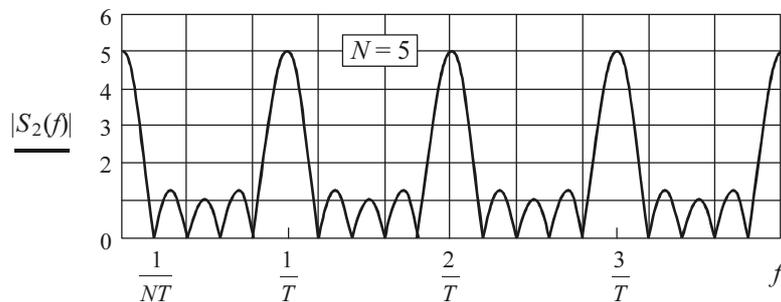
$$12. |\dot{S}(f)| = \frac{3}{4} S_0 \tau \left| \frac{\sin(0.25\pi\tau f)}{0.25\pi\tau f} \frac{\sin(0.75\pi\tau f)}{0.75\pi\tau f} \right|,$$

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0, & \sin(0.25\pi\tau f) \sin(0.75\pi\tau f) > 0, \\ \pi, & \sin(0.25\pi\tau f) \sin(0.75\pi\tau f) < 0. \end{cases}$$



$$13. \dot{S}(f) = \dot{S}_1(f) \left[1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j2 \cdot 2\pi fT} + \dots + e^{-j(N-1)2\pi fT} \right] = \dot{S}_1(f) \dot{S}_2(f),$$

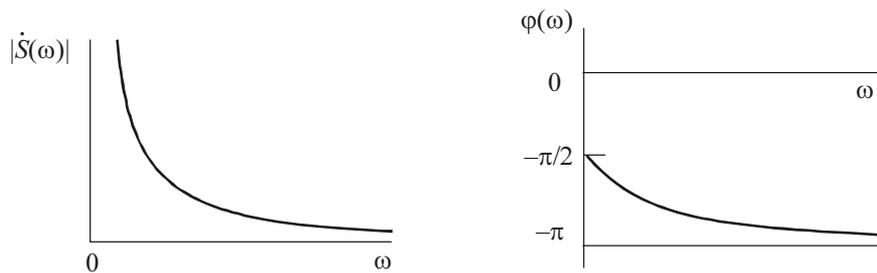
$$\dot{S}_2(f) = 1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j2 \cdot 2\pi fT} + \dots + e^{-j(N-1)2\pi fT}.$$



$$14. \dot{S}(\omega) = -jS_0\tau \frac{1}{\omega} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad |\dot{S}(\omega)| = S_0\tau \frac{1}{\omega} \frac{|\sin(\omega\tau/2)|}{\omega\tau/2},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \sin(\omega\tau/2) > 0, \\ \pi/2, & \sin(\omega\tau/2) < 0. \end{cases}$$

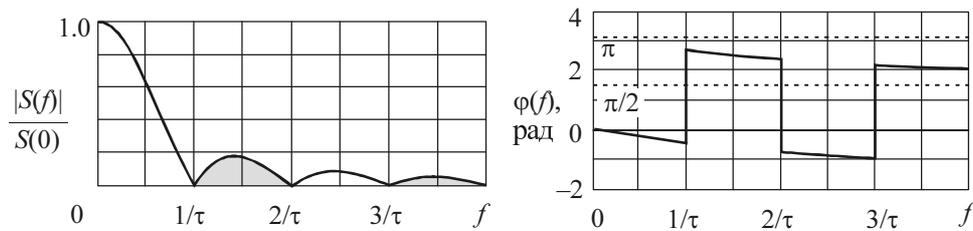
$$15. \dot{S}(\omega) = \frac{S_0\alpha}{j\omega(\omega + j\alpha)}, \quad |\dot{S}(\omega)| = \frac{S_0\alpha}{\omega\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\pi/2 + \text{arctg}(-\alpha/\omega).$$



$$16. \dot{S}(\omega) = 2 \frac{S_0\alpha}{\omega(\omega - j\alpha)} \sin(\omega\tau/2) \frac{\tau}{\tau} = \frac{S_0\tau}{1 + j\omega/\alpha} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

$$|\dot{S}(\omega)| = \frac{S_0\tau}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}} \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|,$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \text{arctg}(-\omega/\alpha), & 0 \leq \omega \leq 2\pi/\tau, \\ \pi + \text{arctg}(-\omega/\alpha), & 2\pi/\tau \leq \omega \leq 4\pi/\tau \text{ и т. д.} \end{cases}$$



$$\varphi(\omega_1) = \text{arctg}(-\omega_1/\alpha) = \text{arctg}(-2\pi/\tau\alpha).$$

$$17. \dot{C}_n = \frac{1}{T_0} \dot{S}_\delta(n\Omega) = \frac{\Omega}{2\pi}, \quad \dot{S}(\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega).$$

$$18. B(\tau) = \frac{S_0^2 \omega_m}{\pi} \frac{\sin(\omega_m \tau)}{\omega_m \tau}.$$

$$19. E = \frac{S_0^2}{2\alpha}, \quad \tau_{\text{эф}} = \frac{\ln 10}{2\alpha} = 1.151/\alpha.$$

$$20. f_{\text{эф}} = 6.314\alpha / 2\pi = 1.005\alpha.$$

21.

$$S_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{S_1 S_2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\tau}), & 0 < \tau \leq \tau_{\text{н}}, \\ S_{\text{max}} = \frac{S_1 S_2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\tau_{\text{н}}}), & \tau = \tau_{\text{н}}, \\ \frac{S_1 S_2}{\alpha} e^{-\alpha\tau} (e^{\alpha\tau_{\text{н}}} - 1), & \tau \geq \tau_{\text{н}}. \end{cases}$$

$$22. S(\omega) = S_0 \tau_{\text{н}} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{н}}/2)}{\omega\tau_{\text{н}}/2}.$$

$$23. \dot{S}_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega) = \frac{S_1}{\alpha + j\omega} \frac{S_2}{\beta + j\omega}.$$

$$24. S_1(p) = \frac{S_0}{\alpha + p}, \quad S_2(p) = \frac{1}{p}, \quad S_3(p) = 1, \quad S_4(p) = \frac{U_m p}{p^2 + \omega_0^2},$$

$$S_5(p) = \frac{U_m \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

$$25. S(p) = \frac{S_0}{p} [1 - e^{-p\tau}].$$

$$26. S(p) = S_0 / p^2.$$

$$27. 1. S_1(p) = \frac{S_0(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \dot{S}_1(\omega) = \frac{S_0(\alpha + j\omega)}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}.$$

$$2. S_2(p) = \frac{S_0 \omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \dot{S}_2(\omega) = \frac{S_0 \omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}.$$

$$3. S_3(p) = \frac{S_0}{(p + \alpha)^2}, \quad \dot{S}_3(\omega) = \frac{S_0}{(\alpha + \omega)^2}.$$

$$4. S_4(p) = \frac{S_0}{p + \alpha + \beta}, \quad \dot{S}_4(\omega) = \frac{S_0}{\alpha + \beta + j\omega}.$$

$$28. S_1(p) = \frac{1}{2} [F(p - j\omega_0) + F(p + j\omega_0)],$$

$$S_2(p) = \frac{1}{2j} [F(p - j\omega_0) - F(p + j\omega_0)].$$

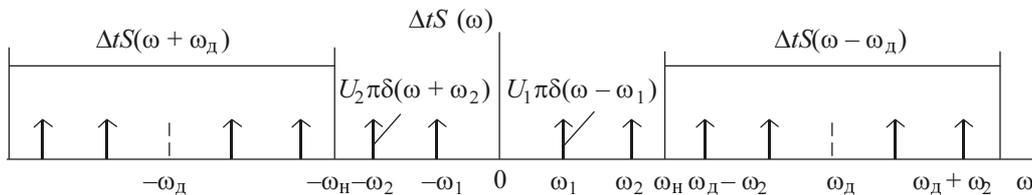
$$29. S_1(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{S_0}{(p - j\omega_0) + \alpha} + \frac{S_0}{(p + j\omega_0) + \alpha} \right] = \frac{S_0(\alpha + p)}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2},$$

$$S_2(p) = \frac{1}{2j} \left[\frac{S_0}{(p - j\omega_0) + \alpha} - \frac{S_0}{(p + j\omega_0) + \alpha} \right] = \frac{S_0\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2},$$

$$\dot{S}_1(\omega) = \frac{S_0(j\omega + \alpha)}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \dot{S}_2(\omega) = \frac{S_0\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}.$$

Глава 8

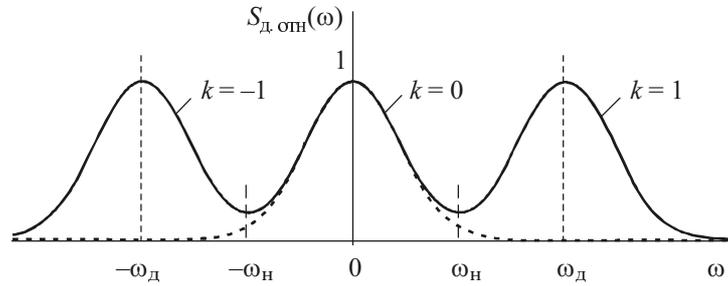
1. $\Delta t = 147$ мкс, $N = 6\,120\,000$.
2. $N = 8.64 \cdot 10^7$.
3. $\tilde{U}_1(t_1) = 10.61$ В, $\tilde{U}_2(t_1) = 5.305$ В.
4. $E_s = 0.2$ В²·с, $\omega_m = 3140$ рад/с, $E_a = 0.181$ В²·с, $\mu = 5\%$.
5. $\omega_d = 5\omega_1$, $\omega_H = \omega_d/2 = 2.5\omega_1$.



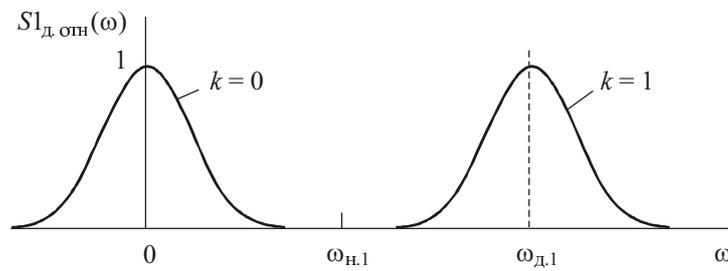
$$6. S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \frac{S_0\omega_m}{2\pi} \frac{\sin \omega_m(t + \Delta t)}{\omega_m(t + \Delta t)} + \frac{S_0\omega_m}{2\pi} \frac{\sin \omega_m(t - \Delta t)}{\omega_m(t - \Delta t)};$$

сигналы сдвинуты во времени на интервалы $\pm\Delta t = \pm\pi/(2\omega_m)$ относительно начала отсчета времени.

$$7. \omega_H = \omega_d/2 = \pi\beta. \quad S_{\text{д.отн}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\beta^2}(\omega - k\omega_d)^2\right]$$



8. $S_{1_{д.отн}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\beta^2}(\omega - k\omega_{д,1})^2\right]$, где $\omega_{д,1} = 4\pi\beta$.



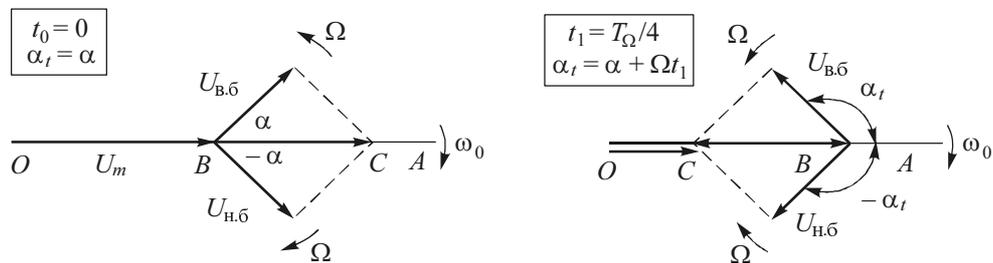
9. $\mu = 5.1\%$.

10. $\Delta\omega_3 = 6.15\alpha$, $N \approx 26$, $T = 4\pi/\alpha$.

Глава 10

1. $M = 0.7(3)$, $U_m = 75$ В.

2. $U(t_0) = 31.31$ В, $U(t_1) = 8.686$ В,



3. $M = \frac{U_{\text{ор}}}{U_m} = \frac{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}$.

4. $U_{\text{max}} = 12(1 + 0.6 + 0.2) = 21.6$ В, $U_{\text{min}} = 12(1 - 0.6 + 0.2) = 7.2$ В (в первом приближении), $U_{\text{min}} = 6.9$ В (точное значение, получаемое из равенства нулю производной огибающей АМК).

5. $M_1 = U_6/U_0 = 0.8$, $M_2 = 0.2$,

$$u(t) = 50(1 + 0.8 \cos 2\pi Ft + 0.2 \cos 2\pi \cdot 2Ft) \cos 2\pi f_0 t.$$

6. $M_1 = 0.6$, $M_2 = 0.4$,

$$\begin{aligned} u(t) &= 10 \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + 15 \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \pi/4] + 50 \cos(\omega_0 t + \pi/2) + \\ &+ 15 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + 5\pi/4] + 10 \cos[(\omega_0 + 2\Omega)t + \pi] = 50 \cos(\omega_0 t + \pi/2) + \\ &+ 30 \cos(\Omega t + 3\pi/4) \cos(\omega_0 t + \pi/2) + 20 \cos(2\Omega t + \pi/2) \cos(\omega_0 t + \pi/2) = \\ &= 50 [1 + 0.6 \cos(\Omega t + 3\pi/4) + 0.4 \cos(2\Omega t + \pi/2)] \cos(\omega_0 t + \pi/2). \end{aligned}$$

7. $\alpha_1 = 3\pi/8$.

8. $P_6 = \frac{1}{2} \frac{U_6^2}{R} = \frac{1}{2R} \left(\frac{UM}{2} \right)^2$.

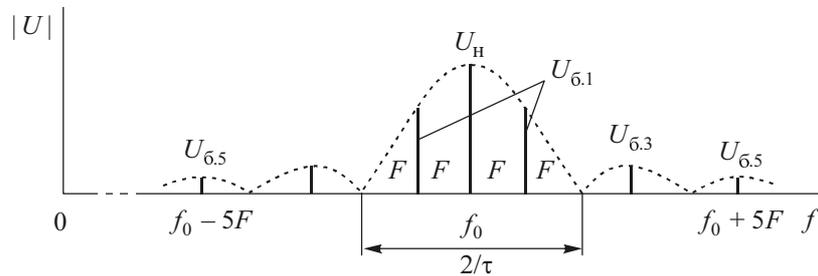
9. $P_{\text{max}} = 12.25$ кВт.

10. а) $P_{\text{max}} = 1.62$ Вт; б) $P_{\text{cp}} = 0.66$ Вт; г) $P_{\text{H}} = 0.5$ Вт, $P_{\text{H}}/P_{\text{cp}} \approx 0.758$ (75,8 %).

11. $|U| = \frac{1}{T} U_m \tau \left| \frac{\sin(n\Omega - \omega_0)\tau/2}{(n\Omega - \omega_0)\tau/2} \right|$, $n = 0$, $U_{\text{H}} = U_m/2 = 5$ В;

$$n = 1, U_{6.1} = U_m/\pi = 3.185 \text{ В}; U_{6.2} = U_{6.4} = \dots = 0;$$

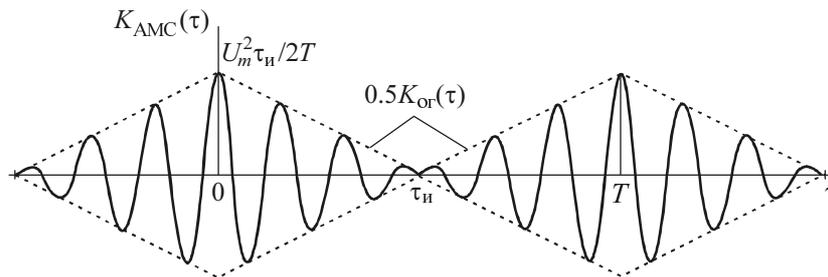
$$n = 3, |U_{6.3}| = |U_m/3\pi| = 1.06 \text{ В}, n = 5, U_{6.5} = U_m/5\pi = 0.635 \text{ В}; \dots$$



$$12. M_n = \frac{2U_{\text{с.н.}}}{U_{\text{н}}} = \frac{4}{\pi n} \sin(n\pi/2). \quad M_1 = 4/\pi = 1.27, \quad M_2 = M_4 = \dots = 0,$$

$$M_3 = 4/\pi = 0.42 \text{ и т. д.}$$

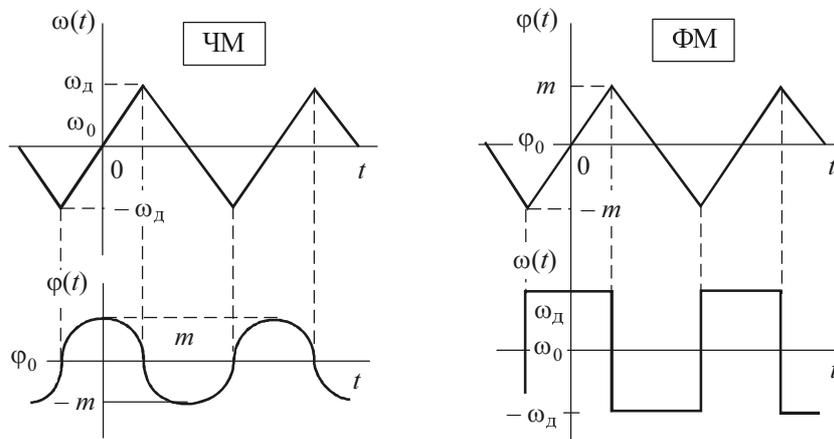
$$13. K_{\text{АМС}}(\tau) = \begin{cases} (1/T)U_m^2(\tau_{\text{н}} - |\tau|) \cos \omega_0 \tau & |\tau| \leq \tau_{\text{н}}, \\ 0, & \tau_{\text{н}} < |\tau| < T - \tau_{\text{н}}. \end{cases}$$



14. Увеличивается на Δ только амплитуда спектральной составляющей с частотой f_0 ; при этом парциальные коэффициенты модуляции уменьшаются в $(U_{\text{н}} + \Delta)/U_{\text{н}} = 1.2$ раза.

$$15. 2\Delta f = 20 \text{ Гц.}$$

16.



$$17. f_{\text{д}} = 10^5 \text{ Гц, } m = 10 \text{ рад.}$$

$$18. \omega_{\text{max}} = 2.02 \cdot 10^9 \text{ рад/с, } \omega_{\text{min}} = 1.98 \cdot 10^9 \text{ рад/с.}$$

19. $f_{\max} = 60.25 \cdot 10^6$ Гц, $f_{\min} = 59.75 \cdot 10^6$ Гц,

20. $\omega(t_1) = 1.029 \cdot 10^8$ рад/с.

21. $2\Delta f_{\text{пр}} = 510$ кГц.

22. $f_{\text{д}} = 5$ кГц, $2\Delta f_{\text{пр}} = 12$ кГц, $n = 13$.

23.

n	1	2	3
m_n , рад	2.40	5.52	8.65
F_n , Гц	833	362	231

24. $F_{\max} = 10.44$ кГц.

25. $U_{\Phi\text{МК}}(t) = 10 \cos[2\pi \cdot 10^7 t + 10 \cos(2\pi 10^4 t) + \varphi]$.

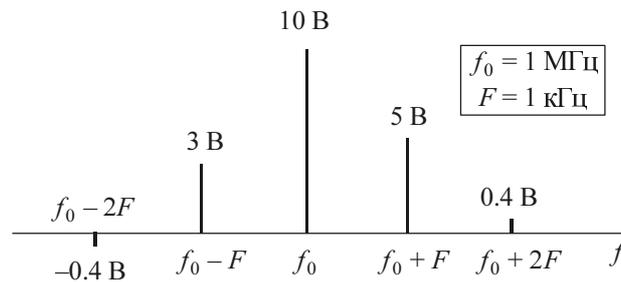
26. $f_{\min} = 79.75 \cdot 10^6$ Гц, $f_{\max} = 80.25 \cdot 10^6$ Гц, $2\Delta f_{\text{пр}} = 510$ кГц.

27. А) $m = 0.5$. $U_{\text{н}} = U_m J_0(m) = 9.38$ В, $P_{\text{н}} = 43.99$ Вт, $P_{\Sigma} = 49.846$ Вт,
 $P_{\text{ср}} = 50$ Вт.

Б) $m = 5.0$. $U_{\text{н}} = 1.78$ В, $P_{\text{н}} = 1.584$ Вт, $U_{\delta.1} = 3.28$ В, $2P_1 = 10.758$ Вт,
 $U_{\delta.2} = 0.47$ В, $2P_2 = 0.221$ Вт, $U_{\delta.3} = 3.65$ В, $2P_3 = 13.322$ Вт,
 $U_{\delta.4} = 3.91$ В, $2P_4 = 15.288$ Вт, $U_{\delta.5} = 2.61$ В, $2P_5 = 6.812$ Вт,
 $U_{\delta.6} = 0.13$ В, $2P_6 = 0.017$ Вт, $P_{\Sigma} = 48.002$ Вт.

28. $M = 0.065$.

29.

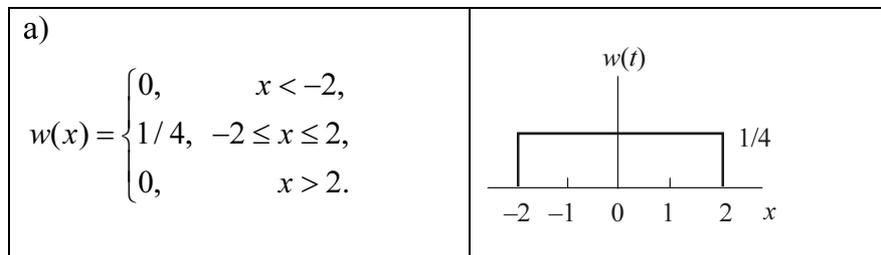


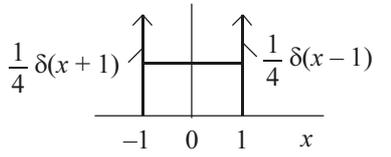
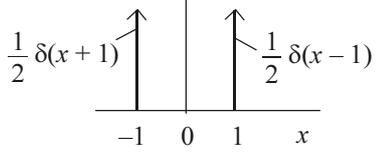
30. $f_{\text{д}} = 10^7$ Гц.

31. $B = 2355$, $\beta = 20.93 \cdot 10^{12}$ рад/с².
32. $f_{\text{д}} = 5 \cdot 10^4$ Гц, $B = 100\pi$,
 $u_{\text{ЛЧМ}}(t) = U_m \cos \psi(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 t + 2\pi \cdot 10^7 t^2 + \pi/3)$.
33. а) $E \approx 0.05$ В²с, б) $E \approx 0.05$ В²с.
34. $\Delta\tau_{\text{ЛЧМ}} = 10^{-5}$ с, $\Delta\tau_{\text{АМС}} / \Delta\tau = 200$.
35. $\tilde{s}(t) = -U_m \cos \omega_0 t$, $S(t) = U_m$.
36. $\tilde{S}(t) = \begin{cases} S_0, & t < 0, \\ S_0 e^{j\Omega t}, & t > 0. \end{cases}$
37. $\dot{S}_{\text{ор}}(\omega) = S_0 \tau_{\text{н}} \frac{\sin(\omega \tau_{\text{н}} / 2)}{\omega \tau_{\text{н}} / 2}$.
38. а) $\tilde{U}(t) = U(t) e^{j\varphi}$, б) $\tilde{U}(t) = U_m e^{j(m \sin \Omega t + \varphi)}$.
39. $U(t) = 10 e^{-10^3 t} \cos(10^6 t + \pi/3)$.
40. Для $t > 0$ $\dot{u}(t) = \tilde{U}(t) e^{j\omega_0 t}$, $\tilde{U}(t) = U_m e^{-\alpha t} e^{-j\pi/2}$;
 для $\omega > 0$ $\dot{S}_{\text{ор}}(\omega) = \frac{U_m e^{-j\pi/2}}{\alpha + j\omega}$, $\dot{S}(\omega) = 0.5 \frac{U_m e^{-j\pi/2}}{\alpha + j(\omega - \omega_0)}$.

Глава 11

1. $a = b$.
2. $w(x) = 2ax$, $0 < x < 1$; а) $P(0 < X < 0.5) = 0.25$; б) $P(0.5 < X < 1) = 0.75$;
 в) $P(0.4 < X < 0.8) = 0.48$.
- 3.



<p>б)</p> $w(x) = \begin{cases} 0.25\delta(x+1), & x = -1, \\ 1/4, & -1 < x < 1, \\ 0.25\delta(x-1), & x = 1, 0. \end{cases}$	<p style="text-align: center;">$w(t)$</p> 
<p>в)</p> $w(x) = \begin{cases} 0.5\delta(x+1), & x = -1, \\ 0.25\delta(x-1), & x = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$	<p style="text-align: center;">$w(t)$</p> 

4. $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{A}$, $P(-A/2 < X < A/2) = 1/3$.

5. $x_0 = 3.717\sigma$.

6. а) $x_M = x_{\text{мед}} = a$; б) $x_M = 1$, $x_{\text{мед}} \approx 1.7$; в) $x_M = a$, $x_{\text{мед}} = \sqrt{2 \ln 2} \cdot \sigma = 1.177$.

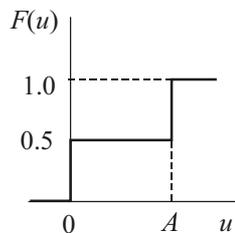
7. $P(0 < U < 2) = 0.3413$, $P(U > 2) = 0.1587$.

8. $P(U > U_{\Pi}) = 0.011$.

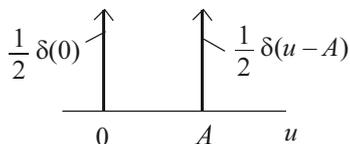
9. $P(U > U_{\Pi}) = 0.1357$.

10.

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ 0.5, & 0 < u < A, \\ 1, & u > A. \end{cases}$$



$$w(u) = \begin{cases} 0.5\delta(0), & u = 0, \\ 0.5\delta(u-A), & u = A, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



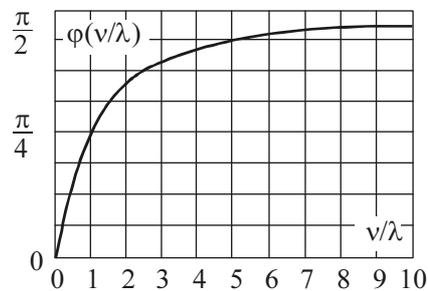
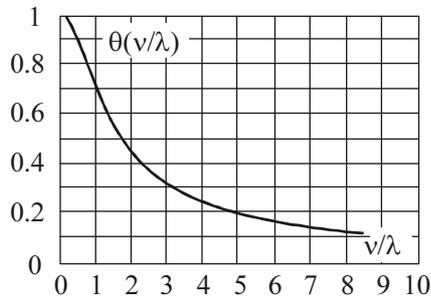
11. $A = 2$, $m = 0$, $D = 2$, $\sigma = \sqrt{2}$, $\gamma_a = 0$, $\gamma_3 = 3$.

$$12. w(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}, \quad m = \frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{18}, \quad \sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \gamma_a = -\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

$$13. w_2(x_1, x_2) = w(x_1)w(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(x_1-m)^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(x_2-m)^2/2\sigma^2},$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \quad P(X_1 > C) = 0.0014.$$

$$14. \theta(j\nu) = \frac{\lambda}{\lambda - j\nu}, \quad |\theta(j\nu)| = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}, \quad \varphi(\nu) = \text{arctg}(\nu/\lambda).$$



$$15. m_1 = m = j^{-1} d\theta(\nu=0) / d\nu = 1/\lambda.$$

$$16. w(x \mp x_0) \leftrightarrow \theta_{x_0}(j\nu) = e^{-j\nu x_0} \theta(j\nu).$$

$$17. \theta(j\nu) = e^{-\sigma^2 \nu^2 / 2} e^{j m \nu} = e^{(j m \nu - \sigma^2 \nu^2 / 2)}.$$

$$18. w_z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad (z > 0).$$

$$19. w_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{[(x+y) - (m_x + m_y)]^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_z} \exp\left(-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right).$$

$$20. H = \ln(b - a).$$

$$21. H = \ln(\sigma \sqrt{2\pi e}).$$

$$22. \Delta H = H_H - H_P = \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi e}}{2\sqrt{3}}\right) = 0.17.$$

23. $m(t) = \overline{X(t)} = m, D(t) = \overline{(X(t) - m)^2} = \sigma^2,$
 $K(t_1, t_2) = \overline{(X(t_1) - m)(X(t_2) - m)} = D.$

24. $m_z(t) = \overline{Z(t)} = S(t)m_x, D(t) = \overline{(Z(t) - m_z(t))^2} = S^2(t)D_x,$
 $K_z(t_1, t_2) = \overline{\dot{Z}(t_1)\dot{Z}(t_2)} = S(t_1)S(t_2)D_x.$

25. $m_z(t) = \overline{Z(t)} = S(t)m_x, D(t) = \overline{(Z(t) - m_z(t))^2} = S^2(t)D_x,$
 $K_z(t_1, t_2) = \overline{\dot{Z}(t_1)\dot{Z}(t_2)} = S(t_1)S(t_2)K_x(\tau).$

26. $m_z(t) = \overline{Z(t)} = S_1(t)m_x + S_2(t)m_y,$
 $K_z(t_1, t_2) = S_1(t_1)S_1(t_2)K_x(t_1, t_2) + S_2(t_1)S_2(t_2)K_y(t_1, t_2).$
 Процесс *нестационарный*.

27. $m_z(t) = \overline{Z(t)} = 0, D_z(t) = \overline{[Z(t) - m_z]^2} = A^2/2,$
 $K_z(t_1, t_2) = \overline{[Z(t_1) - m_z][Z(t_2) - m_z]} = \frac{1}{2}A^2 \cos \omega_0 \tau.$
 Процесс *стационарный*.

28. $m_z = \langle Z(t) \rangle = 0, K_z(\tau) = \langle [Z(t) - m_z][Z(t - \tau) - m_z] \rangle = \frac{1}{2}A^2 \cos \omega_0 \tau,$
 $D_z = K_z(0) = A^2 / 2.$

Усреднение по времени одной реализации и по сечению ансамбля реализаций (см. предыдущий ответ) дает один и тот же результат. Следовательно, процесс *эргодический*.

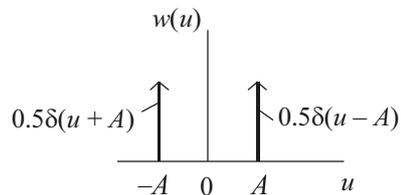
29. $m_u = 1/a \text{ В}, m_2 = 2/a^2 \text{ В}^2, D_u = 1/a^2 \text{ В}^2.$

30. $m_y = Km_x, D_y = K^2D_x, w(y) = \frac{1}{K}w(x) = \frac{1}{K}w\left(\frac{y}{K}\right).$

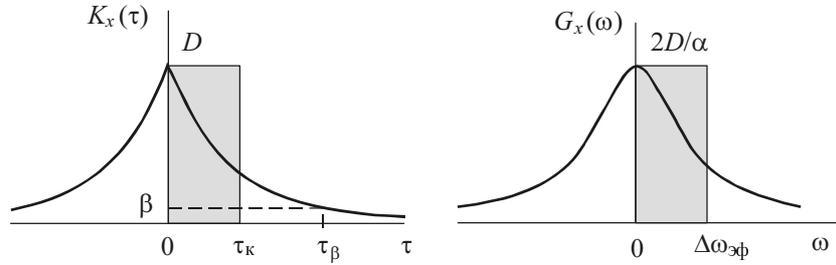
31.

$$w(u) = \begin{cases} 0.5\delta(u + A), & u = -A, \\ 0.5\delta(u - A), & u = A, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$m_u = 0, D_u = A^2.$



32. $\tau_\beta = \ln(1/\beta)/\alpha$, $\tau_K = 1/\alpha$, $\Delta\omega_\Phi = \pi\alpha/2$.

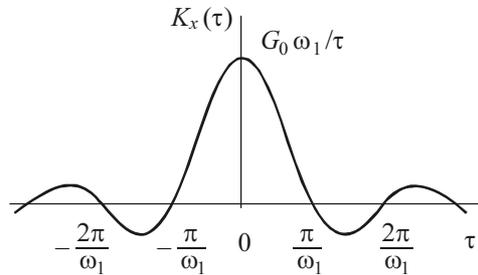


33.

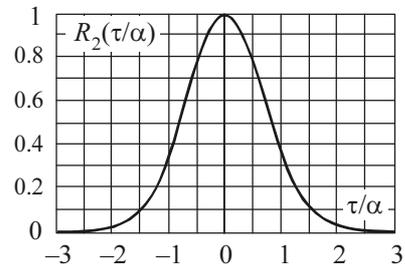
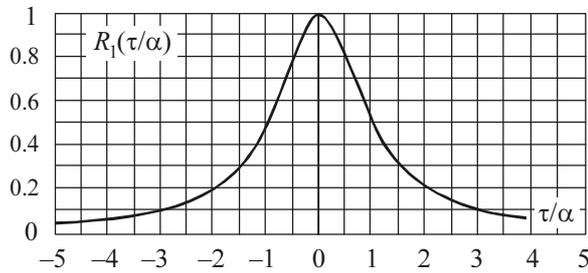
$$K_x(\tau) = \frac{G_0 \omega_1 \sin \omega_1 \tau}{\tau \omega_1 \tau},$$

$$\tau_0 = \pi / \omega_1,$$

$$\tau_K = \frac{1}{\omega_1} \frac{\pi}{2}.$$



34.



a) $\tau_\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}$, $\tau_K = \frac{\pi}{2a}$, $\Delta\omega_\Phi = \pi/2\tau_K = a$;

б) $\tau_\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}$, $\tau_K = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\Delta\omega_\Phi = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

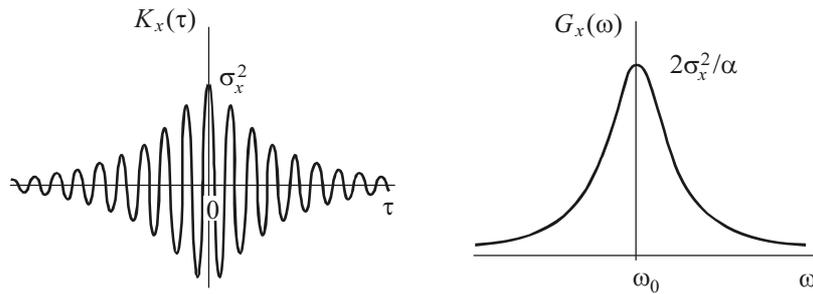
35. $K_y(\tau) = \sigma_x^2 2\alpha^2 [1 - 2(\alpha\tau)^2] e^{-|\alpha\tau|^2}$, $D_y = K_y(0) = 2\alpha^2 \sigma_x^2$.

36. $P(A > A_0) = e^{-2} = 0.135$.

37. $m_A = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.25\sigma_x$, $D_A = m_{2A} - m_A^2 = \sigma_x^2(2 - \pi/2) \approx 0.43\sigma_x^2$.

38. $K_x(\tau) = K_A(\tau)(0.5 \cos \omega_0 \tau)$.

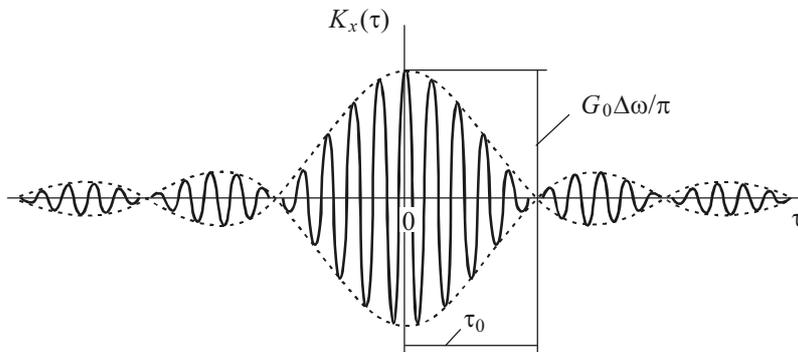
39. $G_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}$,



40. $K_A(\tau) = 2\sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\tau_k = 1/\alpha = 100$ мкс,

$G_A(\omega) = \frac{4\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$, $\Delta\omega_{\text{эф}} = (\pi/2) \cdot 10^4$ рад/с (или $\Delta f_{\text{эф}} = 2.5$ кГц).

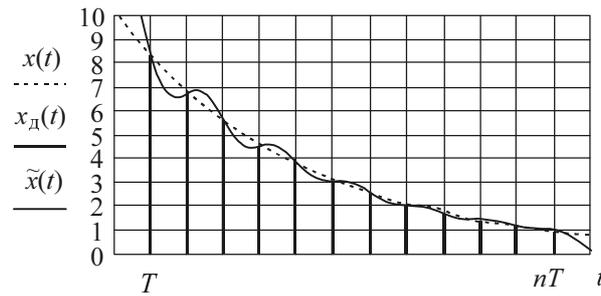
41. $G_x(\omega) = \frac{G_0\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2} \cos(\omega_0\tau)$, $\tau_0 = 2\pi/\Delta\omega$.



Глава 13

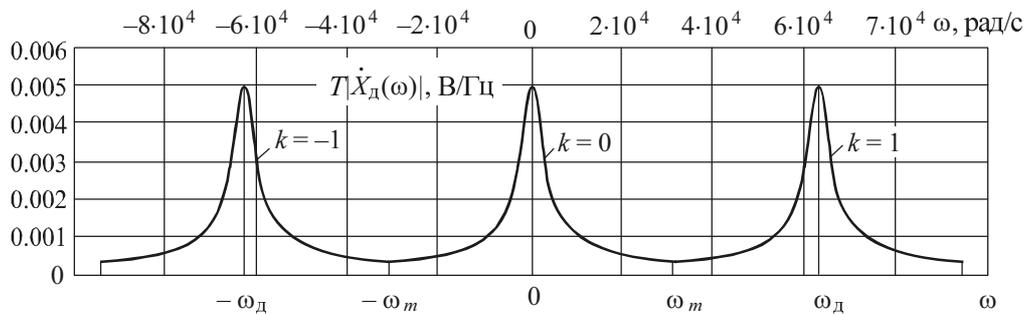
1. $x_d(t) = x[nT] = Ae^{-\alpha nT}$, при $n = 0, 1, 2, \dots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x(nT), \text{В}$	10	8.18	6.70	5.49	4.49	3.68	3.01	2.47	2.02	1.65	1.35	1.11	0.91



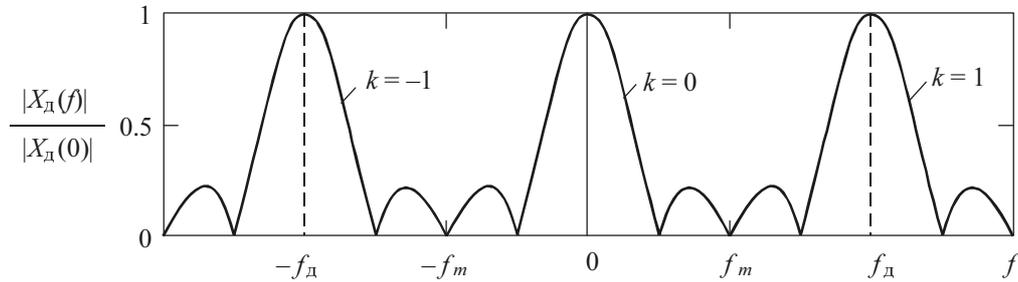
$$2. \dot{X}(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega}, \quad |\dot{X}(\omega)| = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, & -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$|\dot{X}_d(\omega)| = \frac{1}{T} \sum_{k=-1}^1 |\dot{X}(\omega - k\omega_d)|.$$



$$3. X(f) := U_0 \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad X_0(f) := \begin{cases} X(f) & \text{if } -f < f \leq f_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_d(f) := \frac{1}{4} \sum_{k=-1}^1 X_0(f - kf_d).$$



4. $X_d(p) = 1 + ae^{-p} + a^2e^{-2p} + \dots = \frac{1}{1 - ae^{-p}}$.

5. $X(z) = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} = \frac{z^2 + 3z + 3}{z^3}$.

6. $X(z) = 3(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = 3\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) = 3\frac{z^2 + z + 1}{z^3}$.

7. $X(z) = U_0(\sigma(z) - \sigma(z)z^{-N}) = U_0\frac{z}{1 - z^{-1}} - U_0\frac{z}{1 - z^{-1}}z^{-N}$.

8. $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ при $|z| > a$.

9. 1) $X(z) = z / (z - e^{j\omega_1 T})$, $z_{\text{п}} = e^{j\omega_1 T}$; 2) $X(z) = z / (z - e^{j\sigma_1 T})$, $z_{\text{п}} = e^{j\sigma_1 T}$.

10. $X(z) = \frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$, $z_0 = 0$, $z_{n,1,2} = \cos \omega_0 T \pm j \sin \omega_0 T$,

$r_0 = 1, |z| > 1$.

11. $\sigma_1(z) = \sigma(z^N) = \frac{1}{1 - z^{-N}} = \frac{z^N}{z^N - 1}$.

12. $X_1(z) = X(z^N) = U_0 \frac{1 - z^{-2N}}{1 - z^{-2}}$.

13. $f(nT) = (0, 2, 4, 7, 0, 0, \dots)$.

14. $\{x_n\} = (0, 0, 0, 3, 0, 0, \dots)$.

15. $\{x_n\} = (1, 0, 3, -3, 1, 0, \dots)$.

16. $\{x_n\} = (1, 0.5, 0.25, 0.125, \dots)$.

$$17. x[4] = 10 \cdot (0.8)^4 = 4.096.$$

$$18. x[n] = \begin{cases} 1 + 2n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

$$19. x[n] = (1 + 2n)\sigma[n].$$

$$20. x[n] = \begin{cases} (0.8z^{-1})^n, & n \geq 3, \\ 0, & n < 3. \end{cases}$$

$$21. x(nT) = \begin{cases} 2 - 2^{-n}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

$$22. x[n] = [6 - 6(0.8)^{n-1}]\sigma[n-1].$$

$$23. x[n] = (2 + 5n)\sigma[n].$$

$$24. x[n] = a^n, \quad n \geq 0.$$

Глава 14

$$1. \dot{C}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad C_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e = \frac{1}{N}, \quad \dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dots = 0.$$

$$2. C_0 = -0.1.$$

$$3. C_0 = 5, \quad \dot{C}_1 = 2.5 - j \cdot 1.443 = 2.887 \cdot e^{-j30^\circ}, \quad \dot{C}_2 = 1.667.$$

$$4. \text{При } N = 8 \quad \dot{C}_1 = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^2 e^{-j \frac{\pi}{4} n} = 0.213 + j0.213 = 0.301 e^{j45^\circ}.$$

$$\text{При } N = 32 \quad \dot{C}_1 = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^8 e^{-j \frac{\pi}{16} n} = 0.174 + j \cdot 0.174 = 0.246 e^{j45^\circ}.$$

$$5. x[0] = 1, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = -1, \quad x[3] = 0.$$

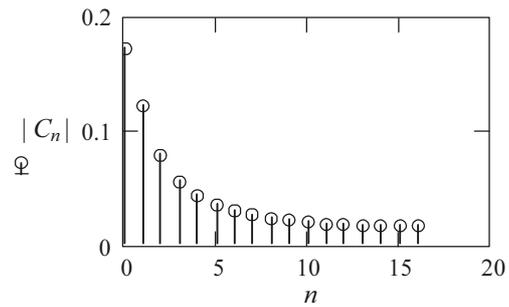
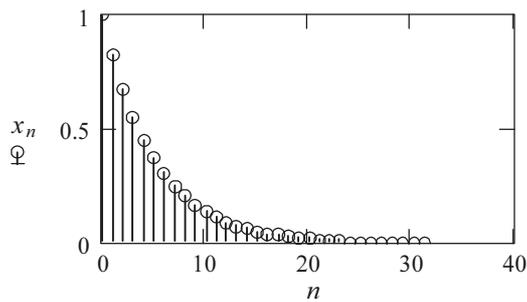
$$6. x(t) = 0.5 \cos(2\pi t / T) + 0.5 \cos(3 \cdot 2\pi t / T).$$

$$7. x(t) = 5 + 5.774 \cos(2\pi t / T - \pi / 6) + 3.334 \cos(4\pi t / T).$$

$$8. \dot{X}[m] = \frac{1}{1 - e^{-j(2\pi/N)m}} \quad \text{и} \quad \dot{C}[m] = \frac{\dot{X}[m]}{N} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 - e^{-j(2\pi/N)m}}.$$

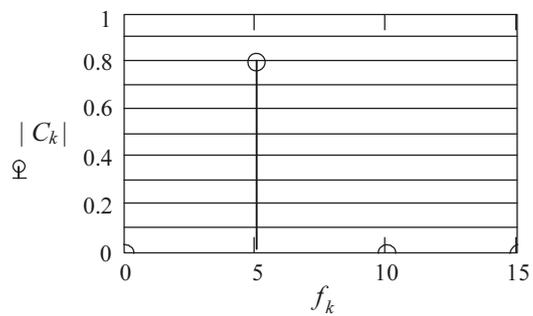
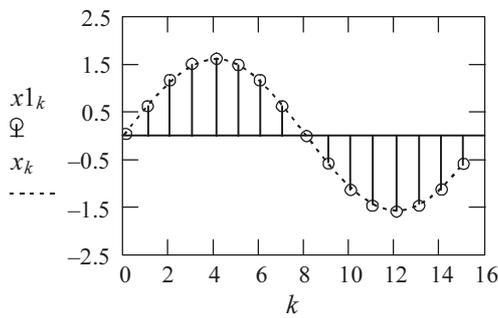
9.

$T_c := 32$ $T := 1$ $N := \frac{T_c}{T}$ **$N = 32$** $\alpha := 0.2$
 $n := 0..N-1$
 $x_n := 1 \cdot e^{-\alpha \cdot n}$
 $C := \text{FFT}(x)$ $|C_0| = 0.172$

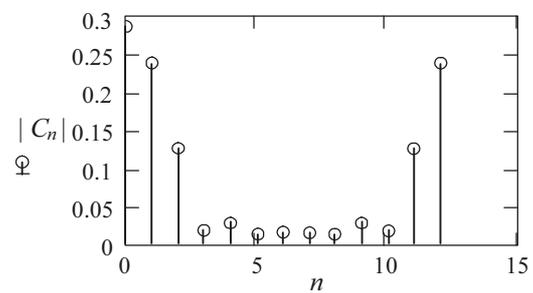
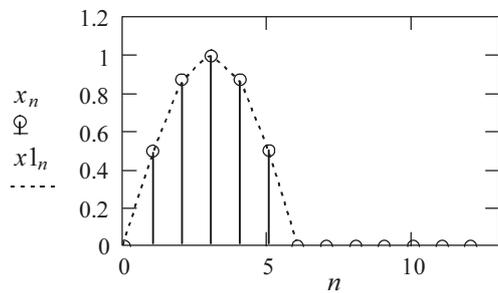


10. Количество отсчетов $N = T_c / T$ увеличится (уменьшится) в два раза, а все спектральные коэффициенты $|\hat{C}[n]|$ уменьшатся (увеличатся) в два раза.

11.

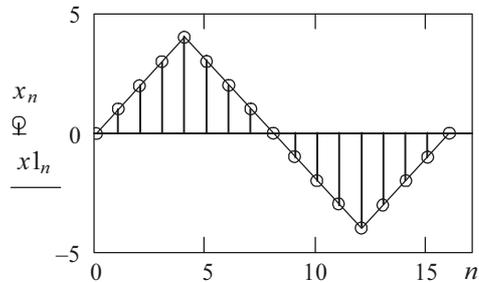
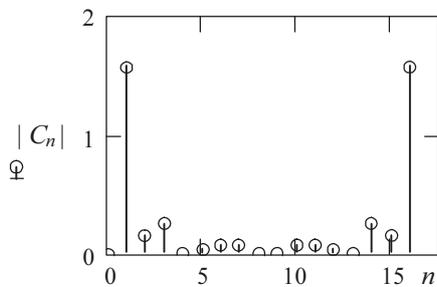


12.



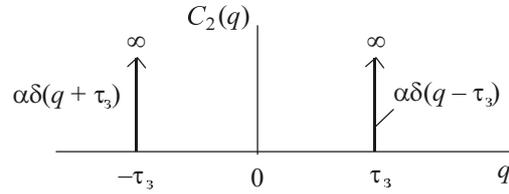
13.

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0, & C_1 &= 0.0289 - 1.548i, & C_2 &= -0.059 + 0.153i, \\
C_3 &= -0.137 + 0.221i, & C_4 &= 0, & C_5 &= 0.037 - 0.028i, \\
C_6 &= -0.064 + 0.032i, & C_7 &= -0.078 + 0.022i, & C_8 &= 0.01 - 0.001i, \\
C_9 &= 0.01 + 0.001i, & C_{10} &= -0.078 - 0.022i, & C_{11} &= -0.064 - 0.032i, \\
C_{12} &= 0.037 + 0.028i, & C_{13} &= 0.002 + 0.002i, & C_{14} &= -0.137 - 0.221i, \\
C_{15} &= -0.059 - 0.153i, & C_{16} &= 0.289 + 1.548i.
\end{aligned}$$



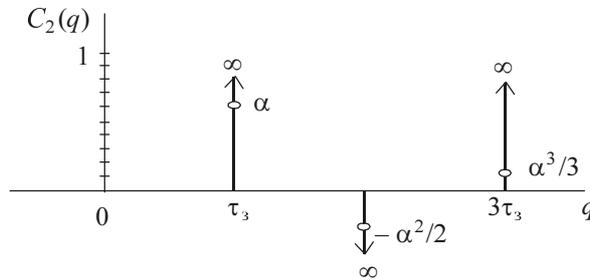
Глава 16

1. $\dot{C}(q) = \ln A \delta(q)$.
2. $\dot{C}(q) = \delta(q - t_0)$.
3. $\dot{C}(q) = 1/2q$.
4. $\dot{C}(q) = a^2 / (\pi q^2)$.
5. $\ln \dot{X}(\omega) = \ln A$, $\dot{X}(\omega) = e^{\ln A} = A$, $x(t) = A \delta(t)$.
6. $\dot{S}_2(\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega \tau_3}$, $s_2(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - \tau_3)$. Сигнал $s_2(t)$ не зависит от формы зондирующего сигнала $s(t)$.
7. $S_2[z] = 1 + \alpha z^{-n_0}$, $s_2[n] = \delta[n] + \alpha \delta[n - n_0]$.
8. $C_2(q) = \alpha \delta(q + \tau_3) + \alpha \delta(q - \tau_3)$.

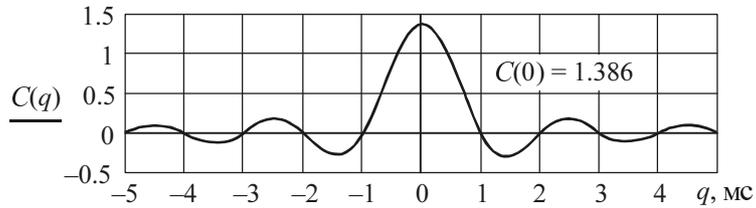


$$9. C_2(q) = \alpha \delta(q - \tau_3) - \frac{\alpha^2}{2} \delta(q - 2\tau_3) + \frac{\alpha^3}{3} \delta(q - 3\tau_3) - \dots$$

$$+ \alpha \delta(q + \tau_3) - \frac{\alpha^2}{2} \delta(q + 2\tau_3) + \frac{\alpha^3}{3} \delta(q + 3\tau_3) - \dots$$



$$10. C(q) = \ln[(2\pi / \pi)^2] \frac{\pi \sin(\pi q)}{\pi \pi q} = (\ln 4 = 1.386) \frac{\sin(\pi q)}{\pi q}.$$



ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Формулы приведения

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha, \quad \sin(90^\circ \pm \alpha) = + \cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{ctg} \alpha, \\ \cos(180^\circ \pm \alpha) &= -\cos \alpha, \quad \sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp \sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(180^\circ \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha, \\ \cos(270^\circ \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha, \quad \sin(270^\circ \pm \alpha) = -\cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(270^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{ctg} \alpha, \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= +\cos \alpha, \quad \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Формулы суммы и разности углов и функций

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos[(\alpha + \beta) / 2] \cos[(\alpha - \beta) / 2], \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin[(\alpha + \beta) / 2] \sin[(\alpha - \beta) / 2], \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin[(\alpha + \beta) / 2] \cos[(\alpha - \beta) / 2], \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos[(\alpha + \beta) / 2] \sin[(\alpha - \beta) / 2].\end{aligned}$$

Формулы произведения функций

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= 0.5[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= 0.5[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \cos \beta &= 0.5[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].\end{aligned}$$

Формулы кратных аргументов

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 0.5(1 + \cos 2\alpha), \quad \cos^3 \alpha = (3/4) \cos \alpha + (1/4) \cos 3\alpha, \\ \cos^4 \alpha &= 3/8 + (1/2) \cos 2\alpha + (1/8) \cos 4\alpha, \\ \cos^5 \alpha &= (5/8) \cos \alpha + (5/16) \cos 3\alpha + (1/16) \cos 5\alpha, \\ \sin^2 \alpha &= 0.5(1 - \cos 2\alpha), \quad \sin^3 \alpha = (3/4) \sin \alpha - (1/4) \sin 3\alpha, \\ \sin^4 \alpha &= 3/8 - (1/2) \cos 2\alpha + (1/8) \cos 4\alpha, \\ \sin^5 \alpha &= (5/8) \sin \alpha - (5/16) \sin 3\alpha + (1/16) \sin 5\alpha.\end{aligned}$$

Формулы двойных, тройных и половинных углов

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \\ \cos(\alpha / 2) &= \pm \sqrt{0.5(1 + \cos \alpha)}, \\ \sin(\alpha / 2) &= \pm \sqrt{0.5(1 - \cos \alpha)}.\end{aligned}$$

Гиперболические функции

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= (e^x - e^{-x}) / 2, \quad \sin x = -j \operatorname{sh}(jx) = (e^{jx} - e^{-jx}) / 2j, \\ \operatorname{ch} x &= (e^x + e^{-x}) / 2, \quad \cos x = \operatorname{ch}(jx) = (e^{jx} + e^{-jx}) / 2, \\ e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t.\end{aligned}$$

П.2. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	Производная	Функция	Производная
x	1	$\sin x$	$\cos x$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x = \sec^2 x$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x = -\operatorname{cosec}^2 x$
\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x})$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$1/(n\sqrt[n]{x^{n-1}})$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
e^{ax}	ae^{ax}	$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$
$\ln x$	$1/x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\operatorname{th} x$	$1/\operatorname{ch}^2 x$
$\lg x$	$(\lg e) / x \approx 0.43 / x$	$\operatorname{cth} x$	$-1/\operatorname{sh}^2 x$

Некоторые правила дифференцирования:

$$(cu)' = cu', \quad d(cu) = cdu, \quad (uv)' = uv' + u'v, \quad (uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' + uv'}{v^2}, \quad \text{если } y = f(u) \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x);$$

$$\text{если } y = f(u), \quad u = \varphi(t) \text{ и } t = \psi(x), \text{ то } \frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(t)\psi'(x).$$

В случае «цепи» из большего числа функций поступают аналогично.

П.3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. $\int x^n dx = x^{n+1} / (n+1) \quad (n \neq -1).$
2. $\int dx / x = \ln |x|.$
3. $\int e^{ax} dx = (1/a)e^{ax}.$
4. $\int xe^{ax} dx = (1/a^2)e^{ax}(ax-1).$
5. $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}(x^2/a - 2x/a^2 + 2/a^3).$
6. $\int x^p e^{ax} dx = (1/a)x^p e^{ax} - (p/a) \int x^{p-1} e^{ax} dx.$
7. $\int xe^{-ax^2} dx = -(1/2a)e^{-ax^2}.$
8. $\int x^2 e^{-x^2/2} dx = -xe^{-x^2/2} + \int e^{-x^2/2} dx.$
9. $\int a^x dx = a^x / \ln a.$
10. $\int \sin \alpha x dx = -(1/\alpha) \cos \alpha x.$
11. $\int \cos \alpha x dx = (1/\alpha) \sin \alpha x.$
12. $\int \sin^2 \alpha x dx = x/2 - (1/4\alpha) \sin 2\alpha x.$
13. $\int \sin^3 \alpha x dx = -(1/\alpha) \cos \alpha x + (1/3\alpha) \cos^3 \alpha x.$
14. $\int \cos^2 \alpha x dx = x/2 + (1/4\alpha) \sin 2\alpha x.$
15. $\int \cos^3 \alpha x dx = (1/\alpha) \sin \alpha x - (1/3\alpha) \sin^3 \alpha x.$
16. $\int x \sin \alpha x dx = (1/\alpha^2) \sin \alpha x - (x/\alpha) \cos \alpha x.$

17. $\int x \cos \alpha x dx = (1/\alpha^2) \cos \alpha x + (x/\alpha) \sin \alpha x$.
 18. $\int \sin \alpha x \cos \alpha x dx = (1/2\alpha) \sin^2 \alpha x$.
 19. $\int e^{ax} \cos bx dx = (a^2 + b^2)^{-1} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)$.

Интегралы, содержащие $X = a^2 + x^2$

20. $\int dx / X = Y / a$, здесь и ниже $Y = \operatorname{arctg}(x/a)$.
 21. $\int dx / X^2 = x / (2a^2 X) + Y / (2a^3)$.
 22. $\int dx / X^3 = x / (2a^2 X^2) + 3x / (8a^4 X) + 3Y / (8a^5)$.
 23. $\int (x^2 / X) dx = x - aY$.
 24. $\int (x^2 / X^2) dx = -(x/2X) + Y / (2a)$.

Интегралы, содержащие $X = a^2 - x^2$

25. $\int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$.
 26. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin \frac{x}{a}$.
 27. $\int \frac{xdx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}$.
 28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{a} \sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

Определенные интегралы

1. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi / 2$.
 2. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = a\pi / 2$.
 3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$.
 4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}$ при $a > 0$.

5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$. 6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{3\pi}{16a^5}$.
7. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{a^2 + x^2} = \infty$. 8. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4a}$.
9. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$ ($a > 0, b > 0$).
10. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{(ax^2 + c)^n} = \frac{(k-1)!(2n-k-3)!}{2(2n-2)!a^k c^{n-k-1}} \frac{\pi}{\sqrt{ac}}$.
11. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = 1/\alpha$ ($\alpha > 0$).
12. $\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = 1/\alpha^2$.
13. $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ($\alpha > 0, n > -1$).
14. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}/2\alpha$.
15. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}/4\alpha^3$.
16. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.
17. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(mx) dx = \alpha / (\alpha^2 + m^2)$.
18. $\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} \cos(mx) dx = \frac{\alpha^2 - m^2}{(\alpha^2 + m^2)^2}$.
19. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-b^2/4\alpha^2}$.

$$20. \int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}.$$

$$21. \int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma}.$$

$$22. \int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^n} dx = \frac{\pi e^{-ma}}{(2a)^{2n-1} (n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)! (2ma)^k}{k! (n-k-1)!} \quad (a > 0, m > 0).$$

$$23. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma}.$$

$$24. \int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx = \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} \left(\frac{e^{-mb}}{b} - \frac{e^{-ma}}{a} \right) \quad a \neq b.$$

$$25. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx = \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} (ae^{-ma} - be^{-mb}).$$

$$26. \int_z^{\infty} e^{x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \varphi(-z), \quad \text{где } \varphi(-z) = 1 - \varphi(z),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx \quad \text{— табулированный интеграл вероятности}$$

$$27. \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2 / 2\sigma_x^2\right) dx = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma_x^3$$

Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**П.4. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ФУНКЦИИ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ
ОБЩЕННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ**

№ п/п	Полиномы, функции	Интервал ортогональности	Квадрат нормы	Весовая функция $\rho(x)$	Обобщенный ряд Фурье и его коэффициенты	Графики полиномов
1	<p>Полиномы Лежандра (первого рода)</p> $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ <p>Ортогономная система функций Лежандра</p> $P_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2} \cdot P_n(x)$	-1, 1	$\frac{2}{2n+1}$	1	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$ $C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$	<i>Рис. П.4.1</i>

2	<p>Полиномы Чебышева (первого рода)</p> $T_n(x) = \frac{(-2)^n n! \sqrt{1-x^2}}{(2n)!} \times$ $\times \frac{d^{(n)}}{dx^n} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^{2n-1}$ $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ $T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$ $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$\begin{cases} \pi, & n=0, \\ \pi/2, & n \neq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(x)$ $C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$	<p>Рис. П.4.2</p>
3	<p>Полиномы Лагерра</p> $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^{(n)}}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad x \geq 0$ $L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = x^2 / 2 - 2x + 1$ $L_3(x) = -x^3 / 6 + 3x^2 / 2 - 3x + 1$ $L_4(x) = x^4 / 24 - 2x^3 / 3 + 3x^2 - 4x + 1$ $L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 +$ $+ 600x^2 - 600x + 120$ $L_n(0) = n!$	1	e^{-x}	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x)$ $C_n = \int_0^{\infty} f(x) l_n(x) dx$	<p>Рис. П.4.3</p>

№ п/п	Полиномы, функции	Интервал ортогональности	Квадрат нормы	Весовая функция $\rho(x)$	Обобщенный ряд Фурье и его коэффициенты	Графики полиномов
	<p>Функции Лагерра</p> $I_n(x) = \sqrt{\rho(x)} L_n(x) = e^{-x/2} L_n(x)$					
4	<p>Полиномы Эрмита</p> $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{(n)}}{dx^n} (e^{-x^2}),$ $n = 0, 1, 2, \dots$ $H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x$ $H_2(x) = 4x^2 - 2$ $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ <p>Ортонормированная система функций Эрмита</p> $\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{\rho(x)} H_n(x)}{\ H_n \sqrt{\rho}\ } =$ $= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} \cdot n!}} H_n(x)$	$-\infty, \infty$	$2^n \sqrt{\pi} \cdot n!$	e^{-x^2}	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x),$ $C_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx$	Рис. П.4.4

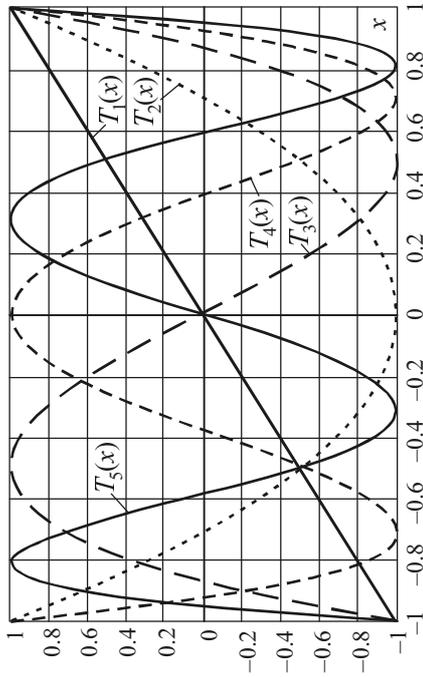


Рис. П.4.2

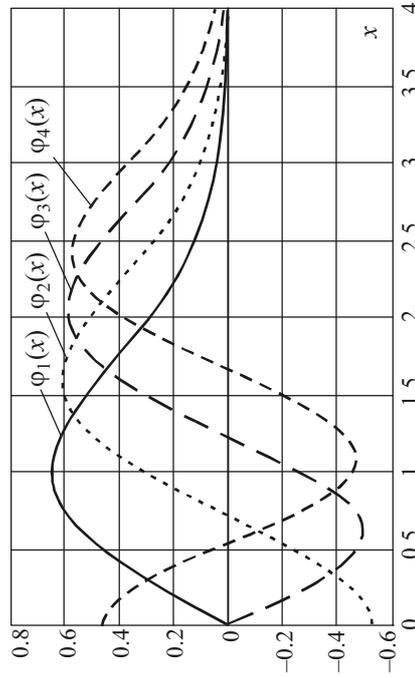


Рис. П.4.4

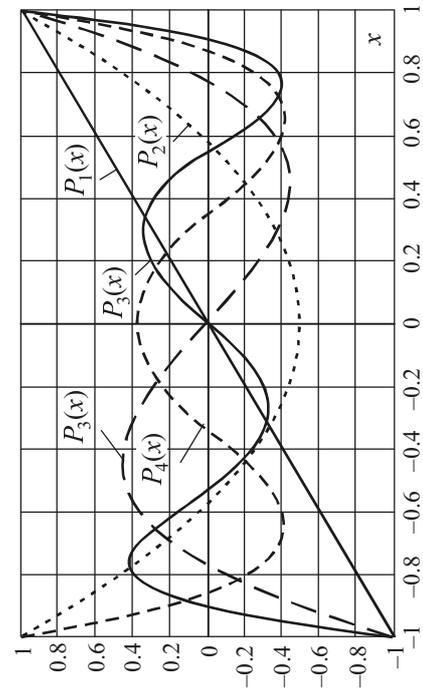


Рис. П.4.1

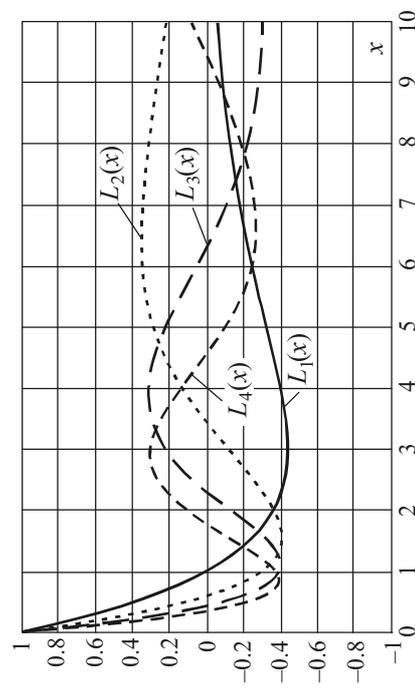


Рис. П.4.3

П.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРАХ

№ п/п	Название теоремы	$S(t)$	$\dot{S}(\omega)$
1	Теорема о спектре сигнала, умноженного на константу	$aS(t)$	$a\dot{S}(\omega)$
2	Теорема о спектре суммы сигналов	$S_1(t) + \dots + S_n(t)$	$\dot{S}_1(\omega) + \dots + \dot{S}_n(\omega)$
3	Теорема о спектре сигнала, смещенного во времени (τ)	$S(t \mp \tau)$	$\dot{S}(\omega)e^{\mp j\omega\tau}$
4	Теорема о смещении спектра сигнала	$S(t)e^{\mp j\Omega t}$	$\dot{S}(\omega \pm \Omega)$
5	Теорема о спектре сигнала при изменении масштаба времени	$S(at)$	$\frac{1}{a}\dot{S}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6	Теорема о спектре сигнала при инверсии оси времени	$S(-t)$	$-\dot{S}(-\omega)$
7	Теорема о спектре производной от сигнала	$d^{(n)}S / (dt)^n$	$(j\omega)^n \dot{S}(\omega)$
8	Теорема о спектре сигнала, проинтегрированного по времени	$\int_{-\infty}^t S(t)dt$	$(1/j\omega)\dot{S}(\omega)$
9	Теорема о спектре произведения сигналов	$S(t)U(t)$	$\dot{S}(\omega) \otimes \dot{U}(\omega)$
10	Теорема о произведении спектров сигналов (о спектре свертки)	$S(t) \otimes U(t)$	$\dot{S}(\omega)\dot{U}(\omega)$

\otimes – знак интеграла свертки:

$$\dot{S}(\omega) \otimes \dot{U}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\xi) \dot{U}(\omega - \xi) d\xi;$$

$$S(t) \otimes U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) U(t - \tau) d\tau.$$

П.6. ОБ АКТИВНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ШИРИНЕ СПЕКТРА ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Вычисления выражений (7.23) и (7.24) для некоторых импульсных сигналов приведены в книге А.А. Харкевича «Спектры и анализ» (М.: Физматгиз, 1962. – 236 с.). Выбирая $k_3 = 0.9$, получим результаты, приведенные в табл. П.6.1. Здесь $\mu = \tau_{эф} \Delta f_{эф}$.

Таблица П.6.1

Импульс $S(t)$	$\dot{S}(\omega)$	$\tau_{\text{эф}}$	$\Delta f_{\text{эф}}$	μ
Прямоугольный $S(t) = S_0, t \leq \tau/2$	$S_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$	0.90τ	$\frac{1}{\tau}$	0.9
Экспоненциальный $S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, t > 0$	$\frac{S_0}{\alpha + j\omega}$	$\frac{1.155}{\alpha}$	0.98α	1.13
Треугольный $S(t) = \frac{2S_0}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} - t \right), t \leq \tau/2$	$\frac{S_0 \tau}{2} \left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right)^2$	0.54τ	$\frac{0.84}{\tau}$	0.46
Косинусоидальный $S(t) = S_0 \cos \omega_0 t, t \leq \tau/2,$ $\tau = T/2, T = 2\pi/\omega_0$	$\frac{2S_0 \tau}{\pi} \frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}$	0.596τ	$\frac{0.73}{\tau}$	0.43
Колокольный $S(t) = S_0 e^{-\beta^2 t^2}$	$\frac{S_0 \sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\omega^2/4\beta^2}$	$\frac{0.825}{\beta}$	0.26β	0.22

Значение $\mu = \tau_{\text{эф}} \Delta f_{\text{эф}}$ оказывается наибольшим у импульсов, характеризующихся разрывом функции $S(t)$ (экспоненциальный и прямоугольный импульсы), меньшим – у импульсов с разрывом первой производной $S'(t)$ (треугольный и косинусоидальный) и самым малым – у колокольного импульса, характеризующегося непрерывностью как функции $S(t)$, так и всех ее производных.

Из рассмотренного следует, что эффективная ширина спектра импульса связана с его длительностью зависимостью

$$\Delta f_{\text{эф}} = \mu / \tau_{\text{эф}},$$

где μ – коэффициент, зависящий от формы импульса и принятого уровня k_3 полной энергии, а следовательно, и уровней τ и Δf .

Выбирая $k_3 = 0.95$ (95%), получаем результаты, приведенные в табл. П.6.2, взятой из книги Я.С. Иццоки «Импульсные устройства» (М.: Сов. радио, 1959. – 728 с.).

Оценить эффективную ширину спектра импульса можно также с помощью графика рис. П.6.1. На нем и в табл. П.6.2 приняты обозначения: $\tau_{0.5}$ – дли-

тельность импульса, измеряемая на половинном уровне от амплитуды ($0.5U$); $t_{\text{фа}}$ – активная длительность фронта, определяемая разностью соответствующих моментов времени достижения импульсом значений $0.9U$ и $0.1U$.

Таблица П.6.2

Импульс	$\Delta f_{\text{эф}} = \Delta f_{0.95}$
Прямоугольный	$2 / \tau$
С экспоненциальными фронтами $\tau_{\text{фа}} / \tau_{0.5} = 0.2$	$0.9 / \tau$
С экспоненциальными фронтами $\tau_{\text{фа}} / \tau_{0.5} = 0.1$	$1.37 / \tau$
Трапецеидальный	$0.9 / \tau$
Треугольный	$0.94 / \tau$
Косинусоидальный	$1 / \tau$
Колокольный	$0.31 / \beta$

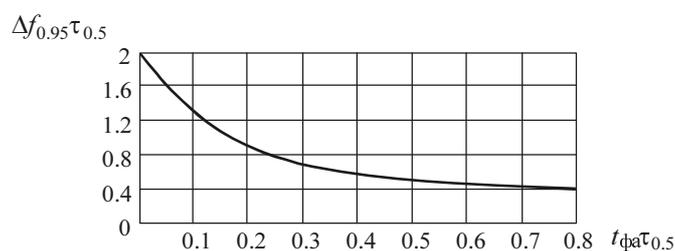


Рис. П.6.1

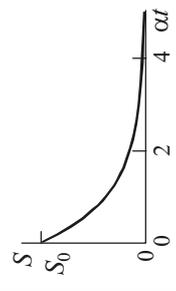
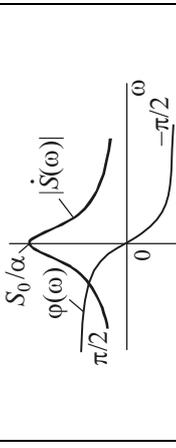
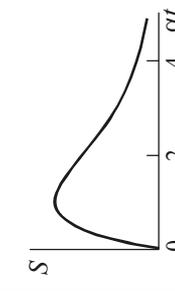
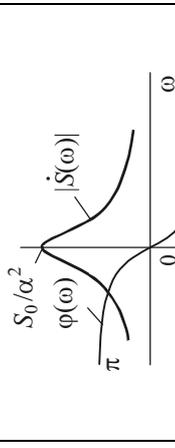
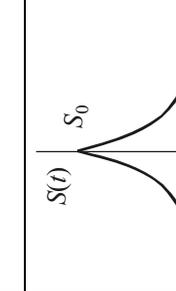
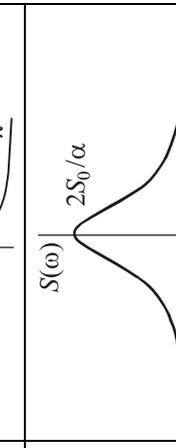
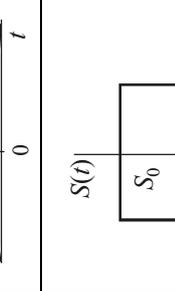
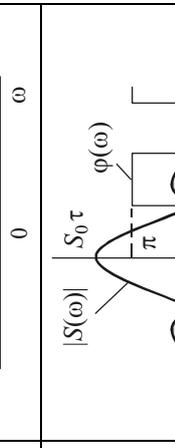
П.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИЗОБРАЖЕНИЕМ ПО ЛАПЛАСУ И ОРИГИНАЛОМ

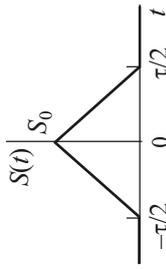
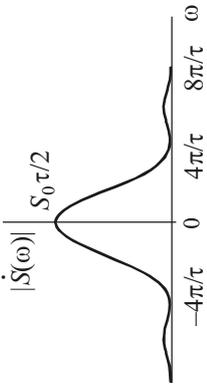
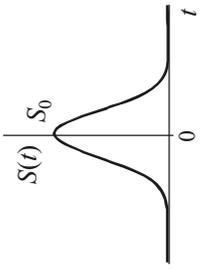
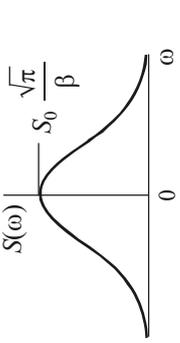
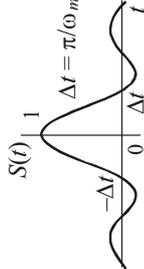
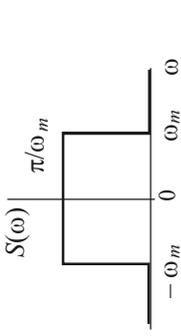
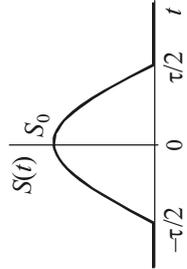
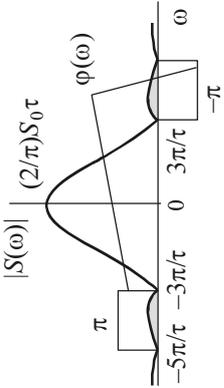
$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$1/p$	$\sigma(t)$
$1/p^2$; $1/p^3$; $1/p^4$	t ; $t^2/2$; $t^3/6$
$1/(p+a)$	e^{-at}

Окончание прил. П.7

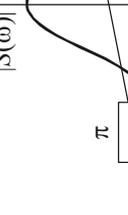
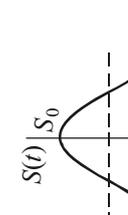
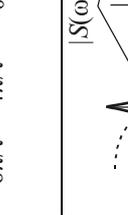
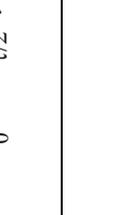
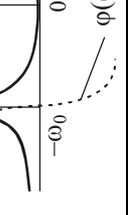
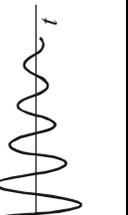
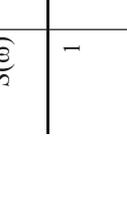
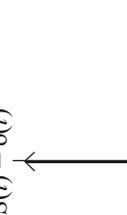
$F(p)$	$f(t)$
$p / (p + a)$	$\delta(t) - ae^{-at}$
$1 / [p(p + a)]$	$(1/a)(1 - e^{-at})$
$1 / [p(p + a)^2]$	$(1/a^2)(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
$p / (p^2 - a^2)$	$\text{ch}(at)$
$1 / [(p + a)(p + b)]$	$[1/(b - a)](e^{-at} - e^{-bt})$
$p / [(p + a)(p + b)]$	$[1/(a - b)](ae^{-at} - be^{-bt})$
$1 / (p + a)^2$	te^{-at}
$p / (p + a)^2$	$(1 - at)e^{-at}$
$1 / (p + a)^3$	$(t^2 / 2)e^{-at}$
$p / (p + a)^3$	$t(1 - at / 2)e^{-at}$
$p^2 / (p + a)^3$	$(1 - 2at + a^2t^2 / 2)e^{-at}$
$1 / (p + a)^4$	$(t^3 / 6)e^{-at}$
$p / (p + a)^4$	$(t^2 / 2)e^{-at} - (at^3 / 2)e^{-at}$
$\omega / (p^2 + \omega^2)$	$\sin \omega t$
$p / (p^2 + \omega^2)$	$\cos \omega t$
$\omega / [(p + a)^2 + \omega^2]$	$e^{-at} \sin \omega t$
$(p + a) / [(p + a)^2 + \omega^2]$	$e^{-at} \cos \omega t$
$1 / [p^2(p + a)]$	$(1/a^2)(e^{-at} + at - 1)$
$1 / \left\{ p \left[(p + a)^2 + \omega^2 \right] \right\}$	$\left[1 / (a^2 + \omega^2) \right] \left[1 - e^{-at} (\cos \omega t + (a / \omega) \sin \omega t) \right]$
$p / \left[(p + a)(p^2 + \omega^2) \right]$	$\left[1 / (a^2 + \omega^2) \right] \left[-ae^{-at} + a \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right]$
$p^2 / \left[(p + a)(p^2 + \omega^2) \right]$	$\left[1 / (a^2 + \omega^2) \right] \left[a^2 e^{-at} - a\omega \sin \omega t + \omega^2 \cos \omega t \right]$
$1 / \left[(p + a)^2 (p + b)^2 \right]$	$\left[1 / (a - b)^2 \right] \left[e^{-at} \left(t + 2 / (a - b) \right) + e^{-bt} \left(t - 2 / (a - b) \right) \right]$

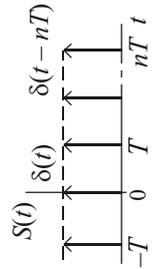
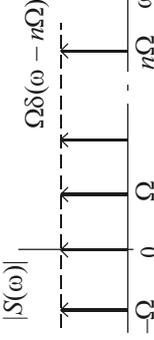
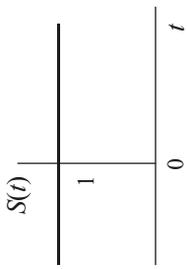
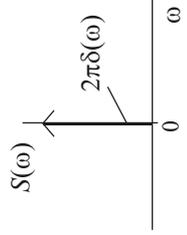
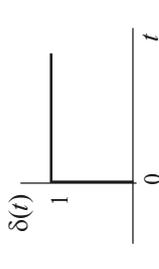
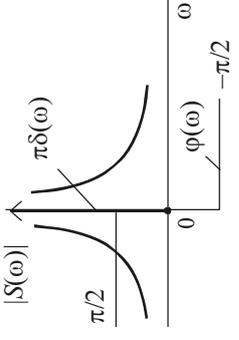
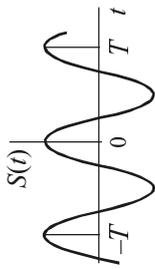
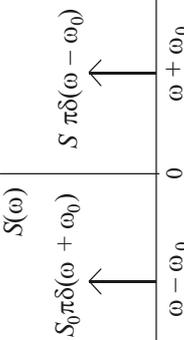
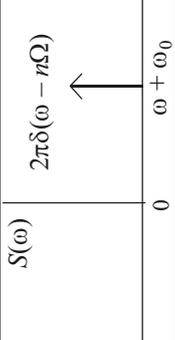
П.8. ИЗОБРАЖЕНИЕ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИГНАЛОВ

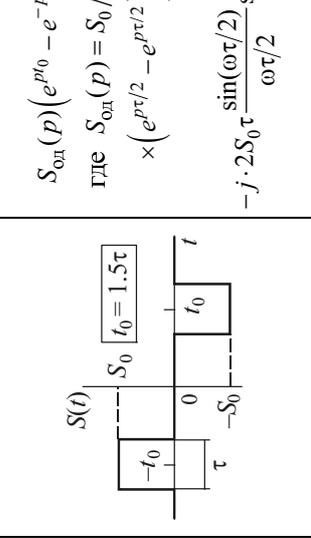
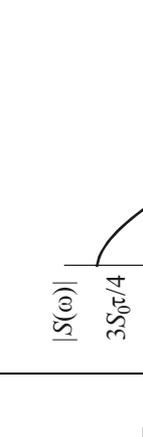
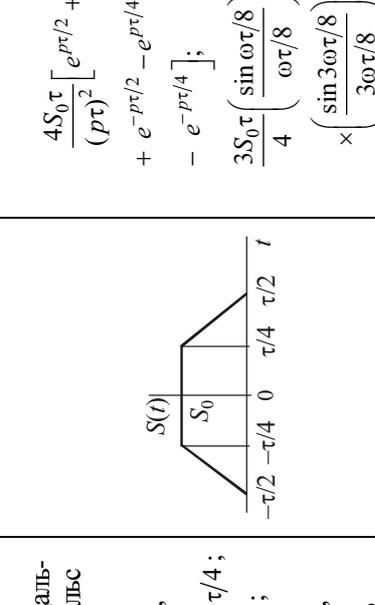
№ п/п	Сигнал $S(t)$	Изображение по Лапласу $S(p)$	Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$
1	<p>Экспоненциальный импульс $S_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$</p> 	$\frac{S_0}{\alpha + p}$	
2	<p>Линейно-экспоненциальный импульс $S_0 t e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$</p> 	$\frac{S_0}{(\alpha + p)^2}$	
3	<p>Двусторонний экспоненциальный импульс $S_0 e^{-\alpha t }$, $\alpha > 0$</p> 	$\frac{2S_0 \alpha}{\alpha^2 - p^2}$	
4	<p>Прямоугольный симметричный импульс S_0, $0 \leq t \leq \tau/2$</p> 	$\frac{S_0}{p} (e^{p\tau/2} - e^{-p\tau/2})$	

5	<p>Треугольный симметричный импульс</p> $S_0(1 - 2 t /\tau),$ $0 \leq t \leq \tau/2$		$S_0 \tau \left(\frac{e^{p\tau/2} - e^{-p\tau/2}}{p\tau} \right)^2$	$\frac{S_0 \tau}{2} \left(\frac{\sin \omega \tau / 4}{\omega \tau / 4} \right)^2$	
6	<p>Колокольный (гауссов) импульс</p> $S_0 e^{-\beta^2 t^2}$		$S_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-p^2/4\beta^2}$	$S_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\omega^2/4\beta^2}$	
7	<p>Сигнал вида $\text{sinc}(x)/x$</p> $\frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$		<p>—</p>	$\pi/\omega_m, \omega \leq \omega_m$	
8	<p>Косинусоидальный импульс</p> $S_0 \cos \Omega t,$ $ t \leq \tau/2;$ $\tau = T/2 = \pi/\Omega$		$\frac{S_0 \pi \tau}{2} \times e^{p\tau/2} + e^{-p\tau/2} \left(\frac{p\tau}{2} \right)^2$	$\frac{S_0 \pi \tau}{2} \times \cos(\omega \tau / 2) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)^2$	

Продолжение прил. П.8

№ п/п	Сигнал $S(t)$	Изображение по Лапласу $S(p)$	Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$
9	<p>Колоколообразный импульс $(S_0/2)(1 + \cos \Omega t)$ $t \leq \tau/2$; $\Omega = 2\pi/T = 2\pi/\tau$</p> 	$\frac{S_0}{2p} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \times \left[\left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 + p^2 \right] \times (e^{p\tau/2} - e^{-p\tau/2})$	
10	<p>Затухающая косинусоида $S_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$, $t \geq 0$</p> 	$\frac{S_0(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	
11	<p>Дельта-импульс (функция Дирака) $\delta(t)$</p> 	<p>1</p>	
12	<p>Запаздывающий дельта-импульс $\delta(t - t_0)$</p> 	<p>e^{-pt_0}</p>	

13	<p>Последовательность дельта-импульсов</p> $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega T}$	$\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$ 
14	<p>Постоянный во времени сигнал (константа)</p> $S(t) = 1$ 	-	$2\pi\delta(\omega)$ 
15	<p>Единичная функция (Хевисайда)</p> $\sigma(t)$ 	$1/p$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$ 
16	<p>Косинусоида</p> $S_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi/T$ 	$\frac{S_0 p}{p^2 + \omega_0^2}$	$S_0 \pi \delta(\omega + \omega_0) + S_0 \pi \delta(\omega - \omega_0)$ 
17	<p>Комплексная экспонента</p> $e^{j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p - j\omega_0}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 

№ п/п	Сигнал $S(t)$	Изображение по Лапласу $S(p)$	Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$
<p>18</p> <p>Пара прямоугольных импульсов</p> $ S_0, -2\tau \leq t \leq -\tau,$ $S_0, \tau \leq t \leq 2\tau,$ 0 otherwise 	$S_{\text{од}}(p) (e^{pt_0} - e^{-pt_0}),$ <p>где $S_{\text{од}}(p) = S_0/p \times (e^{pt/2} - e^{-pt/2});$</p> $-j \cdot 2S_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \sin \omega t_0$		
<p>19</p> <p>Трапецеидальный импульс</p> $\frac{4S_0}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} + t \right),$ $-\tau/2 \leq t \leq \tau/4;$ $S_0, t \leq \tau/2;$ $\frac{4S_0}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} - t \right),$ $\tau/4 \leq t \leq \tau/2$ 	$\frac{4S_0\tau}{(p\tau)^2} [e^{pt/2} + e^{-pt/2} - e^{pt/4} - e^{-pt/4}];$ $3S_0\tau \left(\frac{\sin \omega\tau/8}{\omega\tau/8} \right) \times \left(\frac{\sin 3\omega\tau/8}{3\omega\tau/8} \right)$		

П.9. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

$$\sin(x \sin \alpha) = 2J_1(x) \sin \alpha + 2J_3(x) \sin 3\alpha + \dots,$$

$$\sin(x \cos \alpha) = 2J_1(x) \cos \alpha - 2J_3(x) \cos 3\alpha + \dots,$$

$$\cos(x \sin \alpha) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\alpha + 2J_4(x) \cos 4\alpha + \dots,$$

$$\cos(x \cos \alpha) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\alpha + 2J_4(x) \cos 4\alpha - \dots,$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Значения функций Бесселя приведены в табл. П.9.1, а графики представлены на рис. П.9.1. В табл. П.9.2 даны значения x для нулевых значений $J_n(x)$.

Таблица П.9.1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$	$J_9(x)$
0.0	1.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
0.5	.938	.242	.031							
1.0	.765	.440	.115	.019	.002	.000	.000	.000	.000	.000
1.5	.512	.558	.232							
2.0	.224	.577	.353	.129	.034	.007	.001	.000	.000	.000
2.5	-.048	.497	.446							
3.0	-.260	.339	.486	.309	.132	.043	.011	.002	.000	.000
3.5	-.380	.137	.459							
4.0	-.397	-.066	.364	.430	.281	.132	.049	.015	.004	.001
4.5	-.320	-.231	.218							
5.0	-.178	-.328	.047	.365	.391	.261	.131	.053	.018	.005
5.5	-.007	-.341	-.117	.252	.396	.320	.187	.087	.034	.011
6.0	.151	-.277	-.243	.115	.358	.362	.246	.129	.056	.021
6.5	.260	-.154	-.307	-.035	.274	.373	.300	.180	.088	.037
7.0	.300	-.005	-.301	-.168	.158	.348	.339	.234	.128	.059
7.5	.266	.135	-.230	-.257	.024	.283	.353	.283	.175	.087
8.0	.172	.235	-.113	-.291	-.105	.186	.338	.320	.223	.126
8.5	.042	.273	.022	-.261	-.206	.067	.286	.337	.269	.169
9.0	-.090	.245	.145	-.181	-.265	-.055	.204	.327	.305	.215
9.5	-.194	.162	.228	-.065	-.268	-.160	.099	.268	.323	.256
10.0	-.246	.043	.254	.058	-.220	-.234	-.014	.217	.318	.292
10.5	-.237	-.079	.222	.162	-.128	-.260	-.120	.123	.283	.310
11.0	-.171	-.177	.139	.227	-.015	-.238	-.202	.018	.225	.309
11.5	-.068	-.228	.028	.237	.096	-.170	-.244	-.084	.142	.282
12.0	.048	-.223	-.085	.195	.182	-.073	-.244	-.170	.045	.230
12.5	.147	-.165	-.173	.110	.225	.035	-.198	-.224	-.054	.156

Окончание табл. П.9.1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$	$J_9(x)$
13.0	.207	-.070	-.218	.003	.219	.132	-.118	-.241	-.141	.067
13.5	.215	.038	-.209	-.103	.164	.197	-.018	-.213	-.203	-.027
14.0	.171	.133	-.152	-.177	.076	.220	.081	-.151	-.232	-.114
14.5	.088	.193	-.061	-.209	-.026	.195	.160	-.062	-.220	-.181
15.0	-.014	.205	.042	-.194	-.119	.130	.206	.034	-.174	-.220

Таблица П.9.2

$J_n(x)$	Значение x для соответствующего номера нуля								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J_0	2.40	5.52	8.65	11.79	14.93	18.07	21.21	24.35	27.49
J_1	3.83	7.01	10.17	13.32	16.47	19.62	22.76	25.90	29.05
J_2	5.14	8.41	11.62	14.80	17.96	21.12	24.27	27.42	30.57
J_3	6.38	9.76	13.02	16.22	19.41	22.58	25.75	28.91	32.06
J_4	7.59	11.06	14.37	17.62	20.83	24.02	27.20	30.37	33.54
J_5	8.77	12.34	15.70	18.98	22.22	25.43	28.63	31.81	34.99
J_6	9.94	13.59	17.00	20.32	23.59	25.82	30.03	33.23	36.42
J_7	11.09	14.82	18.29	21.64	24.93	28.19	31.42	34.64	37.84
J_8	12.22	16.04	19.55	22.95	26.27	29.55	32.80	36.03	39.24

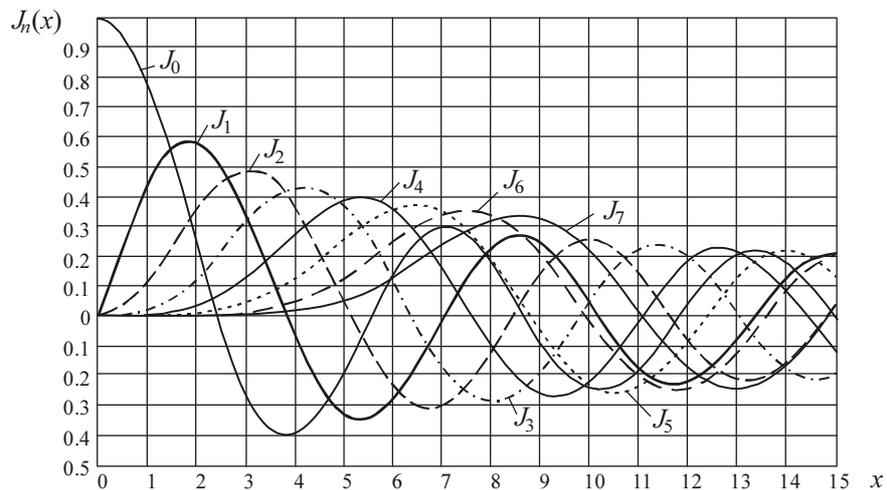


Рис. П.9.1

П.10. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Нормальный закон. Интеграл вероятности

Этот закон широко используется не только в радиотехнике [1–3, 20–23], но и практически во всех областях знаний, так как большое число различных по своей природе случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному (рис. П.10.1),

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sigma} w(x), \quad (\text{П.10.1})$$

где $x = (u - m) / \sigma$ – относительное отклонение случайной величины U ; следовательно, $u = x\sigma + m$; $w(x)$ – гауссовский стандартный закон с нулевым математическим ожиданием m и единичным СКО σ (табл. П.10.1, рис. П.10.2, а), т. е.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

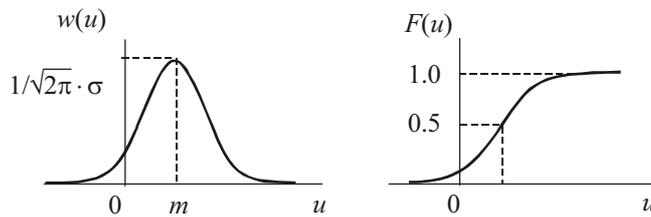


Рис. П.10.1

Таблица П.10.1

Значения функции $w(x)$

x	$w(x)$	x	$w(x)$	x	$w(x)$	x	$w(x)$	x	$w(x)$	x	$w(x)$
0.0	0.3989	0.6	.3332	1.2	.1942	1.8	.0790	2.4	.0224	3.0	.0044
0.1	.3970	0.7	.3123	1.3	.1714	1.9	.0656	2.5	.0175	3.2	.0024
0.2	.3910	0.8	.2897	1.4	.1497	2.0	.0540	2.6	.0136	3.4	.0012
0.3	.3814	0.9	.2661	1.5	.1295	2.1	.0440	2.7	.0104	3.6	.0006
0.4	.3838	1.0	.2420	1.6	.1109	2.2	.0355	2.8	.0079	3.8	.0003
0.5	.3521	1.1	.2179	1.7	.0940	2.3	.0283	2.9	.0060	4.0	.0001

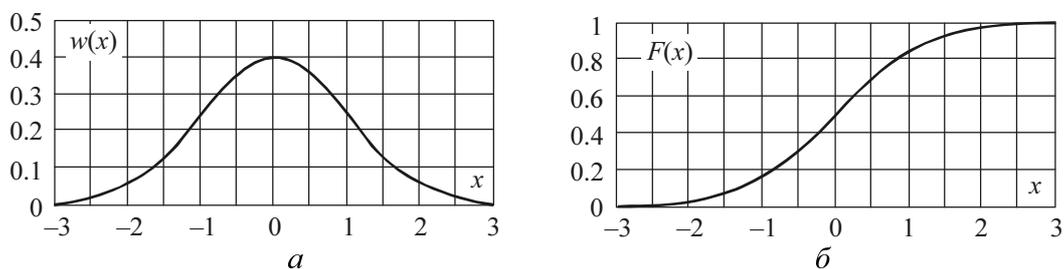


Рис. П.10.2

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[-\infty, x]$ равна интегралу от плотности вероятности $w(x)$ в пределах от $-\infty$ до x (рис. П.10.2, б), т. е.

$$P(-\infty \leq X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x w(z) dz = \Phi(x), \quad (\text{П.10.2})$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad (\text{П.10.3})$$

– табулированный интеграл вероятности (функция Лапласа) (табл. П.10.2).

Таблица П.10.2

Значения интеграла вероятности $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.5000	0.6	.7257	1.2	.8849	1.8	.9641	2.4	.9918	3.0	.9986
0.1	.5598	0.7	.7580	1.3	.9032	1.9	.9713	2.5	.9938	3.2	.9990
0.2	.5793	0.8	.7881	1.4	.9192	2.0	.9772	2.6	.9953	3.4	.9993
0.3	.6179	0.9	.8159	1.5	.9332	2.1	.9821	2.7	.9965	3.6	.9995
0.4	.6554	1.0	.8413	1.6	.9452	2.2	.9861	2.8	.9974	3.8	.9997
0.5	.6915	1.1	.8643	1.7	.9554	2.3	.9893	2.9	.9981	4.0	.9999

Характеристическая функция

$$\theta(v) = e^{jvm - \sigma^2 v^2 / 2}. \quad (\text{П.10.4})$$

Основные числовые характеристики

- Математическое ожидание m
- Среднеквадратическое отклонение σ
- Срединное отклонение $\sigma_{с.о} = 0.66\sigma$
- Второй центральный момент (дисперсия)..... $D = \mu_2 = \sigma^2$
- Третий центральный момент $\mu_3 = 0$
- Коэффициент асимметрии $\gamma_a = \mu_3 / \sigma^3 = 0$
- Четвертый центральный момент $\mu_4 = 3\sigma^4$
- Коэффициент эксцесса $\gamma_э = \mu_4 / D^2 - 3 = 0$
- Энтропия $H = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$

2. Равномерный закон (прямоугольный)

$w(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < u < b, \\ 0, & b < u < \infty \end{cases}$			
$F(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < a, \\ \frac{u-a}{b-a}, & a < u < b, \\ 1, & b < u < \infty \end{cases}$			
$\theta(j\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$	$H = \ln(b-a)$		
$m = (a+b)/2$	$\mu_2 = (a-b)^2 / 12$	$\mu_3 = 0, \quad \gamma_a = 0$	$\mu_4 = (a-b)^4 / 80, \\ \gamma_э = -1.2$

Равномерное распределение характерно в частности для случайной фазы гармонического колебания или для фазы случайного вектора, составляющие которого распределены нормально.

3. Закон Коши

$w(u) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + (u - U_0)^2},$ $-\infty < u < \infty$	
$F(u) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u - U_0}{h} + \frac{1}{2}$	
$\theta(j\nu) = \exp[jU_0\nu - h \nu]$	$H = \ln(4\pi h)$
<p>Начальные и центральные моменты не существуют, так как соответствующие интегралы расходятся.</p>	

Этот закон соответствует распределению отношения двух независимых СВ, имеющих одно и то же нормальное распределение. Это распределение соответствует также $\operatorname{tg} \varphi$, при равномерном распределении угла φ на отрезке от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

4. Закон Рэлея

$w(u) = \frac{u}{\sigma^2} \exp(-u^2 / 2\sigma^2),$ $0 < u < \infty$	
--	--

$F(u) = 1 - \exp(-u^2 / 2\sigma^2)$			
$\theta(j\nu) = 1 + j\sigma\nu\sqrt{\pi/2} \cdot W(\sigma\nu/\sqrt{2}), \quad W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$ <p>– табулированный интеграл вероятности от комплексного аргумента. $H = (C/2 + 1)\ln(e)$, $C = 0.5772$ – число Эйлера.</p>			
$m \approx 1.25\sigma$	$\mu_2 \approx 0.43\sigma^2$	$\mu_3 \approx 0.173\sigma^3$, $\gamma_a = 0.63$	$\mu_4 \approx 0.598\sigma^4$, $\gamma_3 \approx -0.3$

Этот закон применяется для описания распределения огибающей нормального шума. Он есть частный случай обобщенного закона Рэлея, описывающего распределение огибающей смеси высокочастотного сигнала и шума.

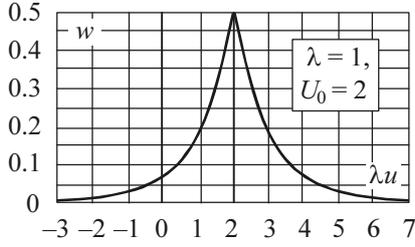
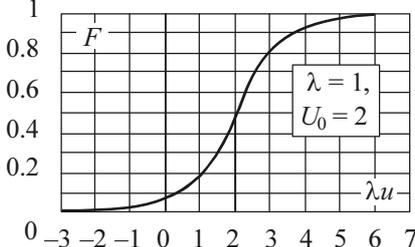
5. Экспоненциальный закон

$w(u) = \lambda e^{-\lambda u}, \quad 0 < u < \infty$ $0 < u < \infty$			
$F(u) = 1 - \exp(-u^2 / 2\sigma^2)$			

$\theta(j\nu) = \frac{\lambda}{\lambda - j\nu}$		$H = \ln(e/\lambda) = \ln(e\sigma)$	
$m = 1/\lambda$	$\mu_2 = 1/\lambda^2$	$\mu_3 = 2/\lambda^3,$ $\gamma_a = 2$	$\mu_4 = 9/\lambda^4,$ $\gamma_3 = 6$

Односторонний экспоненциальный закон применяется для описания распределения квадрата случайной величины, распределенной по закону Рэлея.

6. Закон Лапласа (экспоненциальный двусторонний закон)

$w(u) = (\lambda/2)e^{-\lambda u-U_0 },$ $-\infty < u < \infty$			
$F(u) = \begin{cases} 0.5e^{\lambda(u-U_0)}, & -\infty < u < U_0, \\ 1 - 0.5e^{-\lambda(u-U_0)}, & U_0 < u < \infty \end{cases}$			
$\theta(j\nu) = \frac{e^{jU_0\nu}}{1 + \nu^2/\lambda^2}$	$H = \ln(2e/\lambda) = \ln(e\sigma\sqrt{2})$		
$m = U_0$	$\mu_2 = 2/\lambda^2$	$\mu_3 = 6/\lambda^3,$ $\gamma_a = 3/\sqrt{2} \approx 2.1$	$\mu_4 = 24/\lambda^4,$ $\gamma_3 = 3$

Этот закон описывает распределение случайной величины $X = X_1 - X_2$, где X_1 и X_2 – независимые случайные переменные с одним и тем же односторонним экспоненциальным распределением.

7. Закон Симпсона (треугольный)

$w(u) = \begin{cases} \frac{4(u-a)}{(b-a)^2}, & a < u < (a+b)/2, \\ \frac{4(b-u)}{(b-a)^2}, & (a+b)/2 < u < b \end{cases}$			
$F(u) = \begin{cases} \frac{2(u-a)^2}{(b-a)^2}, & a < u < (a+b)/2, \\ 1 - \frac{2(b-u)^2}{(b-a)^2}, & (a+b)/2 < u < b, \\ 0, & -\infty < u < a, \\ 1, & b < u < \infty \end{cases}$			
$\theta(jv) = -\frac{4}{v^2(b-a)^2} [e^{jbv/2} - e^{jav/2}]$	$H = \ln\left(\frac{b-a}{2}\sqrt{e}\right) = \ln(\sigma\sqrt{6e})$		
$m = (a+b)/2$	$\mu_2 = (b-a)^2 / 24$	$\mu_3 = 0, \\ \gamma_a = 0$	$\mu_4 = (b-a)^4 / 240, \\ \gamma_3 = -0.6$

Закон Симпсона характеризует распределение суммы двух независимых равномерно распределенных случайных величин.

8. Закон Арксинуса

$w(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < -a, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-u^2}}, & -a < u < a, \\ 1, & a < u < \infty \end{cases}$	
--	--

$F(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{u}{a}\right), & -a < u < a, \\ 1, & a < u < \infty \end{cases}$			
$\theta(jv) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} e^{jvu} du$		$H = \ln(\pi) + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\ln(a^2 - u^2)}{\sqrt{a^2 - u^2}} du$	
$m = 0$	$\mu_2 = a^2 / 2$	$\mu_3 = 0,$ $\gamma_a = 0$	$\mu_4 = 3a^4 / 8,$ $\gamma_3 = -1.5$

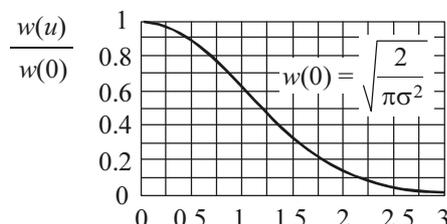
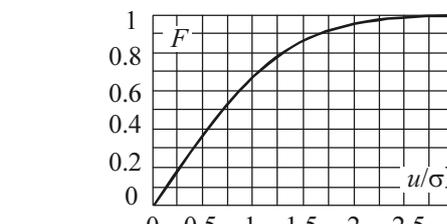
Этому закону соответствует распределение значений синусоиды со случайной фазой.

9. Закон $\operatorname{sech}^2 \alpha u$

$w(u) = \frac{\alpha}{2 \operatorname{ch}^2 \alpha u} = \frac{\alpha}{2} \operatorname{sech}^2 \alpha u,$ $-\infty < u < \infty$			
$F(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \alpha u$			
$\theta(jv) = \frac{\pi v / 2 \alpha}{\operatorname{sh}(\pi v / 2 \alpha)}$		$H = \ln(e^2 / 2 \alpha)$	
$m = 0$	$\mu_2 = \frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\alpha^2}$	$\mu_3 = 0,$ $\gamma_a = 0$	$\mu_4 = 7\pi^4 / (240\alpha^4),$ $\gamma_3 = 4.2$

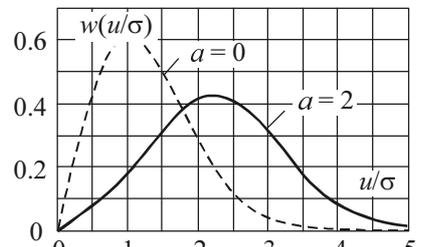
Этот закон используется для аппроксимации других законов.

10. Односторонний нормальный закон

$w(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-u^2 / 2\sigma^2), & 0 < u < \infty \end{cases}$			
$F(u) = \begin{cases} 0, & -\infty < u < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^u e^{-t^2/2\sigma^2} dt, & 0 < u < \infty \end{cases}$			
$\theta(jv) = e^{-v^2\sigma^2/2} [1 + \Phi(jv\sigma / \sqrt{2})], \text{ где функция } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$			
$H = \ln(\sigma\sqrt{\pi e / 2})$			
$m \approx 0.8\sigma$	$\mu_2 \approx 0.36\sigma^2$	$\mu_3 \approx 0.22\sigma^3,$ $\gamma_a \approx 1$	$\mu_4 \approx 0.5\sigma^4,$ $\gamma_3 = 0.85$

Этот закон описывает распределение модуля гауссовской случайной величины, имеющей нулевое среднее значение.

11. Обобщенный закон Рэлея

$w(u) = \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{au}{\sigma^2}\right),$ $0 < u < \infty$			
---	--	--	--

$$m = \sigma \sqrt{\pi/2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{a^2}{4\sigma^2} \right) + \frac{a^2}{2\sigma^2} I_1 \left(\frac{a^2}{4\sigma^2} \right) \right] \exp \left(-\frac{a^2}{4\sigma^2} \right),$$

$I_0(\cdot)$ и $I_1(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка

$$m \approx 1.25\sigma \text{ при } a = 0, \quad m = a \left(1 + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \text{ при } a \gg \sigma$$

$$\mu_2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{4a^2} \right) \text{ при } a \gg \sigma, \quad \mu_2 \approx 0.43\sigma^2 \text{ при } a = 0$$

$$\gamma_a = 0.63 \text{ при } a = 0, \quad \gamma_a = 0.43 \text{ при } a = \sigma, \quad \gamma_a = 0.24 \text{ при } a = 2\sigma, \\ \gamma_a = 0.07 \text{ при } a = 3\sigma, \quad \gamma_a = 0.015 \text{ при } a = 5\sigma$$

Этот закон применяется для описания распределения огибающей смеси высокочастотного сигнала и шума. Таблицы функций, соответствующих этому закону, даны в руководстве: Барк Л.С. и др. Таблицы распределения Рэля–Райса (Издание Вычислительного центра АН СССР, 1964 г.).

П.11. ФУНКЦИИ ФОРМИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПАКЕТЕ MATHCAD [7, 30, 31]

Пакет Mathcad имеет четыре основные категории встроенных функций по математической статистике. Различие заключается в написании первой литеры имени функций. Оставшаяся часть (обозначена условно звездочкой) идентифицирует тип распределения:

- $d^*(x, \text{par})$ – плотность вероятности;
- $p^*(x, \text{par})$ – функция распределения;
- $q^*(x, \text{par})$ – квантиль распределения;
- $r^*(M, \text{par})$ – вектор M независимых случайных чисел, каждое из которых имеет соответствующее распределение.

Здесь x – значение случайной величины; p – значение вероятности; par – список параметров распределения.

Ниже перечислены некоторые типы распределения, которые следует указать вместо звездочки и ввести соответствующий список параметров par:

- $\text{norm}(x, m, \sigma)$ – нормальное (гауссово) распределение (m – математическое ожидание; σ – среднеквадратическое отклонение (СКО));
- $\text{unif}(x, a, b)$ – равномерное распределение; (a, b) – интервал, на котором случайная величина распределена равномерно;
- $\text{beta}(x, s1, s2)$ – бета-распределение ($s1 > 0, s2 > 0, 0 < x < 1$);
- $\text{cauchy}(x, U, h)$ – распределение Коши (l – параметр разложения, $s > 0$ – параметр масштаба);
- $\text{chisq}(x, d)$ – «хи-квадрат» распределение ($d > 0$ – число степеней свободы);
- $\text{exp}(x, \alpha)$ – экспоненциальное распределение ($r > 0$ – показатель экспоненты);
- $F(x, d1, d2)$ – распределение Фишера ($d1 > 0, d2 > 0$ – числа степеней свободы);
- $\text{gamma}(x, s)$ – гамма-распределение ($s > 0$ – параметр формы);
- $\text{lnorm}(x, m, \sigma)$ – логарифмически нормальное распределение (m, σ – натуральные логарифмы математического ожидания и СКО);
- $\text{pois}(k, \lambda)$ – распределение Пуассона ($\lambda > 0$ – параметр);
- $t(x, d)$ – распределение Стьюдента ($d > 0$ – число степеней свободы);
- $\text{weibull}(m, s)$ – распределение Вейбулла ($s > 0$ – параметр формы) и др.

Другие встроенные функции:

- $\text{mean}(x)$ – выборочное среднее значение;
- $\text{var}(x)$ – выборочная дисперсия;
- $\text{stdev}(x)$ – выборочное СКО;
- $\text{skew}(x)$ – коэффициент асимметрии;
- $\text{kurt}(x)$ – коэффициент эксцесса;
- $\text{max}(x), \text{min}(x)$ – максимальное и минимальное значения выборки;
- $\text{hist}(\text{int}, x)$ – вектор частоты попадания данных в интервалы (int) гистограммы;
- $\text{median}(x)$ – выборочная медиана;
- $\text{mode}(x)$ – мода – наиболее часто встречающееся значение выборки;
- $\text{corr}(x1, x2), \text{cvar}(x1, x2)$ – коэффициенты корреляции и ковариации двух выборок.

П.12. КОМАНДЫ И ФУНКЦИИ ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX MATLAB

П.12.1. Некоторые команды

Esc – очистка строки ввода;
clc – очистка экрана и размещение курсора в левом верхнем углу экрана;
Ins – включение/выключение режима вставки;
load fname... – загрузка ранее сохраненных в файле fname.m определений со спецификациями, помещаемыми на месте многоточия;
load ('fname') – загрузка файла fname.m в форме функции;
diare file_name – запись на диск всех команд в строках полученных результатов;
% – для текстовых комментариев. Это правило хорошего тона;
Delug → Run – вывод графика на экран отредактированной программы;
Edit → Copy Figure – копирование графика без серого поля (например, в текстовый редактор Word);
wavemngr ('read') – вейвлет-менеджер, выводит названия всех вейвлетов;
wavemngr ('read',1) – вывод листа с перечнем всех вейвлетов;
waveinfo('type') – получение сведений по интересующему типу вейвлета; полный список содержит 15 базовых вейвлетов, для некоторых из них порядок вейвлета можно задать в широких пределах;
wavemenu – вызов окна специального графического интерфейса пользователя GUI (Graphic User Interface);
wavedemo – вызов окна доступа к демонстрационным примерам.

П.12.2. Одномерное непрерывное вейвлет-преобразование (НВП)

cwt(·) – функция одномерного непрерывного вейвлет-преобразования (НВП 1-D);
COEFS = cwt(S, SCALES, 'wname') – возврат коэффициентов прямого ВП вещественного или комплексного сигнала S в вещественном положительном SCALES для вейвлета, указанного в строке 'wname' ;
COEFS = cwt(S, SCALES, 'wname', 'plot') – то же и построение графика вейвлет-коэффициентов;

COEFS = cwt(S, SCALES, 'wname', 'PLOTMODE') – то же, что и предыдущая функция, но с использованием настроек цвета PLOTMODE: 'lvl' – окраска шаг за шагом, 'glb' – окраска с учетом всех коэффициентов, 'abslvl' или 'lvlabs' – окраска шаг за шагом с использованием абсолютных значений коэффициентов, 'absglb' или 'glbabs' – окраска с масштабированием и использованием абсолютных значений коэффициентов.

П.12.3. Одномерное дискретное вейвлет-преобразование (ДВП)

wavedec(.) – функция одномерного многоуровневого вейвлет-разложения (ВР);
 [C, L]=wavedec(X, N, 'wname') – возврат векторов ВР C и L сигнала X на уровне N (целое число);
 [C, L]=wavedec(X, N, Lo_D, Hi_D) – возврат ВР для двух НЧ и ВЧ фильтров декомпозиции;
 [Lo_D, Hi_D, Lo_R, Hi_R]=wname(DF, RF) – возврат четырех фильтров (НЧ и ВЧ декомпозиции и реконструкции), связанных с указанным вейвлетом;
 waverec(.) – функция одномерного многоуровневого вейвлет-восстановления;
 X = waverec(C, L, 'wname') – возврат (реконструкция) сигнала X в соответствии с многоуровневой структурой разложения [C, L];
 X = waverec(C, L, Lo_R, Hi_R) – то же, но вместо типа вейвлета 'wname' используются НЧ и ВЧ фильтры реконструкции Lo_R, Hi_R ;
 appcoef(.) – функция нахождения коэффициентов аппроксимации;
 A = appcoef(C, L, 'wname', N) – возврат коэффициентов аппроксимации на уровне N с использованием структуры ВР [C, L]; уровень N должен быть целым числом. $0 \leq N \leq NMAX = \text{length}(L) - 2$;
 L = wmaxlev(S, 'wname') – возврат максимального уровня разложения сигнала (или изображения) S для вейвлета с именем 'wname';
 A = appcoef(C, L, 'wname') – возврат коэффициентов аппроксимации на последнем уровне ($NMAX = \text{length}(L) - 2$) из структуры ВР [C, L];
 A = appcoef(C, L, Lo-R, Hi_R) то же, но вместо имени вейвлета заданы НЧ и ВЧ фильтры реконструкции (восстановления);
 detcoef(.) – функция определения детализирующих коэффициентов;

$D = \text{detcoef}(C, L, N)$ – возврат детализирующих коэффициентов на уровне N из структуры ВР $[C, L]$;

$D = \text{detcoef}(C, L)$ – возврат детализирующих коэффициентов на последнем уровне;

$[D_1, \dots, D_p] = \text{detcoef}(C, L, [(1), \dots, N(p)])$ – возврат коэффициентов детализации на уровне $[N(1), \dots, N(p)]$;

$\text{dwt}(\cdot)$ – функция одноуровневого прямого ДВП;

$[cA, cD] = \text{dwt}(X, \text{'wname'})$ – одноуровневое дискретное ВП, возвращающее вектор аппроксимирующих коэффициентов cA и детализирующих коэффициентов cD ;

$[cA, cD] = \text{dwt}(X, \text{Lo_D}, \text{Hi_D})$ – то же, но вместо 'wname' использованы низкочастотный Lo_D и высокочастотный Hi_D фильтры декомпозиции;

$\text{idwt}(\cdot)$ – функция одноуровневого обратного ДВП;

$X = \text{idwt}(cA, cD, \text{'wname'})$ – одноуровневое обратное ДВП, возвращающее вектор коэффициентов аппроксимации X для входных векторов cA и cD ;

$X = \text{idwt}(cA, cD, \text{Lo_R}, \text{Hi_R})$ – то же, но при использовании фильтров реконструкции Lo_R и Hi_R ;

$\text{prcoef}(\cdot)$ – прямое восстановление из одномерных вейвлет-коэффициентов;

$Y = \text{prcoef}(0, X, \text{'wname'}, N)$ – возврат вектора коэффициентов восстановления за N шагов для входного вектора X ; если $0 = \text{'a'}$, то возвращаются коэффициенты аппроксимации; если $0 = \text{'d'}$, то возвращаются детализирующие коэффициенты;

$Y = \text{prcoef}(0, X, \text{Lo_R}, \text{Hi_R}, N)$ – функция, эквивалентная предыдущей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Общая теория сигналов

1. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Дрофа, 2006. – 719 с.
2. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов по спец. «Радиотехника» / С. И. Баскаков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2000. – 462 с.
3. *Радиотехнические цепи и сигналы* : учеб. пособие для вузов / под ред. К. А. Самойло. – М. : Радио и связь, 1982. – 528 с.
4. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач : учеб. пособие для радиотехн. спец. вузов / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1987. – 207 с.
5. *Жуков В. П.* Задачник по курсу Радиотехнические цепи и сигналы / В. П. Жуков, В. Г. Карташов, А. М. Николаев. – М. : Высшая школа, 1986. – 192 с.
6. *Радиотехнические цепи и сигналы* : примеры и задачи / под ред. И. С. Гоноровского. – М. : Радио и связь, 1989. – 128 с.
7. *Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания* : учеб. пособие / под ред. А. Н. Яковлева. – М. : ИНФРА-М ; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 348 с. – (Серия «Высшее образование»).
8. *Френкс Л.* Теория сигналов / Л. Френкс. – М. : Сов. радио, 1974. – 344 с.
9. *Сиберт У. М.* Цепи, сигналы, системы. В 2 ч. : пер. с англ. / У. М. Сиберт. – М. : Мир, 1988.
10. *Васюков В. Н.* Теория электрической связи : учебник / В. Н. Васюков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005. – 392 с. («Учебники НГТУ»).
11. *Яковлев А. Н.* Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие / А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1992. – 96 с.
12. *Яковлев А. Н.* Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях : учеб. пособие / А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 190 с.

Ортогональные сигналы. Вейвлет-преобразование

13. *Хармут Х. Ф.* Передача информации ортогональными функциями / Х. Ф. Хармут. – М. : Связь, 1975. – 272 с.
14. *Хармут Х. Ф.* Теория секвентного анализа. Основы и применения / Х. Ф. Хармут. – М., 1980. – 575 с.
15. *Воробьев В. И.* Теория и практика вейвлет-преобразования / В. И. Воробьев, В. Г. Грибушин. – СПб. : ВУС, 1999. – 208 с.
16. *Дьяконов В. П.* Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Р, 2002. – 446 с.
17. *Яковлев А. Н.* Применение вейвлет-преобразования для обработки гидроакустических сигналов / А. Н. Яковлев // Актуальные проблемы электронного приборостроения.

строения. АПЭП-2002 : тр. 6 междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2002. – Т. 4. – С. 47–52.

18. *Яковлев А. Н.* Введение в вейвлет-преобразования : учеб. пособие / А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.

19. *Яковлев А. Н.* Основы вейвлет-преобразования сигналов : учеб. пособие / А. Н. Яковлев. – М. : САЙНС-ПРЕСС, 2003. – 80 с. (Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам». Вып. 10).

Случайные процессы

20. *Горяинов В. Т.* Статистическая радиотехника: примеры и задачи : учеб. пособие для вузов / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов. – М. : Сов. радио, 1980. – 544 с.

21. *Заездный А. М.* Основы расчетов по статистической радиотехнике / А. М. Заездный. – М. : Связь, 1969. – 448 с.

22. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.

23. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.

Цифровые сигналы

24. *Голд Б.* Цифровая обработка сигналов / Б. Голд, Ч. Рейдер. – М. : Сов. радио, 1973. – 368 с.

25. *Рабинер Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов : пер. с англ. / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.

26. *Гольденберг Л. М.* Цифровая обработка сигналов : справочник / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1985. – 312 с.

27. *Прокис Дж.* Цифровая связь : пер. с англ. / Дж. Прокис ; под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 2000. – 800 с.

28. *Васюков В. Н.* Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры в системах подвижной радиосвязи : учебник / В. Н. Васюков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2006. – 292 с. – («Учебники НГТУ»).

29. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов : учебник для вузов / А. Б. Сергиенко. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 751 с.

Кепстральное представление сигналов

30. *Чайлдс Д. Дж.* Кепстр и его применение при обработке данных : обзор / Д. Дж. Чайлдс, Д. П. Скиннер, Р. Ч. Кемерайт // ТИИЭР. – 1977. – Т. 65, № 10. – С. 5–23.

31. *Применение кепстрального анализа в локации для определения времени запаздывания сигналов* / В. Барник, В. В. Васильев, А. Мольтман, А. Н. Яковлев // Ши-

рокопосные устройства СВЧ и системы оптимальной обработки сигналов. – Новосибирск : Изд-во НГУ ; НЭТИ, 1978. – С. 129–136.

33. *Васильев В. В.* Кепстральный анализ / В. В. Васильев, А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НЭТИ, 1980. – 26 с. библи. 77. – (Рукопись деп. в НИИЭИР. 1980, № 3-5385).

33. *Jakowlew A.* Cepstrum-Signalverarbeitung / A. Jakowlew // 3 Symposium Maritime Elektronik Wilhelm-Pieck Universität Rostock. 1980. DDR : Symposiumsmaterialien. – Rostock, 1980. – S. 27–33.

34. *Васильев В. В.* Статистические свойства кепстра / В. В. Васильев, А. Н. Яковлев // Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. – 1981. – Т. XXIV, № 3. – С. 88–90.

35. *Determinierte und statistische Eigenschaften des Cepstrums* / W. W. Wassiliew, A. N. Jakowlew, A. Moltmann, W. Barnick. – Wissenschaftliche Zeitschrift der Wilhelm-Pieck Universität Rostock, 1980. – В. 29, № 10. – S. 95–99.

36. *Яковлев А. Н.* Гидролокаторы ближнего действия / А. Н. Яковлев, Г. П. Каблов. – Л. : Судостроение, 1983. – 200 с.

Системы компьютерной математики

37. *Дьяконов В. П.* MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – М. : Нолидж, 1998. – 352 с.

38. *Кириянов Д. В.* Самоучитель MathCAD 2001 / Д. В. Кириянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 544 с.

39. *Дьяконов В. П.* MATLAB 6 : учеб. курс / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.

40. *Дьяконов В. П.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений : спец. справочник / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.

Справочники

41. *Дэвис Дж.* Карманный справочник радиоинженера : пер. с англ. / Дж. Дэвис, Дж. Карр. – М. : Додэка-XXI, 2002. – 544 с.

42. *Бронштейн И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

43. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

44. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1970. – 832 с.

45. *Справочник по специальным функциям* : пер с англ. / под ред.: М. А. Абрамовица, И. Стигана ; пер. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

46. *Янке Е.* Специальные функции : пер. с нем. / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш ; под ред. Л. И. Седова. – М. : Наука, 1968. – 344 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Яковлев Альберт Николаевич

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ В ПРИМЕРАХ,
УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАНИЯХ**

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Художественный редактор *А.В. Ладыжская*
Корректор *И.Е. Семенова*
Рисунки и компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Подписано в печать 10.07.12
Формат 70 × 100 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л. 38,05. Печ. л. 29,5
Тираж 3000 экз. (1-й 3-д – 1–200 экз.)
Изд. № 44. Заказ № 1049

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20