Практикум 1.
Расчет магнитного поля по формуле Био- Савара- Лапласа

Закон Био-Савара-Лапласа для линейного тока

$$d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\boldsymbol{B} = \int_\Gamma d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\int_\Gamma \frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}, \quad (1.1)$$

где $Id\boldsymbol{l}$ - линейный элемент тока I, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока, Г - контур с током; $\tilde{k} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} = 10^{-7}$ Гн/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 12.566 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ - магнитная проницаемость однородной среды.

Закон Био-Савара-Лапласа для объемного тока

$$d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\frac{\mathbf{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3}dV,$$

$$\boldsymbol{B} = \int_V d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\int_V \frac{\mathbf{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3}dV, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{j}$ - плотность тока в элементе объема dV, $\mathbf{j}dV$ - объемный элемент тока, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока, V - объем, в котором текут токи плотности $\mathbf{j}$.

Направление индукции магнитного поля определяется правилом правого винта (буравчика) или правилом правой руки.

Принцип суперпозиции

$$\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{B}_j \qquad (1.3)$$

Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током

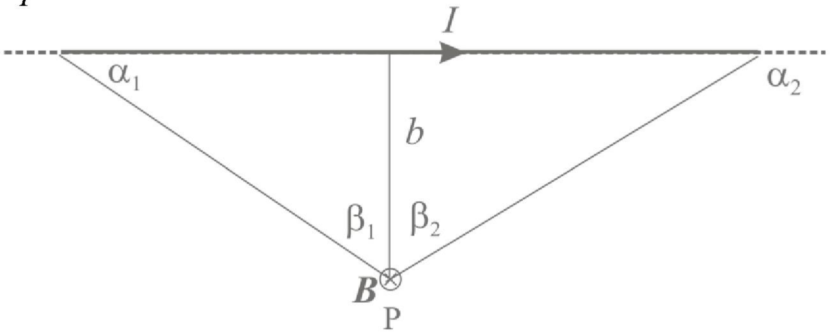

Рис.1.1. Отрезок проводника с током

$$B = \tilde{k}\frac{I}{b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \tilde{k}\frac{I}{b}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1), \qquad (1.4)$$

где b - расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током, α_1 - угол между направлением тока и направлением от начала проводника в точку наблюдения, α_2 - угол между направлением тока и направлением от конца проводника в точку наблюдения; β_1 и β_2 - алгебраические значения углов между перпендикуляром к проводнику и направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля.

Модуль вектора индукции магнитного поля бесконечного прямого проводника с током I

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b}, \qquad (1.5)$$

где b - расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током.

Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока I в центре витка

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \qquad (1.6)$$

Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока I на оси симметрии

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}, \qquad (1.7)$$

где z - расстояние от точки наблюдения поля до центра витка, R - радиус витка.

Пример 1.1. Найти индукцию магнитного поля проводника с током $I = 1$А в точке 0 (рис.1.2). Угол между прямолинейными участками проводника равен $\beta = 120^\circ$, радиус дуги $r = 0.1$ м.

Решение

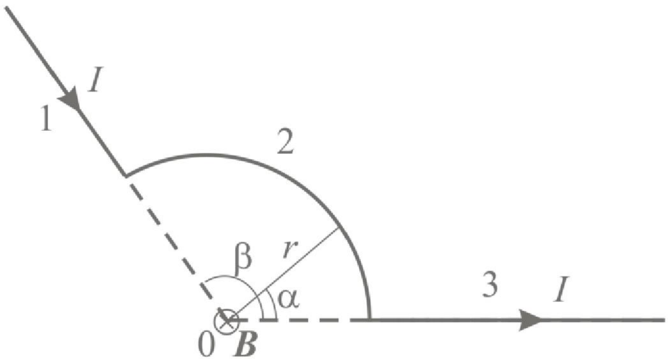

Рис.1.2. К примеру 1.1.

Вектор индукции магнитного поля дается криволинейным интегралом (1.1)

$$\boldsymbol{B} = \tilde{k} \int\limits_{\Gamma} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

который целесообразно разбить на сумму трех интегралов по частям контура $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, пронумерованным на Рис.1.2:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3 = \tilde{k} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} + \tilde{k} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} + \tilde{k} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Очевидно, что $B_1 = B_3 = 0$, так как на участках 1 и 3 векторы $d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{r}$ коллинеарны, поэтому их векторное произведение равно нулю. На втором участке проводника с током $d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{r}$, $|d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}| = r\,dl$, вектор $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_2$ направлен за плоскость рисунка, а величину $r = \text{const}$ можно вынести за знак интеграла, так что

$$B = \tilde{k} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{I|d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}|}{r^3} = \tilde{k} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{I\,r\,dl}{r^3} = \tilde{k} \frac{I}{r^2} \int\limits_{\Gamma_2} dl\,.$$

Элемент дуги окружности $dl = r\,d\alpha$, а $\beta = 2\pi/3$, поэтому

$$B = \tilde{k} \frac{I}{r} \int\limits_0^\beta d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \beta = \frac{\mu_0}{6} \frac{I}{r} = 2.1 \times 10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B \approx 2.1$ мкТл.

Пример 1.2. Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I = 20\,\text{А}$, в точке, расположенной на расстоянии $b = 0.05$ м от середины отрезка. Угол между направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля, равен 60° ($\beta_1 + \beta_2 = \pi/3$).

Решение

Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током (рис.1.1), дается формулой (1.4), в данном случае $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = 2\pi/3$ ($\beta_1 = -\pi/6$, $\beta_2 = \pi/6$), то есть

$$B = \tilde{k} \frac{I}{b}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \tilde{k} \frac{I}{b}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \tilde{k} \frac{I}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

получаем $B = \tilde{k} \dfrac{I}{b} = 4 \times 10^{-5}\,\text{Тл}.$

Ответ: $B = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{Тл}.$

Пример 1.3. Определить магнитную индукцию поля в центре квадратного контура со стороной $a = 0.1$ м, образованного проводом, по которому в направлении часовой стрелки (Рис.1.3) течет ток $I = 20\,\text{А}$.

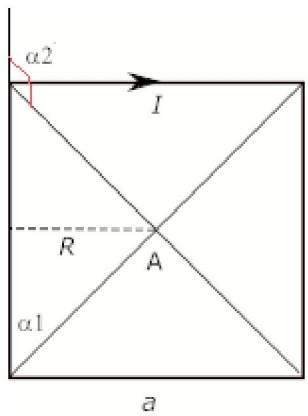

Рис.1.3. К примеру 1.3.

Решение

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_4$, взаимно равных индукций $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_4$, каждая из которых создается током одной из четырех сторон квадрата, т.е. $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{B}_1$ и направлен за плоскость рисунка. Величину B_1 находим по (1.4) с учетом $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, ($\beta_1 = -\pi/6$, $\beta_2 = \pi/6$), $b = a/2$ (рис.1.1), что дает

$$B = 4B_1 = \tilde{k}\frac{I}{b}(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = 8\sqrt{2}\tilde{k}\frac{I}{a} = 2.26\times10^{-4} \approx 2.3\times10^{-4} \text{ Тл.}$$

Ответ: $B \approx 2.3\times10^{-4}$Тл.

Пример 1.3. В одной из моделей, объясняющих природу земного магнетизма, было предположено, что внутри Земли в плоскости экватора течет кольцевой ток радиусом $R \approx 5000$ км. Оценить величину такого тока, если известно, что вблизи магнитного полюса Земли индукция магнитного поля равна 0.1 мТл. Землю считать сферой радиуса $R_0 = 6380$ км.

Решение

Из формулы (1.7) выражаем силу кольцевого тока, считая, что на поверхности Земли $z = R_0$ и $\mu \approx 1$

$$I = \frac{2B\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}{\mu_0 R^2}.$$

Подставляя численные значения величин, получаем $I = 3.39\times10^9 \approx 3.4\times10^9$ А.

Ответ: $I \approx 3.4\times10^9$ А.

Пример 1.4. Прямой бесконечный проводник с изоляцией образует круговую петлю радиусом $R = 0.8$ м (рис.1.4). Определить силу тока в проводнике, если известно, что в центре витка магнитная индукция $B = 12.5$ мкТл.

Решение

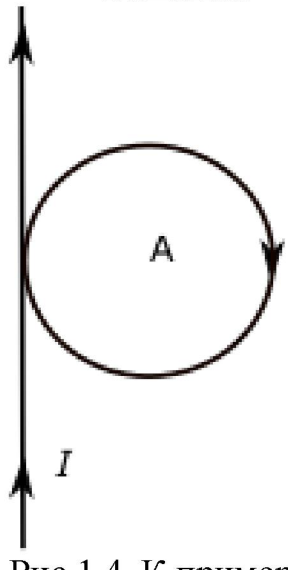

Рис.1.4. К примеру 1.4.

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме поля $\boldsymbol{B}_1$ прямого бесконечного проводника и поля $\boldsymbol{B}_2$ петли. По правилу буравчика векторы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ в центре витка направлены перпендикулярно плоскости витка. Тогда модуль вектора индукции суммарного поля в центре витка равен $B = B_1 + B_2$, где B_1 дается выражением (1.4) с $b = R$, а B_2 - выражением (1.6), в итоге

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b} + \frac{\mu_0 \mu I}{2R} = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right),$$

Откуда при $\mu = 1$ имеем

$$I = \frac{2RB}{(\pi^{-1} + 1)\mu_0} \approx 12.1\,\text{А}.$$

Ответ: $I \approx 12.1\,\text{А}$.

Пример 1.5. Кольцо из диэлектрика, внешний радиус которого $b = 0.08$ м, а внутренний $a = 0.05$ м, равномерно заряжено с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1.25$ Кл/м^2 (рис.1.5). Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 750$ рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца.

Решение

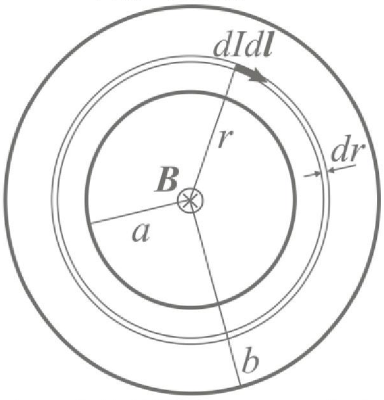

Рис.1.5. К Примеру 1.5.

Способ 1. Движущиеся по окружностям заряды образуют электрический ток, который создает магнитное поле. Введем полярную систему координат с началом в центре кольца. Бесконечно малый элемент площади кольца $dS = rdrd\varphi$ несет заряд $dq = \sigma dS = \sigma rdrd\varphi$, который за промежуток времени dt перемещается вдоль окружности радиуса r на расстояние $dl = rd\varphi$, образуя ток $I = dq/dt = \sigma rdr\, d\varphi/dt = \sigma\omega rdr$ (где $\omega = d\varphi/dt$ - угловая скорость кольца) и линейный элемент тока по модулю равный $Idl = \sigma\omega r^2 drd\varphi$. Очевидно, что $I\boldsymbol{dl} \perp \boldsymbol{r}$ в формулах (1.1) и вектор индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ направлен вдоль оси кольца за плоскость Рис.1.5, а по абсолютной величине равен интегралу по поверхности кольца

$$B = \tilde{k}\int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sigma\omega r^2}{r^2} = \tilde{k}2\pi\sigma\omega(b-a) = \frac{1}{2}\mu_0\mu\sigma\omega(b-a)$$

Подставляя численные значения заданных величин и $\mu = 1$, получаем $B \approx 17.7$ мкТл.

Способ 2. Разобьем заданное кольцо на бесконечно тонкие концентрические кольца радиуса r с площадью $dS_к = 2\pi r dr$ и зарядами $dq_к = \sigma dS_к = \sigma 2\pi r dr$, создающими круговые токи $dI = \dfrac{dq}{T} = \dfrac{\sigma 2\pi r dr}{T} = \sigma\omega r dr$, где $T = 2\pi/\omega$ - период вращения кольца. Каждое бесконечно тонкое кольцо создает в центре индукцию в соответствии с формулой (1.6), в которой надо сделать замены $R \to r$, $I \to dI$, $B \to dB$, где $dB = \dfrac{\mu_0\mu dI}{2r} = \dfrac{\mu_0\mu}{2r}\sigma\omega r dr = \dfrac{\mu_0\mu}{2}\sigma\omega dr$ - поле такого тонкого кольца. Суммарное поле всех колец дается интегралом

$$B = \int_a^b dB = \int_a^b \frac{\mu_0\mu}{2}\sigma\omega dr dr = \frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}(b-a)$$

Ответ: $B \approx 17.7$ мкТл.

Задачи для аудиторной работы

A1.1. Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I = 1$А, в точке, расположенной на расстоянии 10 см от отрезка, из которой концы отрезка видны под углами 45° и 60°.

A1.2. Ток $I = 10$ А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии $a = 0.2$ м от вершины.

A1.3. По круговому витку радиуса $R = 0.1$ м циркулирует ток силы $I = 1.00$ А. Найти магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$: а) в центре витка; б) на оси витка на расстоянии $z = 0.1$ м от его центра.

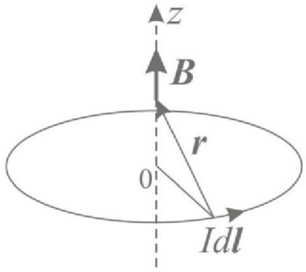

Рис.1.6. К примерам А1.3 и А1.4

A1.4. Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка радиуса $R = 0.30$ м в точке, расположенной на расстоянии $z = 0.40$ м от центра, если в центре витка индукция $B_0 = 25$ мкТл?

A1.5. Непроводящий тонкий диск радиуса $R = 0.08$ м, равномерно заряженный с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1.25$ Кл/м^2, вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре диска.

Задания на дом

В1.1. При какой силе тока, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом 20 см, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 30 см станет равной 20 мкТл?

В1.2. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого провода и на 40 см от второго провода.

В1.3. По бесконечно длинному проводу, согнутому под углом 120 градусов, течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины на расстояние 5 см.

В1.4. Два круговых соосных витка радиусом 8 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 1 см друг от друга. По виткам текут в одном направлении токи $I_1 = 1$ А и $I_2 = 2$ А. Найти индукцию магнитного поля на оси витков в точке, находящийся на равном расстоянии от витков.

В1.5. Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из 100 плотно расположенных витков, по которому течет ток 8 мА. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны $a = 50$ мм, $b = 100$ мм. Найти индукцию магнитного поля в центре плоской спирали.