

Занятие 10. Механические колебания и волны.

1. Частота колебаний

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0} \quad (1)$$

2. Смещение точки при гармонических колебаниях

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad \vee \quad \varphi = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

3. Уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega^2 x = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right) \quad \vee \quad \left(\omega^2 = \frac{g}{l} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \quad (3)$$

4. Кинетическая энергия

$$E_K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \vee \quad E_K = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

5. Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad \vee \quad U = \frac{1}{2} m g A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

Примеры решения задач

1. Точка совершает колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ смещения $x(0) = 0$ и $v(0) < 0$. Определить фазу колебания для двух моментов времени: 1) когда смещение $x_1 = 1$ см и $v_1 > 0$; 2) когда скорость $v_2 = -6$ см/с и $x_2 < 0$.

Решение

Используем (1) и (2) и представим начальные условия так $x(0) = A \cos(\alpha) = 0$, тогда $\alpha = \pi/2 + \pi n$, число n определим из условия $v(0) < 0$, тогда $v(0) = -\omega_0 A \sin(\alpha)$. Подставляем выражение для α , получаем $v(0) = -\omega_0 A \sin(\pi/2) < 0$, т.е. $\alpha = \pi/2$. Таким образом, $x = A \cos(\omega_0 t + \pi/2)$ и $v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \pi/2)$.

1) $\omega_0 t_1 + \alpha = \arccos(x_1 / A) + \pi n$, где $0 \leq \arccos(y) \leq \pi$, тогда при $n = 0$ $\omega_0 t_1 + \alpha = \arccos(0.25)$,

$\omega_0 t_1 + \pi/2 = 1.318$ и $v_1 = -0.122 < 0$, а при $n = 1$ $\omega_0 t_1 + \alpha = \arccos(0.25) + \pi$ и

$\omega_0 t_1 + \pi/2 = 4.460$ и $v_1 = 0.122 > 0$;

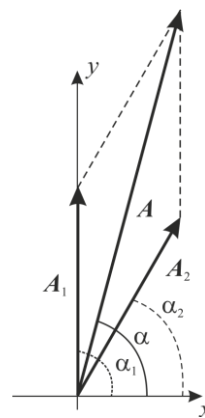
2) $\omega_0 t_2 + \alpha = \arcsin(-v_2 / \omega_0 A) + \pi n$, $-\pi/2 \leq \arcsin(y) \leq \pi/2$, тогда при $n = 0$

$\omega_0 t_2 + \alpha = \arcsin(-v_2 / \omega_0 A) = -0.498$ и $x_2 = 0.035 > 0$, а при $n = 1$

$\omega_0 t_2 + \alpha = \arcsin(-v_2 / \omega_0 A) + \pi$ $\omega_0 t_2 + \alpha = 3.639$ и $x_2 = -0.035 < 0$;

Ответ: 1) $\omega_0 t_1 + \pi/2 = 4.460$; 2) $\omega_0 t_2 + \alpha = 3.639$.

2. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1.5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = \pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания.



Решение

Результирующее колебание описывается уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2 = 2\pi / T_1$. Результирующую амплитуду найдем из

$$\text{векторной диаграммы, тогда } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

а начальная фаза есть

$$\alpha = \arctan \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Подставляя численные значения, получаем $A = 3.86$ см и $\alpha = 1.31$ рад.

Ответ: $A = 3.86$ см и $\alpha = 1.31$ рад.

3. Шахтер, бегущий со скоростью 10 м/с, догоняет вагонетку массой 100 кг, движущуюся со скоростью 8 м/с и вскакивает на неё. С какой скоростью будет двигаться вагонетка, если масса шахтера 80 кг?

Дано

v
$v_1 = 10$ м/с
$v_2 = 3.6$ км/ч
$m_1 = 80$ кг
$m_2 = 100$ кг

Решение

Согласно закону сохранения импульса

$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. После проектирования на

горизонтальную ось, получаем $p_1 + p_2 = p$

и $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v + m_2 v$ и

$v = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Подставляя численные значения величин, получаем

$$v = (800 + 800) / 180 = 8.9 \text{ м/с}$$

Ответ: $v = 8.9$ м/с

Самостоятельная аудиторная работа.

1. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и частотой $\nu = 2.5$ Гц. В начальный момент времени смещение точки от положения равновесия равно 1,5 см. Запишите уравнение гармонических колебаний, используя функцию косинуса

2. Найти возвращающую силу F в момент $t_1 = 1$ с и полную энергию E материальной точки, совершающей колебания по закону $x = A \cos \omega t$, где $A = 20$ см, $\omega = 2\pi/3$ с⁻¹. Масса m материальной точки равна 10 г. Построить графики энергий в зависимости от времени.

3. Тело массой $m = 2.0$ кг совершает гармонические колебания по закону $x = 50 \cos(\pi/3)t$, где все величины выражены в единицах СИ. Определить максимальные значения смещения, скорости, ускорения и силы. Найти полную энергию тела.

4. Математический маятник совершил 50 полных колебаний за 70 с. Определить период колебаний другого маятника, длина которого меньше в 4 раза.

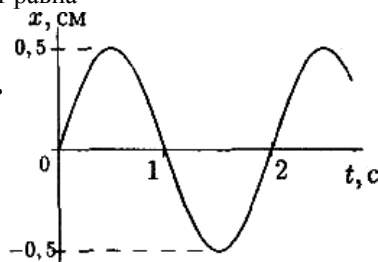
5. Колебание математического маятника описывается уравнением

$$x(t) = 0,2 \sin \left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ м.}$$

Длину маятника увеличили в 2 раза. Максимальная скорость маятника не изменится, если амплитуда колебаний будет равна

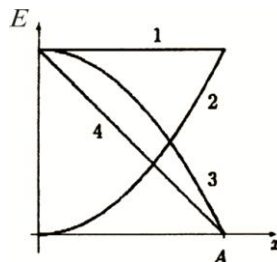
6. На графике представлена зависимость

смещения маятника от времени. Записать уравнение гармонических колебаний. Определить скорость маятника в момент времени $t = 1$ с.



7. Груз, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой ω . При прохождении положения равновесия сила упругости пружины равна $F_{\text{уп}}$. Коэффициент упругости пружины $k =$

8. Зависимости кинетической энергии пружинного маятника от смещения груза (A – амплитуда колебаний) соответствует изображенный на рисунке график



Задание на дом

1. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое время кинетическая энергия тела будет равна потенциальной энергии пружины? Период колебаний 1 с.
2. Груз массой 100 г, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания. Во сколько раз увеличиться период колебаний, если к нему прикрепить груз массой 300 г?
3. Во сколько раз измениться длина звуковой волны при переходе звука из воздуха в воду? Принять скорость звука в воздухе 340 м/с, в воде 1360 м/с.

Приложение

Размерности физических величин

$$\dim(p) = MLT^{-1} \quad \dim(F) = MLT^{-2} \quad \dim(E) = L^2MT^{-2} \quad \dim(N) = L^2MT^{-3} \quad \dim(\omega) = T^{-1}$$

Литература

- [1]. Баранов А. В. Физика. Теория, задачи, тесты: учеб. пособие / Б. Б. Горлов, А. В. Баранов, Г. Е. Невская Г.Е. – : Издательство НГТУ, 2006. – 280 с.
- [2]. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.
- [3]. Трофимова Т. И. Физика в таблицах и формулах Учеб. пособие для студентов вузов / Т. И. Трофимова. – М.: Дрофа, 2002. – 432 с.