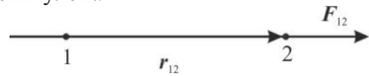


# Занятие 14. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции. Потенциал электрического поля

## 1. Закон Кулона



$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}, \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

где  $\mathbf{r}_{12} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ .

$$F = k \frac{1}{\epsilon} \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}, \quad k = 9 \times 10^9 \text{ м/Ф}, \quad (1)$$

2. Закон сохранения электрического заряда – алгебраическая сумма электрических зарядов в замкнутой системе остается постоянной

$$q = q_1 + q_2 + \dots = \text{const} \quad (2)$$

3. Напряженность  $\mathbf{E}$  поля определяется из соотношения

$$\mathbf{E} = F_q / q \quad (3)$$

где  $F_q$  - сила, действующая на заряд со стороны электростатического поля.

4. Напряженность поля точечного заряда  $Q$  определяется так

$$\mathbf{E} = k \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4)$$

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j} \mathbf{F}_{ij}, \quad \mathbf{E}_j = \sum_{i=1, i \neq j} \mathbf{E}_{ij} \quad (4.1)$$

Напряженность поля точечного заряда  $q$ , системы зарядов

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{\epsilon r^2} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \sum_n \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (4.2)$$

5. Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = k \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{r}, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q}, \quad U(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

6. Разность потенциалов

$$A_q = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6)$$

7. Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на одной силовой линии

$$U = Ed \quad (7)$$

$$d = x_2 - x_1$$

8. Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов

$$W_E = k \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (8)$$

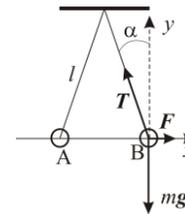
9. Потенциал проводящего шара радиусом  $R$  с зарядом  $Q$

$$\varphi = k \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{R} \quad (9)$$

## Примеры решения задач

1. Два маленьких шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда  $q_0 = 0.4$  мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол  $2\alpha = \pi/3$ . Найти массу каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса  $l = 0.20$  м.

**Решение**



Из соображения симметрии переданный заряд разделится поровну между шариками  $q = q_0 / 2$ , следовательно, оба шарика отклонились на одинаковый угол относительно вертикальной линии, проходящей через точку подвеса. Так как шарики находятся в равновесии, то результирующая сила  $\mathbf{F} + \mathbf{mg} + \mathbf{T} = 0$ . Спроектируем силы на оси координат:  $0 = F - T \sin \alpha$ ,  $0 = T \cos \alpha - mg$ , затем  $T = mg / \cos \alpha$  и  $F = mg \tan \alpha$ . Итак, масса шарика равна  $m = F / g \tan \alpha$ , где  $F = kq^2 / r_{AB}^2$ . Расстояние между центрами шариков равно  $r_{AB} = 2l \sin \alpha$ . Итак расчетная формула есть

$m = kq^2 / (4gl^2 \sin^2 \alpha \tan \alpha)$ , подставляя численные значения величин, получаем  $m = 1.589 \times 10^{-3}$  кг.

**Ответ:**  $m = 1.589 \times 10^{-3}$  кг.

2. Две длинные параллельные нити равномерно заряжены, каждая с линейной плотностью  $\lambda = 0.50$  мкКл/м. Расстояние между ними  $2a = 0.45$  м. Найти максимальное значение напряженности электрического поля в плоскости симметрии этой системы.

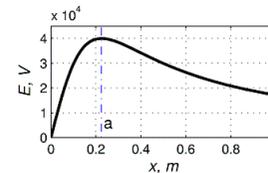
**Решение**

Найдем напряженность поля  $\mathbf{E}$ , согласно (6), от нити параллельной оси  $z$  и пересекающей плоскость  $z = 0$  в точке  $(0, \pm a)$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{R} - (z - z')\mathbf{k}}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} dz' \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{R} - u\mathbf{k}}{\sqrt{R^2 + u^2}} du$$

где  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + (y \pm a)\mathbf{j}$ ,  $u = z - z'$ , последний интеграл равен

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k2\lambda\mathbf{R} / R^2$ . Результирующая напряженность поля, согласно принципу суперпозиции, равна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k2\lambda \left( \frac{x\mathbf{i} + (y+a)\mathbf{j}}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x\mathbf{i} + (y-a)\mathbf{j}}{x^2 + (y-a)^2} \right)$$

В плоскости симметрии  $y = 0$ , тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{4\lambda x\mathbf{i}}{x^2 + a^2}, \quad \frac{dE}{dx} = k \frac{4\lambda x}{x^2 + a^2} = k \frac{4\lambda(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = 0$$

Условие максимума  $x_{\max} = \pm a$ ,  $E_{\max} = k2\lambda / a = 40$  кВ/м

**Ответ:**  $x_{\max} = \pm a$ ,  $E_{\max} = k2\lambda / a = 40$  кВ/м

3. Найти потенциал  $\varphi$  точки поля, находящийся на расстоянии  $r_1 = 0.10$  м от центра заряженного шара радиусом  $R_0 = 0.01$  м. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность заряда на сфере  $\sigma = 10$  мкКл/м<sup>2</sup>; б) задан потенциал шара  $\varphi_0 = 300$  В.

#### Решение

Потенциал поля заряженного шара по определению равен работе по перемещению пробного заряда  $q'$  из бесконечности в данную точку поля к величине пробного заряда, согласно (1)

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^r E dl, \text{ где } E \text{ равно } E = k_0 \frac{q_0}{r^2}, \quad q_0 = 4\pi R_0^2 \sigma.$$

а) Вычисляя интеграл, получаем  $\varphi(r) = k_0 4\pi R_0^2 \sigma / r_1$  и  $\varphi(r_1) = 11.3$  В.

б) Потенциал сферы есть  $\varphi(R_0) = k_0 4\pi R_0^2 \sigma / R_0 = k_0 4\pi R_0 \sigma$ , а потенциал в точке  $r_1$  вычислен в пункте а), тогда отношение потенциалов равно  $\varphi(R_0) / \varphi(r_1) = k_0 4\pi R_0 \sigma r_1 / k_0 4\pi R_0^2 \sigma = r_1 / R_0$  и  $\varphi(r_1) = \varphi(R_0) R_0 / r_1 = 30$  В.

Ответ: а)  $\varphi(r_1) = 11.3$  В, б)  $\varphi(r_1) = 30$  В.

#### Самостоятельная аудиторная работа.

1. Два одинаковых проводящих шарика, обладающих зарядами 50 нКл и 10 нКл, находятся на некотором расстоянии друг от друга. Их приводят в соприкосновение и разводят на прежнее расстояние. На сколько процентов увеличится в результате сила взаимодействия?

2. Маленький шарик, подвешенный на шелковой нити, имеет заряд 49 нКл. В горизонтальном электрическом поле с напряженностью 100 кВ/м нить отклонилась от вертикали на угол, тангенс которого 0.125. Найдите массу шарика.

3. Когда телу сообщили заряд 70 нКл, оно за 10 с падения у земной поверхности прошло путь на 5 см больший, чем в отсутствие заряда. Чему равна масса тела, если напряженность электрического поля 100 В/м?

4. Тонкое кольцо радиусом  $R = 0.1$  м равномерно заряжено зарядом  $q = 1$  мкКл. Определить напряженность поля: 1) на расстоянии  $z = 0.1$  м от центра кольца на оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр кольца; 2) в центре кольца; 3) на каком расстоянии от центра кольца на его оси напряженность поля будет максимальна? 4) минимальна?

5. Электрон, пролетая в электрическом поле из точки  $a$  в точку  $b$ , увеличил свою скорость от 1000 до 3000 км/с. Определите разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$ .

6. Тонкий однородный диск радиусом  $R = 0.1$  м, расположенный горизонтально, заряжен равномерно поверхностной плотностью  $\sigma = 1$  мкКл/м<sup>2</sup>. Определить напряженность электрического поля: 1) на расстоянии  $z = 0.1$  м на оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр диска; 2) в центре диска; 3) на каком расстоянии от центра диска на оси симметрии напряженность поля будет максимальной? 4) минимальной?

7. Вектор напряженности однородного электрического поля направлен вниз, напряженность этого поля равна  $1.3 \cdot 10^5$  В/м. В это поле помещена капля масла массой  $2 \cdot 10^{-9}$  г. Капля оказалась в равновесии. Найти заряд капли и число избыточных электронов на ней

8. Определите размер сферы, способной удержать в сухом воздухе потенциал в полмиллиона вольт. Чему равен электрический заряд этой сферы?

9. Какую энергию необходимо затратить на то, чтобы сблизить ядра дейтерия  ${}^2_1\text{H}$  и трития  ${}^3_1\text{H}$  на расстояние 10 фм, если до этого они находились очень далеко друг от друга?

#### Задание на дом

1. Два заряда, 4 нКл и 9 нКл, расположены на расстоянии 20 см друг от друга. На каком расстоянии от меньшего заряда напряженность электрического поля этих зарядов равна нулю? Среда — вакуум.
2. Электрон влетает в однородное электрическое поле со скоростью  $v = 10^5$  м/с. Вектор скорости направлен в сторону, противоположную направлению силовых линий. Область поля протяженностью  $\ell = 1.1$  м он пролетает за время  $t = 10^{-6}$  с. Определить напряженность поля.
3. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между точечными зарядами  $q_1 = 8$  нКл и  $q_2 = -6$  нКл. Расстояние между зарядами  $r = 10$  см. В какой точке прямой, проходящей через оба заряда, напряженность электрического поля равна нулю?
4. Три одинаковых заряда по 1 нКл каждый расположены в трех вершинах квадрата со стороной 9 см. Найти напряженность результирующего поля в четвертой вершине. Среда — воздух

#### Приложение

##### Размерности физических величин

$$\dim(F) = LMT^{-2} \quad \dim(E) = LMT^{-3}I^{-1} \quad \dim(\varphi) = L^2MT^{-3}I^{-1}$$

Заряд электрона  $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  кг.

#### Литература

- [1]. Баранов А. В. Физика. Теория, задачи, тесты: учеб. пособие / Б. Б. Горлов, А. В. Баранов, Г. Е. Невская Г. Е. — : Издательство НГТУ, 2006. — 280 с.
- [2]. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. — 11-изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2006. — 560 с.
- [3]. Трофимова Т. И. Физика в таблицах и формулах Учеб. пособие для студентов вузов / Т. И. Трофимова. — М.: Дрофа, 2002. — 432 с.