

Примеры вычисления интегралов

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx$.

Решение

Этот интеграл можно привести к формуле таблицы основных неопределенных интегралов, используя прием внесения функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем:

$$d(\arctg x) = (\arctg x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx = \int (\arctg x)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = \int (\arctg x)^{\frac{1}{2}} d(\arctg x) = \left\{ \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \right\} =$$

$$= \frac{(\arctg x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg x)^3} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg x)^3} + C.$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sqrt{e^x - 1} dx$.

Решение

Применим способ замены переменной в неопределенном интеграле. Введем новую переменную $t = \sqrt{e^x - 1}$. Чтобы найти выражение для дифференциала dx , выразим из этого равенства x :

$$t^2 = e^x - 1; t^2 + 1 = e^x; x = \ln(t^2 + 1); dx = [\ln(t^2 + 1)]' dt; dx = \frac{2t}{1+t^2} dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x - 1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dx = \frac{2t}{1+t^2} dt \end{array} \right\} = \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = \\
&= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C = \{ \text{обратная замена } t = \sqrt{e^x - 1} \} = \\
&= 2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C.$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$. Результат проверить дифференцированием.

Решение

Применим метод интегрирования по частям. Так как в данном примере подынтегральная функция II типа, положим

$$U = \ln x, \quad dV = \frac{dx}{x^3}.$$

Первое из этих равенств, продифференцируем, а второе – проинтегрируем. Находим

$$dU = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \text{ и } V = \int dV = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2},$$

постоянную C здесь брать не обязательно. Получаем

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} \int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU \\ U = \ln x \quad ; \quad dU = \frac{dx}{x} \\ dV = \frac{dx}{x^3} \quad ; \quad V = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\} = -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln x - \int \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = C - \frac{1+2\ln x}{4x^2}.$$

Сделаем проверку, дифференцируя полученный результат по x :

$$\begin{aligned} \left(C - \frac{1+2\ln x}{4x^2} \right)' &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1+2\ln x)' \cdot x^2 - (1+2\ln x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(2/x) \cdot x^2 - (1+2\ln x) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2x - 2x - 4x \ln x}{x^4} = \frac{\ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{\ln x}{x^3} dx = C - \frac{1+2\ln x}{4x^2}.$

Пример 4. Найти интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Решение

Применим метод интегрирования по частям два раза. Имеем подынтегральную функцию I типа.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU \\ U = x^2 \ ; \ dU = 2x dx \\ dV = e^x dx \ ; \ V = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} U = x \ ; \ dU = dx \\ dV = e^x dx \ ; \ V = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}.$

Решение

Сведем данный интеграл к табличному интегралу.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3/2 x - 1/2}} = \\
&= \{ \text{в знаменателе выделим полный квадрат} \} = \\
&= \left\{ x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x + 3/4)}{\sqrt{(x + 3/4)^2 - 17/16}} = \left\{ \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} \right| + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} \right| + C.$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

Решение

Необходимо избавиться от иррациональности в интеграле. Переменная интегрирования x в данном интеграле имеет степени $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Наименьшим общим кратным знаменателей этих дробей является число 6. Поэтому замена $x = t^6$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t + 1} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\
&= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1| \right) + C = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x}, \\ t^3 = \sqrt{x}, \quad t^2 = \sqrt[3]{x} \end{array} \right\} = \\
&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.
\end{aligned}$$

Здесь для выделения целой части неправильной рациональной дроби $\frac{t^3}{t + 1}$ был применен метод деления многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r}
 t^3 \\
 - \quad t^3 + t^2 \\
 \hline
 - t^2 \\
 - \quad - t^2 - t \\
 \hline
 t \\
 - \quad t + 1 \\
 \hline
 -1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 t + 1 \\
 \hline
 t^2 - t + 1
 \end{array} \right.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x-1} + 2}{(\sqrt[3]{x-1} + 1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.$

Решение

Необходимо рационализировать данный интеграл. Наименьшим общим кратным знаменателем дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ является число 6. Используем подстановку $x-1 = t^6.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x-1} + 2}{(\sqrt[3]{x-1} + 1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^6, \quad dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x-1} = t^3, \quad \sqrt[3]{x-1} = t^2 \end{array} \right\} = \int \frac{(t^3 + 2)6t^5 dt}{(t^2 + 1)t^4} = \\
 &= \{ \text{выделим целую часть} \} = \\
 &= 6 \int \frac{t^4 + 2t}{t^2 + 1} dt = 6 \int \left(t^2 - 1 + \frac{2t + 1}{t^2 + 1} \right) dt = 6 \int \left(t^2 - 1 + \frac{2t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \\
 &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - t + \ln|t^2 + 1| + \operatorname{arctg} t \right) + C = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x-1}, \\ t^3 = \sqrt{x-1}, \quad t^2 = \sqrt[3]{x-1} \end{array} \right\} = \\
 &= 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt[6]{x-1} - 6\ln|\sqrt[3]{x-1} + 1| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x-1} + C.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x-1} + 2}{(\sqrt[3]{x-1} + 1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx =$

$$= 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt[6]{x-1} - 6\ln|\sqrt[3]{x-1} + 1| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x-1} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$.

Решение

Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. При вычислении данного интеграла сначала выделим целую часть, т.е. представим данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби.

$$I = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(\frac{2x^5 + 6x^3}{x^4 + 3x^2} + \frac{1}{x^4 + 3x^2} \right) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2} \right) dx$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие.

$$\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3};$$

$$\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + 3)};$$

$$1 = Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2;$$

$$0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 3Ax + 3B.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$x^3: A + C = 0;$$

$$x^2: B + D = 0;$$

$$x^1: 3A = 0;$$

$$x^0: 3B = 1.$$

Получаем $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$, $D = -1/3$. Тогда $\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)}$.

$$I = 2 \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 3} dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4 \sin x + \cos x + 5}.$

Решение

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + \cos x + 5} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= \int \frac{2dt}{8t + 1 - t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{2dt}{4t^2 + 8t + 6} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + \frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{1/\sqrt{2}} \right) + C = \\ &= \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{4 \sin x + \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right) + C.$

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}.$

Решение

Так как $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ воспользуемся тригонометрической заменой $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 2} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \{t = \operatorname{tg} x\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$

Пример 11. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение

Так как показатели степеней тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ четные, используем формулы понижения степени:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x; \quad 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x; \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x.$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \\
&= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$

Пример 12. Найти интеграл $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$.

Решение

Один из показателей степеней тригонометрических функций при $\sin x$ четный, а другой при $\cos x$ - нечетный. Преобразуем подынтегральное выражение с целью исключения $\cos x$:

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int \sin^{10} x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^{10} x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\ &= \int \sin^{10} x d(\sin x) - \int \sin^{12} x d(\sin x) = \frac{1}{11} \sin^{11} x - \frac{1}{13} \sin^{13} x + C.\end{aligned}$$

Ответ: $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx = \frac{1}{11} \sin^{11} x - \frac{1}{13} \sin^{13} x + C.$

Пример 13. Найти интеграл $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.

Решение

Избавимся от иррациональности в интеграле с помощью тригонометрической замены.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2} dx &= \{x = \sin t, dx = \cos t dt\} = \int \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sin t \cos^2 t dt = \\ &= -\int \cos^2 t d(\cos t) = -\frac{1}{3} \cos^3 t + C = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t, \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \\ \cos^3 t = (\sqrt{1-x^2})^3 \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C.\end{aligned}$$

Ответ: $\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C.$

Пример 14. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$.

Решение

Построим фигуру в плоскости Oxy
(Рис. 5.1):

$y = 4 - x^2$ - парабола симметричная относительно оси Oy ветви вниз,

$y = 2 - x$ - прямая.

Находим точки пересечения функций

$$4 - x^2 = 2 - x, \Rightarrow$$

$$(2 - x)(2 + x) - (2 - x) = 0, \Rightarrow$$

$$(2 - x)(2 + x - 1) = 0, \Rightarrow$$

$$(2 - x)(1 + x) = 0, \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

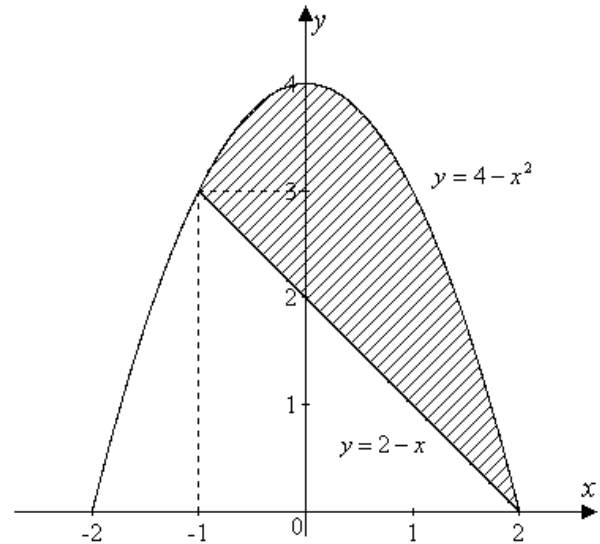


Рис. 5.1

Фигура ограничена сверху параболой $y_в = 4 - x^2$, снизу прямой $y_н = 2 - x$, слева и справа прямыми $x_н = -1$ и $x_в = 2$, поэтому

$$S = \int_{x_н}^{x_в} [y_в - y_н] dx = \int_{-1}^2 [(4 - x^2) - (2 - x)] dx = \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4,5 \text{ ед}^2.$$

Ответ: $S = 4,5$ кв. ед.

Пример 15. Вычислить пло-

щадь астроида $\begin{cases} y = 3\cos^3 t \\ x = 3\sin^3 t \end{cases}$.

Решение

Уравнение кривой задано в параметрическом виде; она симметрична относительно осей Ox и Oy (Рис. 5.2).

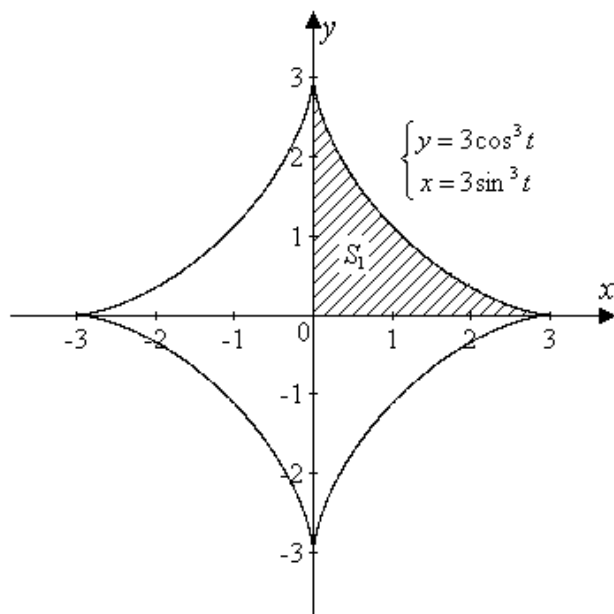


Рис. 5.2

$$S = 4S_1 = 4 \int_0^3 y dx.$$

Полагая

$$x = 3\sin^3 t, \quad dx = 9\sin^2 t \cos t dt$$

$$x = 0, \quad 0 = 3\sin^3 t, \quad \sin t = 0, \quad t = 0;$$

и находя новые пределы интегрирования:

$$x = 3, \quad 3 = 3\sin^3 t, \quad \sin t = 1, \quad t = \frac{\pi}{2};$$

имеем:

$$\begin{aligned} S = 4S_1 &= 4 \int_0^3 y dx = 4 \int_0^{\pi/2} (3\cos^3 t \cdot 9\sin^2 t \cos t) dt = 108 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt = \\ &= 108 \int_0^{\pi/2} (\sin t \cdot \cos t)^2 \cdot \cos^2 t dt = 108 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt + \frac{27}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cdot \cos 2t dt = \left\{ \cos 2t dt = \frac{1}{2} d(\sin 2t) \right\} = \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt + \frac{27}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2t) = \left(\frac{27}{4} t - \frac{27}{4 \cdot 4} \sin 4t + \frac{27}{4} \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{27}{4} \frac{\pi}{2} - \frac{27}{16} \sin 2\pi + \frac{27}{12} \sin^3 \pi + \frac{27}{16} \sin 0 - \frac{27}{12} \sin^3 0 = \frac{27}{8} \pi \text{ ед}^2. \end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{27}{8} \pi$ кв. ед.

Пример 16. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, при $1 \leq x \leq 2$.

Решение

Дуга задана в декартовой системе координат в явном виде $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, пре-

делы интегрирования заданы $1 \leq x \leq 2$. Составим интеграл:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\sqrt{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Ответ: $L = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ ед.

Пример 17. Найти длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение

Кривая задана в параметрическом виде (Рис. 5.3).

$$\begin{aligned}
&[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = \\
&= [a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2 = \\
&= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = \\
&= 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

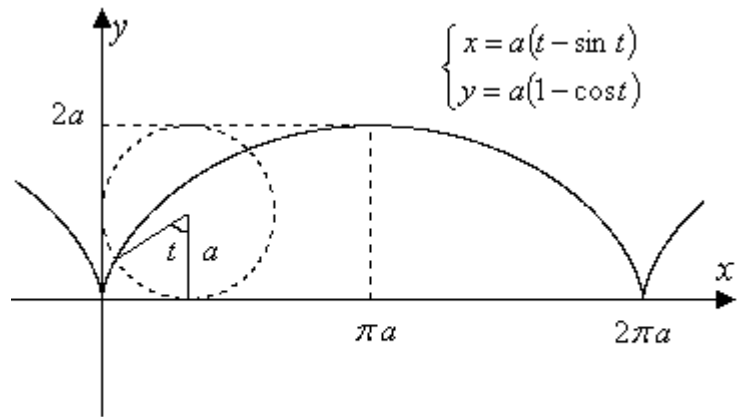


Рис. 5.3

Когда x пробегает интервал $[0, 2\pi a]$ параметр t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Ответ: $L = 8a$ ед.

Пример 18. Вычислить длину кардиоиды $r = 5(1 + \cos \varphi)$.

Решение

Кривая задана в полярных координатах (Рис. 5.4).

Кардиоида симметрична относительно полярной оси и строится по точкам.

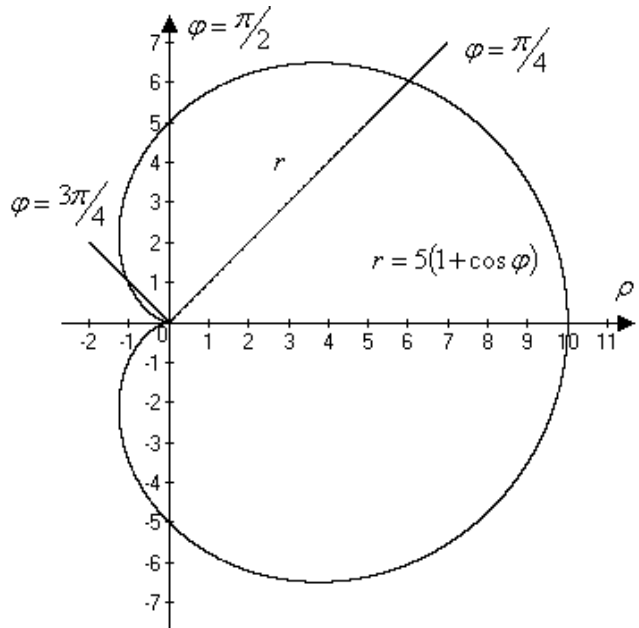


Рис. 5.4

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-a \sin \varphi)^2 + a^2(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \\
 &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.
 \end{aligned}$$

Ответ: $L = 8a$ ед.

Пример 19. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, которая ограничена параболой $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

Решение

Построим фигуру на плоскости Oxy (Рис. 5.5), она ограничена параболой $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{aligned}
 3 - x^2 &= x^2 + 1 \Rightarrow 2 = 2x^2 \Rightarrow \\
 x^2 &= 1 \Rightarrow x = \pm 1.
 \end{aligned}$$

Тогда $V = V_1 - V_2$,

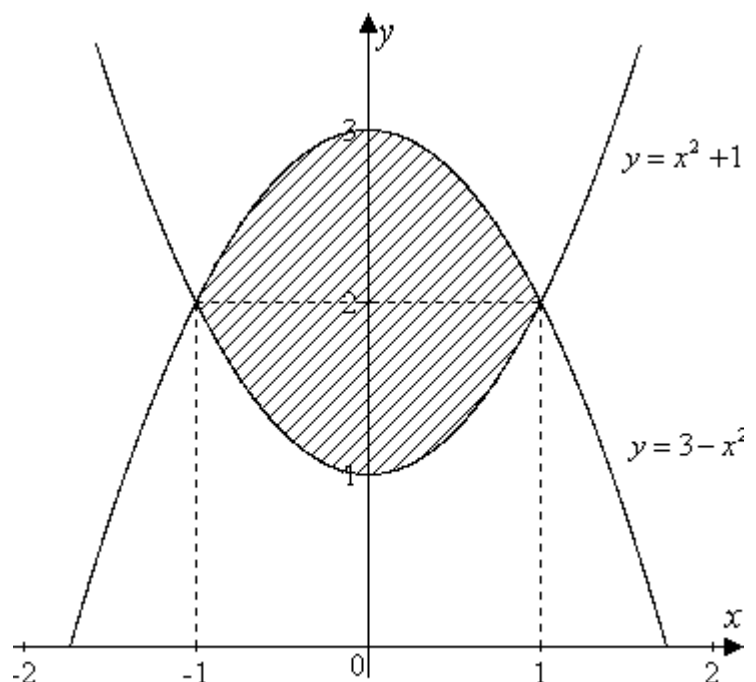


Рис. 5.5

где $V_1 = \pi \int_{-1}^1 (3 - x^2)^2 dx$, $V_2 = \pi \int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx$.

$$V_1 = \pi \int_{-1}^1 (3 - x^2)^2 dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{в силу симметрии} \\ \text{имеем} \end{array} \right\} = 2\pi \int_0^1 (3 - x^2)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (9 - 6x^2 + x^4) dx = 2\pi \left(9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(9 - 2 + \frac{1}{5} \right) = 2\pi \cdot \frac{36}{5} = \frac{72\pi}{5};$$

$$V_2 = \pi \int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = 2\pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = 2\pi \left(\frac{3+10+15}{15} \right) = 2\pi \cdot \frac{28}{15} = \frac{56\pi}{15};$$

$$V = \frac{72\pi}{5} - \frac{56\pi}{15} = \pi \cdot \frac{216 - 56}{15} = \pi \cdot \frac{160}{15} = \frac{32\pi}{3} \text{ ед}^3.$$

Ответ: $V = \frac{32\pi}{3}$ куб. ед.

Пример 20. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

Решение

Построим фигуру, ограниченную данными линиями (Рис. 5.6):

$$x^2 + y^2 = x, \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0, \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} - \text{окружность с цен-}$$

тром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, радиусом $\frac{1}{2}$;

$$x^2 + y^2 = 2x, \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0, \Rightarrow$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ - окружность с центром в точке $(1; 0)$, радиусом 1;

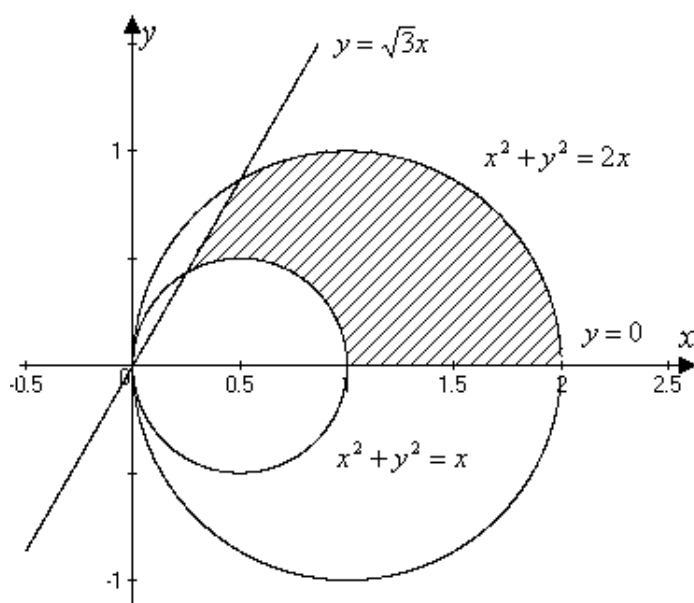


Рис. 5.6

$y=0$ - ось Ox ; $y = \sqrt{3} \cdot x$ - прямая.

Найдем уравнения границ, подставив в уравнения окружностей и уравнения прямых формулы перехода в полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi . \\ I = r \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r \cos \varphi \Leftrightarrow r^2 = r \cos \varphi \Leftrightarrow r = \cos \varphi;$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi \Leftrightarrow r^2 = 2r \cos \varphi \Leftrightarrow r = 2 \cos \varphi;$$

$$y=0 \Leftrightarrow r \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0;$$

$$y = \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow r \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot r \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно $D: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi \end{cases}.$

Тогда:

$$\begin{aligned} S_D &= \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r dr = \int_0^{\pi/3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (4 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}$ кв. ед.