НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Новосибирск 2013

Содержание

1 Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y.

Определение 1. *Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$ называется функцией и записывается $y = f(x),\ x \in X :\ X \to Y$.*

f отображает множество X на множество Y.

X — область определения функции f: $D(f)$.

Y — множество значений функции f: $E(f)$.

Если X и Y — числовые множества, то f — числовая функция. В этом случае x — аргумент или независимая переменная, а y — функция или зависимая переменная.

График функции $y = f(x)$ — множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо задать (указать) правило.

Способы задания функции:

1) аналитический;

2) графический;

3) табличный;

4) алгоритмический.

1.1 Основные характеристики функции

Элементарные функции — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и *композиций* из следующих основных элементарных функций:

- алгебраические:

  – степенная;

  – рациональная.

- трансцендентные:

  – показательная и логарифмическая;

  – тригонометрические и обратные тригонометрические.

Каждую элементарную функцию можно задать формулой, то есть набором конечного числа символов, соответствующих используемым операциям. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

1. Чётность, нечётность.
   $y = f(x)$ — *чётная* функция,
   если $\forall\, x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$
   $y = f(x)$ — *нечётная* функция,
   если $\forall\, x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

2. Монотонность.
   Пусть $y = f(x)$ определена на множестве D, $D_1 \subset D$,
   $x_1,\ x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функция *возрастающая* на D_1;
   $x_1,\ x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция *неубывающая* на D_1;
   $x_1,\ x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, то функция *убывающая* на D_1;
   $x_1,\ x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция *невозрастающая* на D_1.
   (Функции монотонные на множестве, строго монотонные функции, интервалы монотонности)

3. Ограниченность.
   $y = f(x)$ — *ограниченная* на множестве, если $\exists\, M > 0$:
   $\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

($f(x) \leq M,\ f(x) \geq m$ — ограниченная сверху, ограниченная снизу)

4. Периодичность.
   $y = f(x)$ — *периодическая* на $D(f)$, если $\exists\, T > 0, \forall x \in D(f)$ и $(x+T) \in D(f) \Rightarrow f(x+T) = f(x)$.
   Минимальное значение среди всех возможных $T > 0$ — период.

1.2 Обратная функция

Дана $y = f(x)$: D — область определения, E — множество значений.

Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D.

$\varphi(y)$ — *обратная функция* к $f(x)$: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Функция $\varphi : Y \to X$ является обратной к функции $f : X \to Y$, если выполнены следующие тождества:

- $f(\varphi(y)) = y$ для всех $y \in Y$;
- $\varphi(f(x)) = x$ для всех $x \in X$.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$ обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x, если это возможно.

Функция $y = f(x)$ имеет обратную $\Leftrightarrow$ функция задаёт взаимнооднозначное соответствие между множествами D и $E \Rightarrow \forall$ строго монотонная функция имеет обратную.

Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой. Если же записать функцию в виде $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$, то это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$, т. е. кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

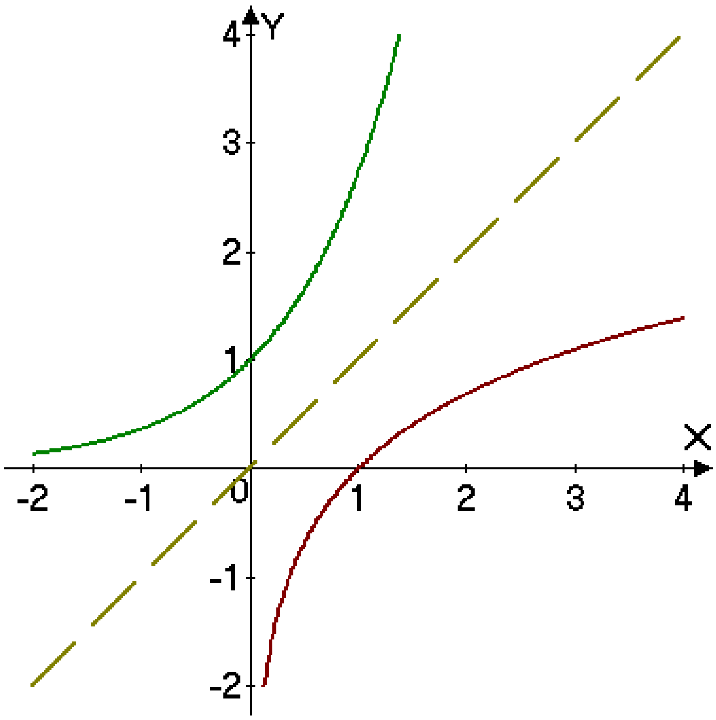


Рис. 1. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$

Алгоритм построения обратной функции $y = f^{-1}(x)$

1. Решить уравнение $f(x) = y$ относительно x, если это возможно: $x = \varphi(y)$.

2. Записать функцию в виде $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$.

Примеры

1. Построить функцию обратную к $y = 2x + 1$.

2. Построить функцию обратную к $y = e^x$.

3. Построить функцию обратную к $y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$.

1.3 Некоторые элементарные функции

1. Знак числа.

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Целая часть числа: $[x] = \operatorname{entier} x = \lfloor x \rfloor$.
   $[x]$ — запись, предложенная Гауссом; $\lfloor x \rfloor$ — Кеннет Айверсон (Канада).
   $\lfloor x \rfloor$ — пол;
   $\lceil x \rceil$ — потолок;
   $[2,7] = \lfloor 2,7 \rfloor = 2$;
   $\lceil 2,7 \rceil = 3$;
   $[-2,7] = \lfloor -2,7 \rfloor = -3$;
   $\lceil -2,7 \rceil = -2$.

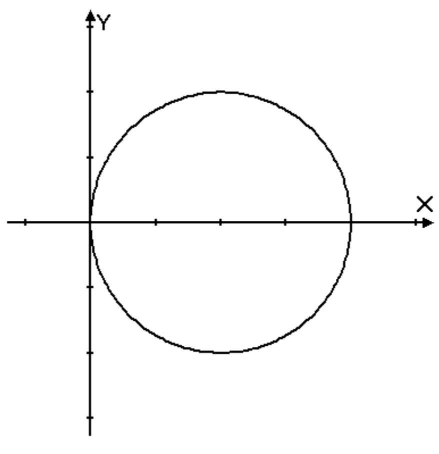
   Количество цифр в записи числа n в позиционной системе счисления с основанием b: $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$

3. Дробная часть числа: $\{x\} = x - [x] = x \bmod 1$.

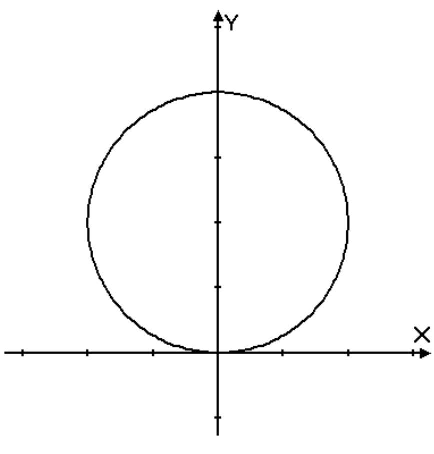
4. Остаток от деления: $x \bmod y = x - y\lfloor x/y \rfloor$.

Полярная система координат

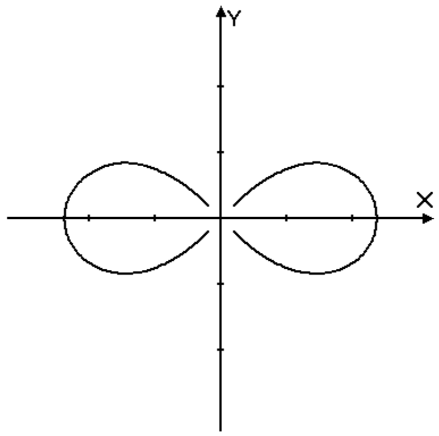
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$$



Окружность
$\rho = 2R\cos\varphi$

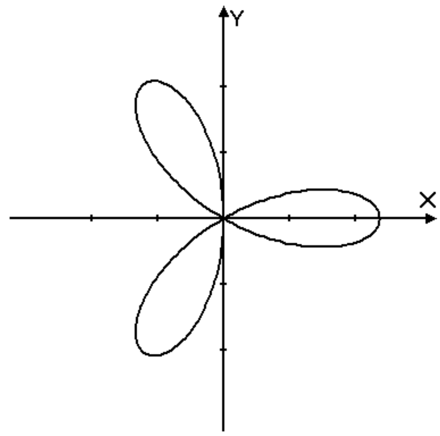


Окружность
$\rho = 2R\sin\varphi$



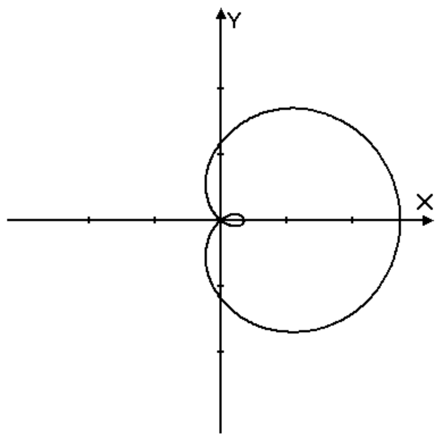
Лемниската Бернулли

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$



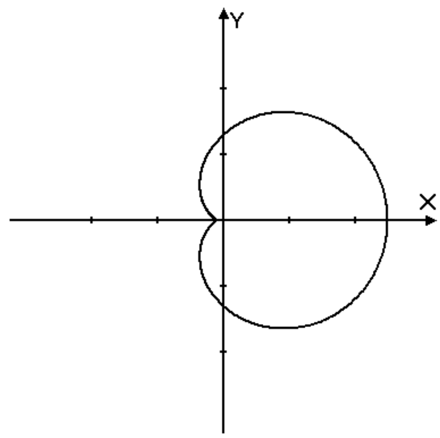
Трёхлепестковая роза

$\rho = a\cos 3\varphi$



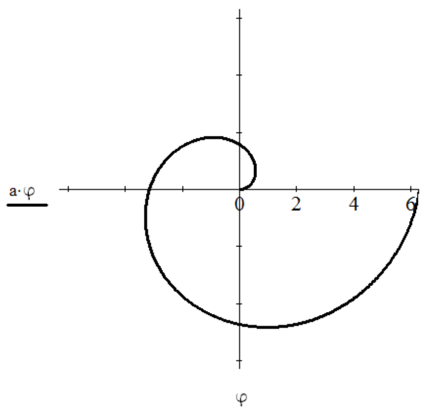
Улитка Паскаля

$\rho = b + a\cos\varphi,\ a > b$

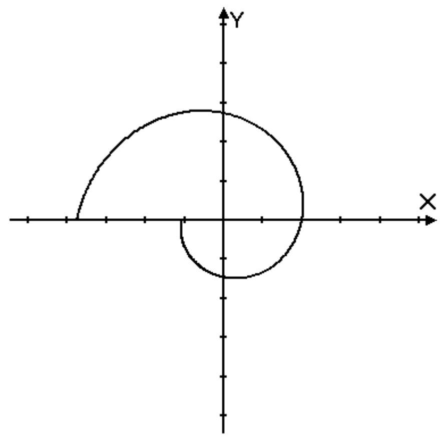


Кардиоида

$\rho = b + a\cos\varphi,\ a < b$



Спираль Архимеда $\rho = a\varphi$

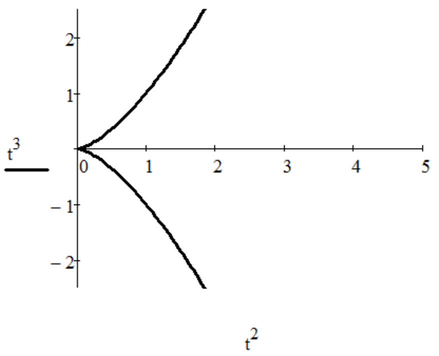


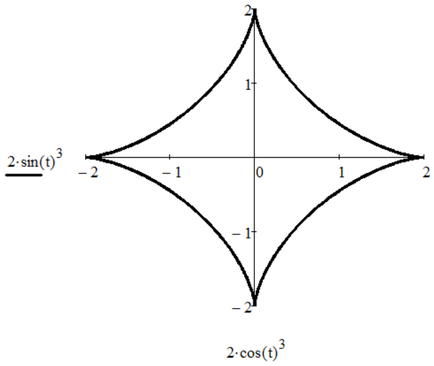
Логарифмическая спираль

$\rho = ae^{b\varphi}$

Параметрическое задание линии

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$



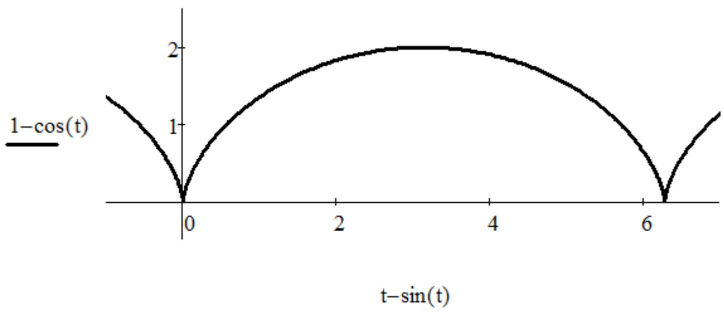


Полукубическая парабола

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases}$$

Астроида

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$



Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t, \end{cases}$$

2 Теория пределов

2.1 Предел последовательности

Определение 2. *Под числовой последовательностью*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

понимается функция $x_n = f(n)$, $n \in N$. x_n — общий член последовательности.

Т. е., чтобы задать последовательность, необходимо задать функцию натурального аргумента.

Примеры

$$v_n = n^2 + 1,\ z_n = (-1)^n \cdot n,\ y_n = \frac{1}{n},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists\ M > 0\ \forall\ n \in N\ |x_n| < M$. В противном случае — последовательность не ограниченная.*

Т. к. последовательность — это функция натурального аргумента, то она, как и любая функция, может быть: возрастающая, неубывающая, убывающая, невозрастающая, монотонная.

Рекуррентный способ задания последовательности: $x_n = f(x_{n-1})$. Например последовательноси чисел Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Определение 4. *Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное числ $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство: $|x_n - A| < \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.*
$(A:\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.)$

Говорят: последовательность x_n *сходится* к A.

Сходящиеся последовательности имеют только один предел. Последовательности не имеющие предела — *расходящиеся.*

Постоянная последовательность $x_n = c,\ n \in N$ имеет предел, равный c, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2.1.1 Бесконечно малые последовательности

Определение 5. *Последовательность a_n называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.)$

Примеры

$$a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{n+1}{n^2},\ c_n = \sin\frac{1}{n}.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = 0$. Сумма двух бесконечно малых последовательностей, а значит и сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей, есть бесконечно малая последовательность.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $|y_n| < M$ для $n \in N$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n y_n = 0$. Призведение бесконечно малой последовательности на ограниченную, есть бесконечно малая последовательность. Следствие: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Пример

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

2.1.2 Бесконечно большие последовательности

Определение 6. *Последовательность x_n называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует номен N_M, такой что начиная с этого номера, т. е. для всех членов последовательности с номерами больше N_M, выполняется неравенство: $|x_n| > M$ при $n > N_M$:*

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty.$
$(\forall M > 0\ \exists\, N_M : \forall n > N_M \Rightarrow |x_b| > M \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty)$

Бесконечно большая последовательность становится и остаётся по абсолютной величине больше любого наперёд заданного числа.

Примеры

$$x_n = n,\ y_n = n^2,\ z_n = \ln n,\ u_n = \frac{n^2+1}{n}.$$

2.2 Свойства последовательностей

1. Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$, то последовательность $x_n = \dfrac{1}{a_n}$ — бесконечно большая.
2. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то последовательность $a_n = \dfrac{1}{x_n}$ — бесконечно малая.

Арифметические свойства пределов

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b},\ y_n \neq 0,\ b \neq 0.$

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

В качестве примера рассмотрим последовательность:

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}, n \in N.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n =$$
$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n.$$

Положим $a = 1$, $b = \dfrac{1}{n}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

С увеличением n число положительных слагаемых увеличивается и $\dfrac{1}{n}$ — убывает, а $\left(1-\dfrac{1}{n}\right), \left(1-\dfrac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)$ — возрастает $\Rightarrow$ последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ — возрастающая, при этом $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$.

Покажем ограниченность этой последовательности. Заменим в выражении (1) каждую скобку на 1.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} <$$

$$< 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

выражение в скобках — сумма геометрической прогрессии

$$= 1+\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3.$$

В результате $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — ограниченная.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045\ldots$$

Неопределённости

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \; \left\{\frac{0}{0}\right\} \; \{0\cdot\infty\} \; \{\infty-\infty\} \, \{1^\infty\}$$

Примеры

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-3}{2n^2+7n+5}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+3n^2-5n}{n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+7}{2n^2-3n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

3 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ опрелелена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может самой этой точки.

Определение 7 (Коши). *Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.*

$$A:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Односторонние пределы

Предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к x_0 слева:

$$A_1:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

Предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к x_0 справа:

$$A_2:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют оба односторонних предела.

Примеры

1) $\lim\limits_{x \to 1-0} 2^{1/(x-1)} = 0;$

2) $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^{1/(x-1)} = \infty.$

Предел функции при $x \to \infty$

$$A:\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ M > 0\ \forall|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

3.1 Бесконечно большая функция

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0\ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если

$$\forall\ M > 0\ \exists\ N > 0\ \forall\ x : |x| > N\ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty;$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x = \infty.$

3.2 Бесконечно малая функция

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0;$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x} = 0.$

3.3 Свойства пределов функции

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций — есть функция бесконечно малая.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию — есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел — есть бесконечно малая функция.

4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция ($\alpha(x) \neq 0$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — есть бесконечно большая функция, и наоборот, если функция $f(x)$ — бесконечно большая функция, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — есть бесконечно малая функция.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = ca$;

6. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a \pm b$;

7. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a \cdot b$;

8. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{a}{b},\ \varphi(x) \neq 0,\ b \neq 0.$

«Принцип двух конвоиров»

Теорема 2 (О промежуточной функции). *Если функция $y = f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то она также стремится к этому пределу, т. е. если*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$;

2) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Доказательство

Из первого условия $\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, δ-окрестности точки x_0 в одной из которых выполнено: $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, а в другой: $|\psi(x) - A| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \psi(x) - A < \varepsilon$. Пусть δ — меньшее из чисел δ_1, δ_2. Тогда в этой δ-окрестности выполнены оба неравенства.

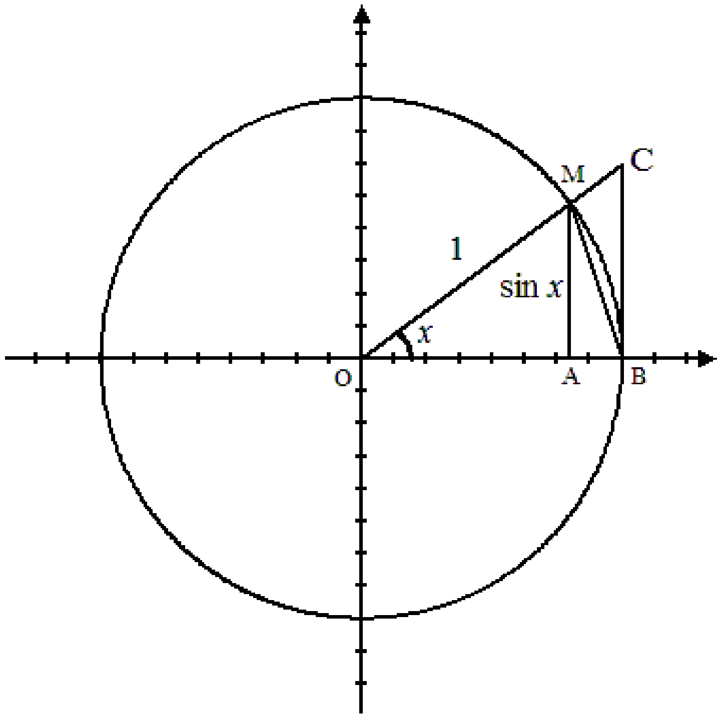
Из второго условия имеем: $\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq \psi(x) - A$. В результате имеем: $-\varepsilon \leq f(x) - A \leq \varepsilon$ или $|f(x) - A| \leq \varepsilon$.

Т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ч. т. д.

Теорема 3 (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство



$$0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$S_{\Delta OMB}<S_{\text{сек}}<S_{\Delta OCB}$$
$$S_{\Delta OMB}=\frac{\sin x}{2},\ S_{\text{сек}}=\frac{x}{2},\ S_{\Delta OCB}=\frac{\operatorname{tg} x}{2}$$
$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2}$$
$$\sin x<x<\operatorname{tg} x$$

Разделим левую и правую части неравенств на $\sin x$ ($\sin x\neq 0$).

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\text{ или }\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$
$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim_{x\to 0}1=1\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\text{ по теореме о промежуточной функции }\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема 4 (Второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e,\ x\in R.$$

Доказательство

Предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045\ldots,\ n\in N.$$

При $x\to\infty$ значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n\le x<n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\Rightarrow\ 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e,$$

$\Rightarrow$ по теореме о промежуточной функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

3.4 Вычисление пределов функции

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет.

Если функция является элементарной, и если предельное значение аргумента принадлежит области её определения, вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, т. е. предел элементарной функции $y=f(x)$ при x, сремящемуся к значению x_0, которое входит в область её определения, равен значению функции при $x=x_0$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Если аргумент стремится к ∞ или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то требуется дополнительное исследование.

Из свойств элементарных функций $(a > 0)$

1) $\lim\limits_{x\to\infty} ax = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{a}{x} = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{a}{x} = +\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a}{x} = \infty$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = 0$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, 0 < a < 1, \\ +\infty, a > 1; \end{cases}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, a > 1, \\ +\infty, 0 < a < 1; \end{cases}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, a > 1, \\ -\infty, 0 < a < 1; \end{cases}$

10) $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, a > 1, \\ +\infty, 0 < a < 1; \end{cases}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$;

12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$;

14) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

Более сложные случаи нахождения предела функции

Неопределённости

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\ \left\{\frac{0}{0}\right\}\ \{0\cdot\infty\}\ \{\infty-\infty\}\,\{1^{\infty}\}$$

I. $x \to x_0$ или $x \to \infty$ неопределённость $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

Замечание. При $x \to x_0$, то $x - x_0 \neq 0$, т. е. x не принимает значение x_0, следовательно дробь можно сократить на $x - x_0$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-2x^2+4x-8}$.

II. $x \to x_0$ или $x \to \infty$ неопределённость $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Замечание. Предельный переход $x \to \infty$ может быть заменён предельным переходом $\alpha \to 0$, $\alpha = \dfrac{1}{x}$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2-x+8}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$.

III. $x \to x_0$ или $x \to \infty$ неопределённость $\{0 \cdot \infty\}$

Приводится к неопределённости $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

IV. $x \to x_0$ или $x \to \infty$ неопределённость $\{\infty - \infty\}$

Приводится к неопределённости $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

V. $x \to x_0$ или $x \to \infty$ неопределённость $\{1^\infty\}$

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+2x-1}\right)^{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

3.5 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\ A\neq 0,\ A\in R,$
   то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — называются бесконечно малыми функциями *одного порядка малости.*

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *высшего порядка малости* относительно $\beta(x)$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *более низкого порядка* малости относительно $\beta(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A,\ A\neq 0,\ A\in R,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *порядка* n относительно $\beta(x)$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$
   то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *эквивалентные* бесконечно малые функции.

Теорема 5. *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.*

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

5) $1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;

6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

7) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln b$;

8) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

9) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\log_a e = \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;

10) $(1+\alpha(x))^k - 1 \sim k\cdot\alpha(x)$, $k > 0$;

11) $\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{2}$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{3x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\pi^3 - x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{e^{x^2} - 1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sqrt{1+4x} - 1}$.

Замечание. Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно большие функции, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_\infty}\beta(x)=\infty$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\ A\neq 0,\ A\in R,$
   то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — называются бесконечно большими функциями *одного порядка роста.*

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *более низкого порядка роста* относительно $\beta(x)$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *более высокого порядка роста* относительно $\beta(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A,\ A\neq 0,\ A\in R,$
   то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *порядка* n относительно $\beta(x)$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$
   то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *эквивалентные* бесконечно большие функции.

4 Непрерывность функций. Точки разрыва

Приращение аргумента: $\Delta x = x - x_0$.

Приращение функции: $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$.

Определение 8 *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)) = 0.$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \; \forall \, x : \; |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Замечание. В отличие от предела функции окрестность в этом случае не является выколотой.

Из определения следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен её частному значению в этой точке, т. е. если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т. е. в самой этой точке x_0 и вблизи этой точки);

2) функция должна иметь одинаковые односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a; b)$ если она непрерывна в каждой точке интервала.

Функция $y = f(x)$ называется разрывной в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *конечным* или 1-*го рода*, если существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1, \ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2, \ A_1 \neq A_2.$$

Скачок функции: $A_2 - A_1$.

Если $A_1 = A_2$ — устранимый разрыв.

Все другие случаи — *разрыв* 2-*го рода.*

4.1 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 6. *Все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения, т. е. область непрерывности полностью совпадает с её областью определения.*

Теорема 7. *Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций — есть функция непрерывная, для частного за исключением тех значений аргумента, в которых знаменатель равен нулю.*

Теорема 8. *Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.*

Теорема 9. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$, то обратная функция $y = \varphi(x)$ так же непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$.*

Теорема 10 (Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.*

Теорема 11. *Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема 12 (Больцано-Коши). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B.*

Примеры

Исследовать функции на непрерывность.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

2) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10}$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;

4) $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$;

5) $f(x) = \lg \left(x^2 + 3x\right)$;

6) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1, \\ 4 - 2x,\ 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7,\ 2,5 \le x < \infty. \end{cases}$

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.

5. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

6. *Берман, Н. Г.* Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. / Н. Г. Берман. — СПб.: «Профессия», 2005. — 432 с.