НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Новосибирск 2013

Содержание

1 Функции одной переменной

Знание производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$ [2].

1.1 Производная функции одной переменной

Рассмотрим функцию от одной переменной $y = f(x)$ и два значения аргумента $x = x_0$, $x = x_1$ принадлежащие области её определения, причём $x_1 = x_0 + \Delta x$. Величину Δx будем называть *приращение аргумента*, а разность значений функции в этих точках — $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции.

Пусть $S(t)$ — закон движения. $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ — средняя скорость.

$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ — мгновенная скорость.

$Q = Q(t)$ — количество электричества.

$I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ — сила тока.

$m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $(0, 0)$ и $(x, 0)$.

$\rho = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ — линейная плотность.

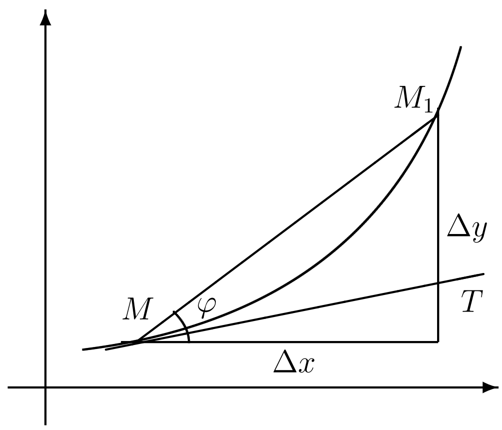

Рис. 1. Секущая и касательная к графику функции $y = f(x)$

Определение 1. *Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка M_1 неограничено приближается по кривой к точке M.*

Определение 2. *Производной фкнкции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$\dfrac{dy}{dx}$ — Лейбниц; y' — Лагранж; $D_x y$ — Коши.

Замечание. Производная функции $y = f(x)$ — есть некоторая функция $y = f'(x)$.

Физический смысл производной — скорость изменения функции. Геометрический смысл — тангенс угла наклона касательной.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$ называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной — дифференцированием.

Производная функции в точке: $y'|_{x=x_0} = f'(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к кривой в точке $(x_0, y_0 = f(x_0))$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к кривой в точке (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

1.2 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 1 (Необходимое условие дифференцируемости) *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней (обратное утверждение неверно).*

1.3 Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Доказательство

$$
\begin{aligned}
y &= u \pm v, \\
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.
\end{aligned}
$$

Теорема 3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Доказательство

$$
\begin{aligned}
y &= u \cdot v, \\
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u) \cdot (v+\Delta v) - u \cdot v}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot v + \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = u' \cdot v + u \cdot v'.
\end{aligned}
$$

Теорема 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

Доказательство

$$\begin{aligned}
y &= \frac{u}{v},\\
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta v)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} =\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot v + \Delta u \cdot v - u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v \cdot (v + \Delta v) \cdot \Delta x} =\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.
\end{aligned}$$

Теорема 5 (Производная сложной функции). *Если* $u = \varphi(x)$ *имеет производную* u' *в точке* x*, а* $y = f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(x)$*, то* $y = f(\varphi(x))$ *имеет производную в точке* x*:* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Доказательство

$\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$.

$\Delta u \to 0$, $\alpha \to 0 \Rightarrow \Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, имеем $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x + \beta$.

$\Delta x \to 0$, $\beta \to 0 \Rightarrow \Delta u = u'_x \Delta x + \beta \Delta x$.

$\Delta y = y'_u(u'_x \Delta x + \beta \Delta x) + \alpha(u'_x \Delta x + \beta \Delta x)$, т. е.

$\Delta y = y'_u u'_x \Delta x + y'_u \beta \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha\beta \Delta x$.
Разделим на Δx и $\Delta x \to 0$. Получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Теорема 6 (Производная обратной функции).
Если $y = f(x)$ *— монотонна на* $(a; b)$ *и* $f'(x) \neq 0$, *то обратная функция* $x = \varphi(y)$ *имеет производную* $\varphi'(y)$: $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ *или* $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Доказательство

$\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$, $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$ в силу непрерывности.

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'_y}$, т. е. $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

или $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

1.4 Таблица производных

Правила дифференцирования

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

4) $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;

5) $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$.

Производные элементарных функций

1) $(C)' = 0$;

2) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$;

6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

15) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

16) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

1.5 Производная неявно заданной функции

В случае неявного задания функции $F(x, y) = 0$ для нахождения производной y' достаточно продифференцировать левую и правую части уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной x, рассматривая при этом y как функцию x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример.

$$\begin{aligned} F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0,\\ 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot y' = 0,\\ y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}. \end{aligned}$$

1.6 Производная функции заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t). \end{cases}$$

$x = x(t)$ — обратная к $t = \varphi(x)$, $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$.

Рассмотрим сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$. Имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ или $y'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример.

$$\begin{cases} x = t^3,\\ y = t^2. \end{cases}$$

$x'_t = 3t^2,\ y'_t = 2t$, тогда $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$.

1.7 Логарифмическое дифференцирование

Первый случай.

$F(x) = \dfrac{\prod\limits_i u_i(x)}{\prod\limits_j v_j(x)}$.

Второй случай.

$F(x) = (u(x))^{v(x)}$ — показательно-степенная функция.

1.8 Производные высших порядков

$y' = f'(x)$ — функция переменной x. Если $f'(x)$ — дифференцируема, то

$$(y')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

производная второго порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d^ny}{dx^n},$$

производная n-го порядка.

Механический смысл производной второго порядка — ускорение.

Кривизну кривой можно определить как отношение угла поворота касательной $\Delta\varphi$ к длине пройденной дуги $\Delta s = MM_1$. Такое отношение $\Delta\varphi/\Delta s$ называется средней кривизной дуги кривой. Когда точка M_1 приближается к точке M, мы получаем кривизну кривой в точке M:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Кривизна k в общем случае может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от направления вращения касательной.

Если кривая задана своим радиусом вектором $\overrightarrow{r}(t)$, ее кривизна определяется формулой

$$k = \frac{\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''}{|\overrightarrow{r}'|^3},$$

где $\overrightarrow{r}'$, $\overrightarrow{r}''$ первая и вторая производные радиус-вектора. В этой формуле в числителе записано векторное произведение векторов $\overrightarrow{r}'$ и $\overrightarrow{r}''$.

При параметрическом задании координат кривой $x(t)$ и $y(t)$

формула для расчета кривизны принимает вид

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

Если плоская кривая задана явной функцией $y = f(x)$, кривизна кривой вычисляется по формуле

$$k = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

В случае, когда кривая задана в полярных координатах в виде $\rho = \rho(\varphi)$, ее кривизна k будет определяться выражением

$$k(\varphi) = \frac{\rho^2 + 2\rho' - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right)^{3/2}}.$$

Под кривизной кривой часто понимается абсолютное значение кривизны, без учета направления вращения касательной. В таком случае приведенные выше формулы остаются верными, но в числителе появляется модуль. Например, формула кривизны при параметрическом задании координат кривой $x(t)$ и $y(t)$ будет выглядеть так:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны:

$$R = \frac{1}{|k|}.$$

Окружность с таким радиусом и центром, расположенном на главной нормали, будет наилучшим образом аппроксимировать плоскую кривую в данной точке.

Пример. Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $y'' = -\dfrac{b^4}{a^2y^2}$.

2.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_x x)'_t}{x'_t}.$$

1.9 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0.$$

Тогда можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ или $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$.

$f'(x)\Delta x$ — главная часть приращения функции.

Определение 3. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть её приращения, линейная относительно приращения аргумента.*

Обозначается dy, $dy = f'(x)dx$ (учитывая $y = x$, $y' = x' = 1$, $dy = dx = \Delta x$).

Геометрический смысл дифференциала функции — приращение ординаты касательной.

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, т. е. умножив производную на дифференциал переменной, получим дифференциал функции. Большинство теорем и формул остаются, например:

$$d(u + v) = du + dv,\ d(u \cdot v) = udv + vdu.$$

Найдём дифференциал сложной функции $y = f(u),\ u = \varphi(x)$ или $y = f(\varphi(x))$.

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \ \Rightarrow dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx.$$

Учитывая $\varphi'(x)dx = du$, имеем: $dy = f'(u)du$.

Дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной. Форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство — *инвариантность формы дифференциала.*

Применение дифференциала функции к *приближённым вычислениям.*

$$y(x) = y(x_0) + \Delta y \approx y(x_0) + dy = y(x_0) + f'(x_0)dx.$$

1.10 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

***Лемма* 1**. *Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0. Если эта производная $f'(x_0) > 0$ $[f'(x_0) < 0]$, то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, будет $f(x) > f(x_0)$ $[f(x) < f(x_0)]$, а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, будет $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$.*

Иными словами: функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает (убывает). Если имеется в виду односторонняя производная, например справа, то сохраняет силу лишь утверждение о значениях x, лежащих справа от x_0.

Доказательство

Следует из определения производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Теорема 7 (Ферма). *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке (a, b) и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(c)$ в этой точке, то необходимо $f'(c) = 0$.*

Доказательство

Пусть для определённости $f(c)$ принимает наибольшее значение в точке c. Предположение, что $f'(c) \neq 0$, приводит к противоречию: либо $f'(c) > 0$ и тогда по лемме $f(x) > f(c)$, если $x > c$, либо $f'(c) < 0$ и тогда $f(x) > f(c)$, если $x < c$. В обоих случаях $f(c)$ не может быть наибольшим.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 8 (Ролля). *Пусть:* 1) *функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере в открытом промежутке* (a, b); 3) *на концах промежутка функция принимает равные значения:* $f(a) = f(b)$.

Тогда между a *и* b *найдётся такая точка* c $(a < c < b)$, *что* $f'(c) = 0$.

Доказательство

Т. к. функция непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений: M и m.

- Если $m = M$, то $f(x) = const = m \Rightarrow f'(x) = 0$.
- $M \neq m \Rightarrow$ функция достигает хотя бы одного из этих значений во внутренней точке интервала (a, b).

  Пусть, например, $f(c) = M$, $c \in (a, b)$, $f(c) \geq f(x)$.

  $$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}, \; f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0.$$

  Если $\Delta x \geq 0$, $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \; f'(c) \leq 0,$

  если $\Delta x \leq 0$, $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \; f'(c) \geq 0.$

  Одновременно в точке c $f'(c) \leq 0$ и $f'(c) \geq 0$. Следовательно $f'(c) = 0$.

Теорема 9 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), причём $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$, то найдётся хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, что выполняется* $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Доказательство

$\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ (т. к. тогда бы существовала точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$ — это противоречит условию).

Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

$$F(a) = 0,\ F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0.$$

Следовательно по теореме Ролля $\exists\ c \in (a,b)$, что $F'(c) = 0$.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.\ \text{ч. т. д.}$$

Теорема 10 (Лагранж). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), то найдётся хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, что выполняется* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Доказательство

Частный случай теоремы Коши в случае когда $\varphi(x) = x$.

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый (выпуклый вверх).*

Если $f''(x) > 0$ — вогнутый (выпуклый вниз).

Доказательство

Пусть $f''(x) < 0$ при $\forall x \in (a, b)$. Возьмём на графике функции точку M с абсциссой x_0 и проведём касательную. Покажем, что график функции лежит ниже касательной.

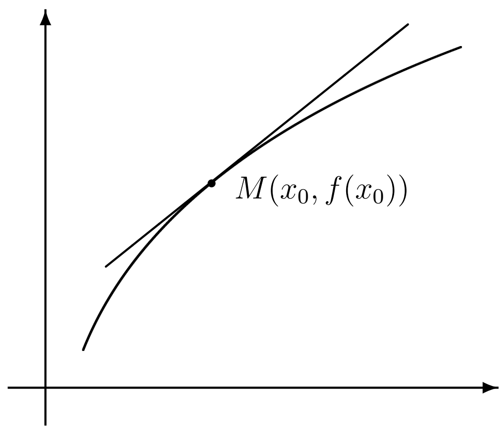

Рис. 2. Касательная к графику выпуклой функции $y = f(x)$

Уравнение касательной $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Рассмотрим разность между $y = f(x)$ и $y_{\text{кас}}$:

$$y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. В результате:

$$y - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Применим теорему Лагранжа ещё раз:

$$y - y_{\text{кас}} = f''(c)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем последнее равенство:

1) если $x > x_0$, то и $x - x_0 > 0$, и $c - x_0 > 0$, т. к. $f''(x) < 0$, то $y - y_{\text{кас}} < 0$;

2) если $x < x_0$, то и $x - x_0 < 0$, и $c - x_0 < 0$, т. к. $f''(x) < 0$, то $y - y_{\text{кас}} < 0$.

$\Rightarrow$ график функции лежит ниже касательной. Функция выпуклая.

Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Гийом Франсуа Лопиталь (фр. Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, 1661–1704) — французский математик, автор первого учебника по математическому анализу.

Теорема 12 (Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *эти функции дифференцируемы в окрестности точки x_0, кроме, может быть самой точки x_0;*
2) *$\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности;*
3) *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$;*
4) *$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует конечный или бесконечный.*

Тогда существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причём $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Доказательство

Поскольку мы рассматриваем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ только в правой проколотой окрестности точки x_0, мы можем непрерывным образом их доопределить в этой точке: пусть $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

Применим теорему Коши для $[x_0, x]$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\ c \in [x_0, x].$$

Учитывая, что $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ получим $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. При $x \to x_0$ $c \to x_0$.

Имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ч. т. д.

Если $x \to \infty$, замена $z = 1/x$, $z \to 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}.$$

Замечание. При $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ используем связь бесконечно большой функции с бесконечно малой функцией.

Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и $f(x)$ и $\varphi(x)$, то теорему можно применять ещё раз.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

1.11 Теорема Тейлора

Теорема Тейлора даёт приближение к функции, дифференцируемой k раз, вблизи данной точки с помощью многочлена Тейлора k-го порядка. Для аналитических функций многочлен Тейлора в данной точке является конечной последовательностью их неполного ряда Тейлора, который, в свою очередь, полностью определяет функцию в некоторой окрестности точки. Теорема Тейлора позволяет овладеть приёмами вычислений начального уровня, и она является одним из центральных элементарных инструментов в математическом анализе.

Эта теорема названа в честь математика Брука Тейлора (Тейлор (1685–1731) — английский математик), который сформулировал одну из её версий в 1712 году. Явное выражение для ошибки приближения было дано намного позже Жозефом Лагранжем. Ранее, в 1671 году, Джеймсом Грегори уже было упомянуто следствие из теоремы.

Теорема 13 (Тейлора).

1. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности производные порядка до $(n+1)$ включительно. (Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности).*

2. *Пусть x — любое значение из этой окрестности, но $x \neq x_0$.*

Тогда между точками x и x_0 найдется такая точка c $c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$, что справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

это выражение называется ***формулой Тейлора****, а выраже-*

ние:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Доказательство

Представим функцию $f(x)$ в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению функции $f(x)$, а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке $x = x_0$.

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции $f(x)$. Чем больше значение n, тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он повторяет функцию.

Будем искать этот многочлен в форме многочлена по степеням $(x - x_0)$ с неопределёнными коэффициентами

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n.$$

Определим коэффициенты $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots, A_n$.

Положим $x = x_0$, тогда $P_n(x_0) = f(x_0) = A_0$.

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + \ldots,$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) = A_1,\ A_1 = \frac{f'(x_0)}{1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 1\cdot 2\cdot 3A_3(x-x_0) + \ldots,$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0) = 1\cdot 2A_2,\ A_2 = \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2},$$

$$\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!A_n,\ A_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя полученные значения A_i в выражение для многочлена, получаем:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

Многочлен не точно совпадает с функцией $f(x)$, т. е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Получим выражение для $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$.

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots$$
$$\dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

Очевидно имеем:

$$R_{n+1}(x_0) = 0,$$
$$R'_{n+1}(x) = f'(x) - f'(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots,$$
$$R'_{n+1}(x_0) = 0,$$
$$\dots,$$
$$R^{(n)}_{n+1}(x_0) = 0.$$

Рассмотрим на промежуте $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) две функции $y = R_{n+1}(x)$ и $y = (x - x_0)^{n+1}$, удовлетворяющие условиям теоремы Коши. Тогда:

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n},$$

Аналогично

$$\frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n} = \frac{R''_{n+1}(c_2)}{(n+1)n(c_2 - x_0)^{n-1}},$$

и т. д.

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) \ \Rightarrow R_{n+1}^{(n+1)}(x) = (f(x) - P_n(x))^{(n+1)}$$

$$\text{и } P_n(x)^{(n+1)} = 0 \text{ т. к. полином } \Rightarrow$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ ч. т. д.}$$

Остаточный член, записывают в виде: $R_{n+1}(x) = o(x-x_0)^n$ — в форме Пеано. Запись означает, что $o(x-x_0)^n$ — величина высшего порядка малости отностиельно $(x-x_0)^n$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0.$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

и носит название формула Маклорена. Ко́лин Макло́рен (англ. Colin Maclaurin; 1698, Аргайл и Бьют, Шотландия – 1746, Эдинбург) — шотландский математик.

Формулы Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}x^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2k)!}{(1-2k)k!^2 4^k}x^k + o(x^n),$$

1.11.1 Применение формулы Тейлора при вычислении предела функции

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}}{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}$$

1.12 Исследование функции

1.12.1 Экстремумы функции: необходимое условие

Определение 4. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0* ***максимум*** *(или* ***минимум****), если вокруг этой точки можно выделить такую окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, принадлежащую области определения функции, что для всех её точек x выполняется неравенство*

$$f(x)\le f(x_0)$$
$$\text{или } f(x)\ge f(x_0).$$

Если существует такая окрестность, в пределах которой (при $x\neq x_0$) выполняется строгое неравенство $f(x)<f(x_0)$ (или $f(x)>f(x_0)$), то говорят, что функция имеет в точке x_0 собственный, или строгий, максимум (минимум), в противном случае — несобственный, или нестрогий.

Заметим, что для обозначения максимума или минимума существует объединяющий их термин — **экстремум**.

Поставим задачу о нахождении всех значений аргумента, при которых функция имеет экстремум. При её решении основную роль будет играть производная.

Предположим сначала, что для функции $f(x)$ в промежутке (a,b) существует конечная производная. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то, применяя к промежутку $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ теорему Ферма, заключаем, что $f'(x_0)=0$. В этом состоит **необходимое условие экстремума**. Экстремум следует искать только в тех точках, где производная равна нулю; такие точки будем называть **стационарными**.

Не следует думать, однако, что каждая стационарная точка доставляет функции экстремум: указанное необходимое условие не является достаточным. Например, для функции x^3 производная $3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$, но в этой точке функция не имеет экстремума: она всё время возрастает.

Если расширить класс рассматриваемых функций $f(x)$ и допустить, что в отдельных точках двусторонней конечной производной не существует, то не исключена возможность того, что экстремум придётся на какую-либо из таких точек, ведь теорема Ферма утверждает равенство $f'(x) = 0$ лишь в предположении, что существует двусторонняя конечная производная. Например, функция $x^{\frac{2}{3}}$, очевидно, имеет минимум при $x = 0$, в то время как в этой точке её производная слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$; точно так же в точке $x = 0$ имеет минимум функция $|x|$, хотя двусторонней производной у неё в этой точке нет. Следовательно, и точки, в которых не существует двусторонней конечной производной, также могут доставлять функции экстремум. Разумеется, и в этом случае не может быть гарантировано наличие экстремума во всех таких точках. Примерами служат функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = \sin\frac{1}{x}$ (с дополнительным условием $y = 0$ при $x = 0$). Первая из них имеет бесконечную производную в точке $x = 0$, вторая же вовсе не имеет производной в этой точке, но точка $x = 0$ не доставляет экстремума ни той, ни другой функции (т. к. в любой её окрестности обе функции принимают и положительные, и отрицательные значения.

Точки, в которых производная равна нулю или не определена, будем называть **критическими**.

1.12.2 Максимумы и минимумы функции: достаточные условия

Первое правило. Итак, если точка x_0 есть стационарная точка для функции $f(x)$ или если в этой точке не существует для неё двусторонней конечной производной, то точка x_0 представляется лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит дальнейшему исследованию.

Это исследование состоит в проверке **достаточных условий** для существования экстремума. Предположим, что в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 (по крайней мере для $x \neq x_0$) существует конечная производная $f'(x)$ и как слева от x_0, так и справа от x_0 (в отдельности) сохраняется определённый знак. Тогда возможны следующие три случая.

I. $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус. В этом случае в промежутке $[x_0-\delta, x_0]$ функция $f(x)$ возрастает, а в промежутке $[x_0, x_0+\delta]$ убывает, так что значение $f(x_0)$ будет наибольшим в промежутке $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е. в точке x_0 функция имеет собственный **максимум**.

II. $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс. В этом случае аналогично убеждаемся, что в точке x_0 функция имеет собственный **минимум**.

III. $f'(x) > 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, либо же $f'(x) < 0$ и слева, и справа от x_0, т. е. при переходе через x_0 $f'(x)$ не меняет знака. Тогда функция либо всё время возрастает, либо всё время убывает; в любой близости от x_0 с одной стороны найдутся точки x, в которых $f(x) < f(x_0)$, а с другой — точки x, в которых $f(x) > f(x_0)$, так что в точке x_0 никакого **экстремума нет**.

Второе правило. При нахождении экстремумов исследование знака производной вблизи испытуемой точки можно заменить исследованием знака второй производной в самой этой точке. Итак, пусть функция $f(x)$ не только имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_0, но и вторую производную в самой точке x_0: $f''(x_0)$. Точка x_0 — стационарная, т. е. $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то $f'(x)$ в точке $x = x_0$ возрастает, т. е. вблизи точки x_0 слева $f'(x) < f'(x_0) = 0$, а справа $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Итак, производная $f'(x)$ меняет знак минус на плюс, следовательно, $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ минимум. Если $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ в точке $x = x_0$ убывает, меняя знак плюс на минус, так что в точке $x = x_0$ максимум.

Таким образом, можно сформулировать второе правило для испытания «подозрительного» значения x_0: подставляем x_0 во вторую производную $f''(x)$; если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет минимум, если же $f''(x_0) < 0$, — максимум.

1.12.3 Асимптоты графика функции

Определение 5. *Асимптота к кривой — прямая, растояние до которой от точки, лежащей на кривой стремиться к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.*

Асимптоты могут быть *вертикальные, горизонтальные, наклонные.*

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx = b$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции при $x \to \infty$, аналогично при $x \to -\infty$.

Замечание. При $k = 0$ — горизонтальная асимптота.
При $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ асимптоты могут быть разные.

Примеры

1) $y = \dfrac{2}{x+1}$;

2) $y = 2^{\frac{1}{2-x}}$;

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$.

1.12.4 Общая схема исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции.
2. Точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства.
3. Чётность, нечётность, периодичность функции.
4. Непрерывность, точки разрыва.
5. Асимптоты.
6. Экстремумы, интервалы монотонности.
7. Точки перегиба, интервалв выпуклости, вогнутости.
8. Дополнительные точки (если требуется).
9. График функции.

Примеры

1) $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$;

2) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$;

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

1.13 Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Наибольшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называют такое значение $\max\limits_{x\in[a;b]} y = f(x_0)$, что для любого $x \in [a;b]$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Наименьшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называют такое значение $\min\limits_{x\in[a;b]} y = f(x_0)$, что для любого $x \in [a;b]$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке $[a;b]$

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок $[a;b]$.

2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке $[a;b]$. Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.

3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок $[a;b]$. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в отрезок, то переходим к следующему пункту.

4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при $x = a$ и $x = b$.

5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее — они и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции соответственно.

Примеры

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2;1]$;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}$
   - на отрезке $[1;4]$;
   - на отрезке $[1;4]$.

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.