НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Новосибирск 2013

Содержание

Содержание

1 Интегральное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление: по заданной функции $y = f(x)$ найти её производную $f'(x)$ (или дифференциал).

Интегральное исчисление: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал $dF(x) = f(x)dx$).

1.1 Неопределённый интеграл

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для $\forall x \in (a; b)$ выполнено $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).*

Теорема 1. *Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задаётся формулой $F(x) + C$, где C — константа.*

Определение 2. *Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$, и обозначается символом $\int f(x)dx$, т. е.*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения $F(x)$ — *интегрирование.*

Теорема 2. *Всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно и неопределённый интеграл.*

Замечание. Не всякая первообразная выражается с помощью элементарных функций.

График первообразной — интегральная кривая. Множество первообразных — семейство интегральных кривых.

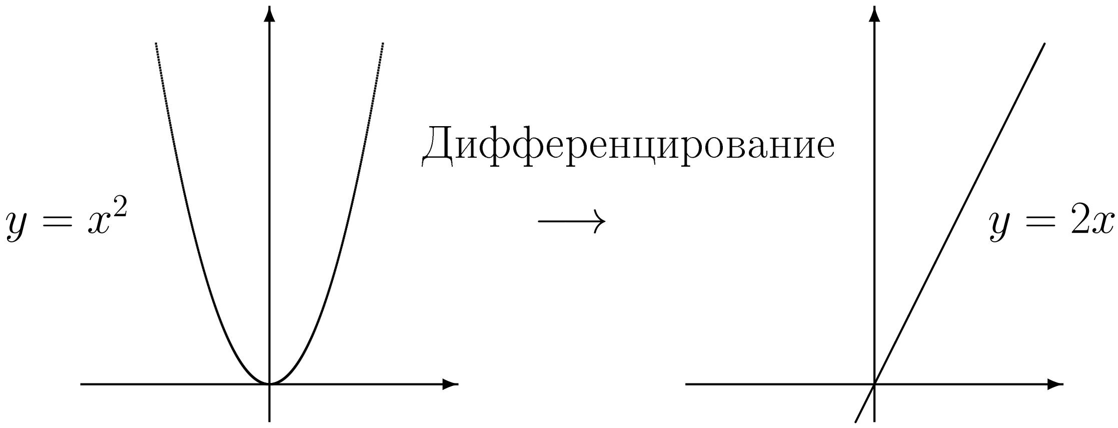

Рис. 1. Функция и её производная

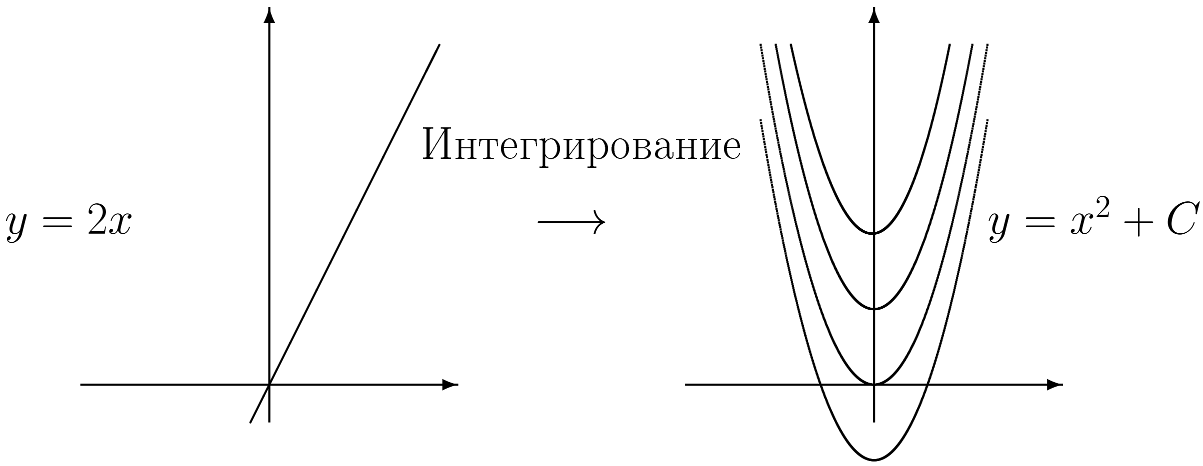

Рис. 2. Функция и семейство интегральных кривых

1.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
   Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

4. $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5. Инвариантность формулы интегрирования.
   Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$.

1.3 Таблица основных неопределённых интегралов

1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1\ \left(\int dx = x + C\right);$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C;$

4) $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + C;$

5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\ x dx = -\ln|\cos x| + C;$

8) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}\ x dx = \ln|\sin x| + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C;$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

17) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$

18) $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$

1.4 Основные методы интегрирования

1.4.1 Метод непосредственного интегрирования

Основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции — сведение к табличным интегралам.

Используются следующие преобразования дифференциала:

$$du = d(u+a),\ du = \frac{1}{a}d(au),\ a \text{ — константа},\ a \neq 0.$$

Примеры

1) $\displaystyle\int (2x^4 + x\sqrt{x} + x + 5)dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+3};$

5) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$

1.4.2 Метод интегрирования подстановкой

Общих методов подбора подстановок не существует.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt.$$

Примеры

1) $\int e^{\frac{x}{4}}dx;$

2) $\int \cos(3x+5)dx;$

3) $\int x\sqrt{x-3}dx;$

4) $\int \frac{dx}{e^x+1}dx.$

1.4.3 Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям позволяет свести исходный неопределенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит многочлен n-ой степени и логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Воспользуемся равенствами

$$d(uv) = udv + vdu,$$

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Последнее соотношение называется *формулой интегрирования по частям.*

Типы интегралов для которых применима формула интегрирования по частям.

1) $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$,
$P(x)$ — многочлен, $P(x) = u$, остальная часть подынтегральной функции — dv;

2) $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$,
$\int P(x)\mathrm{arctg}\, xdx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\, xdx$, тогда $P(x)dx = dv$;

3) $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, $u = e^{ax}$.

Примеры

1) $\displaystyle\int (2x+1)e^{3x}dx$;

2) $\displaystyle\int \ln xdx$;

3) $\displaystyle\int x^2e^xdx$;

4) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\, xdx$;

5) $\displaystyle\int e^x\sin xdx$.

1.4.4 Интегрирование дробно-рациональных функций

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ — многочлен n-ой степени (целая рациональная функция).

x_0 — корень многочлена, если $P_n(x_0) = 0$.

Если x_0 — корень многочлена, то $P_n(x)$ делится без остатка на $x - x_0$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x).$$

$$P_n(x) = a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Дробно-рациональная функция $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Дробно-рациональная функция $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе ($m < n$), и неправильной в противном случае ($m \geq n$).

Например, дробно-рациональные функции $\frac{x^2+4x+5}{2x^3+3x^2-7x-8}$, $\frac{1}{x^2+3x-4}$ — правильные, а $\frac{x^4-8x^3+x^2+4x-3}{x^3+7x^2-5}$, $\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-7}$, — неправильные.

В случае, если $m \geq n$, $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$, где $L(x)$ —целая рациональная функция, а $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ — правильная дробь.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4-5x+9}{x-2} = x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}.$$

Теорема 3. *Всякую правильную рациональную дробь* $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, *знаменатель которой разложен на множители*

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

можно представит, и притом единственным образом, в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{k_2}}{(x-x_1)^{k_2}} + \dots$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+M_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}.$$

При интегрировании неправильной дроби следует предварительно перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

Алгоритм:

1. Если дробь неправильная — выделить целую часть. Получим интеграл от целой части (интегрируется непосредственно) и интеграл от правильной дроби.

2. Если числитель равен дифференциалу знаменателя (или отличается от него постоянным множителем), то использовать замену переменной $z =$ знаменатель.

3. Если числитель равен дифференциалу некого многочлена (или отличается от него постоянным множителем), а знаменатель равен степени того же многочлена, то использовать замену переменной $z =$знаменатель.

4. В остальных случаях нужно разложить дробь на сумму простейших.

Интегрирование простейших рациональных дробей

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$

3) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ — выделить в знаменателе полный квадрат и сделать замену: $x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left| x+\frac{p}{2} = t,\ q-\frac{p^2}{4} = a^2 \right|;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots).$

Введем обозначение $I_k = \displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k}$.
Интегрируем по частям:
Положим $u = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^n},\ dv = dx$.
Тогда $du = -n(a^2+x^2)^{-n-1}\cdot 2x\,dx = -\dfrac{2nx\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}},\ v = x$.
Имеем:

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,.$$

Преобразуем интеграл, содержащийся в правой части последнего равенства, следующим образом:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для I_n:

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).$$

Из этого равенства находим:

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n + \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,.$$

Полученная рекуррентная формула позволяет свести вычисление интеграла с индексом $n+1$ к вычислению интеграла с меньшим индексом n.

Пусть, например, нужно вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.
Воспользуемся рекуррентной формулой. В данном случае $n+1=2$, следовательно, $n=1$. Имеем:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\,I_1 + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}\,,$$

то есть

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2+x^2}\right) + C.$$

Примеры

1) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx = \frac{3}{2}\ln((x+1)^2+9) - \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{3} + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x}dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx$, |замена $x-1=t$|.

1.4.5 Интегрирование тригонометрических функций

$$\text{I.}\ \int R(\sin x;\cos x)dx$$

1) Универсальная подстановка: $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$,
$\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,
$x = 2\mathrm{arctg}\ x,\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt;$

2) $R(-\sin x;\cos x)dx = -R(\sin x;\cos x)dx$,
$\cos x = t,\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$

3) $R(\sin x;-\cos x)dx = -R(\sin x;\cos x)dx$,
$\sin x = t,\ \cos x = \sqrt{1-t^2},\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$

4) $R(-\sin x; -\cos x)dx = R(\sin x; \cos x)dx$,
$\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Примеры

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$, $\left|\text{замена } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right|$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$, $|\text{замена } \cos x = t|$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$, $|\text{замена } \sin x = t|$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, $|\text{замена } \operatorname{tg} x = t|$.

$$\text{II. } \int \sin^m x \cos^n x dx$$

1) $m = 2k+1$ (или $n = 2k+1$)

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx =$$

$$= -\int \sin^{2k} x \cos^n x d\cos x \ |\text{замена } \cos x = t|;$$

2) $m,\ n$ — чётные положительные.
Понижение степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Примеры

1) $\displaystyle\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$;

2) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

$$\text{III. } \int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

$$\text{IV. } \int \operatorname{tg}^m x dx, \int \operatorname{ctg}^m x dx$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1,\ \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

1.4.6 Интегрирование иррациональных функций

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Выделение полного квадрата сводит к табличным интегралам:

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

17) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$

18) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Тригонометрические подстановки

1) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{m^2-x^2})dx,$
замена: $x = m\sin t$ или $x = m\cos t$, или $x = m \operatorname{tg} t$;

2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{m^2+x^2})dx$,
замена: $x = m\operatorname{tg} t$ или $x = m\operatorname{sh} t$;

3) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-m^2})dx$,
замена: $x = m\sec t$ или $x = m\operatorname{ch} t$.

Примеры

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$, замена: $x = 2\sin t$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, замена: $x = a\operatorname{tg} t$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$, замена: $x = \operatorname{ch} t$.

1.4.7 Интегралы от дифференциальных биномов

В математическом анализе *дифференциальным биномом* или *биномиальным дифференциалом* называется дифференциал вида

$$I = x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где a, b — действительные числа, а m, n, p — рациональные числа.

Дифференциальный бином выражается в элементарных функциях только в трёх случаях:

- p — целое число. Используется подстановка $x = t^s$, s — общий знаменатель дробей m и n;
- $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число. Используется подстановка $a+bx^n = t^s$, p — знаменатель дроби p;
- $p + \dfrac{m+1}{n}$ — целое число. Используется подстановка $ax^{-n}+b = t^s$, s — знаменатель дроби p.

Случаи выразимости дифференциального бинома в элементарных функциях были известны ещё Л. Эйлеру. Однако, невыразимость дифференциального бинома в элементарных функциях во всех остальных случах была доказана П. Л. Чебышевым в 1853 году.

Примеры

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}dx$,
$p=-10,\ p \in Z,\ m=-\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{1}{4}$ (1-й случай), замена: $x=t^4$;

2) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},\ p=-\frac{3}{2},\ m=3,\ n=2,$
$\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{3+1}{2}=2\in Z$ (2-й случай), замена: $a^2-x^2=t^2$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}},\ p=-\frac{1}{2},\ m=-4,\ n=2,$
$\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-4+1}{2}-\dfrac{1}{2}=-2\in Z$ (3-й случай), замена: $x^{-2}+1=t^2$.

1.5 Определённый интеграл

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a;b]$. Разобьём отрезок $[a;b]$ точками x_i, $i = \overline{0,n}$ на n частей

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

$$c_i \in [x_i; x_{i+1}],\ f(c_i),\ x_{i+1} - x_i = \Delta x_i,\ \lambda = \max_i \Delta x_i.$$

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n.$$

S_n — интегральная сумма.

Определение 3 *Если интегральная сумма S_n имеет предел*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I,$$

который не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них, то число I называется определённым интегралом (по Риману) от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Функция $y = f(x)$ для которой на отрезке $[a;b]$ $\exists$ определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется интегрируемой на этом отрезке.

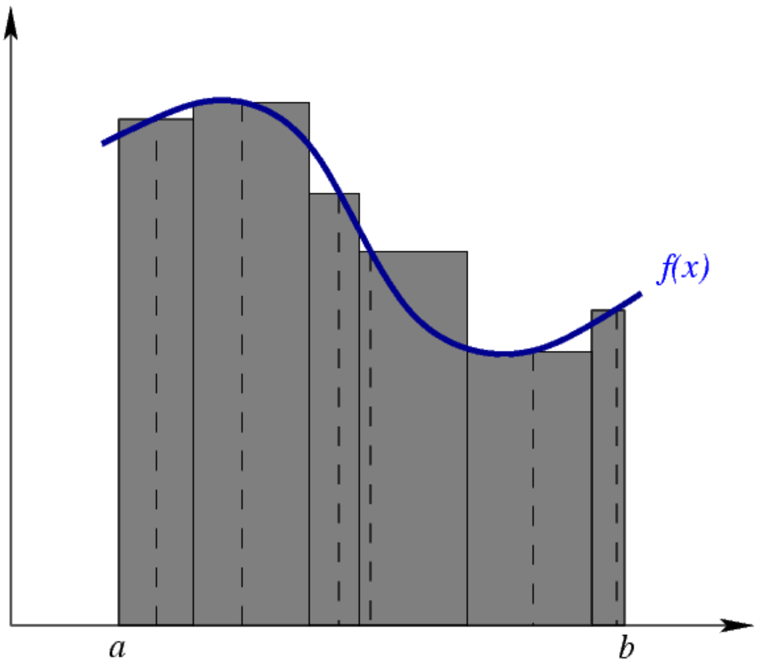

Рис. 3. Геометрический смысл определённого интеграла — площадь криволинейной трапеции

1.5.1 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 4 (Ньютона–Лейбница). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо её первообразная на $[a; b]$ $(F'(x) = f(x))$, то имеет место:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$
$$= (F(x_n) - F(x_{n-1}) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots$$
$$+(F(x_2) - F(x_1) + (F(x_1) - F(x_0).$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа:
$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$, тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Получилась интегральная сумма. Перейдём к пределу $n \to \infty,\ \lambda \to 0$. В результате:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ ч. т. д..}$$

1.6 Основные свойства определённого интеграла

1) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$

4) *аддитивность* определённого интеграла
   для $\forall\ c \in [a;b]$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx;$

5) *теорема о среднем*, следует из теорем Ньютона–Лейбница и Лагранжа:

$$\exists\ c \in [a;b]\ \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a);$$

6) если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0;$

7) если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)dx \leq \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

8) если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;

9) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$;

10) $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$,

следовательно, $\int\limits_a^x f(t)dt$ — одна из первообразных.

1.7 Вычисление определённого интеграла

Теорема 5.

1) *Если $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$;*

2) *множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок $[a;b]$;*

3) *$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,*

то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Замечание. При вычислении определённого интеграла возвращаться к старой переменной не требуется.

Пример.

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx, \text{ замена: } x = 2\sin t,\ x = 0,\ t = 0,\ x = 2,\ t = \pi/2.$$

Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Интегрирование чётных и нечётных функций в симметричных пределах

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx,\ f(x)\text{— чётная,} \\ \quad 0,\ f(x)\text{— нечётная.} \end{cases}$$

1.8 Применение определённого интеграла к вычислениям различных величин

Общая схема вычисления величины u

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых: элементов Δu_i

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i.$$

2. Найти приближённое значение элемента Δu_i в виде произведения $\Delta u_i = f(x_i)\Delta x_i$ и затем найти приближённое значение в виде интегральной суммы:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

x — параметр величины u, $a \leq x \leq b$; $f(x)$ — заданная или определяемая из условия задачи функция.

Используются упрощения:

а) малые криволинейные отрезки заменить стягивающими хордами;

б) переменную силу (или скорость) на малом участке пути можно заменить постоянной;

в) переменную температуру в течение малого промежутка времени — постоянной;

г) ...

3. Если из условия задачи следует, что при $n \to +\infty$ погрешность вычисления величины u с помощью формулы: $u \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \to 0$, то величина u равна определённому интегралу

$$u = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

1.8.1 Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат

Площадь плоской фигуры, отнесённой к прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, примыкающих к оси OX или оси OY.

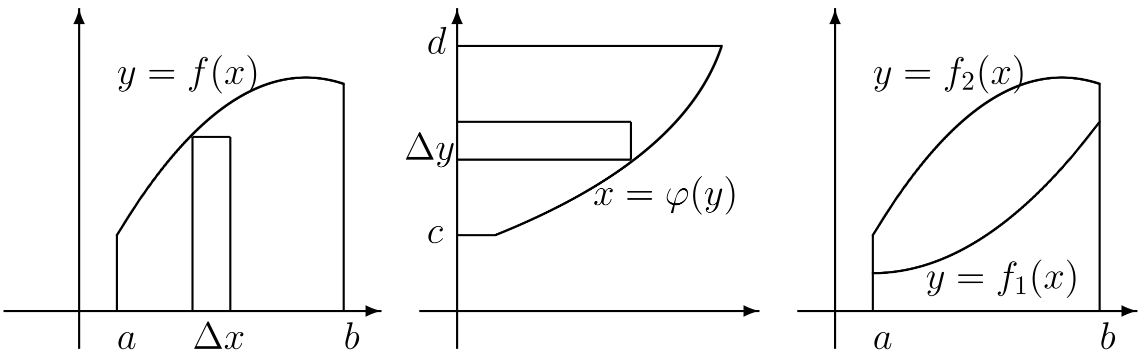

Рис. 4. Площадь плоской фигуры

$$S = \int_a^b f(x)dx, \; S = \int_c^d \varphi(y)dy, \; S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x)dx.$$

Замечание. Формула $S = \int\limits_a^b f_2(x) - f_1(x)dx$ применима для вычисления площадей фигур правильных в направлении оси OX или оси OY. Если фигура не является правильной в направлении одной из осей, то её всегда можно разбить на конечное число фигур правильных в направлении оси OX или оси OY.

Замечание. Если графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются на отрезке $[a; b]$ конечное число раз, то площадь, заключённая между ними:

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|dx.$$

1.8.2 Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

Площадь всякой плоской фигуры, отнесённой к полярной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных секторов.

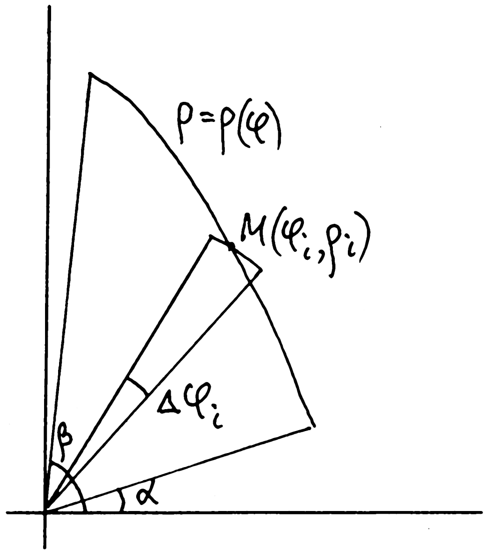

Рис. 5. Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

$$S_{\text{сектор}} = \frac{\rho^2}{2}\Delta\varphi.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^2(\varphi_i)}{2}\Delta\varphi_i.$$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

1.8.3 Площадь плоской фигуры, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t),\ \varphi(t_1) \le \varphi(t) \le \varphi(t_2), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$A(\varphi(t_1);\psi(t_1)),\ B(\varphi(t_2);\psi(t_2)).$$

$$x=\varphi(t)\ \Rightarrow\ dx=\varphi'(t)dt.$$

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t))dt.$$

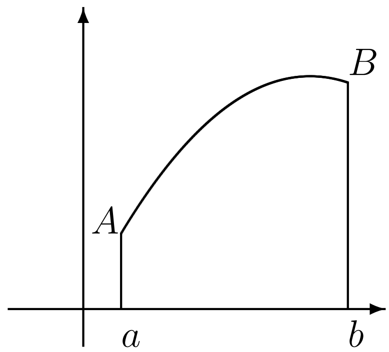

Рис. 6. Площадь плоской фигуры, заданной параметрически

Примеры

1. Найти площадь, заключённую между линиями: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой: $\rho(\varphi)=a(1+\cos\varphi)$.

3. Найти площадь эллипса:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

1.8.4 Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат

ΔL_i — длина i-го звена ломаной.

$$L_n=\Delta L_1+\Delta L_2+\ldots+\Delta L_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i.$$

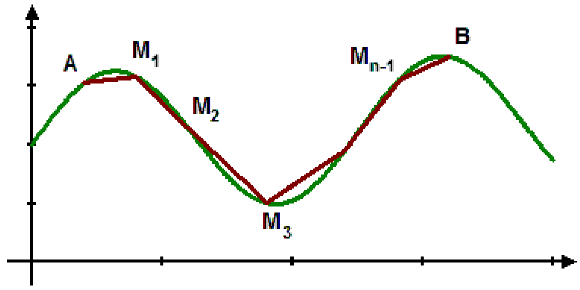

Рис. 7. Длина дуги плоской кривой

Определение 4. *Длина дуги AB — предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломанной, при неограниченном увеличении числа её звеньев и стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев ($\lambda = \max\limits_i \Delta L_i$)*

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$$

Предполагается, что предел существует и не зависит от выбора точек M_k.

Кривые, для которых предел существует, называются *спрямляемые.*

Теорема 6. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$, то кривая AB спрямляема и длина её выражается формулой:*

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Доказательство

$$\Delta L_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$$= |\text{из теоремы Лагранжа: } f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})| =$$
$$= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(c_k)(x_k - x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k.$$

$$\lambda = \max_i \Delta L_i,\ L_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k.$$

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

1.8.5 Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически

Кривая AB:

$$\begin{cases} x = \varphi(t),\ t_1 \le t \le t_2, \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$a = \varphi(t_1),\ b = \varphi(t_2),\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

1.8.6 Длина дуги плоской кривой в полярных координатах

$$\rho = f(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta.$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) = f(\varphi)\cos(\varphi), \\ y = \rho\sin(\varphi) = f(\varphi)\sin(\varphi). \end{cases}$$

Это уравнение можно рассматривать как параметрическое задание кривой AB с параметром φ.

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f' \cos\varphi - f \sin\varphi)^2 + (f' \sin\varphi + f \cos\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi$$

Примеры

1. Найти длину дуги: $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq 8/9$.
2. Найти длину дуги одной арки циклоиды:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$
3. Вычислить длину кардиоиды: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

1.8.7 Дифференциал дуги

M — произвольная точка на дуге AB. Длина дуги AM

$$l(x) = \int\limits_{a}^{x} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = F(x) - F(a).$$

$$\frac{dl}{dx} = \left(\int\limits_{a}^{x} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt\right)' = F'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Выражение для дифференциала дуги:

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ или } dl = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$dl = \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi.$$

1.8.8 Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть задана площадь поперечного сечения тела плоскостями перпендикулярными оси OX, как функция переменной x: $S(x)$.

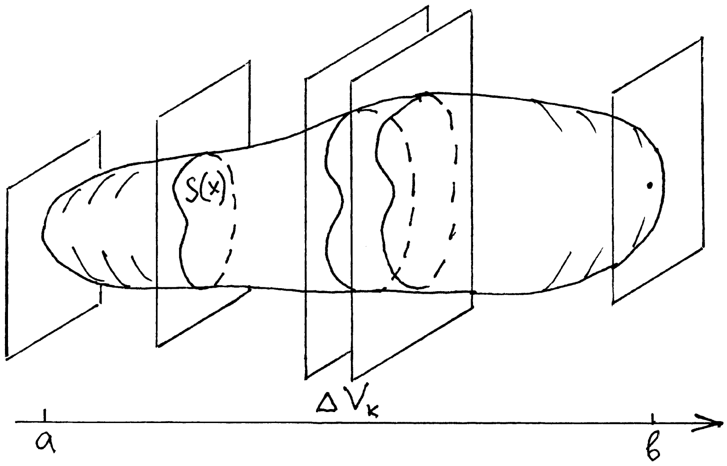

Рис. 8. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b.$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k.$$

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx.$$

1.8.9 Объёма тела вращения

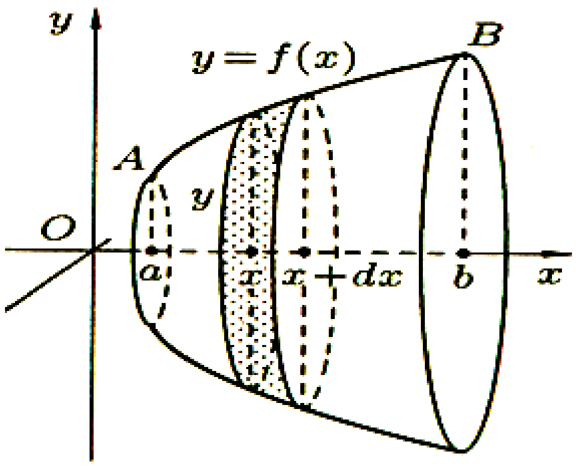

Рис. 9. Вычисление объёма тела вращения

$$y = f(x),\ a \leq x \leq b.$$

Любое сечение тела плоскостью перпендикулярной оси OX: $S(x) = \pi f^2(x)$.

$$V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

$$x = \varphi(y),\ c \leq y \leq d.$$

Любое сечение тела плоскостью перпендикулярной оси OY: $S(y) = \pi\varphi^2(y)$.

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Примеры

1. Найти объём трёхосного эллипсоида: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Вычислить объём тела, полученного в результате вращения линий $y = x$ и $y = x^2$ а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

1.8.10 Площадь боковой поверхности тела вращения

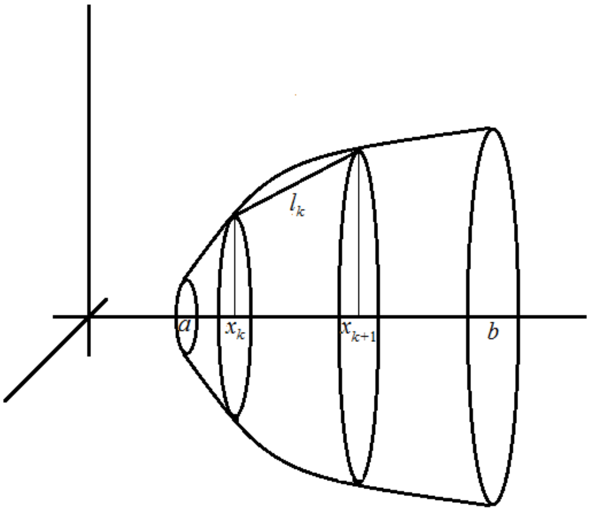

Рис. 10. Площадь боковой поверхности тела вращения

Боковая поверхность усечённого конуса $S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$.

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

$$\Delta S_k = \pi(y_{k+1} - y_k)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\Delta x_k.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \pi(y_{k+1} - y_k)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\Delta x_k.$$

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} S_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Для кривой, заданной параметрически. Кривая AB:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \ t_1 \le t \le t_2, \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

Площадь боковой поверхности тела вращения кривой в полярных координатах.

$$\rho = f(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta.$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) = f(\varphi)\cos(\varphi), \\ y = \rho\sin(\varphi) = f(\varphi)\sin(\varphi). \end{cases}$$

Это уравнение можно рассматривать как параметрическое задание кривой AB с параметром φ.

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{(f'\cos\varphi - f\sin\varphi)^2 + (f'\sin\varphi + f\cos\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi$$

Примеры

1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX части кривой $y = \sqrt{2x}$, $0 \le x \le 3/2$.
2. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

1.8.11 Работа переменной силы

$$F = F(x),\ x \in [a;b].\ A = F \cdot S.$$

$$\Delta A = F(c_k)\Delta x_k,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k.$$

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx.$$

1.9 Несобственные интегралы

1.9.1 Несобственные интегралы 1-го рода

Определённый интеграл с бесконечным промежутком интегрирования — *несобственный интеграл* 1-*го рода.*

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;\infty)$. Рассмотрим:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел, то $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ — *сходится.*

Если предел не существует или бесконечный, то $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ — *расходится.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \lim_{\beta\to\infty} \int_c^{\beta} f(x)dx.$$

Для сходимости этого несобственного интеграла должны существовать оба предела.

Примеры

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}dx,\ a > 0$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x dx$.

4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Теорема 7 (Признак сравнения). *Если на промежутке* $[a; \infty)$ *непрерывные функции удовлетворяют условию* $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, *а из расходимости интеграла* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 8 (Предельный признак сравнения). *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < |k| < \infty$, *то интегралы* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ *одновременно или оба сходятся, или оба расходятся.*

Теорема 9. *Если интеграл* $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ *сходятся, то интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *называется* ***абсолютно*** *сходящимся.*

Примеры

1. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+3^x)}\ \left(\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}\right).$

2. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$

   $$\left(f(x) = \ln\frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right), \varphi(x) = \frac{1}{x^2}\right).$$

3. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$

4. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x+2}{x\sqrt{x}}dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x}{3x^3+1}dx.$

6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ (абсолютно сходящийся интеграл).

1.9.2 Несобственные интегралы 2-го рода

Интеграл от неограниченной функции — *несобственные интеграл 2-го рода.*

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв (разрыв 2-го рода) при $x = b$.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — несобственный интеграл 2-го рода.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует и конечный, то несобственный интеграл *сходится.*

Если предел не существует или бесконечный, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ — *расходится.*

Если $y - f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in [a; b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Примеры

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ — расходится.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ — сходится.

Признак сравнения

$$f(x) \geq 0,\ \lim_{x \to c}(f(x)|c-x|^m) = A,\ A \neq 0,\ A < \infty,$$

$$\text{т. е. } f(x) \sim \frac{A}{|c-x|^m},\ \text{при } x \to c,\ \text{то}$$

1) $m < 1$, интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \text{ — сходится;}$$

2) $m \geq 1$ — расходится.

Примеры

1. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}$.

Рассмотрим пример:

$$\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = |\text{несобственный интеграл 2-го рода}| =$$

замена: $x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t dt,\ x = 0,\ t = 0,\ x = 2,\ t = \pi/2$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \frac{16}{3}.$$

В результате замены переменных несобственный интеграл преобразовался в собственный. Возможно обратное.

1.10 Приближённое вычисление интегралов

1. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ — формула левых прямоугольников, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$, $|R| \le \dfrac{(b-a)h}{2}M_1$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$ — формула правых прямоугольников, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$, $|R| \le \dfrac{(b-a)h}{2}M_1$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{i=1}^{n} f((x_{i-1} + x_i)/2)$ — формула средних прямоугольников, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$, $|R| \le \dfrac{(b-a)h^2}{24}M_2$.

4. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{h}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$ — формула трапеций, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$, $|R| \le \dfrac{(b-a)h^2}{12}M_2$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{h}{3}\sum\limits_{k=0,2}^{2n-2}(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})) =$
$= \dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$ — формула Симпсона, $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $x_i = a+hi$, $|R| \le \dfrac{(b-a)h^4}{180}M_4$.

Здесь R — погрешность вычисления интеграла, $M_k = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{(k)}(x)|$.

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.