НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Новосибирск 2013

Содержание

1 Функции нескольких переменных 4

1.1 Основные понятия. Область определения 4
1.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных 6
1.3 Частные производные 8
1.4 Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференнциал 10
1.5 Применение полного дифференциала в приближённых вычислениях 12
1.6 Частные производные высших порядков 12
1.7 Дифференцирование сложной функции 14
1.8 Дифференцирование неявной функции 15
1.9 Понятие скалярного и векторного полей 17
1.10 Производная по направлению. Градиент функции 18
1.11 Дифференциалы высших порядков 21
1.12 Инвариантность формы полного дифференциала . 22
1.13 Формула Тейлора для функции нескольких переменных 22
1.14 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности 24
1.15 Экстремумы функции нескольких переменных . . 24
1.16 Достаточные условия экстремума функции двух переменных 25
1.17 Достаточные условия экстремума (общий случай) 26
1.18 Нахождение условного экстремума функции нескольких переменных 30
1.19 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области 34

1 Функции нескольких переменных

1.1 Основные понятия. Область определения

Определение 1. *Функция двух переменных f — закон (правило) по которому каждой паре чисел $(x;y)$ из некоторого множества U ставится в соответствие число, которое обозначается $f(x,y)$. Множество U называется* ***областью определения*** *функции f и обозначается $D(f)$.*

Элементы множества U — упорядоченные пары чисел.

Пример

$$V(r,h) = \pi r^2 h,\ U = \{(r,h)|r,h \in R, r > 0, h > 0\}.$$

Замечание. Если об области определения ничего не сказано, то берётся множество всех пар чисел при которых формула, задающая значения функции имеет смысл — *естественная область определения.*

Пример

Найти область определения функции: $z(x,y) = \sqrt{\ln(x^2+2y-1)}$.

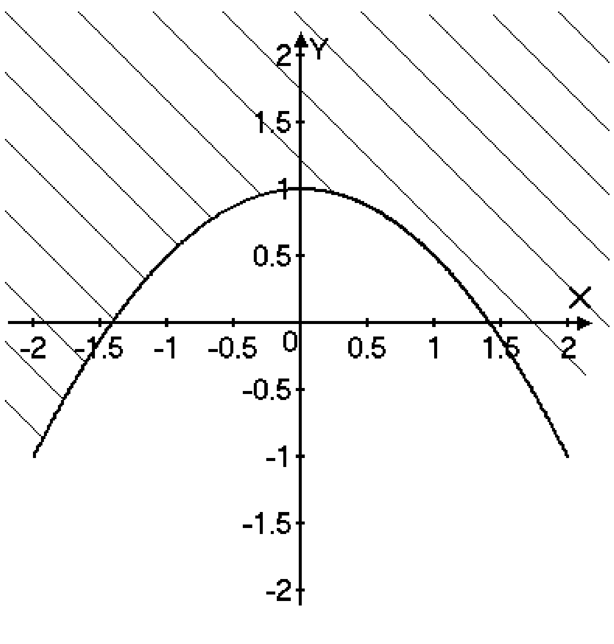

Рис. 1. Область определеения функции $z(x,y) = \sqrt{\ln(x^2+2y-1)}$

Способы задания функции — аналогично тому, как это делается в случае функции одной переменной.

В случае функций трёх и более переменных все определения аналогичны.

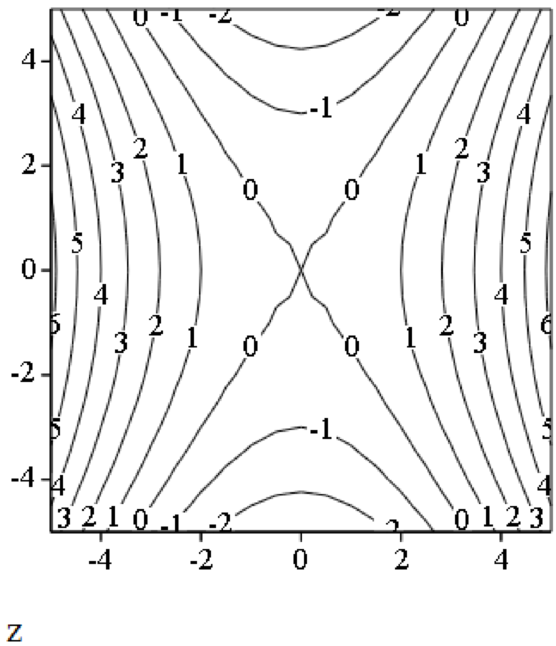

Рис. 2. Линии одинакового уровня функции $z(x, y) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$

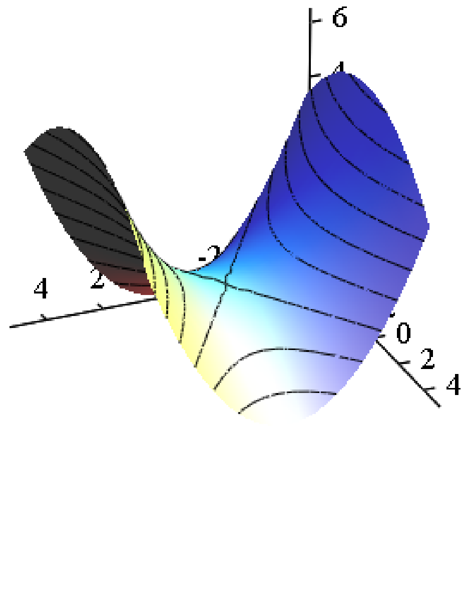

Рис. 3. Изометрическая проекция функции $z(x, y) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ (гиперболический параболоид)

1.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение 2. *Под δ-окрестностью точки M_0 будем понимать множество всех точек M, не совпадающих с M_0, расстояние до которых от точки M_0 меньше δ ($\delta > 0$), т. е. $0 < |MM_0| < \delta$.*

Таким образом в R^2 δ-окрестность — круг радиуса δ без границы и с выколотым центром M_0, в R^3 δ-окрестность — шар радиуса δ без границы и с выколотым центром M_0.

Определение 3. *Точку будем называть* ***внутренней точкой области****, если она принадлежит этой области, вместе со всеми точками какой-либо своей окрестности.*

Определение 4. ***Граничная точка*** *— любая её δ-окрестность содержит как внутренние точки, так и точки не принадлежащие области.*

Определение 5. *Множество U* ***замкнуто****, если оно содержит все свои граничные точки.*

Определение 6. *Множество точек называется* ***ограниченным****, если существует шар (круг) конечного радиуса с центром в любой точке множества, который полностью содержит данное множество; в противном случае множество называется* ***неограниченным****.*

Пусть $f(x, y)$ — внутренняя или граничная точка области $D(f)$ для $z = f(x, y)$.

Определение 7. *Функция $f(x, y)$ называется* ***бесконечно малой*** *при стремлении $M(x; y) \to M(x_0; y_0)$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ δ-окрестность точки M_0, что $|f(M)| < \varepsilon$ для $\forall$ точки M из этой окрестности и если $M \in D(f)$.*

Определение 8. *Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при стремлении $(x; y) \to (x_0; y_0)$, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$ $(\delta = \delta(\varepsilon) > 0)$, что $\forall$ $(x; y)$ удовлетворяющей условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$: $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$.*

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что во всех её точках $M(x; y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x; y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Примеры

1) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = |x^2 + y^2 = \rho, (x; y) \to (0; 0), \rho \to 0|;$$

2) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}.$$

Во втором пределе значение зависит от пути: φ — предел не существует.

Определение 9. *Функция $f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если существует $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$ и $f(x_0; y_0) = \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$.*

Определение 10. *Функция $f(x, y)$ называется **непрерывной на множестве** $U \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой точке множества U.*

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если множество U является замкнутым и ограниченным, а f непрерывна на U, то f достигает на U своих наименьшего и наибольшего значений, т. е. $\exists\, M_1 \in U$ и $M_2 \in U$, что для $\forall\, M \in U$: $f(M_1) \leq f(M) \leq f(M_2)$.*

1.3 Частные производные

Частные приращения функции

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Полное приращение функции

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta) - f(x,y).$$

Определение 11. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta) - f(x,y)}{\Delta x}$, *то он называется* ***частной производной*** *по переменной x в точке $M(x;y)$ и обозначается:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — Лейбниц (Leibniz); f'_x — Лагранж (Lagrang); $D_x f$ — Коши (Cauchy).

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Замечание. В определении $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ переменная y не получает приращения (фиксируется) $\Rightarrow$ y — постоянная; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\Rightarrow$ x — постоянная.

Геометрический смысл частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta,$$

здесь α — угол, образованный касательной к плоской кривой: $z = f(x,y),\ y = \mathrm{const}$ и осью Ox; β — угол, образованный касательной к плоской кривой: $z = f(x,y),\ x = \mathrm{const}$ и осью Oy.

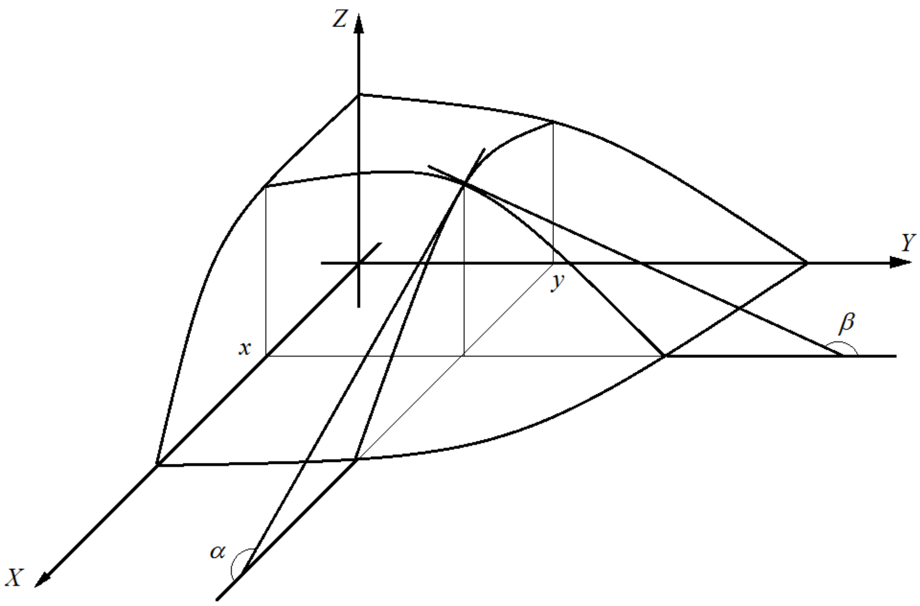

Рис. 4. Геометрический смысл частных производных

Физический смысл частных производных

Скорость изменения функции в направлении соответствующей оси.

Примеры

Найти частные производные функций

1) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$;

2) $f(x,y) = yx^{y-1}$;

3) $f(x,y,z) = \sin x + \cos y + e^z$.

1.4 Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференнциал

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$, тогда полное приращение функции в точке M: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Определение 12. *Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x; y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Сумма двух первых слагаемых $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ представляет собой *главную часть приращения функции.*

Определение 13. *Главная часть приращения функция $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается dz:*

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называются *частными дифференциалами.* Для независимых переменных x и y $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy \Rightarrow dz = A \cdot dx + B \cdot dy$.

Необходимое условие дифференцируемости функции

Теорема 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, причём $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.*

Доказательство

Так как функция дифференцируема в точке M, то

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.$$

Из этого соотношения следует: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Следовательно функция непрерывна в точке M. Положим $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$: $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Отсюда при $\Delta x \to 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Замечание. Обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования производных не следует дифференцируемость функции. Так непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке $(0;0)$.

Полный дифференциал можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ или } dz = d_x z + d_y z,$$

где $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ — частные дифференциалы функции $z = f(x,y)$.

Достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 3. *Если функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x, z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается формулой:*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ или } dz = d_x z + d_y z.$$

Замечание. Для функции $y = f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием её дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x,y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

1.5 Применение полного дифференциала в приближённых вычислениях

$$z(x,y) = z(x_0,y_0) + \Delta z \approx z(x_0,y_0) + dz =$$
$$= z(x_0,y_0) + z'_x(x_0,y_0)\Delta x + z'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Пример

Вычислить приближённо, заменив полное приращение функция дифференциалом:

1) $3,05 \cdot 4,01$;

2) $1,05^{2,01}$;

3) $\ln\left(\sqrt{4,004} + \sqrt[3]{1,006} - 2\right)$.

1.6 Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ — функции от переменных x и y, $(x;y) \in D(f)$, они могут иметь частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го и т. д. порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \left(f''_{yx}\right)'_x = f'''_{yxx} = f'''_{yx^2}.$$

Теорема 4 (Шварца). *Пусть выполнены условия:*

1) *функции* $z = f(x,\ y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *определены в некоторой окрестности точки* $(x_0; y_0)$*;*

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывны в точке* $(x_0; y_0)$.

Тогда $\dfrac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial x}$, *то есть смешанные производные второго порядка равны в каждой точке, где они непрерывны.*

Теорема Шварца о равенстве смешанных частных производных индуктивно распространяется на смешанные частные производные высших порядков, при условии, что они непрерывны. Тем не менее, условие непрерывности смешанных производных отнюдь не является необходимым в теореме Шварца.

Пример Шварца

$$f(x; y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 > 0 \\ 0,\ x = y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial x \partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial y \partial x}$$

Смешанные производные второго порядка равны всюду кроме точки $(0; 0)$, в которой и нарушается равенство смешанных производных.

Пример

Найти частные производные второго порядка:

1) $z = \sin(xy) + x^4 - 2x^3y + 5y^5$;

2) $z = x^y$.

1.7 Дифференцирование сложной функции

Теорема 5. *Пусть $z = f(x, y)$ задана в области D и пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в области $\triangle$, причём, когда $t \in \triangle$, то x и y принадлежат области D. Пусть функция z дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в соответствующей точке t_0, то сложная функция $z = f(x(t), y(t)) = F(t)$ дифференцируема в точке t_0 и имеет место равенство:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\,.$$

Доказательство

Так как z дифференцируема по условию в точке (x_0, y_0), то её полное приращение представляется в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Разделив это соотношение на Δt, получим:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$ и получим формулу:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\,.$$

Полученное соотношение называется *формулой полной производной.*

Общий случай: $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда $z = f(x(u, v), y(u, v))$ — сложная функция независимых переменных u и v. Ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу полной производной следующим образом. Зафиксировав v, заменяем в ней $\dfrac{dz}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\,.$$

Аналогично имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\,.$$

Примеры

Найти полные производные:

1) $z = e^{uv},\ u = \sin(t-1),\ v = t^2;$

2) $z = z(u, v, w) = u^2 + \sqrt{v + w},\ u = t^2,\ v = e^t,\ w = \cos 2t.$

Найти частные производные:

3) $z = u^v,\ u = \ln(x - y),\ v = e^{\frac{x}{y}};$

4) $z = uv,\ u = x^y,\ v = \sin(xy).$

1.8 Дифференцирование неявной функции

Неявная функция одного переменного определяется уравнением: $F(x, y) = 0$.

Теорема 6 (Теорема существования неявной функции). *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в какой-нибудь окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ при значениях x, близких к x_0 имеет единственное непрерывно зависящее от x решение $y = \varphi(x)$ такое, что $\varphi(x_0) = y_0$. Функция $\varphi(x)$ имеет также непрерывную производную.*

Примеры

1) $x^2 + y^2 = 16;$

2) $x^3y + \ln y - x = 0$, $M(1;1)$ — функция $\varphi(x)$ существует, фактически выразить её в виде элементарной функции от x нельзя, так как заданное уравнение алгебраически неразрешимо относительно y.

Неявная функция двух переменных определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$, связывающим три переменные величины. На вопрос о существовании такой функции отвечает следующая теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема 7. *Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными в какой-нибудь окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если $F(x_0, {}_0, z_0) = 0$ и $F'_z(x_0, {}_0, z_0) \neq 0$,то уравнение $F(x, y, z) = 0$ в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ имеет единственное, непрерывно зависящее от x и y решение $z = \varphi(x, y)$ такое, что $\varphi(x_0, y_0) = z_0$. Функция $\varphi(x, y)$ имеет также непрерывные частные производные.*

Замечание. Если в точке M_0 производная $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ может не определять z как функцию x и y, а определяет y как функцию x и z.

$$F(x, y, \ldots, t, u) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} - ?$$

Дифференцируем как сложную функцию:

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial x} + F'_y \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots + F'_t \frac{\partial t}{\partial x} + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \ldots \frac{\partial t}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u},\ \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_t}, \ldots$$

Примеры

1) $x^y - y^x = 0,\ \dfrac{dy}{dx} - ?;$

2) $e^z + z - x^2y + xy^2 = 1,\ \dfrac{\partial z}{\partial x} - ?;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

1.9 Понятие скалярного и векторного полей

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. С физической точки зрения полем называется некоторая часть пространства, в которой происходит какое-либо интересующее нас физическое явление. Отвлекаясь от физического смысла, рассмотрим теорию поля с математической точки зрения.

Говорят, что в некоторой области D задано *поле*, если каждой точке этой области соответствует определенное значение некоторой величины — числовой (скалярной) или векторной.

Если в каждой точке рассматриваемой области D заданная величина принимает числовые значения, то поле называется *скалярным*, если же в каждой точке области D задан вектор, то поле называется *векторным*.

Как следует из определения, задание скалярного поля означает, что в каждой точке $M \in D$ определена скалярная функция $f = f(M)$, задание векторного поля характеризуется заданием векторной функции $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$.

Примерами скалярных полей являются поле температуры, освещённости, плотности электрических зарядов, плотности массы.

Примерами векторных полей могут служить поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное, электростатическое поля.

Для наглядности представления скалярного поля используется его графическое изображение — поверхности уровня.

Геометрическое место точек M, в которых поле $f(M)$ имеет заданное значение C, называется поверхностью уровня скалярного поля $f = f(M)$.

Уравнение поверхности уровня имеет вид $f(M) = C$. Поверхности уровня, отвечающие различным значениям , заполняют всю область, в которой определено поле, и никакие две поверхности $f(M) = C_1$ и $f(M) = C_2$, где $C_1 \neq C_2$, не имеют общих точек. Взаимное расположение поверхностей уровня дает наглядное представление о соответствующем скалярном поле. Места сближения поверхностей указывают на быстрое изменение функции , медленному изменению функции соответствуют места разряжения поверхностей.

Если скалярное поле определено в плоской области, то поверхности уровня вырождаются в линии уровня. С помощью линий уровня обычно изображают распределение температур (изотермы), распределение давлений (изобары), рельеф местности на топографических картах (горизонтали).

Поверхности уровня позволяют судить о скорости изменения скалярного поля $f(M)$ по тому или иному направлению только качественно. Количественную же характеристику скорости изменения поля дает производная по направлению.

1.10 Производная по направлению. Градиент функции

В математическом анализе, производная по направлению — это обобщение понятия производной на случай функции нескольких переменных.

Рассмотрим в области D функцию $f = f(x, y, z)$ и точку $M(x, y, z)$. Проведём из этой точки вектор $\vec{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторе $\vec{S}$, на расстоянии Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, в результате $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Предположим, что функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в области D, т. е. имеет непрерывные частные производные по своим аргументам.

Полное приращение функции можно представить как:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$. Разделим левую и правую части последнего равенства на Δs

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \ \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \ \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Имеем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Прейдём к пределу при $\Delta s \to 0$.

Определение 14. *Предел отношения* $\dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ *при* $\Delta s \to 0$ *называется производной от функции* $f(x, y, z)$ *в точке* (x, y, z) *по направлению вектора* $\vec{S}$ *и обозначается* $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, *т. е.*

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Замечание. Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ можно рассматривать как производные по направлению соответствующих осей.

Производная по направлению определяет скорость изменения функции в точке $M(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{S}$.

Градиент (от лат. gradiens, род. падеж gradientis — шагающий) — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой.

Пусть функция $f = f(x, y, z)$ имеет в точке M частные производные по всем переменным.

Определение 15. *Вектор* $(f'_x, f'_y, f'_z) = f'_x\vec{i} + f'_y\vec{j} + f'_z\vec{k}$ *называется градиентом (или вектором–градиентом) функции* $f = f(x, y, z)$ *в точке* $M(x, y, z)$.

Вектор–градиент обозначается символом $\operatorname{grad} f(M)$ *или* $\nabla \cdot f(M)$.

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇ (набла). Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z соответственно.

Свойства градиента

1) $\operatorname{grad}(C \cdot f) = C \cdot \operatorname{grad} f,\ C \in R$;

2) $\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$;

3) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g$;

4) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g}{g^2}$;

5) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \text{Пр}_{\vec{s}}\nabla \cdot f = \dfrac{(\nabla \cdot f, \vec{s})}{|\vec{s}|} = (\nabla \cdot f, \vec{s}_0)$,

   где $\vec{s}_0$ — орт вектора $\vec{s}$, $\vec{s}_0 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$;

6) наибольшая скорость изменения функции f достигается в направлении её градиента и равна норме (модулю) градиента. Это означает, что вектор $\operatorname{grad} f$ не зависит от выбора системы координат;

7) градиент перпендикулярен поверхности уровня (линии уровня), проходящей через эту точку.

Замечание. Понятие градиента легко обобщается на функции $n \geq 2$ переменных или пространства $n \geq 2$ измерений: R^n.

Примеры

1) Найти производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ по направлению радиус-вектора точки $A(3;4)$ в точке $A(3;4)$;

2) найти производную от функции $u = x^2y - 3yz^3$ в точке $M_0(2;2;1)$ по направлению вектора $\vec{s} = -9\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$.

1.11 Дифференциалы высших порядков

Дифференциал второго порядка — дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Символически эту формулу можно записать:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Аналогично можно записать:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z,$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

$$d^nw = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n w.$$

1.12 Инвариантность формы полного дифференциала

Пусть $u = f(x, y, z)$, $x = \varphi(t, v)$, $y = \psi(t, v)$, $z = \chi(t, v)$.
$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$, но может быть $du = u'_t dt + u'_v dv$.
Имеем:

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t,\ u'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v,$$

$$du = (u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t)dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v)dv =$$
$$= u'_x(x'_t dt + x'_v dv) + u'_y(y'_t dt + y'_v dv) + u'_z(z'_t dt + z'_v dv) =$$
$$= u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = du.$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных сохраняет свою форму независимо от того, являются ли x, y, $z, \ldots, t$ независимыми переменными или функциями других переменных.

1.13 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Функция $F(t)$ при условии существования её $n+1$ первых производных, может быть разложена по формуле Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1},$$
$$(0 < \theta < 1)$$

Положим: $t - t_0 = \Delta t = dt$, $F(t) = F(t_0) = \Delta F(t_0)$, тогда формулу Тейлора можно переписать так:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \frac{1}{3!}d^3F(t_0) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}d^{(n)}F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta(t - t_0)),\ (0 < \theta < 1)$$

В этой форме формула Тейлора распространяется и на случай функции от нескольких переменных.

Рассмотрим функцию двух переменных: $f = f(x, y)$.

$$\Delta f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

введём в рассмотрение новую переменную t, положив

$$x = x_0 + t\Delta x,\ y = y_0 + t\Delta y,\ (0 \le t \le 1).$$

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x, y)$, получим сложную функцию от одной переменной t:

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

Вместо приращения $\Delta f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно рассматривать приращение вспомогательной функции: $\Delta F(0) = F(1) - F(0)$, так как оба приращения равны. Учитывая, что $F(t)$ имеет $n+1$ непрерывную производную и инвариантностью формы для высших дифференциалов, сделав обратную замену переменных получим формулу Тейлора функции от нескольких переменных.

Для функции $f = f(x, y)$ она имеет вид:

$$\Delta f(x, y) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(x_0, y_0) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}d^{(n)} f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)),$$
$$(0 < \theta < 1)$$

или

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \big(f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y\big) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\Big(f'''_{x^3}(x_0, y_0)\Delta x^3 + 3f'''_{x^2y}(x_0, y_0)\Delta x^2\Delta y +$$
$$+3f'''_{xy^2}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y^2 + f'''_{y^3}(x_0, y_0)\Delta y^3\Big) + \ldots$$

здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

1.14 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$F(x, y, z) = 0,\ M(x_0, y_0, z_0) \ \Leftrightarrow\ F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0.$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + y^2$ в точке $A(1; -1; 3)$.

1.15 Экстремумы функции нескольких переменных

Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция аргумента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{x} \in R^n$. Требуется найти наибольшее (или наименьшее) значение данной функции и такое значение аргумента $\overline{x}^0$ (оптимальное решение), при котором этот экстремум достигается.

Определение 16. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $D \subset R^n$. Точка $x^0 \in D$ называется точкой минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве D, если $f(x^0) \leq$ $\leq f(x)$ $[f(x^0) \geq f(x)]$ для всех $x \in D$. Величина $f(x^0)$ называется наименьшим (наибольшим) или минимальным (максимальным) значением $f(x)$ на множестве D и обозначается $\min\limits_{x\in D} f(x) = f(x^0)$ $[\max\limits_{x\in D} f(x) = f(x^0)]$.*

Определение 17. *Точка $x^0 \in D$ называется точкой локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве D, если существует такая окрестность U точки x_0, что $f(x^0) \leq$ $f(x)$ $[f(x^0) \geq f(x)]$ для $\forall\, x \in U \subset D$.*

Необходимые условия существования экстремума: для того чтобы дифференцируемая функция $f = f(x)$ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела экстремум в точке x^0, необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$. Точка, в которой эти условия выполнены, называется **стационарной**.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками**.

В критических точках функция может и иметь, и не иметь экстремум. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим функцию $z = xy$. Для неё точка $O(0;0)$ является критической. Однако экстремума в ней нет.

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

1.16 Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subset R^2$, точка $(x_0; y_0) \in D$ — стационарная.

Достаточное условие экстремума. Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой её окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

Если $\Delta = 0$, необходимы дополнительные исследования с использованием производных более высокого порядка.

Пример. Исследавать на экстремум функцию $z = x^3 + 3y^3 - 3xy$.

Найдём стационарные точки функции. Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно переменных x и y, найдём две стационарные точки: $(0;0)$ и $(1;1)$.

Найдём выражения для z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} и значения A, B, C в точках $(0;0)$, $(1;1)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y. \end{cases}$$

В точке $(0;0)$ $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$, $\Delta = -9 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет.

В точке $(1;1)$ $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, $\Delta = 27 > 0 \Rightarrow$ в точке есть экстремум, $A > 0 \Rightarrow$ в точке $(1;1)$ минимум.

1.17 Достаточные условия экстремума (общий случай)

Пусть $f(x)$ — действительная функция аргумента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ — дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности некоторой стационарной точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Введём обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, $f''_{x_i,x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik}$, тогда выражение

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$$

есть второй дифференциал функции f; он представляет собой однородный многочлен второй степени, или **квадратичную форму** от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. От свойств этой квадратичной формы зависит поведение функции в окрестности стационарной точки.

В высшей алгебре квадратичную форму

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k, \ (a_{ik} = a_{ki})$$

от переменных $y_1, \ldots, y_n$ называют **определённой положительной (отрицательной)**, если она имеет положительные (отрицательные) значения при всех значениях аргументов, не равных одновременно нулю.

Так, например, форма

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

будет определённой положительной. Это становится ясным, если представить её в виде

$$(2y_1 - 3y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2.$$

Критерий Сильвестра (J.J. Sylvester) — необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратичная форма была определённой и положительной. Это условие выражается цепью неравенств:

$$a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Все угловые миноры положительные.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратичная форма была определённой и отрицательной. Оно выражается цепью неравенств:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots$$

То есть имеем чередование знаков угловых миноров начиная со знака «$-$».

Сформулируем **достаточные условия для существования экстремума**. Если второй дифференциал, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$$

со значениями коэффициентов $a_{ik} = f''_{x_i, x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, оказывается определённой положительной (отрицательной) формой, то в испытуемой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ будет собственный минимум (максимум).

Условия отсутствия экстремума. Квадратичная форма называется **неопределённой**, если она способна принимать значения с противоположными знаками.

Такова форма $6y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 8y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3$. Действительно, её значение равно $+6$ при $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = 0$ и -1 при $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$.

Если квадратичная форма будет неопределённой, то в испытуемой точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ заведомо нет экстремума.

Если квадратичная форма, не принимая значения разных знаков, обращается в 0 не только при нулевых значениях аргументов, т. е. не является определённой, то форму называют **полуопределённой**. Например: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 + 3y_1y_2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_2 + y_3)^2$ отрицательных значений не принимает, но в 0 обращается всякий раз, когда $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, скажем, при $y_1 = y_2 = 1/2$ и $y_3 = -1$.

Случай, когда квадратическая форма оказывается полуопределённой, есть «сомнительный» случай. При этом, в зависимости от поведения высших производных, может быть экстремум, а может его и не быть. В частности, высшие производные должны быть привлечены и тогда, когда все производные второго порядка в испытуемой точке обращаются в 0.

Замечание. Для функции $f(x)$ одной переменной квадратическая форма сводится к одному члену

$$f''(x_0)\Delta x^2,$$

где x_0 — испытуемая точка.

Эта «форма», очевидно, является определённой — положительной при $f''(x_0) > 0$ и отрицательной при $f''(x_0) < 0$.

Переходя к функции $f(x, y)$ двух переменных, несложно показать, что квадратическая форма

$$a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2,$$

если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, будет определённой (положительной при $a_{11} > 0$ и отрицательной при $a_{11} < 0$), в случае же, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, — неопределённой.

1.18 Нахождение условного экстремума функции нескольких переменных

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $q_i(x) = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, s}$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции аргумента $x \in R^n$. Требуется найти экстремум функции $f(x)$ при условии, что аргумент удовлетворяет системе ограничений: $q_i(x) = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = \overline{1, s}$ (последнее условие называют также условием связи).

Наиболее простым методом нахождения условного экстремума является сведение задачи к нахождению безусловного экстремума путём разрешения уравнения связи относительно s переменных и последующей их подстановки в целевую функцию.

Пример. Найти экстремум функции $y = x_1^2 - 4x_2$ при условии $x_1 - x_2 = 1$.

Решение. Из уравнения связи выразим x_2 через x_1 и подставим полученное выражение в функцию y:

$$x_2 = x_1 - 1,$$
$$y = x_1^2 - 4(x_1 - 1),$$
$$y = x_1^2 - 4x_1 + 4.$$

Эта функция имеет единственный экстремум (минимум) при $x_1 = 2$. Соответственно, $x_2 = x_1 - 1 = 1$. Таким образом, точкой условного экстремума (минимума) заданной функции является точка $x_{\min}(2, 1)$; $y_{\min}(2, 1) = 0$.

В рассмотренном примере уравнение связи легко разрешимо относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях не всегда удаётся выразить переменные. Соответственно, описанный выше подход применим не ко всем задачам. Более универсальным методом решения задач нахождения условного экстремума является **метод множителей Лагранжа**. Он основан на следующей теореме.

Теорема 8. *Если точка* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *является точкой экстремума функции* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в области, определяемой уравнениями* $q_i(x) = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, s}$, *то существует (при некоторых дополнительных условиях) такой* s*-мерный вектор* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$, *при котором точка* x^* *является стационарной точкой функции*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i(x).$$

Алгоритм метода множителей Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа:
$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i(x),$$
где $\lambda_i \, (i = \overline{1, s})$ — множитель Лагранжа, соответствующий i-му ограничению.
2. Найти частные производные функции Лагранжа и приравнять их к нулю:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \; i = \overline{1, s}. \end{cases}$$
3. Решив полученную систему из $n + s$ уравнений, найти стационарные точки.

Заметим, что в стационарных точках выполняется необходимое, но не достаточное условие экстремума функции. Анализ стационарной точки на наличие в ней экстремума в данном случае сложен. Поэтому метод множителей Лагранжа используют в тех случаях, когда о существовании минимума или максимума исследуемой функции известно заранее.

При решении некоторых экономических задач множители Лагранжа приобретают определённое смысловое содержание. Так, если $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — прибыль предприятия при плане производства n товаров $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — издержки i-го ресурса, то λ_i — оценка этого ресурса, характеризующая скорость изменения оптимума целевой функции в зависимости от изменения i-го ресурса.

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x_1 + 4x_2$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 = 8$.

Решение. Заметим, что функции $f(x) = 2x_1 + 4x_2$ и $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 2x_1 + 4x_2 + \lambda(x_1^2 + 4x_2^2 - 8).$$

Найдём частные производные и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2 + 2\lambda x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 4 + 8\lambda x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = x_1^2 + 4x_2^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Получаем две стационарные точки: при $\lambda_1 = 1/2 :\ (x_1^*, x_2^*) = (-2, 1)$; при $\lambda_2 = -1/2 :\ (x_1^*, x_2^*) = (2, 1)$.

Принимая во внимание характер целевой функции, линиями уровня которой являются прямые, и функции $q(x)$ (эллипс), можно сделать вывод, что в точке $(x_1^*, x_2^*) = (-2, 1)$ функция $f(x)$ принимает минимальное значение, а в точке $(x_1^*, x_2^*) = (2, 1)$ — максимальное.

$$f_{\min}(-2, 1) = -8,\ f_{\max}(2, 1) = 8.$$

Пример 2. Найти экстремумы функции $z(x, y) = xy$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид: $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Найдём частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = y + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = x + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x_0 = 5/4$, $y_0 = 5/6$, $\lambda_0 = -5/12$ — стационарная точка функции Лагранжа. Точка $(5/4, 5/6)$ — точка экстремума функции $z(x, y) = xy$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$.

Найдём второй дифференциал функции $z(x, y) = xy$ в точке $(5/4, 5/6)$. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = y, \\ \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y} = x, \\ \dfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = 1. \end{cases}$$

В результате

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} dy^2 = 2 dx dy.$$

Из уравнения связи имеем: $y = (-2x - 5)/3$ и $dy = (-2/3)dx$.

В результате $d^2 z = (-4/3)dx^2 < 0$ — второй дифференциал, отрицательно определённая квадратическая форма, следовательно, в точке $(5/4, 5/6)$ функция $z(x, y) = xy$ имеет максимум: $f_{\max} = 5/4 \cdot 5/6 = 25/24$.

1.19 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своих наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x;y)$ состоит в следующем.

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить в них значения функции.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ на границах области.
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной линиями: $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1,5$ (рис. 5).

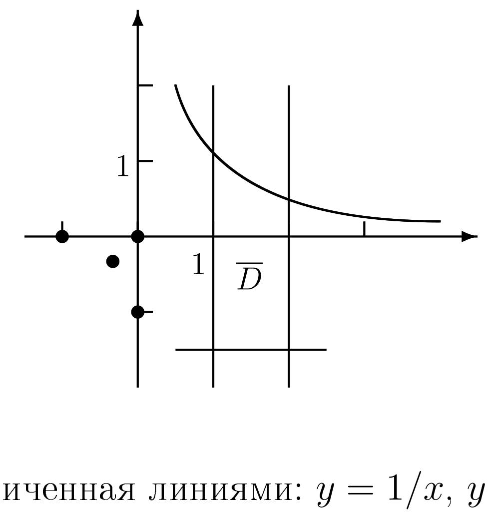

Рис. 5. Область $\overline{D}$, ограниченная линиями: $y = 1/x$, $y = -1,5$, $x = 1$, $x = 2$

Выпишем условия для нахождения стационарных точек функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 + y = y(2x + y + 1) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + x = x(2y + x + 1) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно переменных x и y, найдём координаты четырёх стационарных точек: $(0; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(-1/3; -1/3)$. Ни одна из этих точек не принадлежит области $\overline{D}$.

Исследуем поведение функции на границе области.

- $y = 1/x$, $x \in [1; 2]$.
  Функция примет вид: $z = x^2 \cdot 1/x + x \cdot (1/x)^2 + x \cdot 1/x = = x + 1/x + 1$.
  $z'_x = 1 - 1/x^2 = 0$. Стационарные точки $x = -1 \notin \overline{D}$, $x = 1 \in \overline{D}$. $z(1; 1) = 3$, $z(2; 1/2) = 3,5$.

- $y = -1,5$, $x \in [1; 2]$.
  $z(x; -1,5) = -1,5x^2 + 2,25x - 1,5x = -1,5x^2 + 0,75x$.
  $z'_x = -3x + 0,75 = 0$. Стационарная точка $x = 0,25 \notin \overline{D}$.
  $z(1; -1,5) = -0,75$, $z(2; -1,5) = -4,5$.

- $x = 1$, $y \in [-1,5; 2]$.
  $z(1; y) = 2y + y^2$.
  $z'_y = 2 + 2y = 0$. Стационарная точка $y = -1 \in \overline{D}$.
  $z(1; -1) = -1$.

- $x = 2$, $y \in [-1,5; 1/2]$. $z(2; y) = 6y + 2y^2$.
  $z'_y = 6+4y = 0$. Стационарная точка $y = -1,5 \in \overline{D}$. Значение функции в этой точке уже найдено.

В результате, наименьшее значение функции $m = -4,5$ в точке $(2; -1,5)$; наибольшее значение функции $M = 3,5$ в точке $(2; 0,5)$.

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.

5. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.

6. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.

7. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.

8. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

9. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.

10. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т2 — 216 с.