НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Новосибирск 2013

Содержание

1 Кривые второго порядка

1.1 Основные понятия

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются линиями (кривыми) второго порядка. Уравнение (1) определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу.

1.2 Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат имеет координаты x_0, y_0, а $M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Уравнению (2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности. Уравнение (2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (2) после несложных преобразований примет вид $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

- коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;
- отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

Рассмотрим обратную задачу. Положив в уравнении (1) значения $B = 0$, $A = C \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать:

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A}.$$

При условии $\dfrac{E^2}{A^2} + \dfrac{D^2}{A^2} - \dfrac{F}{A} > 0$ получили уравнение окружности с центром в точке $\left(-\dfrac{D}{A}, -\dfrac{E}{A}\right)$ и радиусом $R = \sqrt{\dfrac{E^2}{A^2} + \dfrac{D^2}{A^2} - \dfrac{F}{A}}$.

Если $R = 0$, то уравнение примет вид:

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = 0.$$

Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O\left(-\dfrac{D}{A}, -\dfrac{E}{A}\right)$ — «окружность выродилась в точку» (имеет нулевой радиус).

Если $\dfrac{E^2}{A^2} + \dfrac{D^2}{A^2} - \dfrac{F}{A} < 0$, то уравнение не определяет никакой линии — «окружность мнимая».

1.3 Эллипс

Определение 1. *Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.*

Потребуем, чтобы эта постоянная была больше расстояния между фокусами. Фокусы эллипса принято обозначать через F_1 и F_2.

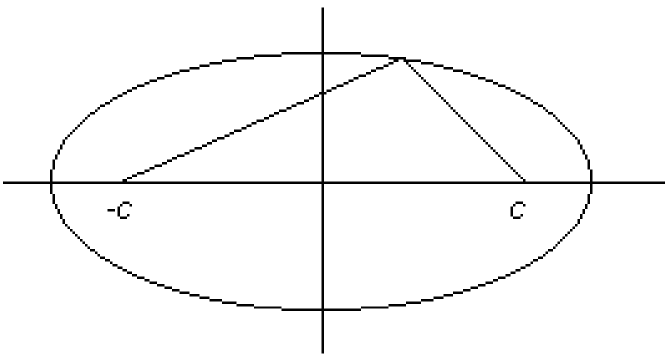


Рис. 1. Эллипс

Пусть M — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Отрезки F_1M и F_2M (так же как и длины этих отрезков) называются фокальными радиусами точки M. Постоянную сумму фокальных радиусов точки эллипса обозначим через $2a$. Таким образом, для любой точки M эллипса имеем:

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Расстояние F_1 и F_2 между фокусами: $2c$.

Ось абсцисс — прямая, проходящая через F_1 и F_2, начало координат — середина отрезка F_1F_2.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим, далее, через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1 = F_1$, $r_2 = F_2$). Точка M будет находиться на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x, y.

Учитывая, что координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это и есть уравнение рассматриваемого эллипса, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x,y)$, когда точка M лежит на этом эллипсе. Возведём обе части равенства в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

откуда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Обозначим: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ($a > c \ \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$), тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса.*

Уравнение (3), определяющее эллипс в декартовой прямоугольной системе координат, есть уравнение второй степени: таким образом, *эллипс есть линия второго порядка.*

Исследование формы эллипса по его уравнению

1. Уравнение содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат, точки $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0; 0)$ — *центра эллипса.*

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y = 0$, находим две точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс. Положив в уравнении $x = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса.* Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой и малой осями эллипса.* Числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса.*

3. Из уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства $\dfrac{x^2}{a^2} \leq 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ или $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В уравнении эллипса сумма неотрицательных слагаемых равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Эллипс имеет форму, изображенную на рис. 1.

Определение 2. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси.*

Обозначив эксцентриситет буквой ε, получаем: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$, т. е. *эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы.*

$$c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ и } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом. Таким образом, эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше $1 - \varepsilon^2$, тем меньше, следовательно, отношение $\dfrac{b}{a}$, значит, чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут. В случае окружности $b = a$ и $\varepsilon = 0$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ — фокальные радиусы. Очевидно $r_1 + r_2 = 2a$.

Имеют место формулы $r_1 = a + \varepsilon x$ и $r_2 = a - \varepsilon x$.

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2},\ c^2 = a^2 - b^2.$$

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 - 2xc + a^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2 - 2cx + x^2\frac{c^2}{a^2}} = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon x.$$

Аналогично получается формула: $r_1 = a + \varepsilon x$.

Определение 3. *Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии* $\dfrac{a}{\varepsilon}$ $(a > b)$ *от него, называются директрисами эллипса.*

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой. Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса, аналогично, левая директриса расположена левее его левой вершины.

Теорема 1. *Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.*

1.4 Гипербола

Определение 4. *Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.*

Разность берется по абсолютному значению, кроме того, требуется, чтобы она была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Фокусы гиперболы будем обозначать через F_1 и F_2, а расстояние между ними — через $2c$.

Пусть M — произвольная точка гиперболы с фокусами F_1 и F_2. Отрезки F_1M и F_2M (так же, как и длины этих отрезков) называются фокальными радиусами точки M и обозначаются через r_1 и r_2 ($r_1 = F_1M, \ r_2 = F_2M$). По определению гиперболы разность фокальных радиусов ее точки M есть постоянная величина, эту постоянную обозначим через $2a$.

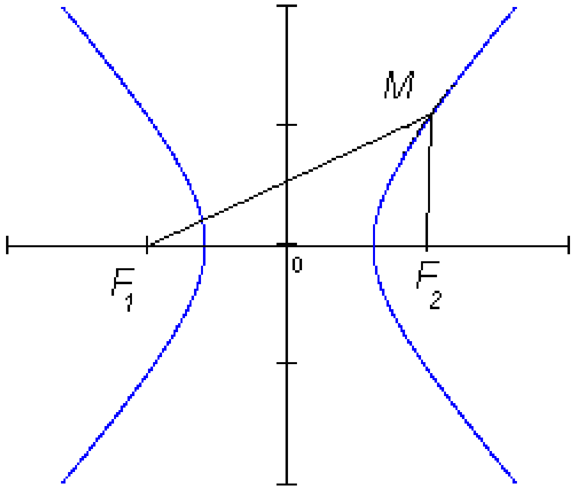


Рис. 2. Гипербола

Рассмотрим гиперболу с фокусами F_1 и F_2. Возьмем на плоскости произвольную точку M с координатами (x, y), фокальные радиусы $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$. Точка M будет находиться на (данной) гиперболе в том и только в том случае, когда

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Пусть $F_1F_2 = 2c$ и фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c; 0)$ и $(+c; 0)$, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Это уравнение рассматриваемой гиперболы, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x, y)$, когда точка M лежит на гиперболе.

Возведём обе части равенства в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части равенства, найдем:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + 2a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

откуда

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Обозначим: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ($c > a \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$), тогда

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Уравнение (4), определяющее гиперболу в декартовой системе координат, есть уравнение второй степени, таким образом, *гипербола есть линия второго порядка.*

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

1. Уравнение содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0,0)$, которую называют центром гиперболы.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$ находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$. Положив $x = 0$ получаем $y^2 = -b^2$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

   Точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ называются вершинами гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — *действительной осью*, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — *действительной полуосью гиперболы.* Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0,b)$ и

$B_2(0,-b)$ называется *мнимой осью*, число b — *мнимой полуосью*. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.

3. Из канонического уравнения гиперболы следует, что уменьшаемое $\dfrac{x^2}{a^2}$ не меньше единицы, т. е. что $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$ или $|x| \geq a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (правая ветвь гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (левая ветвь гиперболы).

4. Из уравнения гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность сохраняет постоянное значение, равное единице. Из сказанного следует, что гипербола — кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей.

5. Ветви гиперболы, описываемой уравнением $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ расположены сверху и снизу от прямых $y = b$ и $y = -b$.

Асимптоты гиперболы

Определение 5. *Прямая L называется асимптотой неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат.*

Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты: $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$.

При построении гиперболы целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы, провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

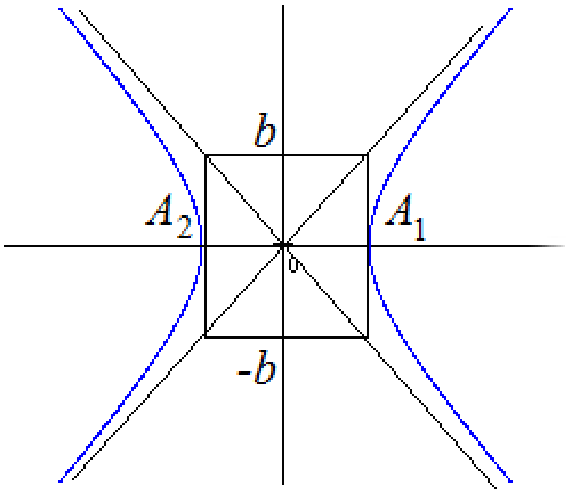


Рис. 3. Построение гиперболы

Определение 6. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами:* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Так как для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$, т. е. эксцентриситет каждой гиперболы больше единицы.

Учитываяв, что $c^2 = a^2 + b^2$, имеем:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \text{ и } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением $\dfrac{b}{a}$, а отношение $\dfrac{b}{a}$ в свою очередь определяется эксцентриситетом. Таким образом, эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше $\varepsilon^2 - 1$, тем меньше, следовательно, отношение $\dfrac{b}{a}$, значит, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут её основной прямоугольник (в направлении оси, соединяющей вершины). В случае равносторонней гиперболы $a = b$ и $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Определение 7. *Две прямые, перпендикулярные к той оси гиперболы, которая ее пересекает, и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии* $\dfrac{a}{\varepsilon}$ *от него, называются директрисами гиперболы.*

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая директриса расположена между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

1.5 Парабола

Определение 8. *Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).*

Фокус параболы обозначим буквой F, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p. Величину p называют параметром параболы.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y)$. Обозначим далее через r расстояние от точки M до фокуса ($r = FM$),

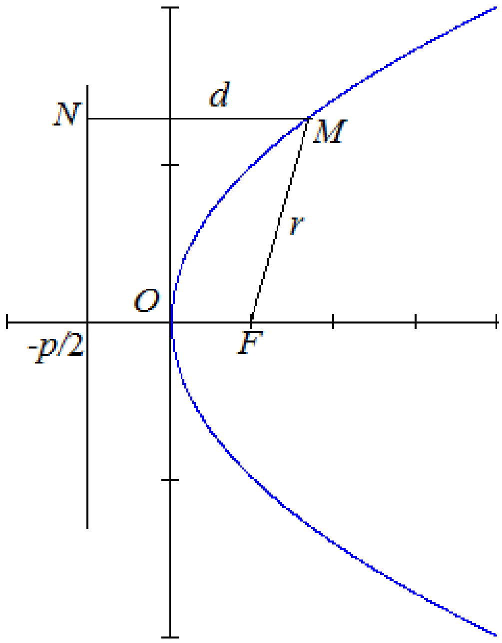


Рис. 4. Парабола

d — расстояние от точки до директрисы. Точка M будет находиться на (данной) параболе в том и только в том случае, когда

$$r = d.$$

Фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, учитывая это, находим:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Обозначим через N основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Точка N имеет координаты $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ отсюда, получаем:

$$d = MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}$$

$x + \frac{p}{2}$ — число положительное, это следует из того, что $M(x, y)$ должна находиться с той стороны от директрисы, где находится фокус, т. е. должно быть $x > -\frac{p}{2}$, откуда $x + \frac{p}{2} > 0$.

Заменяя r и d, найдем

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

Это и есть уравнение рассматриваемой параболы, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x, y)$, когда точка М лежит на данной параболе. Возведем обе части равенства в квадрат, получим:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

или

$$y^2=2px. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется каноническим уравнением параболы. Уравнение, определяющее параболу в декартовой системе координат, есть уравнение второй степени, таким образом, *парабола есть линия второго порядка.*

Исследование форм параболы по ее уравнению

1. В уравнении $y^2 = 2px$ переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox, ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2. Так как $p > 0$, то из $y^2 = 2px$ следует, что $x > 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид (форму), изображенный на рисунке 4. Точка $O(0, 0)$ называется *вершиной параболы*, отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

1.6 Приведение к каноническому виду общего уравнения линии второго порядка

Пусть дано общее уравнение линии второго порядка (1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Левая часть уравнения (1) образуют следующие группы членов:

1) квадратичная форма, состоящая из старших членов $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$;

2) линейной формы членов первой степени $2Dx + 2Ey$;

3) свободного члена F.

Обозначим через Δ дискриминант квадратичной формы старших членов уравнения (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Теорема 2. *Пусть в декартовой системе координат задано уравнение второго порядка*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из вледующих девяти канонических видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(\Delta > 0)$, *эллипс;*

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $(\Delta > 0)$, *мнимый эллипс, этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка;*

3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ $(\Delta > 0)$, *точка* $(0, 0)$*;*

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(\Delta < 0)$, *гипербола;*

5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ $(\Delta < 0)$, *две пересекающиеся прямые;*

6) $y^2 = 2px$ $(\Delta = 0)$, *парабола;*

7) $y^2 - a^2 = 0$ $(\Delta = 0)$, *две параллельные прямые;*

8) $y^2 + a^2 = 0$ $(\Delta = 0)$, *две мнимые прямые, этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка;*

9) $y^2 = 0$ $(\Delta = 0)$, *две совпадающие прямые.*

Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

В случае, если в уравнениии (1) коэффициент $B = 0$,

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{6}$$

то выделяя полный квадрат и делая замену $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ получаем одно из уравнений указанных видов. Имеем кривые второго порядка с осями симметрии параллельными осям координат.

В исходной системе координат уравнения эллипса можно записать в виде:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

гиперболы:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

параболы:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0),$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$$

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0).$$

Эти уравнения называют *почти канонические уравнения*, соответственно, эллипса, гиперболы, параболы.

Примеры

Установить вид и построить линии, заданные уравнениями второго порядка:

1) $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$;

2) $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$;

3) $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$.

Уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Рассмотрим общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{7}$$

Оно отличается от предыдущего уравнения наличием члена с произведением координат ($B \neq 0$). Можно, путем поворота координатных осей на угол α, преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Определение угла поворота координатных осей

1. Используя формулы поворота осей

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \; y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

выразим старые координаты через новые:

$$A(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + 2B(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) +$$
$$+ C(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + 2D(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) +$$
$$+ 2E(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + F = 0.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

т. е.

$$2B\cos 2\alpha = (A-C) = \sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}. \tag{8}$$

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию (8), уравнение (7) сводится к уравнению (6) не содержащем xy (т. е. случай, когда $B=0$).

Замечание. Если $A=C$, то уравнение (8) теряет смысл. В этом случае $\cos 2\alpha = 0$, тогда $2\alpha = 90^\circ$, т. е. $\alpha = 45^\circ$.

Пример.

Привести к каноническому виду уравнение:
$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$

$$A=5,\ B=2,\ C=8,\ \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40-4>0 \ \Rightarrow\ \text{эллипс.}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{5-8} = -\frac{4}{3}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$ (и $\operatorname{tg}\alpha = 2$).

В результате $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$$5\left(\frac{4}{5}x'^2+\frac{1}{5}y'^2\right)+4\left(-\frac{2}{5}x'^2+\frac{2}{5}y'^2\right)+8\left(\frac{1}{5}x'^2+\frac{4}{5}y'^2\right)+$$

$$+8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+14\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+5=0,$$

$$4\left(x'+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{9}{4}=0.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\left(x'+\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\dfrac{9}{16}}+\frac{\left(y'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\dfrac{1}{4}}=1.$$

2. Собственные векторы матрицы квадратичной формы $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ образуют базис, в котором уравнение (7) может быть записано в каноническом виде. Угол поворота координатных осей можно определить находя угол, образованный собственными векторами с осями координат исходной системы. В этом случае сразу определяются коэффициенты при x'^2 и y'^2.

Для примера, рассмотренного выше.

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$.
Собственные векторы: $\vec{p}_1 = (2; -1)$, $\vec{p}_2 = (1; 2)$.
В результате $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Квадратичная форма, состоящая из старших членов уравнения, в этом случае, примет вид: $4x'^2 + 9y'^2$.

Линейная часть уравнения: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{36}{\sqrt{5}}y'$.

В базисе из собственных векторов уравнение примет вид:

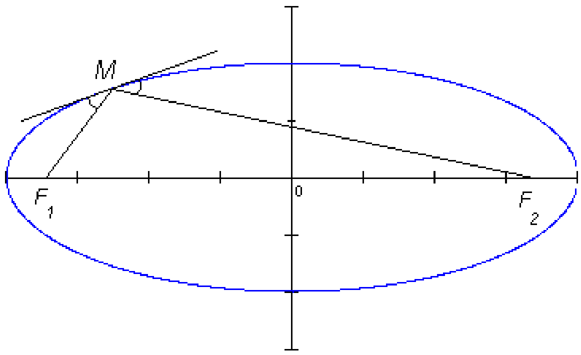
$$4x'^2 + 9y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{36}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0.$$

Выделяя полный квадрат это уравнение можно записать:

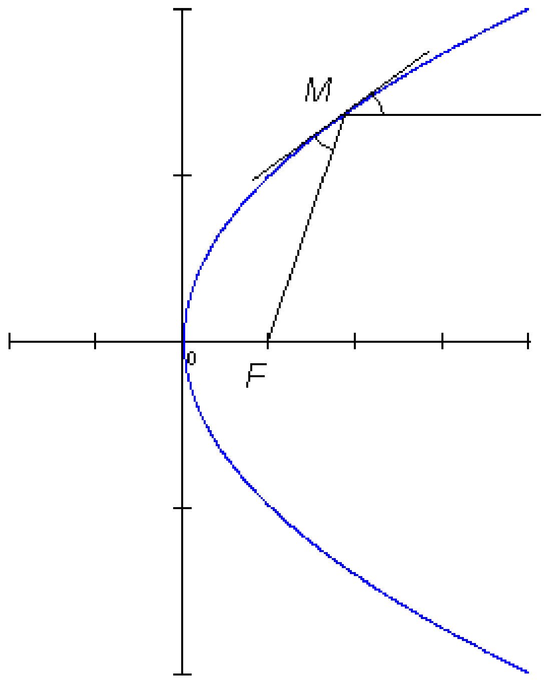
$$\frac{\left(x' + \dfrac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\dfrac{9}{16}} + \frac{\left(y' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\dfrac{1}{4}} = 1.$$

1.7 Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

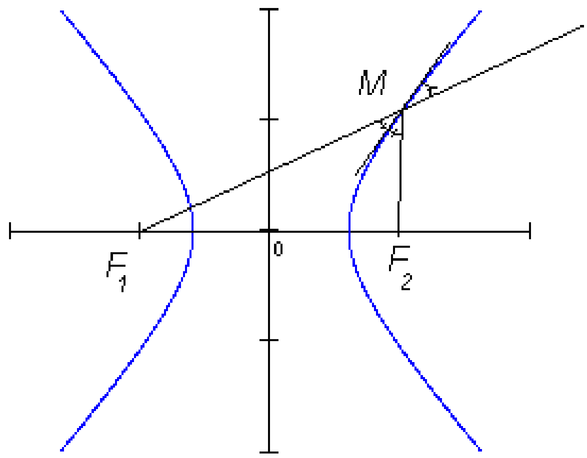
1. Прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит вне угла F_1MF_2.



2. Прямая, касающаяся параболы в некоторой точке M, составляет равные утлы с фокальным радиусом FM и с лучом, который, исходя из точки M, идет параллельно оси параболы в ту сторону, куда парабола бесконечно простирается.



3. Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит внутри угла F_1MF_2.



Чтобы выявить физический смысл приведенных предложений, представим себе, что эллипс, парабола или гипербола вращается вокруг оси (содержащей фокусы). Тем самым образуется поверхность, называемая соответственно эллипсоидом, параболоидом или гиперболоидом. Реальная поверхность такого вида, покрытая амальгамой, представляет собой, соответственно, эллиптическое, параболическое или гиперболическое зеркало. Принимая во внимание известные в оптике законы отражения света, заключаем, что:

1. Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.

2. Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут параллельно оси.

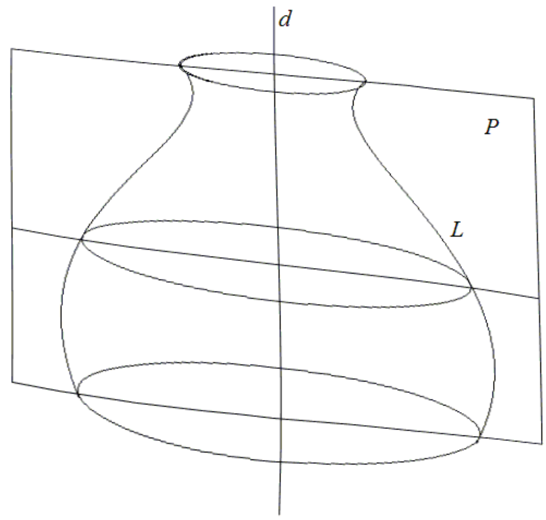
3. Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.

На указанном сейчас свойстве параболического зеркала основано устройство прожектора.

2 Поверхности второго порядка

2.1 Поверхности вращения

Поверхность S называется *поверхностью вращения* с осью d, если она составлена из окружностей, которые имеют щентры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой. Рассмотрим линию L, которая лежит в плоскости P, проходящей черех ось вращения d, будем вращать её вокруг этой оси. Каждая точка опишет окружность, а вся линия — поверхность вращения.



Пусть линия вращения лежит в плоскости Oxz, её уравнение $\varphi(x, z) = 0$, ось вращения — ось Oz. Тогда уравнение поверхности вращения: $\varphi(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ или в эквивалентном виде:

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z)\varphi(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

2.2 Эллипсоид

Рассмотрим эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ось вращения — Oz, тогда *эллипсоид вращения*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Если ось вращения — Ox, то получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Трёхосный эллипсоид (рис. 5)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{9}$$

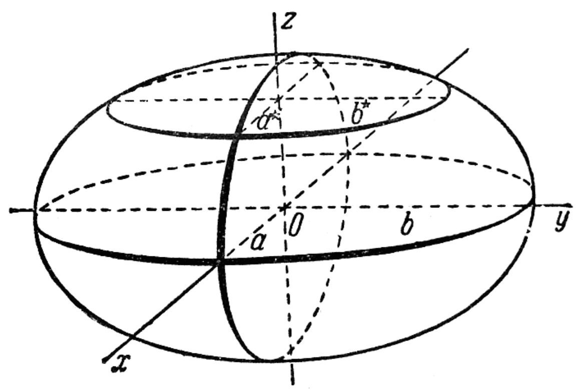


Рис. 5. Трёхосный эллипсоид

2.3 Однополостный гиперболоид

Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ось вращения — мнимая ось гиперболы, ось Oz, тогда *однополостный гиперболоид вращения*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В результате сжатия этой поверхности в направлении плоскости Oxz или Oyz получаем поверхности с уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10}$$

однополостнвый гиперболоид (рис. 6).

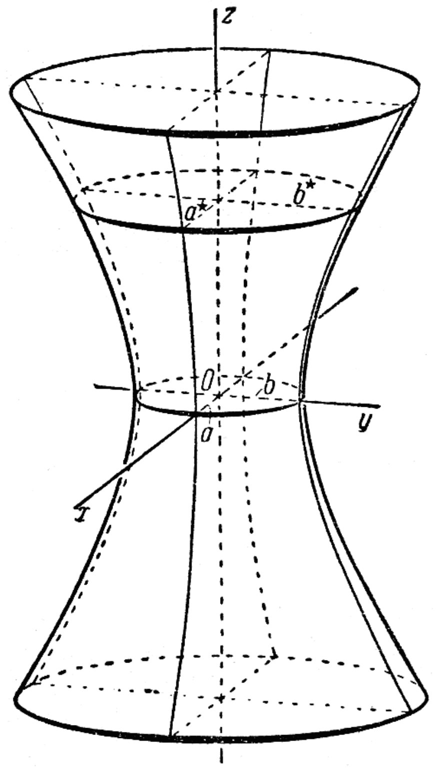


Рис. 6. Однополостный гиперболоид

Кроме этого однополостные гиперболоиды задаются уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2.4 Двуполостный гиперболоид

Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, ось вращения — действительная ось гиперболы, ось Ox, тогда *двуполостный гиперболоид вращения*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В результате сжатия этой поверхности в направлении плоскости Oxz или Oyz получаем поверхности с уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{11}$$

двуполостнвый гиперболоид (рис. 7).

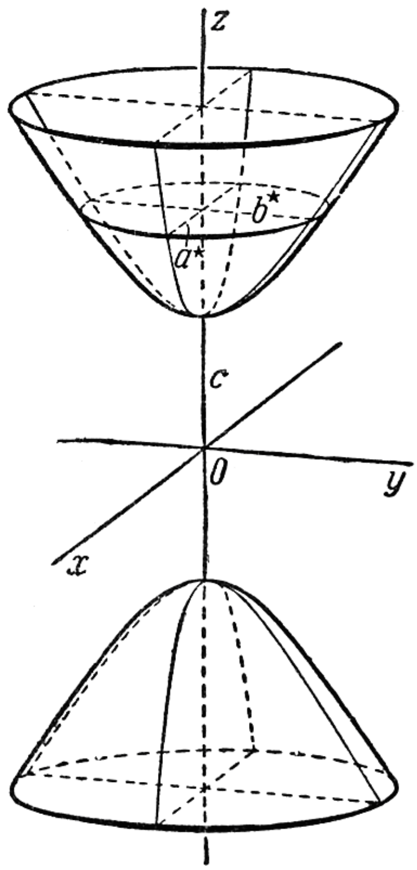


Рис. 7. Двуполостный гиперболоид

Кроме этого двуполостные гиперболоиды задаются уравнениями:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2.5 Конус второго порядка

Рассмотрим на плоскости пару пересекающихся прямых, задаваемых уравнением: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$. Поверхность, получаемая вращением этой линии вокруг оси аппликат, имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

и называется *круговой конус.*

Сжатие к плоскости Oxz или Oyz переводит прямой круговой конус в поверхность с уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (12)$$

Эта поверхность называется *конус* или *конус второго порядка*, или *эллиптический конус.*

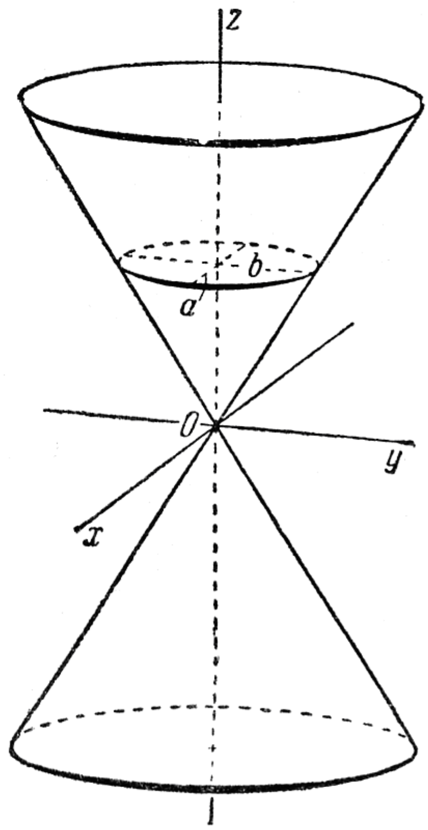


Рис. 8. Конус

2.6 Эллиптический параболоид

Паробола $x^2 = 2pz$, ось вращения — ось симметрии параболы, ось Oz, в результате имеем *параболоид вращения*:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

В результате сжатия этой поверхности в направлении оси Ox или Oy получаем поверхности с уравнением:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{13}$$

эллиптический параболоид (рис. 9).

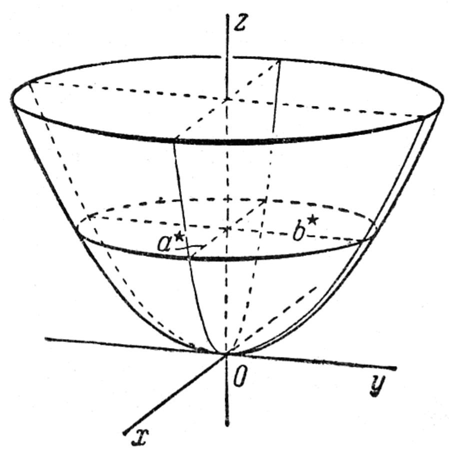


Рис. 9. Эллиптический параболоид

2.7 Гиперболический параболоид

По аналогии с уравнением (13) можно записать уравнение

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{14}$$

Поверхность, описываемая уравнением (14) называется *гиперболический параболоид*.

Сечения этой поверхности плоскостями $x = \alpha$ при произвольном α — параболы. Сечения плоскостями $z = \beta$ при произвольном β — гиперболы.

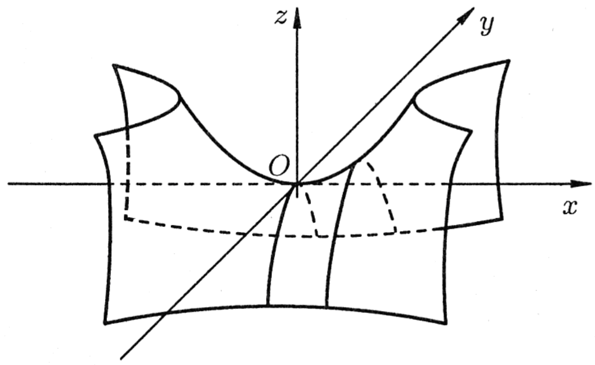


Рис. 10. Гиперболический параболоид

2.8 Цилиндрическая поверхность

Цилиндрическая поверхность, поверхность, описываемая прямой линией (*образующей цилиндрической поверхности*), которая движется, оставаясь параллельной заданному направлению и скользя по заданной кривой (*направляющей*).

Если ось Oz прямоугольной системы координат параллельна образующей цилиндрической поверхности, то её уравнение имеет вид $F(x, y) = 0$.

В случае, если направляющей цилиндрической поверхности второго порядка служит линия второго порядки, то в зависимости от вида направляющей различают эллиптический цилиндр (рис. 11), каноническое уравнение которого: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

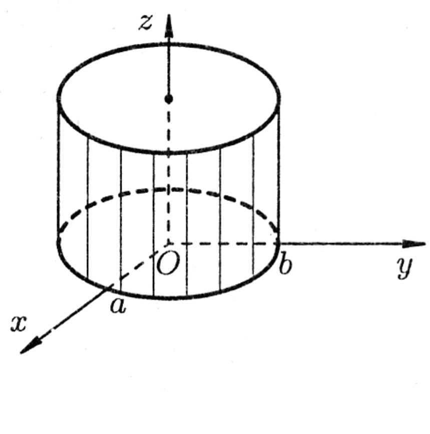


Рис. 11. Эллиптический цилиндр

гиперболический цилиндр (рис. 12):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

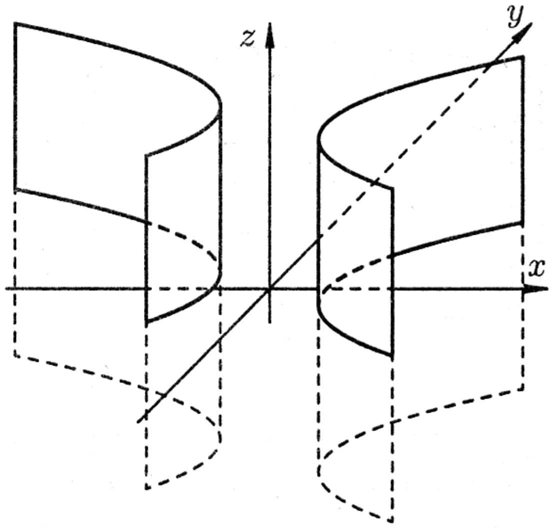


Рис. 12. Гиперболический цилиндр

параболическнй цилиндр (рис. 13):

$$x^2 = 2pz.$$

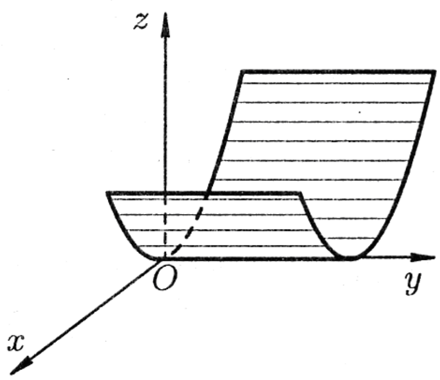


Рис. 13. Параболический цилиндр

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.
2. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
3. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник. — СПб.: Изд-во Профессия, 2002. — 200 с.
4. *Ефимов, Н. В.* Квадратичные формы и матрицы : учебник для вуз / Н. В. Ефимов. — М.: Физматлит, 1963. — 160 с.
5. *Буров, А. Н.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / А. Н. Буров, Э. Г. Соснина. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2006. — 185 с.
6. *Бородихин, В. М.* Линейная алгебра. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии : учеб. пособие / В. М. Бородихин, А. П. Путинцева, Э. Г. Соснина. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 1999. — 151 с.
7. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2006. — Т1 — 280 с.