НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
РЯДЫ

Новосибирск 2014

Содержание

1 Ряды

1.1 Ряд и его сумма

Числовой ряд — это числовая последовательность, рассматриваемая вместе с другой последовательностью, которая называется последовательностью частичных сумм (ряда).

Определение 1. *Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Составленный из этих чисел сумма, обозначаемая символом*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется числовым рядом, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда; n-й член ряда называется также общим членом ряда. Ряд считается заданным, если задано правило (функция натурального аргумента), позволяющее по известному номеру n его члена записать этот член ряда.

Определение 2. *Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и обозначается символом S_n*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 3. *Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а число S — суммой ряда. Ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ или не существует.*

Определение 4. *Ряд, полученный из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ отбрасыванием первых его m членов*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$$

называется m-ым остатком ряда и обозначается R_m.

Если числовой ряд сходится, тогда $S_m + R_m = S$.

Справедливы следующие теоремы.

1. Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.

2. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то предел его m-го остатка при $m \to \infty$ равен нулю, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.

3. Если члены сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, имеющего сумму S, умножить на число λ, то полученный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ будет также сходящимся, а число λS — его суммой.

4. Умножение членов расходящегося ряда на число $\lambda \neq 0$ не нарушает его расходимости.

Теорема 1 (Необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то предел его общего члена равен нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ ч. т. д.

Из этой теоремы вытекает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, т. е. условие:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

является *достаточным условием расходимости числового ряда.*

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать, но есть смысл исследовать ряд дальше с помощью других признаков.

Примеры

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+1}$.

2. Исследовать на сходимость *гармонический ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, покажем что ряд расходится.

Первый способ.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n \in N$ имеет место неравенство $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя неравенство, получим: $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$ или $\dfrac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$.

Подставляя в неравенство поочередно $n = 1,\ 2, \ldots, n-1,\ n$, получим:

$$\begin{gathered} 1 > \ln 2, \\ \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \\ \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3, \\ \ldots \\ \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n. \end{gathered}$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Следовательно гармонический ряд расходится.

Второй способ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{1/2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{1/2}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{1/2}\ldots+=1+1+1+1+\ldots$$

Определение 5. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$*, у которого все* $a_1>0$*,* $a_2>0$*,* $\ldots$*,* $a_n>0$*,* $\ldots$ *называется* ***знакоположительным*** *числовым рядом.*

1.2 Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим два знакоположительных числовых ряда:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k, \tag{1}$$

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}b_k. \tag{2}$$

Признак сравнения 1. Пусть даны два числовых ряда (1) и (2). Исследуется на сходимость ряд (1). Известно поведение ряда (2). Если начиная с некоторого номера n:

1) $a_n\le b_n$ — члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2), и ряд (2) сходится, то и ряд (1) также сходится;

2) $a_n\ge b_n$ — члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2), и ряд (2) расходится, то и ряд (1) также расходится.

Доказательство

1. Пусть ряд (2): $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ — сходится. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = S^{(b)}$, но $S_n^{(a)} \le S^{(b)}$ и $S_1^{(a)} < S_2^{(a)} < S_3^{(a)} < \ldots < S_n^{(a)} \Rightarrow$ монотонно возрастаящая и ограниченная последовательность $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} S_n^{(a)} = S^{(a)} \Rightarrow$ ряд сходится.

2. Если же $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ — ряд расходится.

Признак сравнения 2. Пусть даны два числовых ряда (1) и (2). Исследуется на сходимость ряд (1). Известно поведение ряда (2). Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \ne 0$, то оба ряда (1) и (2) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Если, в частности, общие члены сравниваемых рядов *эквивалентны* как бесконечно малые при $n \to \infty$ $(a_n \sim b_n)$, то оба ряда (в смысле сходимости) ведут себя одинаково.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$. Из определения предела последовательности: $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon \Rightarrow (A-\varepsilon)b_n < a_n < (A+\varepsilon)b_n$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (A-\varepsilon)b_k$ также сходится по признаку 1 и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (A+\varepsilon)b_k$ сходится по свойству рядов.

Сравнение исследуемых рядов производится обычно со следующими известными рядами:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| \ge 1$);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд);

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \le 1$).

Признак Даламбера. Пусть дан числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

- при $q < 1$ ряд сходится,
- при $q > 1$ ряд расходится,
- при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Доказательство

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$.

$$a_2 < (q+\varepsilon)a_1,$$

$$a_3 < (q+\varepsilon)a_2 < (q+\varepsilon)^2 a_1,$$
$$a_4 < (q+\varepsilon)a_3 < (q+\varepsilon)^3 a_1,$$
$$\dots$$
$$a_n < (q+\varepsilon)a_{n-1} < (q+\varepsilon)^{n-1} a_1.$$

Если $0 < q + \varepsilon < 1$, то правая часть неравенства геометрическая прогрессия, образующая сходящийся ряд $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (по первому признаку сравнения).

Замечание. Признак Даламбера целесообразно применять тогда, когда общий член ряда содержит факториал или содержит одновременно степенную и показательную функции относительно n.

Замечание. При оценке факториалов больших чисел и вычислении пределов, содержащих $n!$, часто бывает полезна формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}.$$

которая означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}} = 1.$

Признак Коши (радикальный). Пусть дан числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

- при $q < 1$ ряд сходится,
- при $q > 1$ ряд расходится,
- при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Доказательство

$\sqrt[n]{a_n} < q$ или $a_n < q^n$. Если $|q| < 1$, то a_n меньше членов сходящейся геометрической прогрессии.

Замечание. Признак Коши (радикальный) целесообразно применять в том случае, если общий член ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения.

Интегральный признак Коши (основан на сравнении рядов с несобственными интегралами). Пусть общий член ряда $a_n = f(n) > 0$. Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ значения $f(n)$, монотонно убывает в некотором интервале $\alpha < x < \infty$, где $\alpha > 1$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и несобственный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Учитывая, что $f(n)$ монотонно убывает в некотором интервале $\alpha < x < n$, оценим снизу и сверху $\int\limits_{\alpha}^{n} f(x)dx$ с помощью квадратурных формул левых прямоугольников и правых прямоугольников. При шаге интегрирования $h = 1$ имеем:

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) < \int\limits_{\alpha}^{n} f(x)dx < f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1).$$

или

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int\limits_{\alpha}^{n} f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

или

$$S_n - a_1 < \int\limits_{\alpha}^{n} f(x)dx < S_n - a_n.$$

- Интеграл сходится: $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = A \Rightarrow S_n - a_1 < A$ или $S_n < a_1 + A$ — последовательность частичных сумм возрастает и ограниченна сверху $\Rightarrow \exists$ предел $\Rightarrow$ ряд сходится.
- $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = +\infty$, но $S_n > \int\limits_{1}^{n} f(x)dx + a_n \Rightarrow S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Ряд расходится.

Примеры. Исследовать на сходимость числовые ряды.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

   Так как $n > \ln n$ для $n \geq 2$, тогда $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, а $\dfrac{1}{n}$ — общий член расходящегося гармонического ряда, то в силу признака сравнения 1 данный ряд *расходится*.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{(2n-3)^8}}$.

Применим признак сравнения 2. Имеем $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[3]{(2n-3)^8}}$. Степень числителя равна 1, степень знаменателя равна 8/3. Подберём для сравнения обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, где показатель $p = 8/3 - 1 = 5/3$ ($p =$ степень знаменателя $-$ степень числителя). Т. е. ряд для сравнения $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5/3}}$, где $p = 5/3 > 1$, следовательно, данный ряд сходится и $b_n = \dfrac{1}{n^{5/3}}$. Тогда,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{n^5}}{\sqrt[3]{(2n-3)^8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^8}} \left\{ \begin{matrix} < \infty \\ \neq 0 \end{matrix} \right.$$

значит, сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Следовательно, исследуемый ряд тоже *сходится*.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^4+2n^2}{n^4+1}$.

Имеем: $\ln \dfrac{n^4+2n^2}{n^4+1} = \ln\left(1 + \dfrac{2n^2-1}{n^4+1}\right) \sim \dfrac{2n^2-1}{n^4+1} \sim \dfrac{2}{n^2}$ (знак $\sim$ означает эквивалентность бесконечно малых при $n \to \infty$). Здесь используется эквивалентность $\ln(1+\alpha(n)) \sim \alpha(n)$ при $\alpha(n) \to 0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^4+1} = 0$. Тогда данный ряд, по признаку сравнения 2, ведет себя (в смысле сходимости) так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{2}{n^2}$. Последний сходится как обобщенный гармонический с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, сходится и исследуемый ряд.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^4+2n^2}{n^4+1}$ *сходится*.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Применяем признак Даламбера. По известному члену ряда a_n, заменяя в нем n на $n+1$, находим следующий за ним член a_{n+1}. Здесь

$$a_n = \frac{2^n}{n!},\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ *сходится.*

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

Предел отношения $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n^{\sqrt{n}}}{(n+1)n^{\sqrt{n+1}-1}}$ в данном случае вычислить затруднительно. Поэтому применение признака Даламбера отпадает. Используем признак Коши (радикальный). При вычислении предела воспользуемся формулой Стирлинга и заменим $n!$ на $\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}}{n^{\sqrt{n}}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2\pi}}{e} \cdot n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}} = \infty > 1,$$

следовательно, ряд *расходится.*

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} p > 1, & \text{интеграл сходится,} \\ p \le 1, & \text{интеграл расходится.} \end{cases}$$

Следовательно, обобщенный гармонический ряд, *сходится при* $p > 1$ и *расходящийся при* $p \leq 1$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \to \infty} \int\limits_2^{A} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \to \infty} \int\limits_2^{A} \frac{d \ln x}{\ln x} =$$

$$= \lim_{A \to \infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = \infty > 1,$$

следовательно, ряд *расходится* на основании интегрального признака Коши.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$.

Действуя аналогично предыдущему примеру, получаем, что ряд *сходится* на основании интегрального признака Коши.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^n$.

Не выполняется необходимый признак сходимости ряда — ряд расходится.

Аналогичный результат можно получить с помощью достаточных признаков сходимости. Общий член ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения, поэтому удобнее всего применение признака Коши (радикального):

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = 3 > 1.$$

следовательно, ряд *расходится*.

1.3 Сходимость знакопеременных рядов

Определение 6. *Ряд*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3}$$
с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

Если знакопеременный ряд содержит конечное число отрицательных членов, то его исследование на сходимость сводится к исследованию знакоположительного ряда, так как отбрасывание от ряда конечного числа начальных членов (до членов одного знака) не нарушит его сходимости или расходимости. Аналогично, если знакопеременный ряд содержит конечное число положительных членов, так как умножение ряда на (-1) не меняет поведение ряда (в смысле сходимости).

Определение 7. *Знакопеременный ряд* (3) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд*
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{4}$$
составленный из модулей членов данного ряда.

Замечание. Оказывается, что всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся, т. е. из сходимости ряда (4) всегда следует сходимость ряда (3).

Определение 8. *Знакопеременный ряд* (3) *называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд* (4), *составленный из модулей его членов, расходится.*

Справедливы следующие теоремы.

1. Сходящийся знакопеременный ряд (в том числе и знакопостоянный) остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой группировке его членов, произведенной без изменения порядка их следования.

Замечание. Обратная теорема в общем случае неверна. Так, например, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, а ряд $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$, полученный попарной группировкой его членов, является сходящимся.

2. Абсолютно сходящийся ряд (в том числе и знакопостоянный) остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой перестановке его членов.

3. Изменяя порядок следования членов в условно сходящемся ряде, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся.

4. Если знакопеременный ряд (3) сходится абсолютно, то сходятся ряды составленные из его а) положительных членов; б) отрицательных членов. Если же знакопеременный ряд сходится лишь условно, то упомянутые выше ряды расходятся.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд — значит не только ответить на вопрос, сходится он или расходится, но и как сходится: абсолютно или условно.

Среди знакопеременных рядов особо выделяют класс *знакочередующихся* рядов.

Определение 9. *Ряд*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k \qquad (5)$$

в котором все u_n, $n \in N$ — числа одного знака, называется знакочередующимся.

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд (5). Если

1) $|u_{n+1}| < |u_n|$ — члены, начиная с некоторого монотонно убывают по абсолютной величине,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$ — выполнен необходимый признак, то ряд (5) сходится.

Доказательство

Рассмотрим частичную сумму

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} =$$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражения в скобках по условию теоремы больше нуля $\Rightarrow$ сумма возрастает с возрастанием номера.

$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \;\Rightarrow\; S_{2m} < u_1.$

Сумма ограничена сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, причём $0 < S < u_1$.

Пусть теперь частичная сумма содержит $2m+1$ членов.

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2m}+u_{2m+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2m}+\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m+1} = S+0 = S.$

Ряд сходится.

Исследование сходимости знакочередующихся рядов рекомендуется начинать с исследования их абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

При исследовании знакопеременных рядов на абсолютную сходимость пользуются всеми известными признаками сходимости для рядов с положительными членами.

Следствие. Для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива следующая оценка остатка:

$$|R_n| < |a_{n+1}|,$$

т. е. остаток ряда меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Указанную оценку можно использовать для вычисления суммы ряда с любой, наперед заданной точностью.

Примеры. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

   Применяем признак Лейбница. Так как

   1) $1 > \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{5} > \ldots > \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n+1} >$ — члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине,

   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$ — выполнен необходимый признак,

   данный ряд сходится. Однако он сходится лишь условно, так как ряд, составленный из модулей его членов, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$ — расходится. Это можно доказать с помощью первого признака сравнения.

   Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ *сходится условно.*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^{n}}{(2n)!}$.

   Исследуем данный знакочередующийся ряд сразу на абсолютную сходимость. С этой целью составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n}}{(2n)!}$. Применим к этому ряду признак Даламбера:

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{n^n(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=e\cdot 0=0<1,$$

Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд *сходится абсолютно.*

1.4 Действия над рядами

Определение 10. *Суммой (разностью) двух рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ *называется ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k) \tag{6}$$

Если сходятся слагаемые ряды, то сходится и суммарный ряд (6)*, причём*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\pm\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$$

Определение 11. *Произведением двух рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ *(по Коши) называется ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\ldots+a_kb_1)=$$
$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_3)+\ldots \tag{7}$$

Если перемножаемые ряды сходятся и притом хотя бы один из них абсолютно, то сходится и ряд (7)*, причём*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\ldots+a_kb_1)$$

Произведение условно сходящихся рядов может оказаться либо рядом сходящимся, либо расходящимся.

Разумеется, понятия суммы и произведения распространяются на любое конечное число рядов. Квадрат ряда определяется как произведение ряда самого на себя. Аналогично определяются степени ряда третья, четвертая и т. д.

Определение 12. *Частным от деления ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *на ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *называется ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *такой, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Если все три ряда сходятся, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k / \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Замечание. Даже при абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ может оказаться расходящимся. В любом случае имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1^2}\right) + \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_1 b_3}{b_1^2} - \frac{a_2 b_2}{b_1^2} + \frac{a_1 b_2^2}{b_1^3}\right) + \ldots$$

Практически ряд на ряд можно делить углом по тем же правилам, по которым многочлен делят на многочлен.

1.5 Функциональные ряды

Определение 13. *Ряд*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где члены ряда есть функции от аргумента x*, определённые на множестве* D *—* ***функциональный ряд***.

При различных значениях $x \in D$ будут имеем различные числовые ряды, среди которых могут быть как сходящиеся, так и расходящиеся. Множество всех значений x, для которых функциональный ряд сходится — область сходимости функционального ряда. Также можно рассматривать область условной сходимости, область абсолютной сходимости.

Если функциональный ряд имеет на некотором множестве своей суммой функцию $S(x)$ — ряд сходится на этом множестве к функции $S(x)$.

Для нахождения области сходимости функциональных рядов можно использовать табличные ряды и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Примеры.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^x}$. Область сходимости: $1 < x < \infty$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}$.
   $x \in (1, \infty)$ — сходится абсолютно;
   $x \in (0, 1]$ — сходится условно;
   $x \leq 0$ — расходится.
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln^k x$.
   Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $q = \ln x$.
   $|\ln x| < 1,\ x \in (e^{-1}; e)$ — область сходимости.

1.5.1 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 14. *Суммой функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *называется функция* $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, *где* $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ — n*-я частичная сумма данного ряда. Она определена для тех значений* x, *для которых определены* $f_k(x),\ k = \overline{1, n}$ *и для которых предел существует.*

Пример. Так сумма геометрической прогрессии:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots \text{ при } |x| < 1 \text{ равна}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = \frac{1}{1-x}.$$

Определение 15. *Сходимость функционального ряда в точке x_0 означает сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$.*

В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 :\; \forall\, n > N_0 \Rightarrow |R_n(x_0)| = |S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 16. *Сходимость функционального ряда в промежутке:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(x, \varepsilon) :\; \forall\, n > N(x, \varepsilon) \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Число N по заданным x и ε определяется неоднозначно.

1. Существует функция $N = N(x)$, ограниченная в рассматриваемом промежутке E сходимости ряда и такая, что из $n > N(x) \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Тогда $\exists$ такой номер N_0, что для всех значений x указанного промежутка верно неравенство $N(x) \le N_0$ и, следовательно, для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0$, не зависящий от x, такой что для $\forall\, n > N_0$ и всех $x \in E$ одновременно справедливо $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

   В этом случае имеем *равномерную сходимость* функционального ряда в промежутке E.

2. Не существует функции $N = N(x)$, ограниченной в рассматриваемом промежутке и такой, что из $n > N(x)$ (при $\forall\, \varepsilon > 0$) следовало неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Тогда не найдётся числа N_0 такого, что при $n > N_0$ и $\forall\, x \in E$ выполнялось бы неравенство.

   В этом случае номер N может неограниченно возрастать при приближении x к некоторому фиксированному числу.

Определение 17. *Сходящийся в некотором промежутке* E *функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *в этом промежутке, если:* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *номер* N_0, *не зависящий от* x *и такой, что для* $\forall\ n > N_0 \Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ *одновременно для всех значений* $x \in E$.

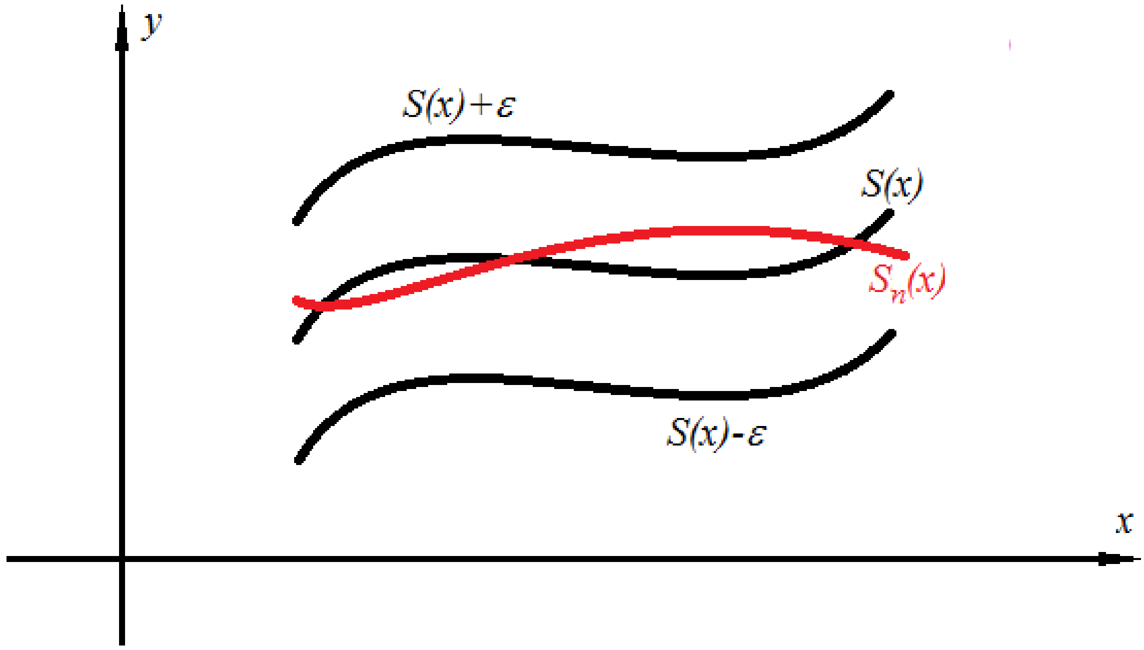

Рис. 1. Геометрическая интерпретация равномерной сходимости ряда

Теорема 2. *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *имеет своими членами непрерывные в некотором промежутке функции и в этом промежутке сходится равномерно, то и его сумма* $S(x)$ *непрерывна в этом промежутке.*

Замечание. Неравномерно сходящийся ряд непрерывных функций может иметь разрывную сумму.

Достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 3 (Признак Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *в некотором промежутке не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с положительными членами, т. е.* $|f_n(x)| \leq a_n$, *то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Т. е. функциональный ряд сходится равномерно, если в этом промежутке он *мажорируется* некоторым сходящимся числовым рядом (*мажорируемый ряд*).

Пример. Исследовать ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ на равномерную сходимость в интервале $(0; 1)$.

Сумма данного ряда и модуль n-го остатка:

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \ |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и попытаемся отыскать номер N такой, что из $n > N \ \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$.

$$\frac{x^n}{1-x} \text{ или } x^n < (1-x)\varepsilon.$$

Логарифмируем:

$$n \ln x < \ln(1-x)\varepsilon, \text{ учитывая, что } \ln x < 0 \ n > \frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x}.$$

$N = \left[\dfrac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x} \right]$ — наименьшее из всех возможных N.

В результате $N = N(x, \varepsilon)$ — равномерной сходимости нет.

Однако в промежутке $(0; \delta]$, где $0 < \delta < 1$ этот ряд сходится равномерно (показать самостоятельно).

1.5.2 Дифференцирование и интегрирование функциональных рядов

Теорема 4. *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *имеет своими членами непрерывные в некотором отрезке* $[a, b]$ *функции и сходится на этом отрезке равномерно к функции* $S(x)$, *то его можно почленно интегрировать на этом отрезке*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a}^{b} f_n(x)dx = \int\limits_{a}^{b} S(x)dx.$$

(достаточное, но не необходимое условие)

Теорема 5. *Если в некотором промежутке* 1) *функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится к сумме* $S(x)$; 2) *члены* $f_n(x)$ *ряда имеют непрерывные производные* $f_n'(x)$; 3) *ряд этих производных сходится равномерно к функции* $S'(x)$, *то данный функциональный ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке промежутка:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x).$$

Эти теоремы могут применяться для нахождения суммы ряда.

Пример. Найти сумму ряда: $S(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$, $x \in (-1; 1)$.

Дифференцируем данный ряд:

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Интегрируем полученную функцию:

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C.$$

Учитывая, что $S(0) = 0$, имеем $C = 0$.

В результате $S(x) = -\ln(1-x)$.

1.6 Степенные ряды

Определение 18. *Пусть* x_0,$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *— заданные числа. Ряд вида*

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n. \quad (8)$$

называется степенным. Членами ряда (8) *являются степенные функции* $u_n = c_n(x - x_0)^n$, *а* $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *— называется коэффициентами ряда* (8).

Этот ряд всегда сходится, по крайней мере при $x = x_0$. При фиксированном x ряд (8) представляет из себя числовой ряд, который либо сходится, либо расходится.

Определение 19. *Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений переменной* x, *для которых ряд* (8) *сходится.*

Теорема 6 (Теорема Абеля). *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ *сходится при* $x = x_1$, *то он сходится, и притом абсолютно, для всех значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. *Если же степенной ряд расходится при* $x = x_1$, *то он расходится и для всех значений* x, *для которых* $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Из теоремы Абеля[1] вытекает:

1) всякая точка сходимости степенного ряда (8) расположена не дальше от точки $x = x_0$, чем всякая точка его расходимости;

2) существует интервал $x_0 - R < x < x_0 + R$, для всех точек x которого степенной ряд сходится, а для всех x, таких что $|x - x_0| > R$ — расходится.

[1] Нильс Хенрик Абель (норв. Niels Henrik Abel; 5 августа 1802, Фингё — 6 апреля 1829, Фроланд близ Арендаля) — норвежский математик.

Определение 20. *Интервал* $(x_0 - R; x_0 + R)$, *внутри которого ряд сходится, а вне его расходится называется* ***интервалом сходимости***, *а число* R *–* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислять по одной из формул*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}. \qquad (9)$$

при условии, что пределы, в них входящие, существуют.

Замечание. Для каждого степенного ряда вида (8) область сходимости представляет собой сплошной промежуток от $x_0 - R$ до $x_0 + R$, со включением концов или нет. Промежуток этот может быть и бесконечным.

Замечание. Внутри области сходимости, степенной ряд (8) сходится абсолютно. Исследовать степенной ряд на сходимость — значит, найти интервал его сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.

Замечание. При фиксированном x степенной ряд (8) представляет из себя конкретный числовой ряд (знакопеременный — в общем случае). Для этого ряда (если он знакопеременный) сначала проводится исследование на абсолютную сходимость, т. е. составляется ряд из модулей. Следовательно, для определения области сходимости степенных рядов можно использовать признак Даламбера, т.е. нужно найти те значения x, при которых предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, а затем отдельно исследовать те значения x, при которых данный предел равен единице.

Примеры. Найти область сходимости степенных рядов.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{2^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

1.7 Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 7. *На всяком отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится равномерно.*

Теорема 8. *Степенной ряд (8) можно почленно интегрировать сколько угодно раз на любом отрезке $[a, b]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости ряда. Таким образом:*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b c_n(x-x_0)^n dx.$$

Теорема 9. *Степенной ряд (8) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз в каждой точке x его интервала сходимости. Таким образом:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n(x-x_0)^n\right)'.$$

1.8 Разложение функции в степенной ряд

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные до n-го порядка включительно, то в каждой точке этой окрестности она представима формулой Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, который может быть записан в виде $R_n(x) = o((x-a)^n)$ (форма Пеано).

Эта запись означает, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$, т. е. что остаточный член формулы Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $(x-a)^n$, при $x \to a$.

Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x = a$ производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1,$$

называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные любого порядка. Тогда число членов формулы Тейлора) можно неограниченно увеличивать и получается в пределе при $n \to \infty$ бесконечный ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (10)$$

Определение 21. *Ряд* (10) *независимо от того, сходится он к функции $f(x)$ или нет, называется рядом Тейлора для функции $f(x)$. Если же для всех значений x из некоторой окрестности точки имеет место равенство*

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,$$

то функция $f(x)$ называется разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$ (или по степеням $(x-a)$).

При $a = 0$ ряд Тейлора имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

и называется рядом Маклорена.

Достаточный признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует такая постоянная C, что при любых x и n*

$$|f^{(n)}(x)| < C,$$

то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

При разложении функций в степенные ряды применяют следующие способы.

1. Непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора. Приём состоит в следующем:

   a) формально составляют ряд Тейлора для функции $f(x)$; с этой целью находят производные функции $f(x)$ в точке $x = a$ (находят столько производных, сколько потребуется для вывода рекуррентной формулы для n-й производной) и подставляют их в разложение (10);

   b) находят область сходимости полученного ряда;

   c) выясняют, для каких значений x из области сходимости между функцией $f(x)$ и суммой ее ряда Тейлора можно поставить знак равенства.

2. Использование табличных разложений.

Основными табличными разложениями являются следующие ряды Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ (x \in R);$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},\ (-1 < x \le 1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\ (x \in R);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\ (x \in R);\end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}, \ (|x| \le 1);$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \ (x \in R);$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}, \ (x \in R);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \ (|x| < 1) \text{ (биномиальный ряд)};$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \ (|x| < 1);$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}x^n + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{(1-2k)k!^2 4^k}x^k, \ (|x| < 1).$$

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций. При этом отпадает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой функцией поставить знак равенства, так как области сходимости табличных рядов известны.

Примеры.

1. Разложить функцию 2^x в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 3$, используя табличные разложения. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.
2. Разложить функцию $\sqrt[3]{9+2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = -3$, используя табличные разложения. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

1.9 Приближенные вычисления с помощью рядов

Для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x_0 можно использовать следующий приём. Функцию $f(x)$ раскладывают в степенной ряд. В полученном разложении полагают $x = x_0$. Затем, с помощью выражения для остаточного члена ряда, определяют минимальное значение n (число начальных членов), обеспечивающих требуемую точность вычисления $f(x_0)$.

Рассмотрим некоторые случаи.

1. При вычислении различных степеней числа воспользуемся приближенной формулой:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},\ (x \in R).$$

При $x > 0$ оценку возникающей погрешности R_n можно оценить следующим образом:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right)$$

Учитывая, что $\forall\, x \in R\ \exists\, n \in N$, что $\left|\dfrac{x}{n+1}\right| < 1$ выражение в скобках — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Имеем:

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)}.$$

При $x < 0$ для вычисления e^x имеем знакочередующийся ряд. Для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива следующая оценка остатка:

$$|R_n| < |a_{n+1}|,$$

т. е. остаток ряда меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов:

$$|R_n| < \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

2. При вычислении значений синуса и косинуса имеем знакочередующиеся ряды:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\ (x \in R),$$

оценка погрешности:

$$|R_n| < \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|,$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ (x \in R),$$

оценка погрешности:

$$|R_n| < \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|.$$

3. Для вычисления логарифмов чисел можно пользоваться рядом

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right),\ (|x|\le 1);$$

Оценку поргешности, возникающая при замене суммы ряда суммой его первых n слагаемых, можно получит аналогично тому, как это сделано для e^x:

$$|R_n|<\left|\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|.$$

4. При вычислении корней k-й степени из числа $A>0$ полагают $A=a^k+y$, где a^k — число, близкое к A, из которого извлекается точный корень, и такое, что $\left|\frac{y}{a^k}\right|<1$, тогда

$$\sqrt[k]{A}=a\sqrt[k]{1+\frac{y}{a^k}}=a\left(1+\frac{y}{a^k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Полученную функцию от y раскладывают в биномиальный ряд и берут затем необходимое число первых слагаемых.

5. Для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ его предварительно представляют в виде числового ряда, для суммирования которого берут необходимое число начальных членов.

Примеры.

1. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{68}$ с точностью до $0,001$.

Преобразуем:

$$\sqrt[3]{68}=\sqrt[3]{64+4}=\sqrt[3]{64\left(1+\frac{4}{64}\right)}=4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Используем биномиальный ряд:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^2 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4 + \ldots$$

Полагая в полученном разложении $x = \dfrac{1}{16}$ и умножая ряд на 4, получаем

$$\sqrt[3]{68} \approx 4\left(1 + \frac{1}{3\cdot 16} - \frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 16^2}\right) = 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{576} \approx 4,082.$$

Получили знакочередующийся ряд. По следствию из признака Лейбница остаток ряда меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов. Здесь взятые три члена ряда обеспечивают нужную точность, так как $|R_3| \leq 4\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 16^3} < 0,001.$

Ответ: $\sqrt[3]{68} \approx 4,082 \pm 0,001.$

2. Вычислить приближённо $\sin 10^\circ$ с точностью до $0,0001$.

   Используем приближенную формулу:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\ (x \in R),$$

   оценка погрешности:

$$|R_n| < \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|,$$

   Поскольку $10^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ радиан, то

$$\sin 10^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 - \cdots \approx$$
$$\approx 0,17453 - 0,00089 + 0,000001 - \ldots.$$

   Получили знакочередующийся числовой ряд. По следствию из признака Лейбница остаток ряда меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов. Здесь взятые два члена ряда обеспечивают нужную точность, так как

$$|R_5| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 \approx 0,000001 < 0,0001.$$

В результате $\sin 10^\circ \approx 0,17453 - 0,00089 \approx 0,1736$.

Ответ: $\sin 10^\circ \approx 0,1736 \pm 00001$.

3. Вычислить приближённо $\sqrt[4]{e}$ с точностью до $0,00001$.

   Используем формулу:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},\ (x \in R).$$

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)}.$$

   Полагаем $x = 1/4$:

$$e^{1/4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \dots.$$

   Если взять пять членов этого ряда ($n = 4$), то ошибка вычислений не будет превышать $0,00001$:

$$R_4(x) < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5 \cdot 4! \cdot (5-1/4)} \approx 0,0000086 < 0,00001.$$

   Подсчитав сумму пяти выписанных выше членов ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1 + 0,25 + 0,03125 + 0,002604 + 0,000163 \approx 1,28402$.
   Ответ: $\sqrt[4]{e} \approx 1,28402 \pm 0,00001$.

4. Вычислить приближённо $\ln 2$ с точностью до $0,0001$.

   В разложении

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right),\ (|x| \le 1);$$

$$|R_n| < \left|\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|.$$

положим $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$, тогда $x = 1/3$ и, следовательно,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3\cdot 3} + \frac{1}{3^5\cdot 5} + \frac{1}{3^7\cdot 7} + \dots\right),$$

Заданную точность обеспечивают четыре члена, так как для погрешности имеем неравенство

$$|R_4| < \left|\frac{2(1/3)^{2\cdot 4+1}}{(2\cdot 4+1)(1-(1/3)^2)}\right| = \frac{2\cdot 9}{3^9\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{3^9\cdot 4} < 0,0001.$$

Таким образом, с точностью до $0,0001$ получаем

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{405} + \frac{1}{5103}\right) \approx 0,6931.$$

Ответ: $\ln 2 \approx 0,6931 \pm 0,0001$.

5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin x^3}{x}dx$ с точностью до $0,001$.

Используя ряд Маклорена для $\sin x$ имеем:

$$\sin x^3 \approx x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-3} + \dots,\ (x \in R),$$

Поэтому при $x \neq 0$:

$$\frac{\sin x^3}{x} = \frac{1}{x}\left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-3} + \dots\right) =$$

$$= x^2 - \frac{x^8}{3!} + \frac{x^{14}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-4} + \dots$$

В силу того, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x} = 0$ последнее равенство выполняется и при $x = 0$.

По свойствам степенных рядов их можно почленно интегрировать внутри области их сходимости, поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x^3}{x}dx = \int\limits_0^1 x^2 dx - \int\limits_0^1 \frac{x^8}{3!}dx + \int\limits_0^1 \frac{x^{14}}{5!}dx - \dots =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{x^9}{9\cdot 3!}\bigg|_0^1 + \frac{x^{15}}{15\cdot 5!}\bigg|_0^1 - \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{54} + \frac{1}{1800} - \ldots$$

Получили знакочередующийся числовой ряд, по следствию из признака Лейбница остаток ряда меньше абсолютного значения первого отброшенного слагаемого. В данном случае $\frac{1}{1800} < 0,001$, поэтому с точностью до $0,001$:

$$\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{54} \approx 0,315.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^3}{x}dx \approx 0,315 \pm 0,001.$

1.10 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 22. *Тригонометрическим рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на промежутке $[-\pi, \pi]$ называется ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{11}$$

где $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ (n = 1, 2, \ldots).$$

a_n, b_n *называются коэффициентами ряда Фурье.*

Если этот ряд сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Определение 23. *Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$, (x_{n-1}, b) так, что на каждом из интервалов функция монотонна, т.е. либо не возрастает либо не убывает.*

Из определения следует, что если функция $f(x)$ кусочно-монотонная и ограничена на $[a, b]$, то $f(x)$ имеет разрывы только первого рода.

Определение 24. *Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой, если на каждом конечном интервале она и её производная имеют не более конечного числа точек разрыва, и притом лишь 1-го рода.*

Достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье

Теорема 11 (Теорема Дирихле). *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$ удовлетворяет одному из условий:*

1) *кусочно-гладкая,*

2) *кусочно-монотонная и ограничена,*

то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках.

Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т.е.

$$S(x) = \begin{cases} f(x), \ x \neq x_0, \\ \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \ x = x_0, \end{cases}$$

где x_0 — точка разрыва функции $f(x)$.

Замечание. Если непериодическая кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана лишь в интервале $(-\pi, \pi)$, её тоже можно разложить в ряд Фурье. Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, но к функции $f(x)$ только в тех точках интервала $(-\pi, \pi)$, в которых функция $f(x)$ непрерывна. Суммой ряда будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось Ox. А в точках разрыва сумма ряда будет равна среднему арифметическому правого и левого пределов периодического продолжения данной функции.

Замечание. Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть разложена в зависимости от требований либо только в ряд косинусов, либо только в ряд синусов. Для этого она должна быть продолжена в интервале $(-\pi, 0)$ либо как чётная, либо как нечётная.

Замечание. Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть разложена в ряд Фурье бесконечным числом способов, смотря по тому, как построено продолжение в интервале $(-\pi, 0)$.

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-L, L]$, где L — произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{12}$$

где

$$a_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ — четная функция, её ряд Фурье содержит только свободный член a_0 и косинусы, т. е.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{13}$$

где

$$a_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=0,1,2,\ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ — нечетная функция, её ряд Фурье содержит только синусы, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{14}$$

где

$$b_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=1,2,\ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ задана на произвольном интервале (a,b), тогда обозначим $L=\dfrac{b-a}{2}$, зададим конкретное значение функции на одном из концов интервала (например, при $x=b$) и продолжим данную функцию периодически, с периодом $T=2L$ на всю числовую ось. Полученная функция будет удовлетворять условиям теоремы Дирихле.

Коэффициенты ряда Фурье в этом случае можно определить следующим образом:

$$a_n=\frac{1}{L}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=1,2,\ldots).$$

тогда ряд Фурье принимает вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \tag{15}$$

Примеры

1. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ в ряд Фурье в интервале $(2; 6)$.

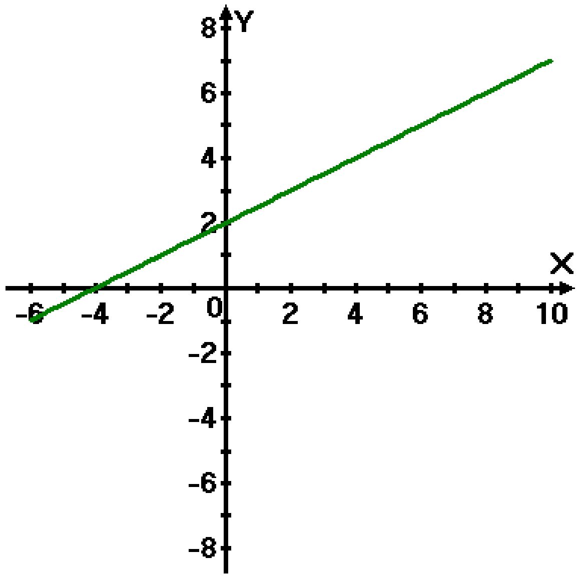

Рис. 2. Функция $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$

Данная функция (рис. 2) является кусочно-монотонной и непрерывной в заданном интервале. Доопределим её $f(6) = 5$ и продолжим функцию $f(x)$, заданную для $x \in (2, 6]$ периодически, с периодом $T = 4$ на всю числовую ось. Полученная функция будет удовлетворять условиям теоремы Дирихле.

Коэффициенты ряда Фурье, используя формулы (16), можно определить следующим образом:

$$L = \frac{6-2}{2} = 2,\ a_0 = \frac{1}{L} \int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 2 \right) dx = 8.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_2^6 \left(\frac{x}{2}+2\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0,\ (n = 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_2^6 \left(\frac{x}{2}+2\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1},\ (n = 1, 2, \ldots).$$

В результате ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, но к функции $f(x)$ только в точках $x \in (2; 6)$. Суммой ряда $S(x)$ будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось Ox (рис. 3). А в точках разрыва сумма ряда $S(x_0) = (f(x_0-0)+f(x_0+0))/2 = 4$, где $x_0 = 2\pm 4n$, $n \in N$ — точки разрыва периодического продолжения функции $f(x)$ на всю числовую ось.

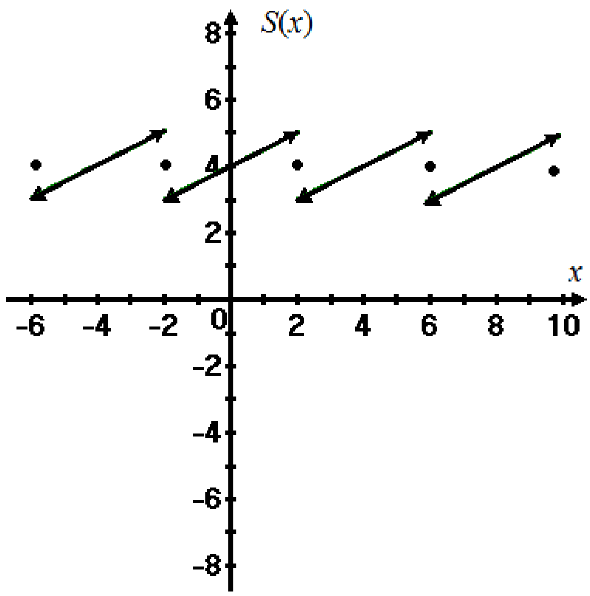

Рис. 3. Функция $S(x)$

2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} \pi,\ -\pi < x < 0 \\ \pi - x,\ 0 \le x < \pi \end{cases}$ в ряд Фу-

рье в интервале $(-\pi;\pi)$.

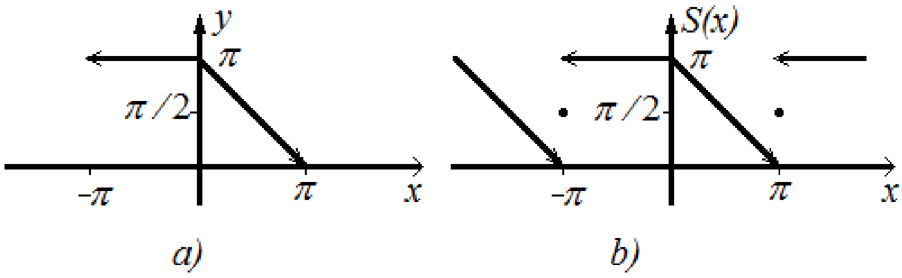

Рис. 4.

Данная функция (рис. 4a) является кусочно-гладкой в интервале $(-\pi,\pi)$, а её периодическое продолжение при дополнительном условии $f((2k-1)\pi)=\pi,\ k\in Z$, удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле.

Коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{3\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{(-1)^{n}}{n}.$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (11). Тогда ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x)=\frac{3\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, но к функции $f(x)$ только в точках $x\in(-\pi,\pi)$. Суммой ряда $S(x)$ будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось Ox (рис. 4b). А в точках разрыва сумма ряда $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0)) = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$, где $x_0 = \pi \pm 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — точки разрыва функции $f(x)$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, если $f(x) = x$ в интервале $(0, \pi)$, продолжив её на интервале $(-\pi, 0]$ четным или нечетным образом.

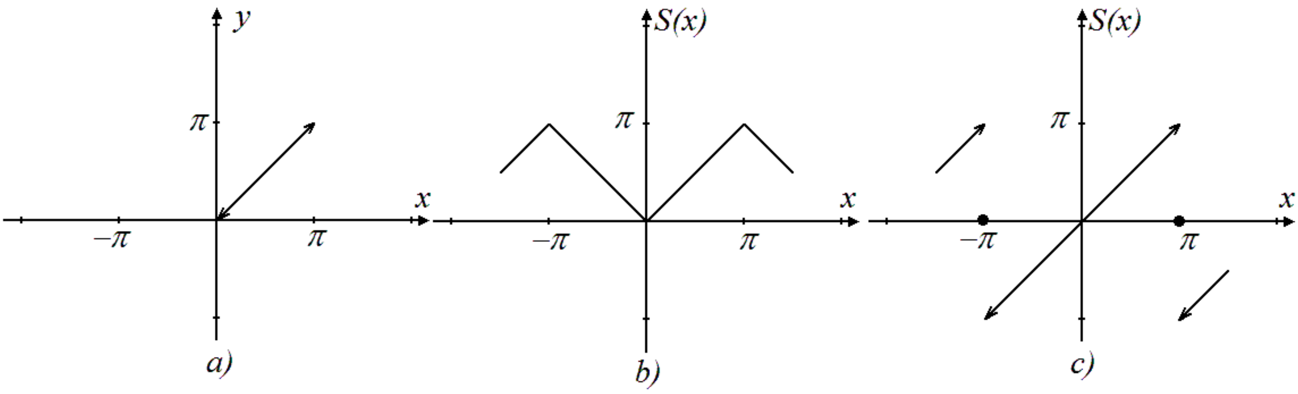

Рис. 5.

Найдём разложение функции (рис. 5a) в ряд Фурье для различных продолжений исходной функции.

(a) Доопределим функцию на интервале $x \in (-\pi, 0]$ как $f(x) = -x$. Полученная функция будет чётной. Продолжим её периодически, с периодом $T = 2L = 2\pi$ на всю числовую ось. В результате полученная функция будет удовлетворять условиям теоремы Дирихле. Используем формулу (13). Таким образом, для полученной чётной функции $b_n = 0, \ n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Отличны от нуля только коэффициенты с нечётными индексами $a_{2n-1} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$. Тогда ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Равенство $f(x) = S(x)$ имеет место при всех значениях $x \in (0,\pi)$, однако ряд, стоящий справа, сходится при всех x. Суммой ряда $S(x)$ будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось Ox (рис. $5b$).

(b) Аналогично как в предыдущем случае строим нечетное, 2π-периодическое продолжение исходной функции. Доопределим функцию $f(x) = x$ на интервале $(-\pi, 0]$. Положим для простоты $f(\pi + 2\pi n) = 0$. Используем формулу (14). Коэффициенты Фурье: $a_n = 0,\ n \geq 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin nx dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Тогда ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Для найденного разложения $S(x) = f(x)$ при всех значениях $x \in (0,\pi)$, однако ряд, стоящий справа, сходится при всех x. Суммой ряда будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось Ox (рис. $5c$). А в точках разрыва сумма ряда

$$S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0)) = \frac{\pi-\pi}{2} = 0,$$

где $x_0 = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ — точки разрыва функции $f(x)$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию: $f(x) = \sin^2 x$.

$$\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

В результате получили косинус-ряд Фурье: $b_n = 0,\ n \in N$, $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2}$, при $n > 2$ $a_n = 0$.

Комплексная форма ряда Фурье

Рассмотрим ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Преобразуем общий член этого ряда с помощью формул Эйлера:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} =$$

$$= a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - i b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

где $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Полагая $c_0 = \frac{a_0}{2}$ получаем для ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Найдём выражение для коэффициентов c_n:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

В результате — *комплексная форма ряда Фурье*:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx. \tag{16}$$

Пример. Записать разложение функции $f(x)=x$ в интервале $(-2;2)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

$$T=2l,\ l=2,\ n=0,\ c_0=0.$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-in\pi x/l}dx=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}xe^{-in\pi x/2}dx=(-1)^{n+1}\frac{2i}{n\pi}.$$

В результате:

$$S(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2i}{n\pi}e^{in\pi x/2}.$$

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 2. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2006. — 864 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 3. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2005. —728 с.

5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

6. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.

7. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.

8. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.

9. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.

10. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

11. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.

12. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.2 — 216 с.

13. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.3 — 248 с.

14. http://ru.wikipedia.org/wiki/

15. *Шмелёв, П. А.* Теория рядов в задачах и упражнениях: учеб. пособие для втузов / П. А. Шмелёв. — М.: Высшая школа, 1983. — 176 с.