НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Новосибирск 2014

Содержание

1 Дифференциальные уравнения

1.1 Основные понятия и определения

Определение 1. *Уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные, называется дифференциальное уравнение*[1]*:*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Замечание. Если искомая функция $y = y(x)$, то имеем *обыкновенное дифференциальное уравнение*, если рассматривается функция нескольких переменных $w = f(x, y, z)$ и рассматривается уравнение связывающее переменные и частные производные, то такое уравнение называется *дифференциальное уравнение в частных переменных.*

Определение 2. *Наивысший порядок производной — порядок дифференциального уравнения.*

$y' - 2xy^2 + 5$ — дифференциальное уравнение 1 порядка;
$y'' + ky' + by - \sin x = 0$ — дифференциальное уравнение 2 порядка.

Определение 3. *Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставленной в уравнение, превращает его в тождество.*

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения — интегрирование, график решения дифференциального уравнения — интегральная кривая.

1.2 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1. Материальная точка массы m замедляет своё движение под действием силы сопротивления среды пропорционально квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от t. Найти $V(t)$ при $t = 3$с, если $V(0) = 100$м/с, $V(1) = 50$м/с.

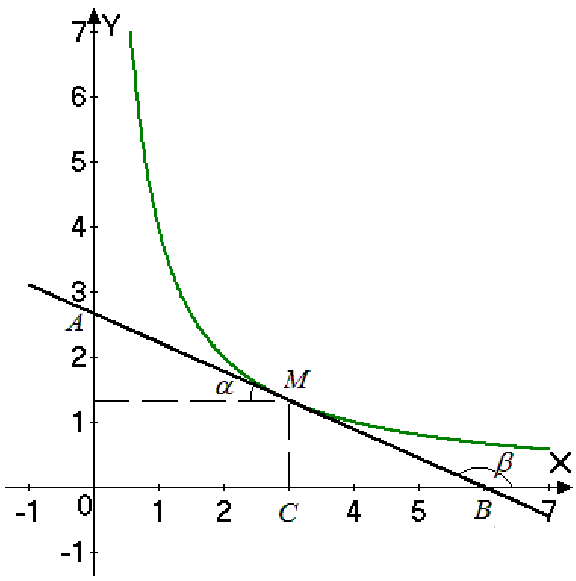
[1] Термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Лейбницем.

Из второго закона Ньютона $m \cdot a = F$, $a' = V'(t)$, $m \cdot V' = F$, но $F = -k \cdot V^2$, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

В результате получим: $m \cdot V' = -k \cdot V^2$ или

$$V' = -\frac{k}{m}V^2,$$
$$V(0) = 100,\ V(1) = 50.$$

2. Найти кривую, проходящую через точку $(4;1)$, зная, что отрезок любой касательной к ней, заключённый между осями координат делятся в точке касания пополам.



$$AM = MB,\ y' = \operatorname{tg}\beta,\ \operatorname{tg}\alpha = -y';\frac{MC}{CB} = \frac{MC}{OC} = \frac{y}{x} = -y'.$$

В результате: $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y(4) = 1$.

1.3 Дифференциальные уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0.$$

$y' = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение разрешённое относительно y'.

Дифференциальное уравнение первого порядка устанавливает связь между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ даёт совокупность направлений, поле направлений на плоскости Oxy.

Определение 4. *Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется* ***изоклиной***.

Уравнение изоклин: $y' = c$, т. е. $f(x, y) = c$.

Пример. Начертить изоклины, задаваемые дифференциальным уравнением: $y' = 2x$.

Теорема 1 (Коши). *Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ по y непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию при: $y|_{x=x_0} = y_0$.*

Т. е. существует единственная функция $y = \varphi(x)$ график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Условие: $y(x = x_0) = y|_{x=x_0} = y_0$ — *начальные условия* или *данные Коши.*

Задача для дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

называется *задача Коши.*

Определение 5. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения первого порядка называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одного произвольного параметра C и удовлетворяющей следующим условиям:

а) удовлетворяет дифференциальному уравнению при $\forall$ C*;*

б) каково бы ни было начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$ $\exists$ *такое* $C = C_0$*, что* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Если решение получено в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$ — **общий интеграл**.

Определение 6. ***Частным решением*** *дифференциального уравнения первого порядка называется* $\forall$ *функция,*

$$y = \varphi(x, C_0),$$

получающаяся из общего решения, если $C = C_0$*.*

$\Phi(x, y, C_0) =)$ — **частный интеграл**.

Общий интеграл — семейство интегральных кривых.

Частный интеграл — одна из этого семейства.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной может быть записано в форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

1.3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка которое можно представить в виде:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0,\ Q_1(y)P_2(x) \neq 0,$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0,$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C, \text{ — общий интеграл.}$$

Примеры.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши: $y' = -\dfrac{y}{x},\ y(4) = 1.$

3. Найти зависимость скорости от времени, удовлетворяющую дифференциальному уравнению и начальным условиям:

$$V' = -\frac{k}{m}V^2,$$
$$V(0) = 100,\ V(1) = 50.$$

1.3.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 7. *Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения (порядка) относительно переменных x и y, если при $\forall\ \lambda$ справедливо:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

Примеры.

1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
   $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3} = \lambda\sqrt[3]{x^3 + y^3}$, — однородная функция первого измерения.

2. $f(x, y) = x^3 + y^3$, — однородная функция измерения 3.

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$, — неоднородная функция.

Определение 8. *Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется* ***однородным****, если $f(x, y)$ однородная функция нулевого порядка (измерения) или зависит от $\dfrac{y}{x}$.*

Определение 9. *Дифференциальное уравнение*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

будет ***однородным****, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка.*

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменных:

$$\frac{y}{x} = t \text{ или } y = t \cdot x.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

1.3.3 Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

Если $c = c_1 = 0 \Rightarrow$ уравнение однородное.

Замена $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k,\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$.

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Подберём h и k так, чтобы

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases}$$

В этом случае дифференциальное уравнение становится однородным.

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, система имеет единственное решение.

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, система не имеет решения.

$$ab_1 = a_1 b \;\Rightarrow\; \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \;\Rightarrow\; a_1 = \lambda a,\; b_1 = \lambda b.$$

Замена $z = ax + by$ — уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Примеры. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y' = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$;

2) $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

1.3.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 10 ***Линейным*** *дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и её производной:*

$$y' + p(x)y = g(x),$$

где $p(x),\ g(x)$ — заданные непрерывные функции.

Метод Бернулли

Решение ищется в виде $y = u(x)v(x)$, причём одна из них произвольна, но не равна нулю.

$$y' = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u + p(x)uv = g(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = g(x).$$

Подберём функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + p(x)v = 0$.

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|.$$

В силу свободы выбора v положим $C = 1$, тогда

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставим в исходное уравнение

$$u'e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

$$u' = g(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$u = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

В результате:

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y' + p(x)y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|,$$

$$\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-\int p(x)dx},$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx} \text{ или } y = Ce^{-\int p(x)dx},\; C = \pm C_1.$$

Решение уравнения ищем в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Дифференцируем:

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Подставим в исходное уравнение

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

$$C(x) = \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

В результате:

$$y = \left(\int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения: $y' + 2xy = 2x^2$.

1.3.5 Уравнение Бернулли

Определение 11. *Дифференциальное уравнение*

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \; n \neq 0, \; n \neq 1,$$

называется уравнением Бернулли.

$$y^n \neq 0 \;\Rightarrow\; y^{-n} y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x),$$

Замена: $z = y^{-n+1}, \; z' = (1-n) y^{-n} \cdot y', \; y^{-n} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-n}$.

В терминах переменной z уравнение примет вид:

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x) \cdot z = g(x) \text{ — линейное уравнение.}$$

Следовательно, уравнение Бернулли с помощью замены $z = y^{-n+1}$ может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению.

Замечание. Удобнее решение искать методом Бернулли.

Примеры. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y' - \dfrac{2}{x+1} \cdot y = (x+1)^3$;

2) $y' + x \cdot y = x^3 \cdot y^3$.

1.3.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 12. *Дифференциальное уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y).$$

В этом случае $u(x,y) = C$ *— общий интеграл.*

Интегрирование этого уравнения фактически сводится к нахождению функции по её полному дифференциалу.

Теорема 2. *Для того чтобы выражение*

$$\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где функции $P(x,y)$ *и* $Q(x,y$ *и их частные производные* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в некоторой области* D *плоскости* Oxy*, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Необходимость. Предположим, что $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

тогда $P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Дифференцируя эти соотношения по y и x соответственно, имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Из непрерывности вторых производных имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выражение $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — полный дифференциал некоторой функции.

Из соотношения $P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ находим:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y), \qquad (*)$$

где x_0 — абсцисса любой точки из области существования решения.

Подберём функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось соотношение: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Замечание. Формула Лейбница дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'(x,\alpha)dx + f(b(\alpha),\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a(\alpha),\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

Продифференцируем равенство $(*)$ по переменной y и приравняем к функции $Q(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

По условию теоремы $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В результате имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Следовательно: $Q(x_0,y)=\varphi'(y)$ и $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$.

В результате функция $u(x,y)$ будет иметь вид:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \quad (**)$$

Следовательно, выражение $\Delta = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ — полный дифференциал функции $(**)$, ч. т. д.

Приравнивая функцию $(**)$ к постоянному C, получим общий интеграл уравнением в полных дифференциалах:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'=\dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

1.3.7 Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Рассмотрим случай, когда левая часть уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

не является полным дифференциалом некоторой функции т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножив его на некоторую функцию $t(x,y)$, называемую *интегрирующий множитель*.

Должно быть выполнено:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(t(x,y)P(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(t(x,y)Q(x,y)\right)$$

или
$$\frac{\partial t}{\partial y} \cdot P - \frac{\partial t}{\partial x} \cdot Q = t \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если предположить существование t как функции либо x, либо y. В этом случае имеем:
$$-\frac{\partial t}{\partial x} \cdot Q = t \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{ или } \frac{\partial t}{\partial y} \cdot P = t \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Отсюда:
$$t(x) = \exp \int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

При этом $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должна зависеть только от x.

Аналогично:
$$t(y) = \exp \int \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} dy.$$

При этом $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$ должна зависеть только от y.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$.

1.4 Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальные уравнения второго порядка:
$$F(x, y, y', y'') = 0, \ y'' = f(x, y, y').$$

Решение дифференциального уравнения — всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Определение 13. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения второго порядка называется функция* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, *где* $C_1,\ C_2 \in R$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\varphi(x, C_1, C_2)$ *является решением дифференциального уравнения для* $\forall\ C_1,\ C_2 \in R$*;*

2) *каково бы ни были начальные условия (НУ)*

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_1 \text{ (НУ)}$$

существуют единственные $C_1 = C_1^0$ *и* $C_2 = C_2^0$ *такие что* $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ *является решением дифференциального уравнения и удовлетворяющее начальным условиям.*

Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получаемое из общего решения — *частное решение.*

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ — общий интеграл.

$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ — частный интеграл.

Дифференциальное уравнение второго порядка устанавливает связь между координатами точки (x, y) интегральной кривой, угловым коэффициентом $k = y'$ касательной и кривизной $K = \dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ в точке (x, y) ($R = 1/K$ — радиус кривизны).

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям — задача Коши:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0, \\ y|_{x=x_0} = y_0, \\ y'|_{x=x_0} = y_1. \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, \\ y'|_{x=x_0} = y_1. \end{cases}$$

Существование и единственность решения задачи Коши

Теорема 3. *Если в дифференциальном уравнении второго порядка функция* $f(x, y, y')$ *и её частные производные* $f'_y(x, y, y')$ *и* $f'_{y'}(x, y, y')$ *непрерывны в некоторой области* D *изменения переменных* $x,\ y,\ y'$, *то для всякой точки* $(x, y, y') \in D$ *существует* *единственное решение дифференциального уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям.*

Аналогичные понятия для дифференциальных уравнений n-го порядка.

Задача Коши

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1}. \end{cases}$$

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ — общее решение.
$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ — общий интеграл.
$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n) = 0$ — частный интеграл.

Один из методов решения дифференциальных уравнений n-го порядка — *метод понижения порядка.*

1.4.1 Уравнения допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида: $y^{(n)} = f(x)$. Интегрируя его последовательно n раз находим общее решение.

2. Уравнение не содержащее искомой функции:

   $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

   Замена $y' = p(x)$ приводит к понижению порядка на единицу.

   $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

   Замена $y^{(k)} = p(x)$ приводит к понижению порядка на k единиц.

3. Уравнение не содержащее независимой переменной:

   $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Замена $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{d}{dx}p(y) = \dfrac{dp(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p' \cdot p$ приводит к понижению порядка на единицу.

Примеры.

1) Найти общее решение дифференциального уравнения 4-го порядка:
$$y^{(4)} = \sin 2x;$$

2) найти общее решение дифференциального уравнения:
$$y'' - \frac{y'}{x} = 0;$$

3) найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0, \\ y|_{x=0} = 2, \\ y'|_{x=0} = 2. \end{cases}$$

1.5 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейное дифференциальное уравнения n-го порядка

$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x),\ b_n(x) \neq 0,$

$b_i(x),\ i = \overline{0, n}$ — коэффициенты уравнения, $g(x)$ — свободный член.

Если $g(x) \equiv 0$ — *линейное однородное дифференциальное уравнение* (ЛОДУ); $g(x) \neq 0$ — *линейное неоднородное дифференциальное уравнение* (ЛНДУ).

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_n(x)},\ i = \overline{0, n}, \ldots, f(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)},\ (b_n(x) \neq 0),$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x), \quad \textit{приведённое ЛДУ}.$$

Будем считать, что коэффициенты и свободный член являются непрерывными функциями на некотором интервале (a, b). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения.

1.5.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения

Установим некоторые основные свойства ЛОДУ для уравнений второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Теорема 4. *Если* $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ *являются частными решениями уравнения* $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, *то решением этого уравнения является также функция*

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x), \text{ где } C_1,\ C_2 \in R.$$

Определение 14. *Функции* $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ *называются линейно независимыми на интервале* (a, b), *если равенство*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0,$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2 \in R$ *выполняются* $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Очевидно, что функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно зависимыми $\Leftrightarrow$ для $\forall\ x \in (a, b)$ выполнено $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda$ или $y_1 = \lambda y_2$.

Пример. Функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ — линейно зависимы.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является *определитель Вронского*[2] (*вронскиан*).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

[2]Юзеф Мария Вроньский (польск. Jozef Maria Hoene-Wronski), настоящая фамилия — Хёне или Гёне (польск. Hoene) (24 августа 1776, Вольштын, Польша — 9 августа 1853, Париж, Франция), польский математик и философ-мистик.

Теорема 5. *Если дифференцируемые функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно зависимые на (a, b), то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.*

Доказательство

Из линейной зависимости имеем: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$, пусть $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow y_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 \Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$

Теорема 6. *Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно независимые решения уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ на (a, b), то определитель Вронского на этом интервале нигде не обрщается в нуль.*

Определение 15. *Совокупность любых двух линейно независимых на интервале (a, b) частных решений $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет* ***фундаментальную систему решений*** *этого уравнения. Любое произвольное решение может быть получено как комбинация: $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$.*

Структура общего решения ЛОДУ второго порядка

Теорема 7. *Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ образуют на интервале (a, b) фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция*

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство

Из теоремы 4 $\Rightarrow y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ — решение ЛОДУ.

Это решение будет общим решением (по определению), если из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y|_{x=x_0} = Y_0, \\ y'|_{x=x_0} = Y_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = Y_0, \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) = Y_1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

$\Delta = W(x)$ — вронскиан, согласно теоремы 6 $W(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме Крамера система имеет единственное решение C_1 и C_2.

Полученные результаты можно распространить на ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0.$$

1. $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ — частные решения, то

   $$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x)$$

   решение ЛОДУ.

2. Функции $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ будут линейно независимые на интервале (a, b), если

   $$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha_i = 0,\ i = \overline{1, n}.$$

3. Определитель Вронского

   $$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

4. Частные решения $y_1 = y_1(x),\ \ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений на (a, b), если $W(x) \neq 0$.

5. Общее решение ЛОДУ n-го порядка

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x),$$

$y_i(x),\ i = \overline{1, n}$ — фундаментальная система решений.

Пример. Функции $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$ — образуют фундаментальную систему.

1.5.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,\ p, q — \mathrm{const}.$$

Будем искать частные решения уравнения в виде: $y = e^{kx}$ (метод Эйлера).

Подставим в уравнение

$$y = e^{kx},\ y' = k \cdot e^{kx},\ y'' = k^2 \cdot e^{kx},$$

$$e^{kx}(k^2 + p \cdot k + q) = 0.$$

$k^2 + p \cdot k + q = 0$ — характеристическое уравнение.

1. $D = p^2 - 4q > 0,\ k_1 \neq k_2 \in R$, $y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$ — частные решения.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow$$

$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$ — фундаментальная система решений.

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ — общее решение.

2. $D = p^2 - 4q = 0$, $k_1 = k_2 \in R$, $y_1 = e^{k_1 x}$ — решение уравнения. Учитывая, что $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$ можно показать, что $y_2 = xe^{k_1 x}$ также решение дифференциального уравнения.
$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & xe^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x} \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow$$
$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_1 x}$ — фундаментальная система решений.
$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$ — общее решение.

3. $D = p^2 - 4q < 0$, $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, k_1, k_2 — комплексно сопряжённые корни.
$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ — комплексные частные решения или
$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases}$$
Найдём действительные частные решения.
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \widetilde{y}_1,$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \widetilde{y}_2,$$
$W(x) \neq 0$.
$\widetilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\widetilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ — фундаментальная система решений.
$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ — общее решение.

Примеры

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Аналогично для ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+p_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+p_1y'+p_0y = 0,\ p_i,\ i=\overline{0,n} - \text{const}.$$

Характеристическое уравнение:

$$k^n + p_{n-1}k^{n-1} + p_{n-2}k^{n-2} + \ldots + p_1k + p_0 = 0.$$

1. $k_i \in R$, $k_i \neq k_j$, $i \neq j$,
   $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \ldots + c_ne^{k_nx}$ — общее решение.

2. $k_i \in R$, есть корни имеющие кратность $m > 1$. Тогда каждому простому корню k соответствуют частные решения вид: e^{kx}, а каждому кратному корню кратности $m > 1$ соответствуют m частных решений e^{kx}, xe^{kx}, $\ldots$, $x^{m-1}e^{kx}$.

3. Среди корней есть комплексно-сопряжённые. Тогда каждой паре комплексно-сопряжённых чисел $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности $m > 1$ соответствует $2m$ решений: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Примеры. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений.

1) $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$;

2) $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

1.5.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим, в качестве примера, линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ — соответствующее однородное ДУ (приведённое).

Теорема 8 (структура общего решения ЛНДУ). *Общим решением ЛНДУ является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\widehat{y} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ соответствующего однородного уравнения, т. е.*

$$y = y^* + \widehat{y} = y^* + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2.$$

Доказательство

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $y = y^* + \widehat{y} = y^* + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ является решением ЛНДУ.

Покажем, что $y = y^* + \widehat{y} = y^* + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ является общим решением ЛНДУ, т. е. из него можно выделить единственное решение, удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} y^*(x_0) + C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = y_0, \\ y^{*\prime}(x_0) + C_1 \cdot y'_1(x_0) + C_2 \cdot y'_2(x_0) = y'_0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1 \cdot y'_1(x_0) + C_2 \cdot y'_2(x_0) = y'_0 - y^{*\prime}(x_0). \end{cases}$$

$\Delta = W(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме Крамера система имеет единственное решение $\Rightarrow$ решение является общим решением.

1.5.4 Нахождение частного решения ЛНДУ

НЛДУ: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$.

Общее решение: $y = y^* + \widehat{y} = y^* + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$. Рассмотрим задачу нахождения частного решения НЛДУ y^*.

Метод вариации произвольных постоянных (Метод Лагранжа)

Частное решение y^* можно найти, если известно $\widehat{y}$ — решение соответствующего однородного уравнения.

Будем искать y^* в виде:

$$y^* = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2,$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ — неизвестные функции. Подберём эти функции так, y^* было решением ЛНДУ.

Имеем:

$$(y^*)' = C_1'(x) \cdot y_1 + C_1(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2 + C_2(x) \cdot y_2'.$$

Пусть теперь функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ такие, что

$$C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0,$$

т. е. выражение для $(y^*)'$ имеет такой же вид как и в случае, если C_1 и C_2 — константы.

Тогда

$$(y^*)' = C_1(x) \cdot y_1' + C_2(x) \cdot y_2'.$$

$$(y^*)'' = C_1'(x) \cdot y_1' + C_1(x) \cdot y_1'' + C_2'(x) \cdot y_2' + C_2(x) \cdot y_2''.$$

Подставим y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cdot y_1' + C_1(x) \cdot y_1'' + C_2'(x) \cdot y_2' + C_2(x) \cdot y_2'' + \\ +a_1(x)(C_1(x) \cdot y_1' + C_2(x) \cdot y_2') + \\ +a_2(x)(C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2) = f(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C_1(x)(y_1'' + a_1(x) \cdot y_1' + a_2(x) \cdot y_1) + \\ +C_2(x)(y_2'' + a_1(x) \cdot y_2' + a_2(x) \cdot y_2) + \\ +C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{aligned}$$

В результате получим:

$$C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x).$$

Таким образом функция $y^* = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$ — будет частным решением ЛНДУ, если

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x) \end{cases} \text{— система Лагранжа.}$$

$\Delta = W(x) \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -y_2(x)f(x),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = y_1(x)f(x).$$

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},\ C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx,$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)},\ C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx.$$

Теорема 9 (о наложении решений). *Если правая часть ЛНДУ*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

имеет вид: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *а* y_1^* *и* y_2^* *— частные решения дифференциальных уравнений*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) \text{ и } y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x),$$

то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ *является решением данного уравнения.*

Справедливость теоремы проверяется непосредственной подстановкой.

Пример. Найти общее решение ЛНДУ: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Интегрирование ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (метод неопределённых коэффициентов)

По виду правой части записывается ожидаемая форма частного решения с неопределёнными коэффициентами, затем решение подставляется в уравнение и находятся коэффициенты.

Правая часть ЛНДУ имеет специальный вид:

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

   В этом случае частное решение ищем в виде: $y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}$, где r — число, равное кратности корня характеристического уравнения $k = \alpha$ $(r \geq 0)$ $(r = 0$, если ни один из корней характеристического уравнения не совпадает с $\alpha)$;

   $Q_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$, A_i, $i = \overline{0, n}$ — неопределённые коэффициенты.

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

   Частное решение y^* ищется в виде:

   $$y^* = x^r e^{\alpha x}(M_1(x)\cos\beta x + N_1(x)\sin\beta x),$$

   где r — число равное кратности корня $\alpha + \beta i$, как корня характеристического уравнения, $M_1(x)$ и $N_1(x)$ — многочлен степени $l = \max(m, n)$.

   Замечание. Вид частного решения сохраняется в случае когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$, т. е. имеем полный тригонометрический полином.

Если правая часть — есть сумма функций первого или второго вида, то следует использовать теорему о наложении решений.

Примеры. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

1) $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$;

2) $y'' - 2y' + y = x - 4$;

3) $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$;

4) $y'' - 2y' + y = 2$;

5) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$;

6) $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$;

7) $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

1.6 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений (СДУ) в общем виде:

$$F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}; \ldots; y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0,$$
$$i = \overline{1, m}.$$

Система дифференциальных уравнений (СДУ) в каноническом виде:

$$y_i^{(k)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}; \ldots; y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m-1)}) = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Система дифференциальных уравнений (СДУ) в нормальной форме:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n},\ n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m.$$

Определение 16. *Решением СДУ в интервале (a, b) называется совокупность n функций определённых и непрерывно дифференцируемых в (a, b) и обращающих все уравнения в тождества.*

Определение 17. *Кривая в $(n + 1)$-мерном пространстве $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — интегральная кривая.*

Определение 18. *Задача Коши для СДУ: найти решение $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющее* ***начальным условиям***

$$y_1 = y_{1,0}, y_2 = y_{2,0}, \ldots, y_n = y_{n,0} \text{ при } x = x_0.$$

Теорема 10. *Для существования и единственности решения задачи Коши для СДУ, заданной в нормальной форме, достаточно, чтобы* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *и* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $(i, j = \overline{1,n})$ *были непрерывны.*

Определение 19. *Совокупность* n *функций*

$$\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \qquad \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{array} \qquad (***)$$

определённых в некоторой области изменения переменных $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$ *и имеющих частные производные по* x *называется* ***общим решением*** *СДУ в олбласти* $D(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *в каждой точке которой* $\exists$ *единственное решение задачи Коши, если:*

1) *система* $(***)$ *разрешима относительно* C_i *в* D*;*

$$C_i = \psi_i(x, y_1, \ldots, y_n) \ i = \overline{1,n};$$

2) $(***)$ *— является решением СДУ при* $\forall\ C_i = \widetilde{C}_i,\ i = \overline{1,n}$.

Определение 20. *Решение СДУ, полученное из общего решения, при конкретных значениях* C_i *—* ***частное решение****.*

Определение 21. ***Особое решение*** *— решение СДУ в каждой точке которого нарушена единственность решения задачи Коши.*

1.6.1 Приведение дифференциального уравнения n-го порядка к системе дифференциальных уравнений и обратно

Рассмотрим ДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Введём новые неизвестные функции:

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), y_3(x) = y''(x), \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x).$$

В результате имеем

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Получили нормальную систему ДУ, соответствующую уравнению n-го порядка.

Пример. Привести дифференциальное уравнения 3-го порядка к системе дифференциальных уравнений

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = x^2.$$

Введём функции:

$$y_1 = y,\ y_2 = y' = y_1',\ y_3 = y'' = y_2'.$$

В результате получим нормальную систему ДУ:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = -3y_3 + 4y_2 + 12y_1 + x^2. \end{cases}$$

Обратная операция.

Если СДУ *разрешима относительно* $y_1, y_2, \dots, y_n$, то система может быть приведена к однородному уравнению n-го порядка.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения: $z = \dfrac{y^2}{y'}$.

$$z' = \frac{2y(y')^2 - y^2y''}{(y')^2} \text{ — подставим во второе уравнение.}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{2y(y')^2 - y^2y''}{(y')^2} \text{ или } 2yy'' = 3(y')^2.$$

Получили ДУ 2-го порядка не содержащее независимой переменной.

Обшие методы интегрирования СДУ

1. СДУ вида:
$$\begin{cases} y_1' = f_1(x), \\ y_2' = f_2(x, y_1), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$
Последовательное интегрирование уравнений.

2. Сведение к ДУ n-го порядка.

1.6.2 Системы линейных дифференциальных уравнений

Если в нормальной системе дифференциальных уравнений все правые части линейны относительно y_k, $k = \overline{1, n}$ — имеем систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ).

$$\begin{cases} y_1' = p_{1,1}(x)y_1 + p_{1,2}(x)y_2 + \ldots + p_{1,n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{2,1}(x)y_1 + p_{2,2}(x)y_2 + \ldots + p_{2,n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots \\ y_n' = p_{n,1}(x)y_1 + p_{n,2}(x)y_2 + \ldots + p_{n,n}(x)y_n + f_n(x). \end{cases}$$

Матричная форма записи:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \ \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dY}{dx} = P \cdot Y + F.$$

Замечание. Для СЛДУ имеют место теоремы о структуре общего решения и теорема существования и единственности решения.

1.6.3 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В случае, если $f_i \neq 0$, неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (НСЛДУ):

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F,\ A = \{a_{i,j}\} \in R.$$

Если $f_i \equiv 0$, однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (ОСЛДУ):

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y,\ A = \{a_{i,j}\} \in R.$$

Для решения ОСЛДУ достаточно найти систему фундаментальных решений. Будем её искать в виде:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x},\ \ldots, y_1 = \alpha_n e^{\lambda x}.$$

Подставим в ОСЛДУ:

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \lambda) \cdot \alpha_1 + a_{1,2} \cdot \alpha_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot \alpha_n = 0, \\ a_{2,1} \cdot \alpha_1 + (a_{2,2} - \lambda) \cdot \alpha_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot \alpha_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n,1} \cdot \alpha_1 + a_{n,2} \cdot \alpha_2 + \ldots + (a_{n,n} - \lambda) \cdot \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы однородная система линейных алгебраических уравнений имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы определитель матрицы системы был равен нулю:

$$|A - \lambda \cdot E| = 0 \text{ — характеристическое уравнение.}$$

1. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения различные и действительные.

   Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$ — собственные числа,

   $$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \ldots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \ldots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \\ \ldots \\ \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \text{ — собственные векторы.}$$

   Тогда функции

   $$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \ldots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x},\ Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \ldots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x},\ \ldots, Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \\ \ldots \\ \alpha_{n,n} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}$$

   образуют фундаментальную систему решений.

   Общее решение:

   $$Y = C_1 Y + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n$$

   или

   $$\begin{cases} y_1(x) = C_1\alpha_{1,1}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{1,2}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{1,n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2(x) = C_1\alpha_{2,1}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{2,2}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{2,n}e^{\lambda_n x}, \\ \ldots \\ y_n(x) = C_1\alpha_{n,1}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{n,2}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{n,n}e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

   Пример. Найти общее решение ОСЛДУ:

   $$\begin{cases} x'(t) = y + z, \\ y'(t) = 3x + z, \\ z'(t) = 3x + y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$
Соответственные собственные векторы:

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},\ Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = -C_2e^{-2t} + 2C_3e^{3t}, \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 3C_3e^{3t}, \\ z(t) = -C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 3C_3e^{3t}. \end{cases}$$

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряжённые $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Вид частных решений в этом случае такой же как и в предыдущем случае. Применяя формулу Эйлера и выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения (можно показать, что они тоже являются решениями уравнения (комплексно-сопряжённый корень $\lambda = \alpha - i\beta$ не даёт новых линейно независимых решений).

   Пример. Найти решение задачи Коши ОСЛДУ:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y, & x(0) = 7, \\ y'(t) = -x + y - z, & y(0) = 2, \\ z'(t) = 3y + z, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Собственные векторы и соответствующее частное решение:

$$\text{Для } \lambda_1 = 1,\ \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t;$$

$$\lambda_2 = 1 + 2i,\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t + ie^t \sin 2t \\ -2e^t \sin 2t + 2ie^t \cos 2t \\ 3e^t \cos 2t + 3ie^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Действительные частные решения:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -2e^t \sin 2t \\ 3e^t \cos 2t \end{pmatrix},\ Y_3 = \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ 2e^t \cos 2t \\ 3e^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t, \\ y(t) = -2C_2 e^t \sin 2t + 2C_3 e^t \cos 2t, \\ z(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^t \cos 2t + 3C_3 e^t \sin 2t. \end{cases}$$

Используя начальные условия определим $C_1,\ C_2,\ C_3$.

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 7, \\ y(0) = 2C_3 = 2, \\ z(0) = -C_1 + 3C_2 = 1. \end{cases}$$

$C_1 = 5,\ C_2 = 2,\ C_3 = 1.$

В результате решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t) = 5e^t + 2e^t \cos 2t + e^t \sin 2t, \\ y(t) = -4e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t, \\ z(t) = -5e^t + 6e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t. \end{cases}$$

3. Среди корней характеристического уравнения λ есть действительные корни кратности m . В этом случае частные решения можно искать *методом неопределённых коэффициентов*. Для этого следует выписать предполагаемый вид решения для каждой компоненты с неопределёнными коэффициентами, при этом коэффициенты при различных компонентах решения должны быть различны:

   а) если $m = 2$, то $y_1 = (A + Bx)e^{\lambda x}$, $y_2 = (C + Dx)e^{\lambda x}$, $y_3 = (E + Fx)e^{\lambda x}$, $\ldots$;

   б) если $m = 3$, то $y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{\lambda x}$, $y_2 = (D + Ex + Fx^2)e^{\lambda x}$, $y_3 = (G + Hx + Ix^2)e^{\lambda x}$, $\ldots$

Подставив полученные выражения в заданную однородную систему уравнений и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях от x, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов.

Пример. Найти общее решение ОЛСДУ.

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y - 2z, \\ y'(t) = x - 2y + 2z, \\ z'(t) = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1$.

Для собственного числа $\lambda = 3$ решение будем искать в виде:

$$x(t) = Ae^{3t},\ y(t) = Be^{3t},\ z(t) = Ce^{3t}.$$

Подставим в исходную систему и сократим на e^{3t}, получим:

$$\begin{cases} 5A - B + 2C = 0, \\ A - 5B + 2C = 0, \\ 3A - 3B + 2C = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, её ненулевое частное решение; $A = -1,\ B = 1,\ C = 3$. Соответствующее частное решение ОЛСДУ:

$$x(t) = -e^{3t},\ y(t) = e^{3t},\ z(t) = 3e^{3t} \text{ или } Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Для собственного числа $\lambda = -1$ $(m = 2)$ решение будем искать в виде:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-t},\ y(t) = (C + Dt)e^{-t},\ z(t) = (E + Ft)e^{-t}.$$

Подставим в исходную систему дифференциальных уравнений. После сокращения на e^{-t} приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A + B - C - 2E = 0, \\ A - C - D + 2E = 0, \\ 3A - 3C + 6E - F = 0, \\ -B + D - 2F = 0, \\ B - D + 2F = 0, \\ 3B - 3D + 6F = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 4, число переменных — 6. Фундаментальная система решений состоит их двух решений:

$$A = 1,\ C = 1,\ B = D = E = F = 0$$

и

$$A = -2,\ E = 1,\ B = C = D = F = 0.$$

В результате имеем ещё два линейно независимых решения ОЛСДУ:

$$x(t) = e^{-t},\ y(t) = e^{-t},\ z(t) = 0 \text{ или } Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

и

$$x(t) = -2e^{3t},\ y(t) = 0,\ z(t) = e^{-t} \text{ или } Y_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Общее решение ОЛСДУ:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - 2C_3e^{-t}, \\ y(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \\ z(t) = 3C_1e^{3t} + C_3e^{-t}. \end{cases}$$

Замечание. Задача нахождения общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений (НСЛДУ) может быть решена методом приведения к одному уравнению высшего порядка.

1.6.4 Приближённые методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Аналитические методы

1. Разложение в ряд Тейлора

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Для значений x, достаточно близких к x_0, решение задачи Коши может быть представлено рядом Тейлора (формулой Тейлора):

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Пример.

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
$y'' = 2x + 2yy',\ y''(0) = 0.$
$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',\ y'''(0) = 2.$
$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''',\ y^{(4)}(0) = 0.$
$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)},\ y^{(5)}(0) = 0.$
$y^{(6)} = 20y''y''' + 10y'y^{(4)} + 2yy^{(5)},\ y^{(6)}(0) = 0.$
$y^{(7)} = 20(y''')^2 + 30y''y^{(4)} + 12y'y^{(5)} + 12yy^{(6)},\ y^{(7)}(0) = 80.$
В результате:

$$y(x) \approx \frac{2}{3!}x^3 + \frac{80}{7!}x^7 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

2. Метод последовательных приближений

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Интегрируем ДУ в промежутке $[x_0, x]$.

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

$$y(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Получили *интегральное уравнения Вольтерра 2-го рода.*

Последовательные приближения строятся по формуле:

$$y_n(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt.$$

Выбор начального приближения безразличен, можно взять число $y_0 = y(x_0)$.

Пример.

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$y_1(x) = 0 + \int\limits_{0}^{x} (t^2 + 0^2)dt = \frac{x^3}{3}.$$

$$y_2(x) = 0 + \int\limits_{0}^{x} \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3} \right)^2 \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

$$y_3(x) = \int\limits_{0}^{x} \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Численные методы

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Решение строится в виде таблицы приближённых решений: Значения x — узлы: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_k < x_{k+1}$, $y(x_k) = y_k$.

$$y_{n+1} = y_0 + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt.$$

или

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y.$$

Численные методы отличаются подходом к вычислению Δy.

1. **Метод Эйлера**
   $h_n = x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$.
2. **Метод Рунге-Кутта 4-го порядка**[3]
   $h = x_{i+1} - x_i$, $y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$,
   $K_1 = hf(x_n, y_n)$, $K_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{K_1}{2}\right)$,
   $K_3 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{K_2}{2}\right)$, $K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$.
3. **И др ...**

[3] Разработаны около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 2. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2006. — 864 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 3. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2005. —728 с.

5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

6. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.

7. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.

8. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.

9. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.

10. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

11. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.
12. *Пантелеев, А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах : учеб. пособие. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, А. В. Босов. — М.: «Высш. школа», 2001. — 376 с.
13. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.2 — 216 с.
14. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.3 — 248 с.
15. http://ru.wikipedia.org/wiki/