

Лабораторная работа №2

Исследование переходных характеристик типовых звеньев линейных систем автоматического управления

Цель работы: методом структурного моделирования снять переходные характеристики типовых линейных звеньев: интегрирующего, дифференцирующего, апериодического, звена второго порядка и звена запаздывания.

Исследовать влияние параметров типовых звеньев и обратных связей (отрицательной и положительной) на вид переходных характеристик и свойства звеньев в установившемся и переходном режимах.

1. Общие сведения

1.1 Переходная функция

Переходной функцией (характеристикой) САУ (или ее элемента) называют функцию $h(t)$, описывающую изменение выходной переменной, когда на вход подается единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

Единичное ступенчатое воздействие – это такое воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменным.

Переходная функция дает полную информацию о свойствах линейной САУ (или ее элемента).

На рис. 1 приведен пример переходной функции.

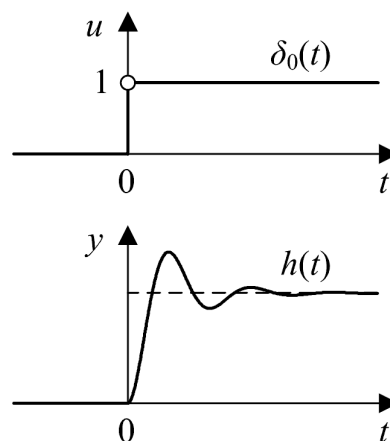


Рис. 1. Пример переходной функции

1.2 Типовые звенья

Для расчета систем автоматического управления их обычно разбивают на отдельные элементы, динамическими характеристиками которых являются

дифференциальные уравнения не выше второго порядка. Причем различные по своей физической природе элементы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями.

Математическая модель элемента САУ называется *звеном*. Часто встречающиеся звенья, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго, называют *типовыми*.

Изображение САУ в виде совокупности звеньев с указанием связей между ними называется *структурной схемой*. Такое представление САУ позволяет наглядно показать взаимосвязь элементов системы и оценить при наличии соответствующего опыта отдельные свойства переходных и статических процессов.

В таблице 1 приведены дифференциальные уравнения, передаточные и переходные функции типовых звеньев, изучаемых в лабораторной работе. Параметры типовых звеньев имеют следующие обозначения:

k – коэффициент усиления;

T – постоянная времени в секундах;

d – коэффициент демпфирования звена второго порядка;

τ – время запаздывания в секундах.

Обратим внимание, что на вид переходной характеристики звена второго порядка большое влияние оказывает коэффициент демпфирования: при $d \geq 1$ она имеет монотонный характер, а при $0 \leq d < 1$ – колебательный.

При фиксированных значениях параметров типового звена по аналитическому выражению переходной функции можно легко найти начальное $h(0)$ и конечное $h(\infty)$ значение выходной переменной. По графикам переходных характеристик можно увидеть, что каждому звену соответствует характерный определенный для него вид переходного процесса при одном и том же единичном входном воздействии.

Более глубокие исследования динамических свойств при изменении параметров типовых звеньев связаны с многократными построениями переходных характеристик, что представляет собой довольно трудоемкую процедуру. Удобным и наглядным в таком случае оказывается метод структурного моделирования с применением компьютеров.

Для моделирования типового звена достаточно по исходным данным (передаточной функции и численным значениям параметров) составить структурную схему модели и ввести ее в программу «MATLAB Simulink». Структурная схема модели для звена с передаточной функцией $W(p)$ приведена на рис. 2.

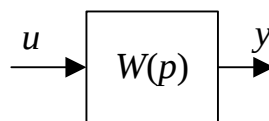
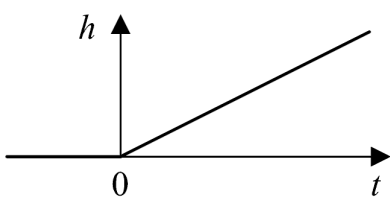
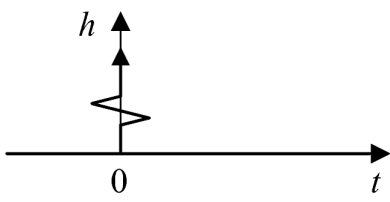
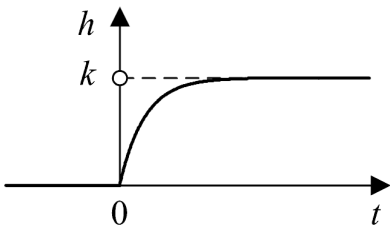
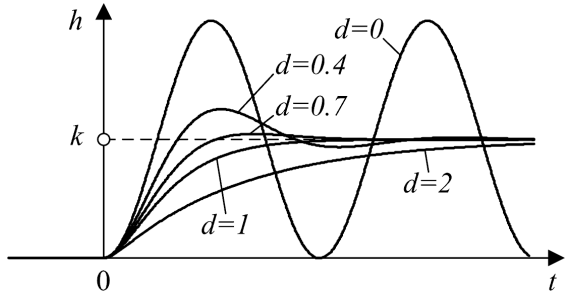
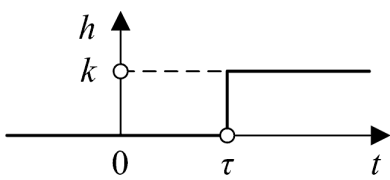


Рис. 2. Структурная схема модели

Типовые звенья и их динамические характеристики

Наименование звена	Диф. уравнение	Передаточная функция	Переходная функция
Интегрирующее	$\dot{y} = ku$	$\frac{k}{p}$	$h(t) = kt$ 
Дифференцирующее	$y = k\dot{u}$	kp	$h(t) = k\delta_1(t)$ 
Апериодическое	$T\dot{y} + y = ku$	$\frac{k}{Tp + 1}$	$k(1 - e^{-t/T})$ 
Второго порядка	$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = ku$	$\frac{k}{T^2 p^2 + 2dT p + 1}$	
Запаздывания	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-p\tau}$	$h(t) = \delta_0(t - \tau)$ 

При изменении какого-либо параметра звена изменяется его переходная характеристика, а следовательно, и свойства исследуемого звена. Для удобства сравнения свойств звеньев в теории автоматического регулирования принято оценивать переходные характеристики следующими параметрами:

- уровнем установившегося режима $h_{уст}$,
- временем переходного процесса t_{Π} ,
- перерегулированием σ .

Под временем переходного процесса понимается время, за которое переходная характеристика входит в пятипроцентную зону ($\pm 5\%$ от уровня установившегося режима) и более из нее не выходит (рис. 3).

Перерегулирование определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%,$$

где $h_{\max}$ – максимальное значение переходной функции (рис. 3).

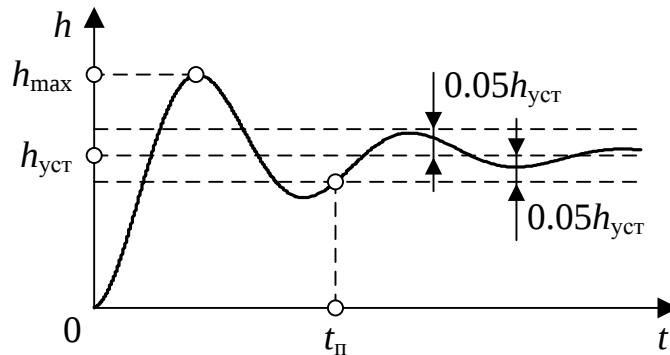


Рис. 3. Определение оценок быстродействия и перерегулирования по переходной функции

При выполнении программы лабораторной работы в обязательном порядке нужно регистрировать параметры переходных характеристик. Это позволит сделать обоснованные выводы о свойствах исследуемых звеньев.

Охват типового звена обратной связью (положительной или отрицательной) приводит к изменению вида звена или его параметров. При исследовании типовых звеньев методом структурного моделирования влияние обратных связей можно оценить по виду переходных характеристик, выводимых на экран монитора, а оценку свойств эквивалентных звеньев сделать по параметрам переходных характеристик. Структурные схемы моделей при охвате звена с передаточной функцией $W(p)$ положительной и отрицательной обратной связью показаны на рис. 4. Предполагается, что в обратной связи включено пропорциональное звено с коэффициентом усиления $k_{\text{ос}}$, называемым коэффициентом обратной связи.

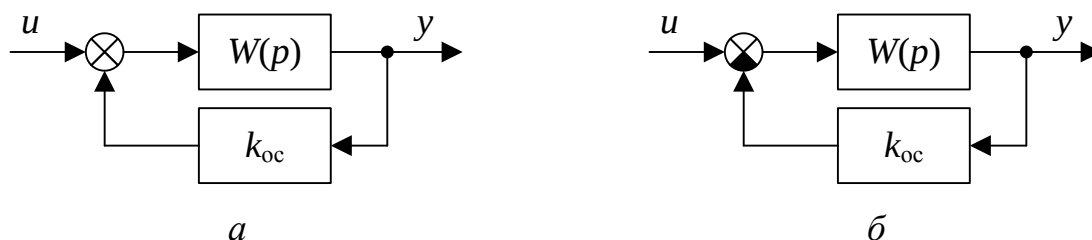


Рис. 4. Структурная схема модели при охвате звена положительной (*a*) и отрицательной (*б*) обратной связью

2. Программа лабораторной работы

2.1. Снять переходную характеристику интегрирующего звена. Исследовать влияние коэффициента усиления и коэффициентов отрицательной и положительной обратных связей на вид переходной характеристики и свойства звена в переходном и установившемся режиме.

Численные значения параметров для всех типовых звеньев приведены в таблице 2.

2.2. Снять переходную характеристику дифференцирующего звена.

2.3. Снять переходную характеристику апериодического звена в графическом и табличном виде. Исследовать влияние коэффициента усиления k , постоянной времени T и коэффициентов отрицательной и положительной обратных связей на вид переходной характеристики и свойства звена.

Рассчитать по аналитическому выражению переходной функции ее значения для моментов времени, в которые снимались значения в табличном виде. Оценить ошибки при моделировании в процентах.

2.4. Снять переходные характеристики звена второго порядка при двух значениях коэффициента демпфирования ($d \geq 1$ и $d < 1$). Исследовать влияние коэффициента усиления k , постоянной времени T и коэффициентов отрицательной и положительной обратных связей на вид переходной характеристики и свойства звена.

2.5. Снять переходную характеристику звена запаздывания. Исследовать влияние времени запаздывания на вид переходной характеристики.

Таблица 2

Значения параметров типовых звеньев

№ варианта	k , о.е.	T , с	d , о.е.	τ , с
1	2	0.5	1.5 / 0.2	4
2	4	1	2 / 0.5	2
3	8	1.5	1 / 0.4	2.5
4	1	2	2.5 / 0.1	4.5
5	0.5	2.5	4 / 0.3	3
6	10	0.5	3 / 0.25	3.5
7	0.25	1	3.5 / 0.6	0.5
8	0.1	1.5	2 / 0.2	1
9	0.2	2	1.5 / 0.3	1.5
10	0.4	2.5	2.5 / 0.4	5
11	2.5	0.7	1.8 / 0.25	3
12	5	1.5	2 / 0.2	2
13	7	0.4	2.5 / 0.5	2.5
14	6	1.2	3 / 0.2	4
15	1.5	1.8	4 / 0.4	2

Лабораторная работа №3

Исследование частотных характеристик типовых звеньев линейных систем автоматического управления

Цель работы: методом структурного моделирования снять и построить амплитудные и фазовые частотные характеристики типовых линейных звеньев: интегрирующего, дифференцирующего, апериодического, звена второго порядка.

Исследовать влияние параметров типовых звеньев на вид частотных характеристик.

1. Общие сведения

1.1 Переходная функция

Важными динамическими характеристиками САУ (или ее элемента) являются *частотные характеристики*, которые определяют взаимосвязь между параметрами гармонических сигналов на входе и выходе.

Можно показать математически, что если на линейное звено подать гармоническое входное воздействие вида

$$u(t) = a_u \sin \omega t,$$

то в установившемся режиме выходная переменная также будет изменяться по синусоидальному закону

$$y(t) = a_y \sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, при прохождении синусоидального сигнала через линейное звено изменяется его амплитуда и фаза.

Синусоидальные функции времени имеют нулевой порядок возрастания. Поэтому в изображениях функций можно принять $\operatorname{Re} p = 0$, т.е. $p = j\omega$. Выполняя такую замену в передаточной функции САУ (или ее элемента), получим *обобщенную частотную характеристику*:

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}.$$

Обобщенная частотная характеристика может быть построена на комплексной плоскости; при этом каждому значению частоты ω_i соответствует вектор $W(j\omega_i)$. При изменении ω от 0 до ∞ конец этого вектора "прочерчивает" на комплексной плоскости кривую (рис. 1), которая называется *амплитудно-фазовой характеристикой*.

Обобщенную частотную характеристику, являющуюся функцией комплексной переменной, можно представить состоящей из двух действительных функций в алгебраической или показательной форме:

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

Составляющие обобщенной частотной характеристики имеют самостоятельное значение и следующие названия:

- $R(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);
- $I(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ);
- $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ);
- $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ).

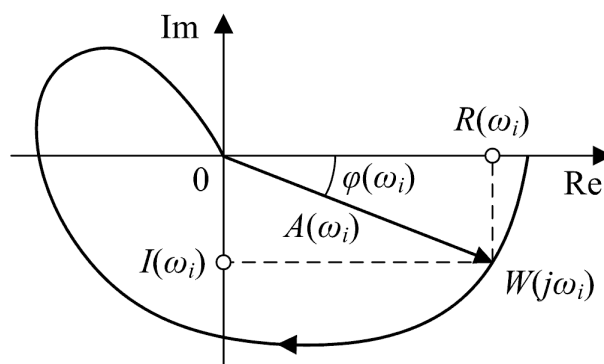


Рис. 1. Пример амплитудно-фазовой характеристики

Перечисленные характеристики связаны между собой следующими соотношениями:

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = I(\omega) / R(\omega).$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики используются в основном в математических выкладках. Амплитудная и фазовая частотные характеристики имеют определенный физический смысл:

- АЧХ показывает отношение амплитуды выходной величины к амплитуде входного воздействия при различных частотах;
- ФЧХ показывает разность фаз выходного и входного сигналов (фазовый сдвиг) на различных частотах.

Из приведенной физической интерпретации АЧХ и ФЧХ ясно, что они могут быть построены экспериментальным путем. Для этого применяется специальная аппаратура, в состав которой входят генератор гармонических колебаний с регулируемой частотой и устройства для измерения амплитуды и фазы колебаний.

Блок-схема для экспериментального определения частотных характеристик $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ приведена на рис. 2.

Аналитические выражения и графики амплитудной и фазовой частотных характеристик для типовых динамических звеньев приведены в таблице 1.

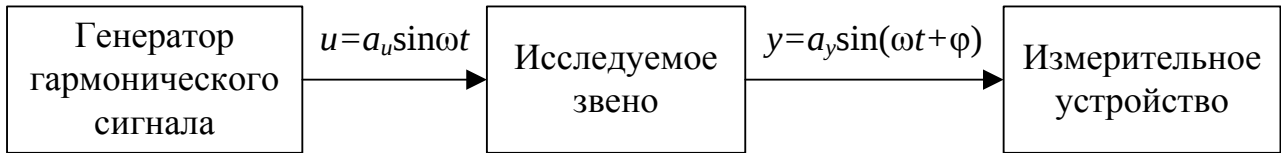


Рис. 2. Блок-схема для экспериментального определения амплитудной и фазовой частотных характеристик

Таблица 1

Частотные характеристики типовых звеньев

Наименование звена	Аналитические выражения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$	Графики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$
Интегрирующее	$A(\omega) = \frac{k}{\omega}$ $\varphi(\omega) = -90^\circ$	
Дифференцирующее	$A(\omega) = k\omega$ $\varphi(\omega) = 90^\circ$	
Апериодическое	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$ $\varphi(\omega) = \text{arctg}(-T\omega)$	
Второго порядка	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}$ $\varphi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{2dT\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$	

В эксперименте для снятия частотных характеристик звена следует задаться рядом значений частот и в установившемся режиме для каждой частоты измерить a_u , a_y и φ . Ординаты амплитудно-частотной характеристики на каждой частоте рассчитываются по формуле

$$A(\omega) = \frac{a_y}{a_u}.$$

Этот расчет можно исключить, если в эксперименте задать $a_u = 1$. Тогда $A(\omega)$ будет численно равна a_y .

В модельном эксперименте для определения значений $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при фиксированном значении частоты необходимо в установившемся режиме вывести на экран компьютера одновременно входной ($a_u = 1$) и выходной сигналы и средствами соответствующей программы замерить значения a_y и φ . Полученные экспериментальные значения целесообразно свести в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты измерений

ω , рад/с	0				$\omega_{\text{ср}} =$				∞
$A(\omega)$									
$\varphi(\omega)$, °									

Количество и значения частот, при которых снимаются частотные характеристики, выбирает студент при подготовке отчета по лабораторной работе. Здесь можно сделать следующие рекомендации:

- начальные и конечные значения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ экспериментально определить невозможно. Поэтому их следует рассчитать аналитически и включить в таблицу при подготовке отчета;
- в число частот обязательно следует включать частоту $\omega_{\text{ср}}$, при которой сдвиг по фазе равен половине предельного (при $\omega \rightarrow \infty$);
- так как зависимости $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ нелинейные, то задаваться равномерной шкалой частот не следует. Желательно, чтобы точки характеристики $\varphi(\omega)$ отстояли друг от друга на 10...20 градусов;
- в эксперименте частоту достаточно изменять в диапазоне от $0.1\omega_{\text{ср}}$ до $10\omega_{\text{ср}}$.

2. Программа лабораторной работы

2.1. Снять и построить АЧХ и ФЧХ интегрирующего звена.

Численные значения параметров для всех типовых звеньев такие же, как в лабораторной работе №1 (таблица 3).

2.2. Снять и построить АЧХ и ФЧХ дифференцирующего звена.

2.3. Снять и построить АЧХ и ФЧХ апериодического звена.

2.4. Снять и построить АЧХ и ФЧХ звена второго порядка. Исследовать влияние коэффициента демпфирования на вид частотных характеристик.

3. Программа проверки результатов исследования

3.1. Рассчитать частотные характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ интегрирующего, дифференцирующего, апериодического звеньев и звена второго порядка для значений частот, при которых снимались названные характеристики. По полученным данным определить ошибки при моделировании в процентах.

3.2. Сравнить по виду построенные в ходе работы АЧХ и ФЧХ типовых линейных звеньев с аналогичными характеристиками, приведенными в таблице 1.

Таблица 3

Значения параметров типовых звеньев

№ варианта	k , о.е.	T , с	d , о.е.	τ , с
1	2	0.5	1.5 / 0.2	4
2	4	1	2 / 0.5	2
3	8	1.5	1 / 0.4	2.5
4	1	2	2.5 / 0.1	4.5
5	0.5	2.5	4 / 0.3	3
6	10	0.5	3 / 0.25	3.5
7	0.25	1	3.5 / 0.6	0.5
8	0.1	1.5	2 / 0.2	1
9	0.2	2	1.5 / 0.3	1.5
10	0.4	2.5	2.5 / 0.4	5
11	2.5	0.7	1.8 / 0.25	3
12	5	1.5	2 / 0.2	2
13	7	0.4	2.5 / 0.5	2.5
14	6	1.2	3 / 0.2	4
15	1.5	1.8	4 / 0.4	2