

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОМЕРНОГО И НЕРАВНОМЕРНОГО КВАНТОВАНИЯ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Составители: д.т.н., проф. И.С. Грузман;

магистрант М.А. Банзаргашиева;

магистрант Е.В. Андрес

Цель работы. Изучить равномерные и неравномерные методы квантования сигналов. Сравнить защищенность сигнала от шумов, возникающих при равномерном и неравномерном методах квантования.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ¹

Для получения цифрового сигнала из аналогового сигнала необходимо выполнить три процедуры. Первая обычно называется *дискретизацией* и состоит в замене непрерывного сигнала $u_n(t)$ дискретным

$$u(i) = u_n(i\Delta t)$$

где Δt – шаг или интервалы дискретизации.

Вторая выполняет замену непрерывного множества значений отсчета сигнала $u(i)$ множеством квантованных значений и носит название *квантования*. Значения, которые принимает квантованный сигнал $\tilde{u}(i)$, называются *уровнями квантования*. В общем случае преобразование $u(i)$ в $\tilde{u}(i)$ выражается ступенчатой функцией (рис. 1.1). Непрерывный динамический диапазон отсчетов сигнала $u(i)$ разбивается на отдельные неперекрывающиеся интервалы, определяемые *порогами*. Расстояние между соседними пороговыми уровнями называется *шагом квантования* δ_i . Квантование называется *равномерным*, если величина шага квантования постоянная величина: $\delta_i = \delta$.

Квантование называется *неравномерным*, если величина шага квантования изменяется с изменением $u(i)$. Операция квантования сводится к тому, что всем отсчетам входного сигнала $u(i)$, попавшим в некоторый интервал, приписывается один и тот же уровень. При этом возникает ошибка $\varepsilon(i) = u(i) - \tilde{u}(i)$, которая является случайной величиной, поэтому ее часто называют *шумом*.

¹ При написании данного раздела были использованы источники [1.1–1.3].

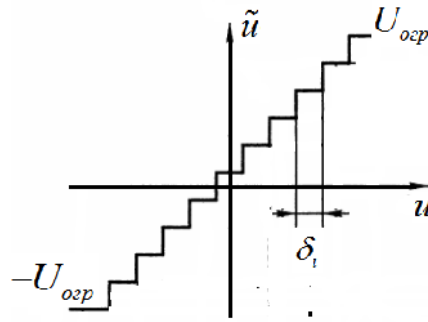


Рис. 1.1. Амплитудная характеристика квантователя

При цифровом представлении каждому из квантованных значений яркости ставится в соответствие двоичное число. Эта третья процедура называется *кодированием*. С помощью B разрядного кодового слова можно представить 2^B уровней.

Характеристика квантователя имеет два участка: *зону квантования* и *зону ограничения*. В зоне квантования используются два способа представления отсчетов: округление и усечение. *Округление* соответствует выбору ближайшего уровня квантования. В этом случае величина ошибки квантования $\varepsilon_{кв}(i) = u(i) - u_{кв}(i)$ изменяется в диапазоне $([-\delta/2, -\delta/2])$. При *усечении* величина ошибки квантования изменяется в пределах от 0 до δ . Далее будем рассматривать только округление.

В зоне ограничения, когда $|u(i)| > U_{огр}$, где $U_{огр}$ – порог ограничения квантователя, ошибка ограничения

$$\varepsilon_{огр}(i) = \begin{cases} u(i) - U_{огр}; & u(i) > U_{огр}; \\ u(i) + U_{огр}; & u(i) \leq -U_{огр}. \end{cases}$$

пропорциональна значению квантуемого отсчета. Поэтому результирующий шум $\varepsilon(i)$ преобразования $u(i)$ в $u_{кв}(i)$ состоит из двух составляющих – шума квантования $\varepsilon_{кв}(i)$ и шума ограничения $\varepsilon_{огр}(i)$.

Анализ шумов квантования

При определении мощности шумов квантования примем следующие предположения.

1. Дискретный входной сигнал $u(i)$ является стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, мощностью σ_c^2 и симметричной плотностью распределения вероятностей (относительно нуля) $w(u)$.

2. Шум квантования $\varepsilon_{кв}$ является дискретным стационарным белым шумом с нулевым математическим ожиданием, т.е.

$$M\{\varepsilon_{\kappa\delta}(i)\varepsilon_{\kappa\delta}(j)\} = \begin{cases} \sigma_{\kappa\delta}^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3. Шум квантования не коррелирует с входным сигналом

$$M\{\varepsilon_{\kappa\delta}(i)u(i+k)\} = 0, \text{ для всех } k.$$

Поскольку моменты стационарного случайного процесса не зависят от времени, то далее переменную (i) опустим.

4. Распределение шума равномерно в любом интервале квантования. Например, для равномерного квантования при постоянном шаге квантования

$$w(\varepsilon_{\kappa\delta}) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\varepsilon_{\kappa\delta}| \leq \frac{\delta}{2}; \\ 0, & |\varepsilon_{\kappa\delta}| > \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

В рамках принятых предположений мощность шума квантования

$$\overline{\varepsilon_{\kappa\delta}^2} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \varepsilon_{\kappa\delta}^2 w(\varepsilon_{\kappa\delta}) d\varepsilon_{\kappa\delta} = \frac{\delta^2}{12}.$$

Защищенность от шумов квантования (или отношение сигнал/шум квантования), выраженная в децибелах,

$$A_{\kappa\delta} = 10 \lg \frac{\sigma_c^2}{\overline{\varepsilon_{\kappa\delta}^2}},$$

для равномерного квантователя равна

$$A_{\kappa\delta} = 10 \lg \frac{12\sigma_c^2}{\delta^2}.$$

Для симметричной (относительно нуля) амплитудной характеристики равномерного квантователя, число уровней квантования

$$M = \frac{2U_{огр}}{\delta}.$$

Тогда защищённость

$$A_{\kappa\sigma,p} = 10 \lg \left(12 M^2 \frac{\sigma_c^2}{4 U_{огр}^2} \right) = 4.77 + 20 \lg M - 10 \lg \frac{U_{огр}^2}{\sigma_c^2}. \quad (1.1)$$

Для B -разрядного квантователя

$$A_{\kappa\sigma,p} = 4,77 + 6B - 10 \lg \frac{U_{огр}^2}{\sigma_c^2}. \quad (1.2)$$

Мощность речевого сигнала может изменяться более чем на 40 дБ. Если мощность сигнала мала, то в квантователе будут использоваться лишь несколько уровней. Из формулы (1.1) следует, на сколько уменьшится (в децибелах) мощность входного сигнала, на столько же уменьшится защищенность $A_{\kappa\sigma}$ при равномерном квантовании, т.е. защищенность при равномерном квантовании линейно зависит от отношения порога ограничения $U_{огр}$ к среднеквадратическому отклонению σ_c входного сигнала (выраженного в децибелах). Чем меньше уровень сигнала, тем хуже отношение сигнал/шум. Чтобы сохранить необходимый уровень защищенности слабых сигналов, требуется увеличивать число уровней квантования.

Для ослабления зависимости защищенности от мощности входного сигнала применяют неравномерные квантователи. При неравномерном квантовании шаг квантования не остается постоянным, а уменьшается с уменьшением уровня сигнала. Получение переменного шага квантования на базе равномерного квантователя может быть реализовано следующим способом (рис.1.2). Перед равномерным квантованием выполняется сжатие динамического диапазона с помощью компрессора. После квантования выполняется расширение динамического диапазона с помощью экспандера. Совокупность операций, проводимых компрессором и экспандером, называется компандированием сигнала. Амплитудная характеристика компандера должна быть линейной.



Рис.1.2. Структурная схема системы компрессор-экспандер

В системах связи применяются два закона компандирования:
 μ – закон компандирования (североамериканский стандарт)

$$y = U_{\text{огр}} \frac{\ln(1 + \mu \frac{|u|}{U_{\text{огр}}})}{\ln(1 + \mu)} \text{sign}(u), \quad (1.3)$$

A – закон компандирования (европейский стандарт)

$$y = \begin{cases} U_{\text{огр}} \frac{A \frac{|u|}{U_{\text{огр}}}}{1 + \ln A} \text{sign}(u), \frac{|u|}{U_{\text{огр}}} < \frac{1}{A}; \\ U_{\text{огр}} \frac{1 + \ln A \frac{|u|}{U_{\text{огр}}}}{1 + \ln A} \text{sign}(u), \frac{|u|}{U_{\text{огр}}} > \frac{1}{A}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Обычно значения параметров в (1.3) и (1.4) равны: $\mu = 255$ и $A = 87.6$.
 Для μ – закона компандирования защищенность

$$A_{\text{кв}, \mu} \approx 20 \lg M + 4,77 - 20 \lg(\ln(1 + \mu)) - 10 \lg \left(1 + \sqrt{2} \left(\frac{U_{\text{огр}}}{\mu \sigma_c} \right) + \left(\frac{U_{\text{огр}}}{\mu \sigma_c} \right)^2 \right). \quad (1.5)$$

Анализ шумов ограничения

Вероятность появления шума ограничения (для симметричных распределений):

$$p_{orp} = 2 \int_{u_{max}}^{\infty} w(u) du .$$

В лабораторной работе рассмотрены источники речевых сигналов со следующими распределениями:
равномерным

$$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & |\varepsilon_{кв}| \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & |\varepsilon_{кв}| > \frac{\Delta}{2}; \end{cases}$$

гауссовским

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_c^2}\right), \quad -\infty \leq u \leq \infty;$$

Лапласа

$$w(u) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha |u|), \quad -\infty \leq u \leq \infty .$$

Равномерное распределение максимальным образом удовлетворяет принятым предположениям о свойствах шумов квантования. Полагается, что распределение Лапласа соответствует реальному распределению речевых сигналов.

Для данных распределений вероятности появления шума ограничения соответственно равны:

$$p_{orp,p} = 1 - \frac{U_{orp}}{\sqrt{3}\sigma_c}; \quad (1.6)$$

$$p_{orp,z} = 2\left(1 - \int_{-\infty}^{U_{orp}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_c^2}\right) dx\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{U_{orp}}{\sigma_c}\right)\right); \quad (1.7)$$

$$p_{orp,l} = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}U_{orp}}{\sigma_c}\right). \quad (1.8)$$

Табулированные значения функции $\Phi(\cdot)$ приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2.6520698	0.9960	2.87816174	0.9980
2.6968442	0.9965	2.9677379	0.9985
2.7477814	0.9970	3.0902323	0.9990
2.8070338	0.9975	3.2905267	0.9995

Мощность шума ограничения

$$\overline{\varepsilon_{огр}^2} = \frac{2}{p_{огр}} \int_{u_{max}}^{\infty} (u - u_{max})^2 w(u) du.$$

Поскольку шумы ограничения и квантования несовместны, то полная мощность шума преобразования входного сигнала в квантованный

$$\overline{\varepsilon^2} = p_{огр} \overline{\varepsilon_{огр}^2} + (1 - p_{огр}) \overline{\varepsilon_{кв}^2}.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Для заданного преподавателем варианта лабораторного задания (табл.1.2) найдите пороги ограничения $U_{огр}$ (формулы (1.6)...(1.8)).
2. Для заданного уровня защищенности $A_{кв,p}$ по формуле (1.1) рассчитайте число уровней квантования M равномерного квантователя (округлите M до большего четного целого). Определите шаг квантования и пересчитайте $A_{кв,p}$
3. Постройте зависимость защищенности $A_{кв,p}$ от отношения $20 \lg \frac{U_{огр}}{\sigma_c}$, варьируя среднеквадратическое отклонение сигнала в диапазоне $\sigma_c \dots 0.01\sigma_c$. Используйте рассчитанные в п.1 и п.2 значения порога ограничения $U_{огр}$ и число уровней квантования M .
4. Рассчитайте необходимый объем выборки N по формуле

$$\frac{\sigma_{\hat{p}_{огр}}}{p_{огр}} = \sqrt{\frac{1 - p_{огр}}{p_{огр} N}},$$

при котором относительная ошибка оценивания вероятности ограничения $\frac{\sigma_{\hat{p}_{огр}}}{p_{огр}} \leq 0.1$.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

1. Запустите GUI приложение для исследования алгоритмов квантования.
Для этого:
 - запустите Matlab;
 - в окне Current Folder задайте путь к папке, в которой лежит GUI приложение;

- в окне Command Window наберите команду – myguiGPR и нажмите “Enter”.
2. В соответствии с номером варианта (табл.1.2.), заданным преподавателем, выберите генератор сигналов с заданным распределением и задайте рассчитанные в домашнем задании объем выборки N и среднеквадратическое отклонение σ_c . Зарисуйте гистограмму входного сигнала для заданного распределения.
 3. Выберите необходимый квантователь, задайте рассчитанные в домашнем задании порог ограничения $U_{огр}$ и число уровней квантования M . Для соответствующего компрессора задайте параметры $\mu = 255$ (или $A = 87.6$). Зарисуйте гистограммы квантованных сигналов для двух видов квантователей (равномерного и неравномерного).
 4. Для равномерного и неравномерного квантователей зарисуйте зависимости защищенности от уровня квантования. Для соответствующего компрессора задайте параметры $\mu = \{100, 255, 500\}$ (или $A = \{40, 87.6, 170\}$). Чтобы наблюдать эти зависимости, последовательно нажимайте кнопки “вычислить” и “построить”. Обратите внимание на различия в области малых и больших уровней квантования.
 5. Варьируя мощность сигнала в диапазоне $\sigma_c^2 \dots 0.001\sigma_c^2$, постройте следующие зависимости от отношения $10 \lg \frac{U_{огр}^2}{\sigma_c^2}$:
 - мощности шума квантования (для равномерного и неравномерного квантователей);
 - защищенности $A_{\kappa\epsilon} = 10 \lg \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2}$ (для равномерного и неравномерного квантователей) с учетом шумов квантования и ограничения. Для соответствующего компрессора задайте параметры $\mu = 255$ (или $A = 87.6$).
 6. Сравните полученные зависимости защищенности с зависимостями, рассчитанными в п.3 домашнего задания.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как получить из аналогового сигнала цифровой сигнал?
2. В чем отличие операций округления и усечения значений отсчетов?
3. Поясните термин “защищенность от шумов квантования”. Как можно увеличить защищенность?
4. Каковы достоинства и недостатки равномерного квантователя?
5. Каково назначение неравномерного квантования?

6. В чем состоит принцип неравномерного квантования?
7. В чем сходство и различие двух законов компрессирования: μ -закона и А-закона?
8. Почему вид гистограммы квантованного сигнала (при неравномерном квантовании) отличается от гистограммы входного сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Рабинер Р.Л., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов. - М.:Радио и связь, 1981, 496 с.
- 1.2. Крухмалев В.В., Гордиенко В.Н., Моченов А.Д. и др. Основы построения телекоммуникационных систем и сетей (учебник).- М.:Горячая линия, 2004, 510 с.
- 1.3. Грузман И.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учебник НГТУ : учеб. пособие / И. С. Грузман, В. С. Киричук, В.П. Косых и др. - : Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. - 352 с.

Таблица 1.2. Варианты лабораторного задания

№ варианта	1	2	3	4
Виды ПРВ сигнала	Равномерное распределение	Распределение Лапласа	Гауссовское распределение	Равномерное распределение
$p_{огр}$	0.005	0.006	0.007	0.008
σ_c	10	20	30	40
$A_{кв,p}$ (дБ)	30	30	30	35
Квантователи	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон
№ варианта	5	6	7	8
Виды ПРВ сигнала	Распределение Лапласа	Гауссовское распределение	Равномерное распределение	Распределение Лапласа
$p_{огр}$	0.008	0.007	0.006	0.005
σ_c	50	60	70	80
$A_{кв,p}$ (дБ)	35	35	40	40
Квантователи	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон
№ Варианта	9	10	11	12
Виды ПРВ сигнала	Гауссовское распределение	Равномерное распределение	Распределение Лапласа	Гауссовское распределение
$p_{огр}$	0.005	0.006	0.007	0.008
σ_c	10	20	30	40
$A_{кв,p}$ (дБ)	30	30	30	35
Квантователи	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон
№ Варианта	13	14	15	
Виды ПРВ сигнала	Равномерное распределение	Распределение Лапласа	Гауссовское распределение	
$p_{огр}$	0.008	0.007	0.006	
σ_c	50	60	70	
$A_{кв,p}$ (дБ)	35	35	40	
Квантователи	равномерный; μ - закон	равномерный; A - закон	равномерный; μ - закон	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Составители: д.т.н., проф. И.С. Грузман;

магистрант Е.В. Андрес

Цель работы. Изучить одноканальные и многоканальные системы массового обслуживания (СМО) с отказами. Выполнить анализ основных характеристик СМО.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ²

С возникновением телекоммуникационных систем (ТКС) появилась необходимость в специальных математических методах анализа и прогнозирования качества их функционирования. Основу всех процессов в ТКС составляет обработка или передача (**обслуживание**) какого-то потока сообщений (**заявок**), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обработка или передача каждого сообщения (**обслуживание заявки**) продолжается какое-то случайное время. Часть ТКС, участвующая в процессе обслуживания заявки так, что одновременно с ним никакое другое сообщение не может обрабатываться этой частью, называется **обслуживающим каналом**.

Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе ТКС скапливается излишне большое число заявок, в другие же периоды ТКС будет работать с недогрузкой или вообще простаивать. Поэтом при решении задач анализа и прогнозирования качества работы ТКС необходимо считаться с тем, что **случайность является определяющим фактором** для процессов, протекающих в ТКС.

Математические модели ТКС строятся на основе теории систем массового обслуживания (СМО). Предмет теории СМО – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Если СМО содержит ровно один канал, то в каждый момент времени она способна обслуживать не более чем одну заявку. Если на такую систему, занятую обслуживанием, в течение интервала времени обслуживания поступит еще одна заявка, то она не сможет быть обслужена. Это

² При написании данного раздела были использованы источники [2.1–2.4]

простейший случай ресурсного конфликта – заявки, поступающие друг за другом, не могут быть обслужены немедленно при поступлении (в реальном масштабе времени) из-за того, что канал не успевает обслужить заявки за время между их поступлениями. Частота возникновения ресурсных конфликтов меньше, если СМО будет содержать не один, а несколько каналов, включенных так, чтобы поступающие заявки распределялись бы для обслуживания на любой свободный из них в данный момент. Однако, очевидно, что если время обработки не бесконечно мало по сравнению с интервалом между поступлением заявок, то и в СМО с несколькими каналами также может возникнуть ресурсный конфликт – вновь поступившая заявка не сможет получить немедленного обслуживания, так как все каналы окажутся занятыми в данный момент. В этом случае система может просто проигнорировать поступившую заявку. Она будет отброшена, а СМО будет считаться **заблокированной**. Вероятность такого события является важной характеристикой системы. Чтобы ни одна заявка не была потеряна в результате ресурсного конфликта, в СМО может быть предусмотрен специальный буфер памяти, в который будут помещаться заявки, которые не могут быть обслужены немедленно при поступлении из-за занятости всех каналов. В этом случае говорят, что СМО является системой с очередями. В очереди может оказаться не одна, а несколько заявок, если число поступающих заявок за некоторый интервал времени превысит число освободившихся за это время каналов. Если очередь не будет бесконечно нарастать, все заявки рано или поздно будут обслужены, однако время их пребывания в очереди будет разным и может рассматриваться как случайная величина. Распределение этой случайной величины также является важнейшей характеристикой системы обслуживания. Часто для оценки качества используется только ее среднее значение – **среднее время ожидания обслуживания**. Таким образом, недостаточность ресурсов в телекоммуникационной системе может приводить либо к потерям поступающих на обработку или передачу заявок, либо к задержке их обслуживания.

Простейшая модель потока заявок

Поступающие на вход СМО заявки образуют поток дискретных событий, полностью определяемый множеством моментов времени их поступления $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ (см.рис. 2.1). Для детерминированного потока моменты времени задаются таблицей или формулой. Детерминированный поток событий называется **регулярным**, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах.

На практике поток событий случайный и значения моментов поступления заявок есть значения случайной величины.

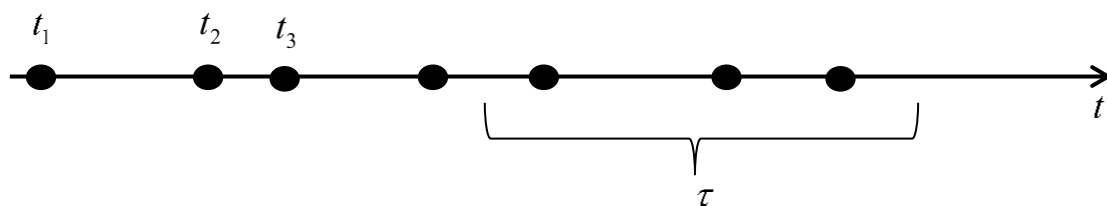


Рис. 2.1.

В общем случае случайные потоки можно классифицировать по наличию или отсутствию трех основных свойств: стационарности, последствия и ординарности.

1. Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ (см. рис.2.1) зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно расположен этот участок.

Условию стационарности удовлетворяет поток заявок, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. В частности, для стационарного потока характерна постоянная плотность (среднее число заявок в единицу времени). На практике часто встречаются потоки заявок, которые (по крайней мере, на ограниченном отрезке времени) могут рассматриваться как стационарные. Например, поток вызовов на городской телефонной станции на участке времени от 9 до 10 часов может считаться стационарным. Тот же поток в течение целых суток уже не может считаться стационарным (ночью плотность вызовов значительно меньше, чем днем).

2. Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Условие отсутствия последствия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последствия потому, что причины, обусловившие приход отдельного пассажира именно в тот, а не другой момент, как правило, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. Однако условие отсутствия последствия может быть легко нарушено за счет появления такой зависимости. Например, поток пассажиров, покидающих станцию метро, уже не может считаться потоком без последствия, так как моменты выхода пассажиров, прибывших одним и тем же поездом, зависимы между собой.

3. Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок τ двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Условие ординарности означает, что заявки приходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (т.е. стационарен, ординарен и не имеет последствий), то он называется **простейшим** (или **стационарным пуассоновским**) потоком. Для пуассоновского потока интервал времени между соседними событиями $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ имеет показательное распределение с плотностью

$$w(\Delta t) = \frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda \Delta t), \quad \Delta t > 0, \quad (2.1)$$

где λ – интенсивность потока (среднее количество поступивших заявок в единицу времени).

Для случайной величины Δt , имеющей показательное распределение (2.1), математическое ожидание $m_{\Delta t}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Delta t}$ равны:

$$m_{\Delta t} = \sigma_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}.$$

Далее будем полагать, что время обслуживания заявки δ также подчиняется экспоненциальному распределению

$$w(\delta) = \frac{1}{\mu} \exp(-\mu \delta), \quad t > 0,$$

где μ – интенсивность обслуживания, т.е. среднее число обслуженных заявок в единицу времени.

Одноканальные и многоканальные СМО с отказом

Исходные данные. Многоканальная СМО состоит из n каналов. На нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживаний в каждом канале имеет интенсивность μ .

Такая система может находиться в одном из $n + 1$ состояний:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят ровно один канал, остальные свободны;

S_2 – заняты ровно два канала, остальные свободны;

...

S_n – заняты все n каналов.

Многоканальная СМО с отказом наилучшим образом имитирует работу коммутатора в сетях передачи данных. Коммутатор имеет несколько параллельно работающих серверов, обрабатывающих и направляющих пакеты по разным адресам. Если все серверы заняты обработкой пакетов, то

очередной пакет получает отказ в обслуживании и пересылается на другой коммутатор или пропадает.

Частным случаем многоканальной СМО с отказом является одноканальная СМО с отказом ($n=1$). В такой СМО может содержаться только одна заявка в канале, которая обслуживается, либо ни одной заявки. Простейший пример такой модели – одноканальная телефонная линия, когда множество пользователей пытаются дозвониться до одного и того же абонента. При занятости абонента получается отказ.

Основные характеристики СМО с отказом

1. Среднее время обслуживания одной заявки в канале

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu} . \quad (2.2)$$

2. Приведенная интенсивность потока заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.3)$$

показывает среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки.

3. Вероятность того, что все каналы свободны, т.е. вероятность того, что в системе нет ни одной заявки:

$$p_0 = \left(\sum_{j=0}^n \frac{\rho^j}{j!} \right)^{-1} . \quad (2.4)$$

По сути, вероятность p_0 равна доле времени простоя каналов.

4. Вероятность того, что ровно k каналов заняты обслуживанием заявок

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 . \quad (2.5)$$

5. Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена).

Для этого нужно, чтобы все n каналов были заняты, значит

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 . \quad (2.6)$$

6. Относительная пропускная способность СМО – вероятность того, что заявка будет обслужена (отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок)

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 . \quad (2.7)$$

7. Абсолютная пропускная способность СМО – среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени (интенсивность выходящего потока обслуженных заявок)

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right) . \quad (2.8)$$

8. Среднее число занятых каналов. Поскольку абсолютная пропускная способность – это интенсивность потока обслуженных заявок, а каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок, то среднее число занятых каналов равно

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} . \quad (2.9)$$

Из формул (2.7) и (2.8) следует, что относительная пропускная способность Q и абсолютная пропускная способность A зависят не только от числа каналов n и среднего времени обслуживания одной заявки в канале

$t_{obs} = \frac{1}{\mu}$, но и от интенсивности потока заявок λ .

Если поток заявок является регулярным, то система лучше справляется с их обслуживанием. Если же поток заявок нерегулярный и образует местные сгущения или разрежения, то работа системы затрудняется: на одних участках времени возникают простои, а на других наблюдается перегрузка системы, когда некоторые заявки получают отказ. Поэтому различают номинальную и фактическую пропускную способность системы. Номинальная пропускная способность зависит только от числа каналов и работоспособности каждого из них. Если каждая заявка обслуживается ровно t_{obs} , и заявки следовали бы одна за другой без перерыва, то номинальная пропускная способность системы

$$A_{ном} = \frac{n}{t_{обс}} = n\mu .$$

Фактическая пропускная способность равна абсолютной пропускной способности A . Фактическая пропускная способность системы всегда ниже номинальной. Например, для одноканальной системы с отказами отношение номинальной пропускной способности к фактической равно:

$$\frac{A_{ном}}{A} = 1 + \frac{\mu}{\lambda}.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. В соответствии с вариантом, заданным преподавателем (табл.2.1.), рассчитайте следующие характеристики одноканальной и многоканальной СМО:

- абсолютная пропускная способность;
- относительная пропускная способность;
- вероятность отказа;
- долю времени простоя каналов;
- среднее число занятых каналов.

Табл. 2.1. Варианты лабораторного задания

№ варианта	1	2	3	4
Количество каналов	1; 2	1; 3	1; 2	1; 3
λ	2	5	8	5
μ	2.5	6	10	8
Шаг дискретизации	0.001	0.001	0.001	0.001
№ варианта	5	6	7	8
Количество каналов	1; 2	1; 3	1; 2	1; 3
λ	3	6	8	10
μ	5	6.5	12	11
Шаг дискретизации	0.001	0.001	0.001	0.001

2. Рассчитайте необходимое время наблюдения $T_{набл} = \frac{N}{\lambda}$, где объем выборки N вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - P_{отк}}{P_{отк} N}},$$

$\varepsilon \leq 0.03$ – относительная точность оценки вероятности отказа $P_{отк}$ многоканальной СМО.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

1. Запустите GUI приложение для исследования СМО. Для этого:

- запустите Matlab;
 - в окне Current Folder задайте путь к папке, в которой лежит GUI приложение;
 - в окне Command Window наберите команду – laboratornaya_СМО и нажмите “Enter”.
2. Введите заданные в домашнем задании параметры. Наблюдайте графики поступивших заявок (точки розового цвета), заявок, получивших отказ (точки красного цвета) и графики занятости каналов.
 3. Измерьте число поступивших заявок $N_{пост}$, число обслуженных заявок $N_{обс}$, времена одновременной работы каналов Tr_i .
 4. По результатам измерений найдите оценки следующих характеристик СМО:

- вероятность отказа

$$\tilde{P}_{отк} = \frac{N_{пост} - N_{обс}}{N_{пост}} ; \quad (2.10)$$

- относительную пропускную способность

$$\tilde{Q} = \frac{N_{обс}}{N_{пост}} ; \quad (2.11)$$

- абсолютную пропускную способность

$$\tilde{A} = \frac{N_{обс}}{T_{набл}} ; \quad (2.12)$$

- долю времени простоя СМО

$$\tilde{p}_0 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i}{T_{набл}} ; \quad (2.13)$$

- среднее число занятых каналов

$$\tilde{k} = \sum_{i=1}^n i \frac{Tr_i}{T_{набл}} . \quad (2.14)$$

4. Сравните полученные оценки характеристик с рассчитанными в домашнем задании.
5. Постройте и сравните следующие зависимости:
 - относительной пропускной способности;
 - средней длительности интервала простоя каналов;
 - вероятности того, что все каналы заняты;
 от интенсивности нагрузки ρ для одноканальной и многоканальной СМО, варьируя количество обслуженных заявок в диапазоне $0.2\mu, \dots, \mu$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные характеристики потока заявок?
2. Что характеризует параметр λ в экспоненциальном законе распределения?
3. Что характеризует параметр μ в экспоненциальном законе распределения?
4. Что такое простейший поток?
5. Приведите основные характеристики пуассоновского потока.
6. Каким образом расставляются заявки в каналах?
7. Какому закону подчиняется время обслуживания заявки в канале?
8. Какими бывают виды СМО по способу обслуживания заявок?
9. Назовите основные характеристики структуры СМО.
10. Какие основные характеристики СМО с отказом?
11. Чем отличается номинальная пропускная способность от фактической?
12. Докажите корректность оценок характеристик СМО (2.10)...(2.14), вычисленных по экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

- 2.1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология : учебное пособие / Е.С. Вентцель. — 5-е изд., стер. — М. : КНОРУС, 2013. — 192 с.
- 2.2. Бабушкина О.А., Головков А.А., Пивоваров И.Ю. Имитационное моделирование ТКС: конспект лекций. — СПб: СПбГЭТУ(ЛЭТИ), 2008, — 75 с.
- 2.3. Ложковский А.Г. Теория массового обслуживания в телекоммуникациях: учебник — Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2012. — 112 с.
- 2.4. Крылов В.В. Самохвалова С.С. Теория телетрафика и ее приложения — СПб: БХВ-Петербург, 2005 — 288 с.