

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА

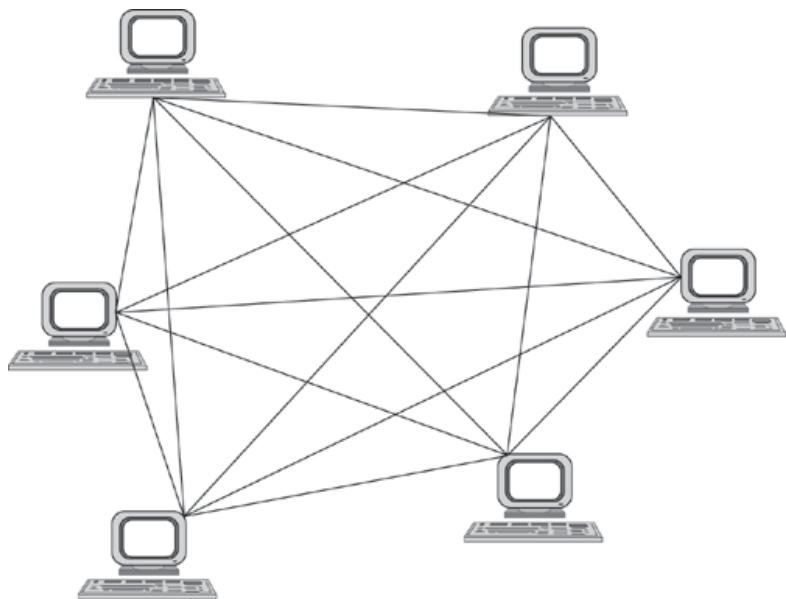


*«Все приходит к тем, кто ждет,
Но часто слишком поздно».*

Мэри М. Карри

СЕТЬ, СВЯЗЫВАЮЩАЯ N АБОНЕНТОВ

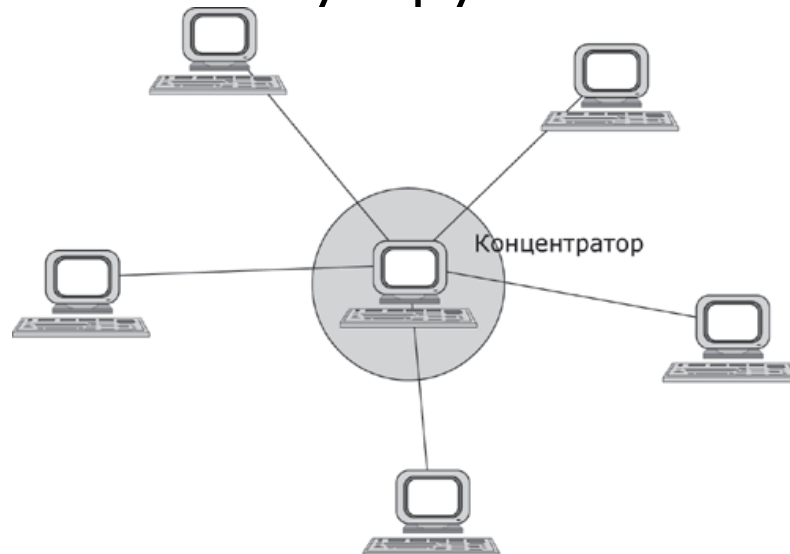
Некоммутируемая сеть



$$C_N^2 = N! / 2!(N-2)!$$

-число каналов

Коммутируемая сеть



Задержка в предоставлении соединения

Вероятность отказа в соединении

Компромисс между удовлетворением потребности в коммуникации абонентов и технико-экономической эффективностью

ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА – РАЗДЕЛ ТЕОРИИ СМО

Телетрафик (tele (греч) – далеко и английского traffic (англ)– движение) - движение сообщений (информационных потоков)

Теория телетрафика(ТТ) — научная дисциплина о закономерностях и количественном описании процессов движения сообщений в сетях и системах

Предмет ТТ — построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы распределения информации (СРИ) с показателями эффективности СРИ.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СРИ

Появление в системе каждого сообщения будем отождествлять с заявкой (заявками) на его передачу или обработку.

Канал - часть системы, участвующая в процессе передачи или обработки сообщения так, что одновременно с ним никакое другое сообщение не может обрабатываться этой частью.

СРИ характеризуется:

- характером потока заявок;
- числом каналов;
- производительностью каналов;
- правилами работы каналов.

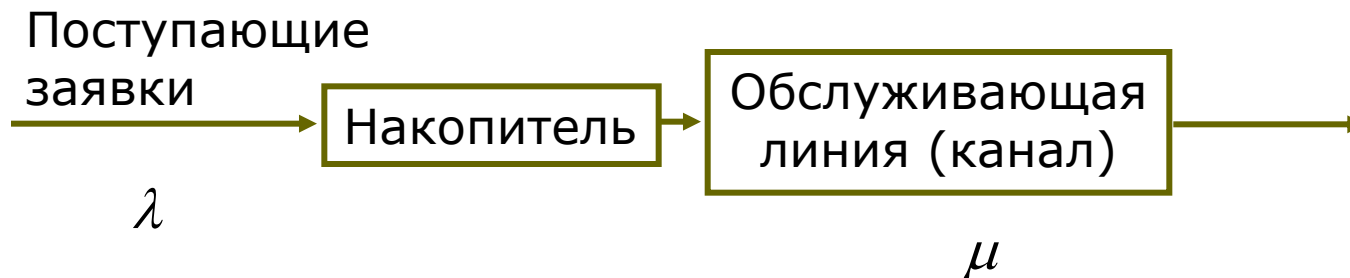
ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СРИ

- среднее число заявок, обслуживаемых СРИ в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания;
- вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение;
- среднее время обслуживания заявки;
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Три основных элемента СМО:

- входящий поток вызовов (заявок на обслуживание),
- схема системы распределения информации,
- дисциплина обслуживания потока вызовов.



ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТТ

Задачи анализа - определение характеристик качества обслуживания в зависимости от характеристик и параметров входящего потока вызовов, структуры системы обслуживания и дисциплины обслуживания

Задачи синтеза - построение такой оптимальной коммутационной схемы, где при известных параметрах потока сообщений, дисциплине и качестве обслуживания минимизируется, например, ее стоимость

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТТ

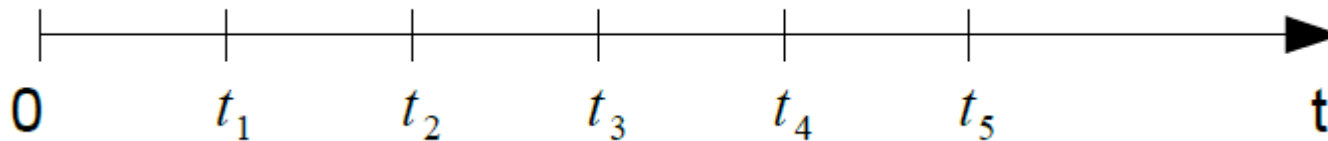
Задача оптимизации - управление потоками вызовов или структурой сети для достижения наилучших показателей качества функционирования

- 1) при заданных потоках, качестве и дисциплине обслуживания - стоимость или объем оборудования системы распределения информации минимальны
- 2) при заданных потоках, дисциплине обслуживания и стоимости - качественные показатели функционирования системы распределения информации оптимальны

ПОТОК СОБЫТИЙ (МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКА ЗАЯВОК В СРИ)

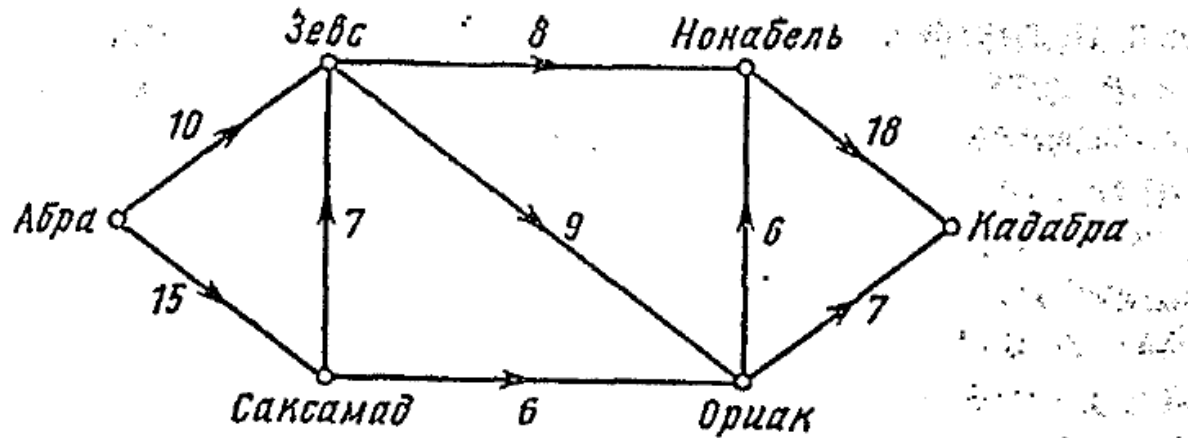
Поток событий - последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени

Регулярный ПС - события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени



Пропускная способность системы должна быть больше, чем интенсивность потока заявок.

РЕГУЛЯРНЫЙ ПОТОК СОБЫТИЯ И СЕТЬ

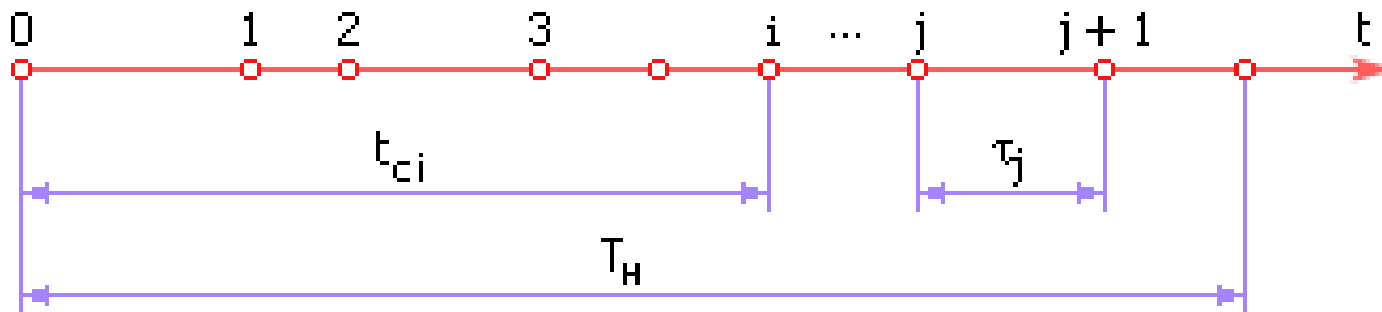


Задача о максимальном потоке

1. Чему равно максимальное число заявок, которое может быть передано в единицу времени по сети из Абры в Кадабру, и каким образом должен следовать этот поток?
2. Как построить сеть минимальной стоимости при известной стоимости каждого канала, обеспечивающей обслуживание канала с заданным качеством?

ПОТОК СОБЫТИЙ (МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКА ЗАЯВОК В СРИ)

Случайный поток событий — это последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные промежутки времени



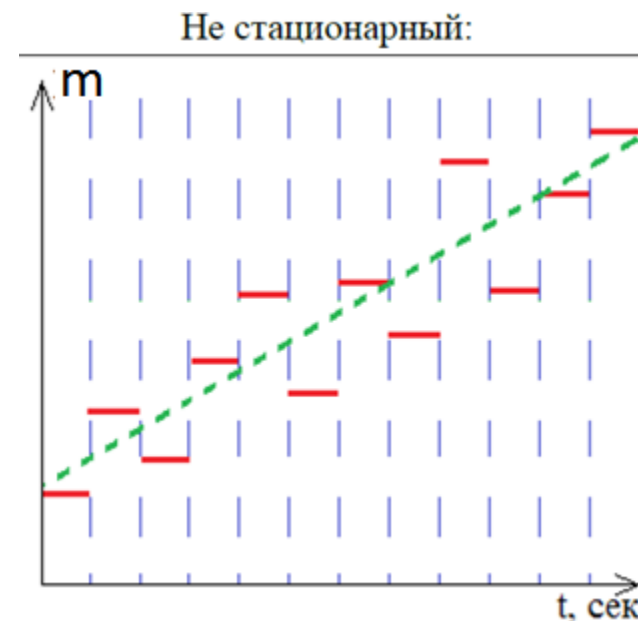
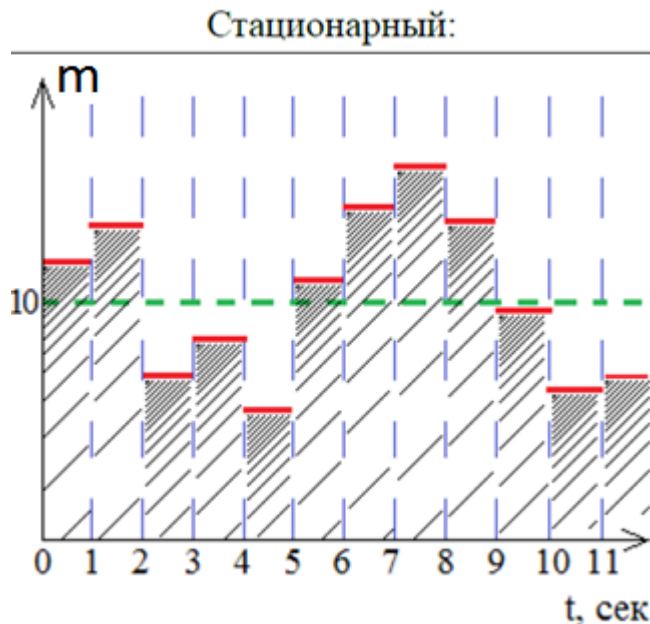
τ_j — интервал между событиями (случайная величина);
 t_{ci} — момент совершения i -го события (отсчитывается от $t = 0$);
 T_H — время наблюдения.

ПОТОК СОБЫТИЙ



1 . Стационарный ПС - вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси Ot расположен этот участок.

Пусть $\tau = 1$ с. ; m — число вызовов, поступающих в секунду. Среднее число вызовов (зелёная линия)

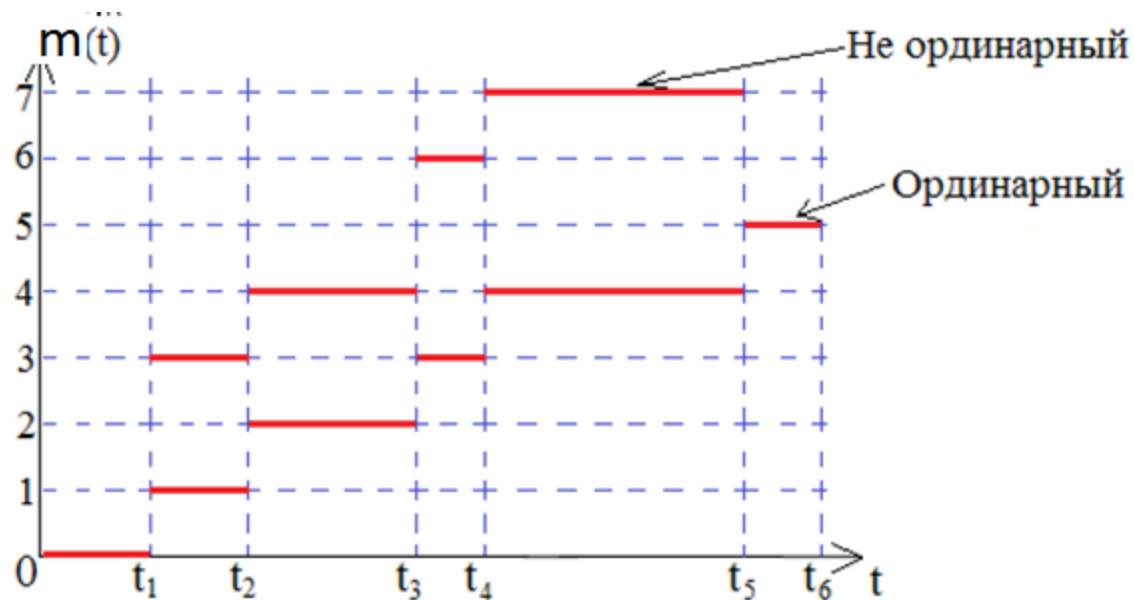


ПОТОК СОБЫТИЙ



2. Обыкновенный ПС - если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{m \geq 2}(t_0, t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = 0$$



ПОТОК СОБЫТИЙ



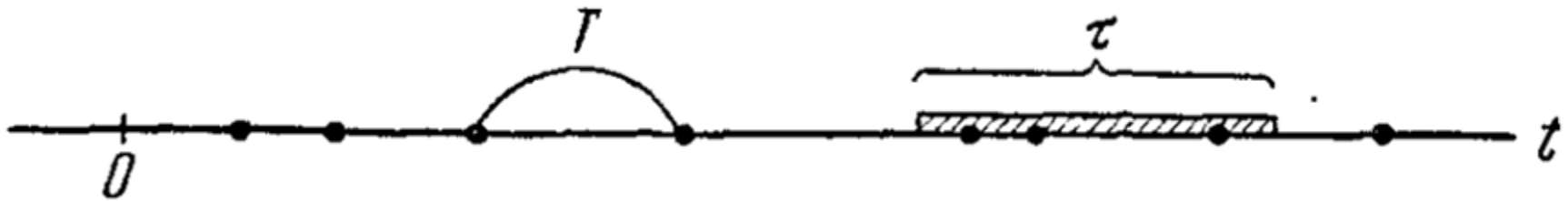
3. ПС без последствия - для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток на выходе канала СМО – это поток без последствия?

Регулярный поток – это поток без последствия?

ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

Простейший (или стационарный пуассоновский) ПС – поток, обладающий всеми тремя свойствами (т. е. стационарен, ординарен и не имеет последствий)



λ — интенсивность потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени)

$\lambda = \text{const}$ (условие стационарности)

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий, равна

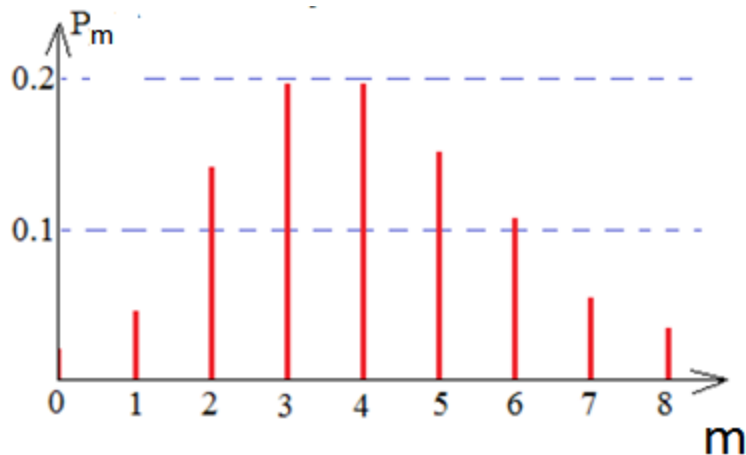
$P_m(\tau) = (\lambda \tau)^m \exp(-\lambda \tau) / m!$ -распределение Пуассона 15

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

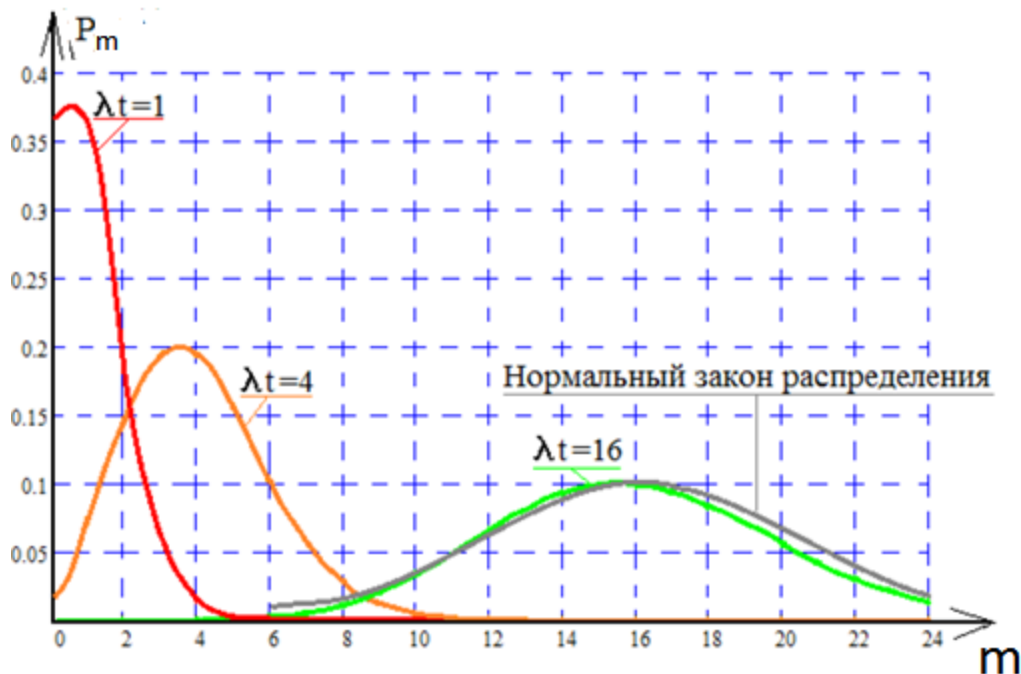
Распределение дискретной случайной величины

$$P_m(\tau) = (\lambda \tau)^m \exp(-\lambda \tau) / m!$$

при $\lambda \cdot \tau = 4$



Огибающие распределения
Пуассона при различных $\lambda \cdot \tau$



ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШЕГО ПОТОКА



1. Вероятность того, что участок τ окажется пустым

$$P_0(\tau) = \exp(-\lambda \tau)$$

2. Среднее число событий, попадающих на участок τ

$$M[m] = \sum_{m=0}^{\infty} m P_m(\tau) = \lambda \tau$$

3. Дисперсия

$$\sigma_m^2 = D[m] = \sum_{m=0}^{\infty} (m - M[m])^2 P_m(\tau) = \lambda \tau$$

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda \tau}$$

4. Измерение λ : $\tilde{\lambda} = n / \tau$

ПРИМЕР

$$P_m(\tau) = (\lambda \tau)^m \exp(-\lambda \tau) / m!$$

На станцию метро в данное время суток направляется простейший поток пассажиров интенсивностью $\lambda = 120$ чел/час.

Найти характеристики потока пассажиров. Интервал времени – 1 минута

Решение. Интервал - $\tau = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60} \text{ час}$

Среднее число пассажиров за 1 минуту: $a = \lambda \tau = \frac{120}{60} = 2$.

Вероятность того, что за одну минуту на станцию не войдет ни один пассажир:

$$P_0(\tau) = \exp(-\lambda \tau)$$

$$P_0 = e^{-2} = 0,135.$$

ПРИМЕР

$$P_m(\tau) = (\lambda \tau)^m \exp(-\lambda \tau) / m!$$

Вероятность того, что за одну минуту на станцию войдет
- один пассажир:

$$P_1 = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0,270,$$

- четыре пассажира:

$$P_4 = \frac{2^4}{4!} e^{-2} = 0,090.$$

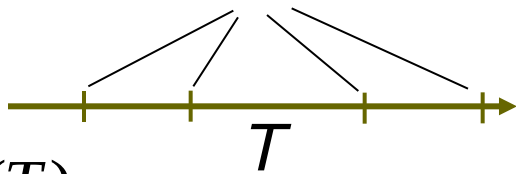
- хотя бы один пассажир:

$$1 - P_0 = 1 - 0.135 = 0.865$$

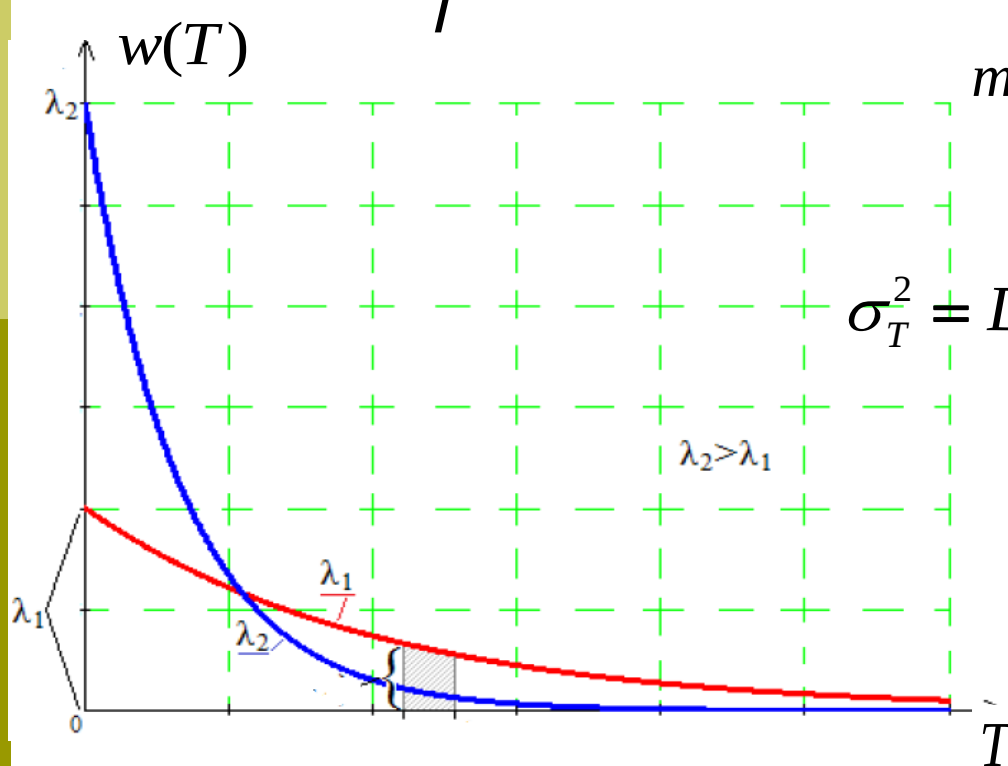
ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШЕГО ПОТОКА

5. Длительность промежутков времени между соседними событиями подчиняется показательному распределению

События



$$w(T) = \lambda \exp(-\lambda T) \quad T \geq 0$$



$$m_T = M[T] = \int_0^{\infty} T w(T) dT = 1 / \lambda$$

$$\sigma_T^2 = D[T] = \int_0^{\infty} \left(T - \frac{1}{\lambda}\right)^2 w(T) dT = 1 / \lambda^2$$

$$\sigma_T = 1 / \lambda$$

$$m_T = \sigma_T = 1 / \lambda$$

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШЕГО ПОТОКА

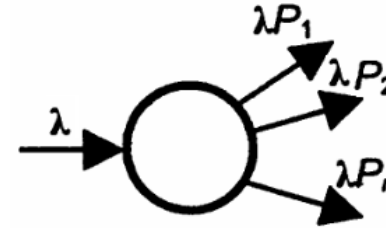
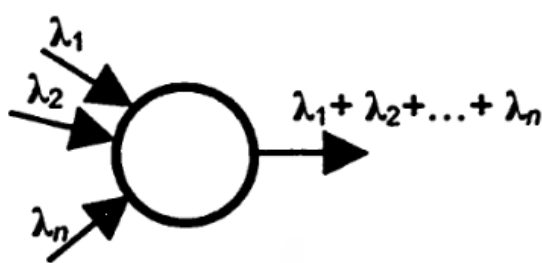
Коэффициент вариации $v_T = \sigma_T / m_T$.

6. Для простейшего потока событий коэффициент вариации интервалов между событиями равен единице

Примечание. Для регулярного потока событий коэффициент вариации равен нулю ($\sigma_T = 0$)

Простейший поток — это «наименее регулярный» из встречающихся на практике потоков

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА



7. При объединении n независимых простейших потоков с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ образуется общий простейший поток с параметром $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$:

$$P_m(\tau) = ((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\tau)^m \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\tau) / m!$$

8. При разъединении простейшего потока с параметром λ на n направлений, так что каждый вызов исходного потока с вероятностью P_j поступает на j -е направление, поток j -го направления также будет простейшим с параметром λP_j

ВРЕМЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Режим работы системы зависит еще от характеристик производительности самой системы:

- от числа каналов
- от быстродействия каждого канала

Время обслуживания одной заявки $T_{обс}$

- неслучайная величина
- случайная величина

Показательный закон распределения величины $T_{обс}$

$$w(T_{обс}) = \mu \exp(-\mu T_{обс})$$

Среднее время обслуживания одной заявки

$$M[T_{обс}] = \int_0^{\infty} T_{обс} w(T_{обс}) dT_{обс} = 1 / \mu = t_{обс} \qquad \mu = 1 / t_{обс}$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Системы с отказами.

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

Основные характеристики

Абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Относительная пропускная способность — отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок.

Другие характеристики

- среднее число занятых каналов,
- среднее относительное время простоя системы в целом и отдельного канала

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

2. Системы с ожиданием (с очередью).

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов.

Как только освободится канал, принимается к обслуживанию одна из заявок, стоящих в очереди.

Основные характеристики

Системы с очередью делятся на системы с неограниченным ожиданием (а) и системы с ограниченным ожиданием (b)

а) Система с неограниченным ожиданием: каждая заявка, поступившая в момент, когда нет свободных каналов, становится в очередь и ждет освобождения канала, который примет ее к обслуживанию.

СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ

а) Система с неограниченным ожиданием
Относительная и абсолютная пропускные способности не имеют смысла, т.к. все заявки будут обслужены

Характеристики ожидания:

- среднее число заявок в очереди,
- среднее число заявок в системе (в очереди и под обслуживанием),
- среднее время ожидания заявки в очереди,
- среднее время пребывания заявки в системе (в очереди и под обслуживанием)

СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ

б) Система с ограниченным ожиданием

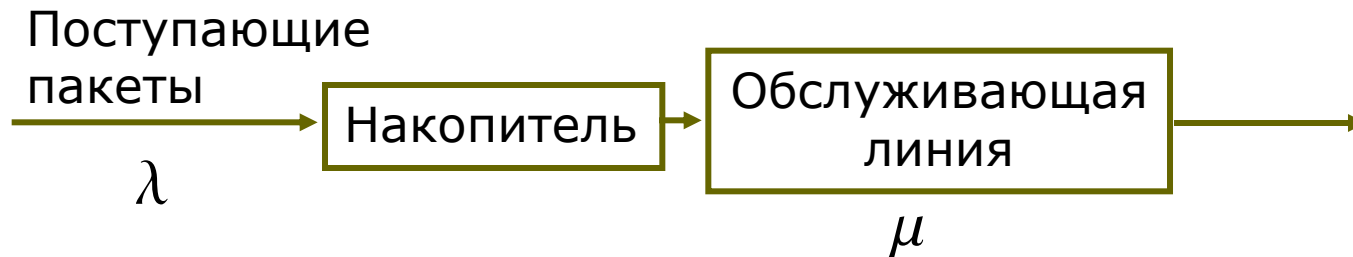
Обе группы характеристик:

- абсолютная и относительная пропускная способности
- характеристики ожидания.

Ограничения на пребывание заявки в очереди:

- длина очереди (числа заявок, одновременно находящихся в очереди)
- время пребывания заявки в очереди (после какого-то срока пребывания в очереди заявка покидает очередь и уходит)
- приоритет обслуживания заявок в очереди;
- общее время пребывания заявки в СМО и т. д.

ПРИМЕРЫ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СМО



Передача данных

λ - средняя скорость поступления пакетов в единицу времени (пакет/с)

μ - средняя скорость обслуживания пакетов в единицу времени (пакет/с)

обслуживающая линия - канал, по которому передаются данные со скоростью C

Телефонная сеть

λ - среднее число вызовов в единицу времени (вызов/с)

$1/\mu$ - средняя продолжительность разговора (с/вызов)

обслуживающая линия – телефонный канал

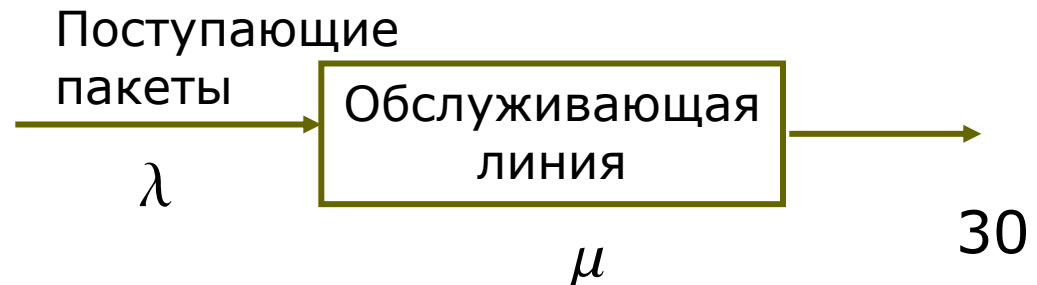
ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Система состоит из одного канала ($n = 1$). На нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ [среднее число поступивших заявок в ед.вр].

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему.

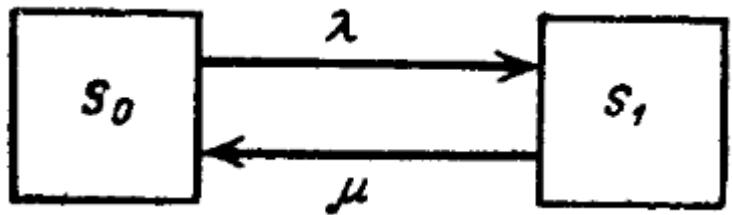
Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром $\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}$ [среднее число обслуженных заявок в ед.вр].

Найти характеристики СМО



ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Граф состояний системы



Канал
свободен

Канал
занят

$p_0(t)$ — вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_0

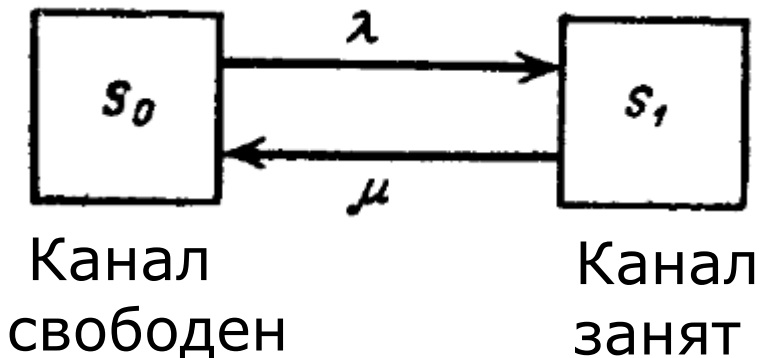
$p_1(t)$ — вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_1

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda) p_0(t) \Delta t + \mu p_1(t) \Delta t \\ p_1(t + \Delta t) = (1 - \mu) p_1(t) \Delta t + \lambda p_0(t) \Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t) \end{cases}$$

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Граф состояний системы



Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{aligned} \right\}$$

$$p_0(t) + p_1(t) = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{dp_0}{dt} = -(\mu + \lambda) p_0 + \mu$$

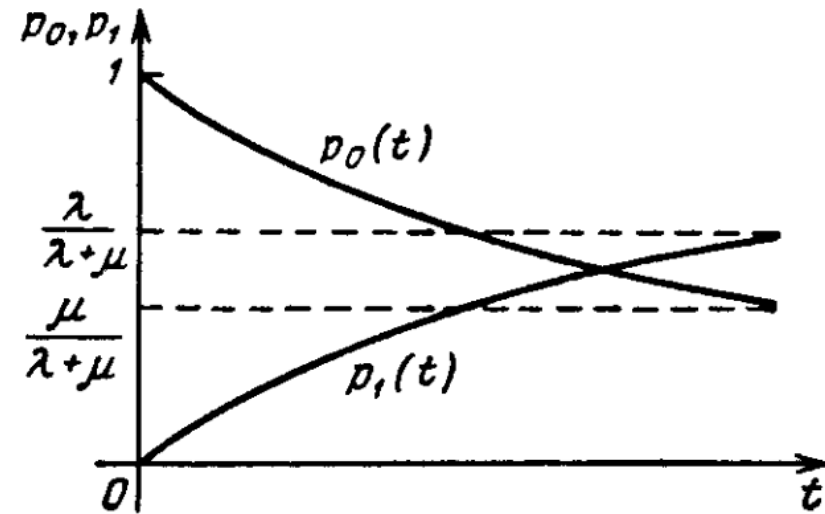
$$p_0(0) = 1, p_1(0) = 0$$

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ (переходной режим)

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = 0$$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t)$$



Финальные вероятности состояний:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = p_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = p_1$$

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ (установившийся режим)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{aligned} \right\}$$

$$p_0(t) = p_0 = \text{const}$$

$$p_1(t) = p_1 = \text{const}$$

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -\mu p_1 + \lambda p_0$$

$$1 = p_0 + p_1$$

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

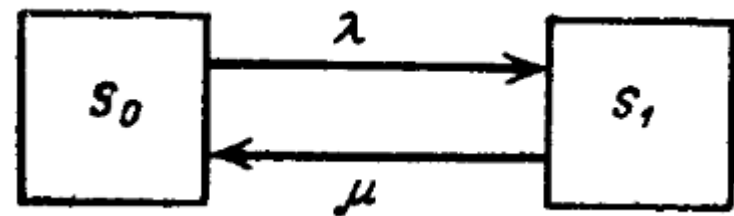
- вероятность того, что в момент времени t канал свободен.

p_0 - вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени t будет обслужена

p_0 - среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших

$p_0 = q$ - относительная пропускная способность

Граф состояний системы



Канал
свободен

Канал
занят

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ

Вероятность того, что канал свободен: $p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$

Вероятность того, что канал занят: $p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Вероятность отказа (средняя доля необслуженных заявок среди поданных): $P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Относительная пропускная способность (средняя доля обслуженных заявок среди поданных):

$$q = p_0 = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени):

$$A = \lambda p_0 = \lambda q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

ПРИМЕР. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗОМ

Система состоит из одной телефонной линии. Вызов, пришедший в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока вызовов (заявок) $\lambda = 0,8$ (вызовов в мин.).

Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обс}} = 1.5$ мин.
Все потоки событий — простейшие.

Определить:

- 1) вероятности отказа - $P_{\text{отк}}$.
- 2) относительную пропускную способность - q ;
- 3) абсолютную пропускную способность - A ;
- 4) сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной:
если каждый разговор длился в точности 1,5 мин,
и разговоры следуют один за другим без перерыва.

ПРИМЕР. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗОМ

1. Интенсивность потока обслуживания μ (среднее число разговоров в минуту):

$$\mu = 1 / t_{обс} = 0.667$$

2. Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя канала).

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,667}{0,8 + 0,667} \approx 0,455.$$

45.5% в течение часа канал будет не занят
- > время простоя равно $t_{пр} = 27.3$ мин.

3. Доля вызовов, получивших отказ:

$$P_{отк} = p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0.455 = 0.545$$

54.5% из числа поступивших вызовов не принимаются к обслуживанию.

4. Относительная пропускная способность.

(средняя доля обслуженных заявок среди поданных):

$$q = p_0 = 0.455$$

5. Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, которое может обслужить система в течение минуты - фактическая производительность):

$$A = q \lambda = 0.455 \cdot 0.8 = 0.364 \text{ вызова в минуту.}$$

Номинальная производительность СМО:

$$A_{ном} = 1 / 1.5 = 0.667 \text{ вызова в минуту}$$

Фактическая производительность СМО составляет 55% от номинальной производительности.

6. Число заявок, получивших отказ в течение мин:

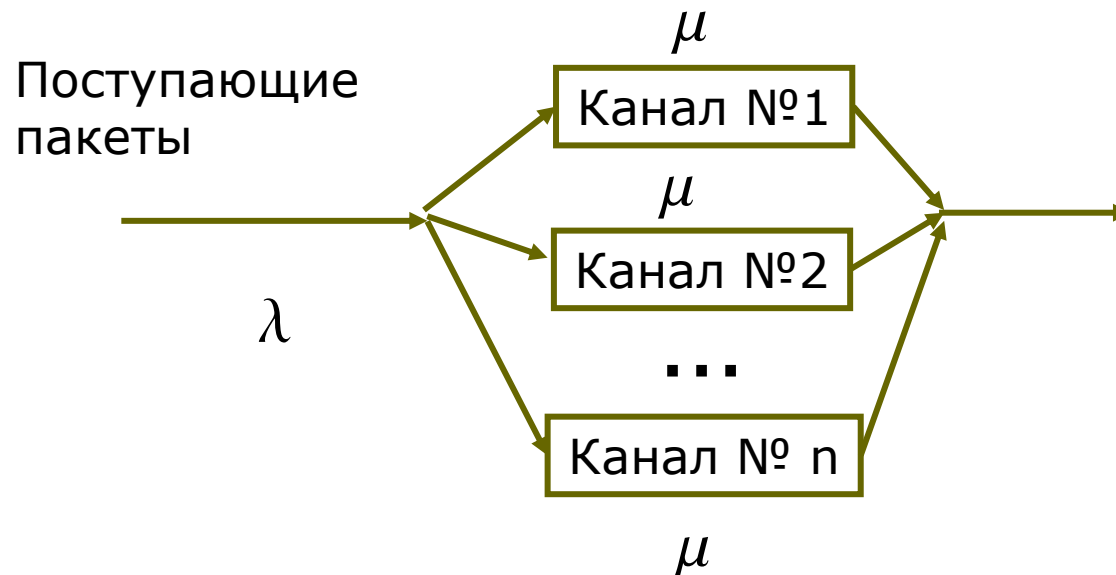
$$\lambda P_{отк} = 0.8 \cdot 0.545 = 0.436 \text{ вызова в мин.}$$

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Имеется n линий связи, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ .

Заявка обслуживается с интенсивностью μ .

Найти финальные вероятности, а также характеристики эффективности.



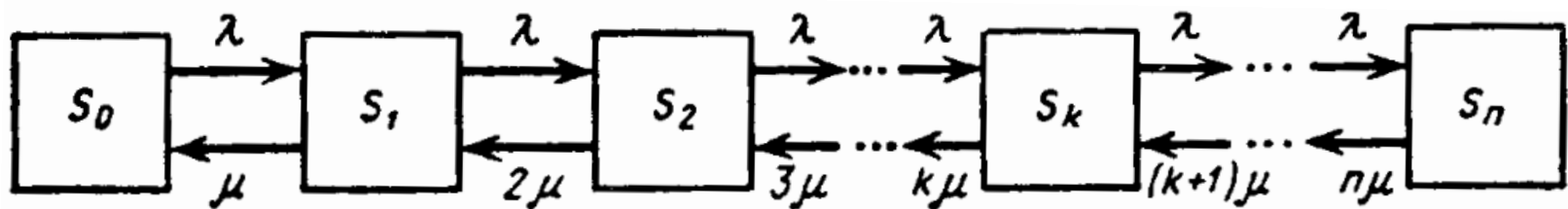
МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

S_0 — все каналы свободны;

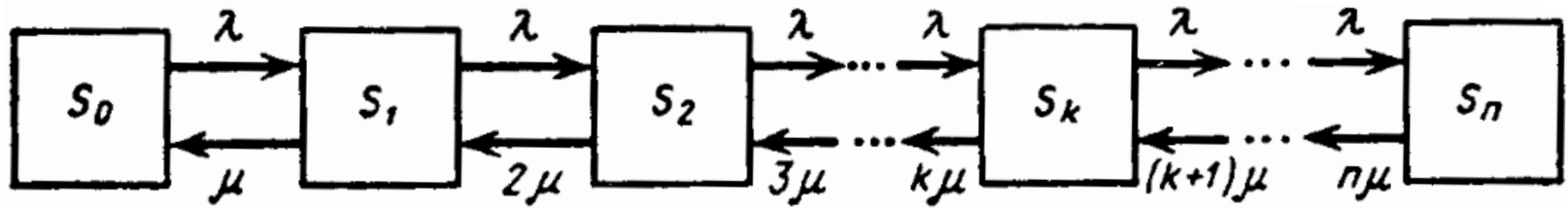
S_1 — занят ровно один канал, остальные свободны;

.....

S_n — заняты все n каналов.



МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ



$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$S_0: \lambda p_0 = \mu p_1 \quad \longrightarrow \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$S_1: \lambda p_0 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda p_1 = 2\mu p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$S_2: \lambda p_1 + 3\mu p_3 = \lambda p_2 + 2\mu p_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda p_2 = 3\mu p_3 \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$$

$$S_n: \lambda p_{n-1} = n \mu p_n \quad \longrightarrow \quad p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$$

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ. ФОРМУЛЫ ЭРЛАНГА

$\lambda/\mu = \rho$ - приведенная интенсивность потока заявок
(среднее число заявок, приходящих в СМО за
среднее время обслуживания одной заявки)

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0 = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$$

$$= \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}$$

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ. ФОРМУЛЫ ЭРЛАНГА

Все n каналов заняты- $\rightarrow$ пришедшая заявка получает отказ

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

Относительная пропускная способность (доля обслуженных заявок)

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - p_n$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени)

$$A = \lambda q = \lambda (1 - p_n)$$

Среднее число занятых каналов (в данном случае оно совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе)

$$\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \dots + n \cdot p_n$$

$$= \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda (1 - p_n)}{\mu} = \rho (1 - p_n)$$

ПРИМЕР

Дано. Система состоит из трех телефонных линий.
Вызов, пришедший в момент, когда все три линии заняты, получает отказ.

Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,8$ (вызовов в минуту).

Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обс}} = 1.5$ мин.

Все потоки событий — простейшие.

Определить характеристики СМО

ПРИМЕР

$$\mu = 1/t_{\text{обс}} = 0.667$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1,2$$

Занято 0 каналов (система простаивает):

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^3 \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} \approx 0,312$$

Занят 1 канал:

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} p_0 \approx 0,374$$

Занято 2 канала

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 \approx 0,224$$

Все 3 канала заняты

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 \approx 0,09$$

ПРИМЕР

$$\mu = 0.667 \quad \lambda = 0.8$$

$$p_0 \approx 0,312 \quad p_1 \approx 0,374$$

Трехканальная система

$$P_{отк} = p_3 = 0.09$$

$$q = 1 - P_{отк} = 0.91$$

$$A = \lambda q = 0,728$$

$$M[k] = \sum_{i=0}^n i p_i = \frac{A}{\mu} = 1,09$$

$$n = 3$$

$$p_2 \approx 0,224 \quad p_3 \approx 0,09$$

Одноканальная система

$$P_{отк} = 0.545$$

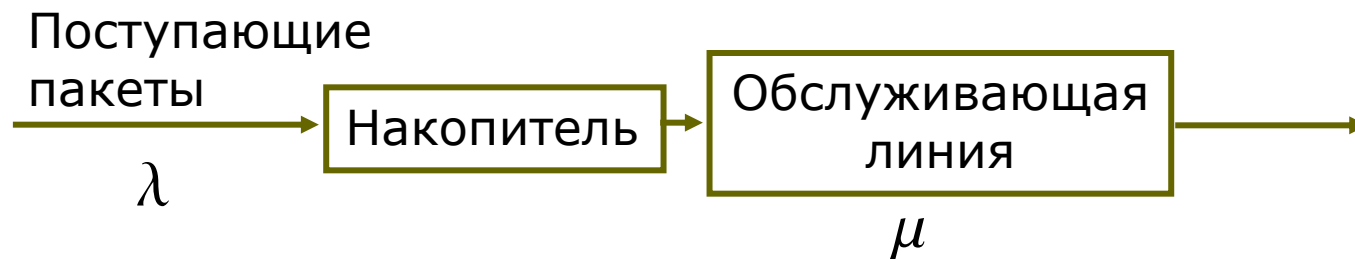
$$q = 1 - P_{отк} = 0.455$$

$$A = \lambda q = 0,364$$

СИСТЕМА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ (С ОЧЕРЕДЬЮ)

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов.

Как только освободится канал, принимается к обслуживанию одна из заявок, стоящих в очереди.



СИСТЕМА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ (С ОЧЕРЕДЬЮ)

Основные характеристики

Система с неограниченным ожиданием: каждая заявка, поступившая в момент, когда нет свободных каналов, становится в очередь и ждет освобождения канала, который примет ее к обслуживанию.

Относительная и абсолютная пропускные способности не имеют смысла, т.к. все заявки будут обслужены

Характеристики ожидания:

- среднее число заявок в очереди,
- среднее число заявок в системе (в очереди и под обслуживанием),
- среднее время ожидания заявки в очереди,
- среднее время пребывания заявки в системе (в очереди и под обслуживанием)

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Дано: одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания); интенсивности потоков заявок и обслуживания - λ и μ .

Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО:

$L_{сист}$ — среднее число заявок в системе;

$W_{сист}$ — среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{оч}$ — среднее число заявок в очереди;

$W_{оч}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;

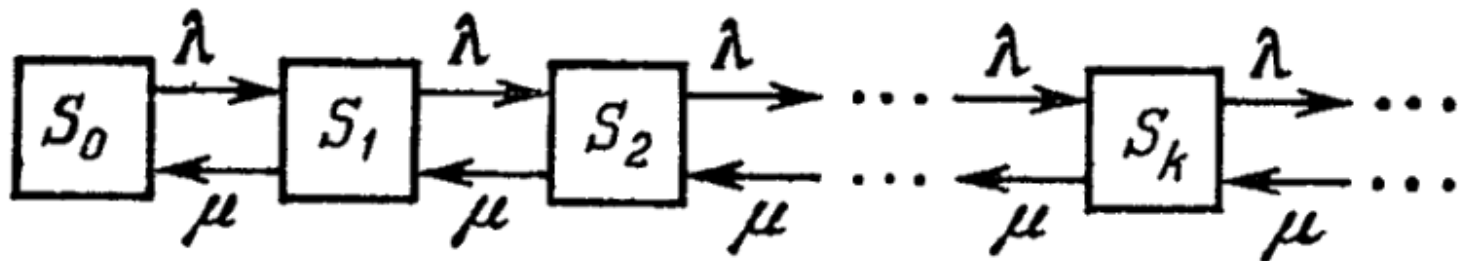
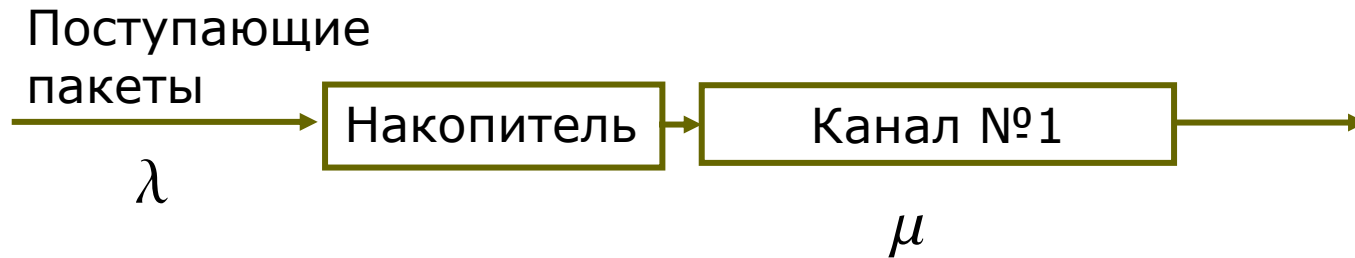
$P_{зан}$ — вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала)

$$P_{отк} = 0$$

$$q = 1 - P_{отк} = 1$$

$$A = \lambda q = \lambda$$

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ



- S_0 — канал свободен,
- S_1 — канал занят (обслуживает заявку), очереди нет,
- S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди,
- S_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди,

Существуют ли в этом случае финальные вероятности?

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} ; p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0$$

$\rho = \lambda / \mu < 1$ - финальные вероятности существуют (при $t \rightarrow \infty$)

Канал свободен:

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right]^{-1} = 1 - \rho$$

$\rho = \lambda / \mu \geq 1$ - очередь при $t \rightarrow \infty$ растет неограниченно

Канал занят (обслуживает одну заявку), очереди нет:

$$p_1 = \rho p_0 = \rho(1 - \rho)$$

Канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди и одна обслуживается (всего k заявок в системе):

$$p_k = \rho^k p_0 = \rho^k (1 - \rho)$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = M[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \frac{\rho}{(1 - \rho)}$$

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{об} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = \rho$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\begin{aligned} L_{оч} &= L_{сист} - L_{об} = \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)\lambda}$$

ПРИМЕР

Система состоит из одной телефонной линии. Вызов, пришедший в момент, когда линия занята, ставится в неограниченную очередь.

Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,8$ (вызовов в мин.).

Средняя продолжительность разговора $t_{обс} = 1.5$ мин.

Все потоки событий — простейшие. Определить характеристики СМО

$$\mu = 1/t_{обс} = 0.667$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1,2$$

$\rho > 1 \rightarrow$ очередь при $t \rightarrow \infty$ растет неограниченно

$\lambda = 0,8$ (вызовов в мин.); $t_{обс} = 0.9$ мин.

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}} = 1.11$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.72$$

- финальные
вероятности существуют

ПРИМЕР

$$p_k = \rho^k (1 - \rho)$$

Канал свободен (доля времени простоя канала):

$$p_0 = 1 - \rho = 0.28$$

Канал занят (обслуживает вызов); очереди нет :

$$p_1 = 0.216$$

Канал занят; в очереди 1 вызов:

$$p_2 = 0.145$$

Канал занят; в очереди 2 вызова:

$$p_3 = 0.105$$

Канал занят; в очереди 3 вызова

$$p_4 = 0.075$$

ПРИМЕР

$$\rho = 0.72$$

Среднее число вызовов в системе:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = 2.57$$

Среднее время пребывания вызова в системе

$$W_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = 3.21 \text{ [мин]}$$

Среднее число вызовов в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 1.85$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = 2.31 \text{ [мин]}$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СМО. ПРИМЕР

Дано. Пакетный мультиплексор обеспечивает связь с сетью передачи данных для нескольких пользовательских терминалов через выходную линию передачи, работающую со скоростью 64 Кбит/с.

Каждый терминал производит в среднем 3 пакета в секунду.

Средняя длина пакета - 400 байт.

Сколько терминалов можно соединить с этим мультиплексором?

ОПТИМИЗАЦИЯ СМО. ПРИМЕР

1. Задержка передачи пакета - длина пакета, поделенная на скорость передачи в битах:
$$8 \cdot 400 / 64000 = 0.05 \text{ с} = 50 \text{ мс}$$
2. Скорость обслуживания пакета обратно пропорциональна задержке его передачи:
$$\mu = 1 / 0.05 = 20 \text{ пак./с}$$
3. Скорость поступления.
Каждый источник генерирует 3 пакета в секунду:
 - один источник: $\lambda = \lambda_1 = 3 \text{ [пакета/с]}$;
 - n источников : $\lambda = n \cdot \lambda_1 = n \cdot 3 \text{ [пакета/с]}$.

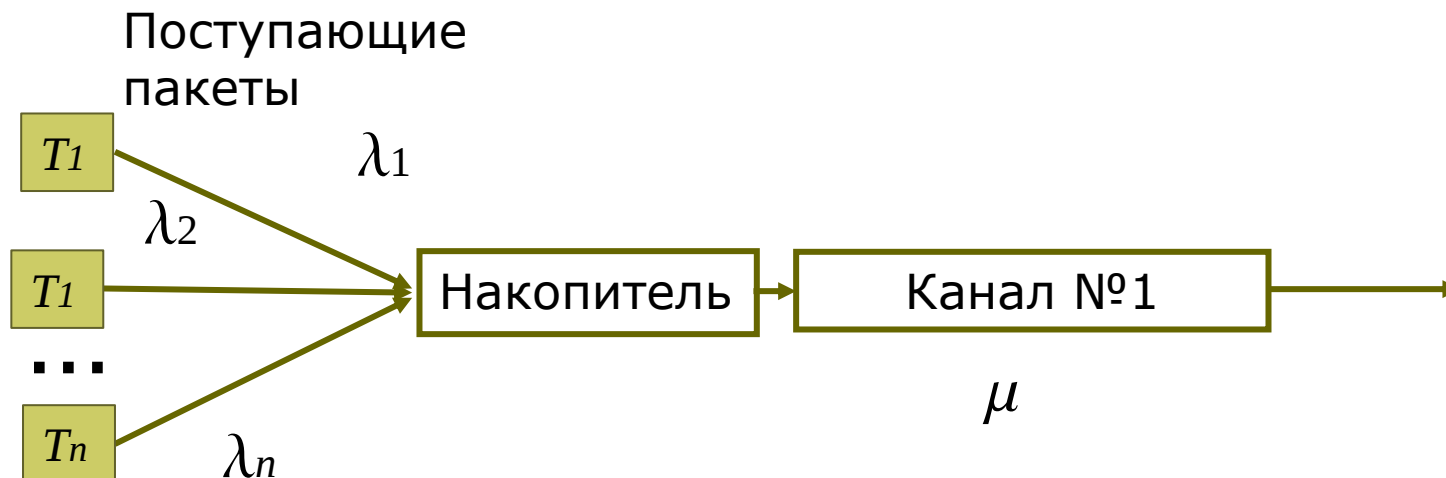
ОПТИМИЗАЦИЯ СМО. ПРИМЕР

4. Количество каналов.

В мультиплексоре имеется единственная выходящая линия - 1 канал.

5. Размер буфера.

Будем предполагать, что буферное пространство в мультиплексоре достаточно, чтобы рассматривать его как бесконечное.



ОПТИМИЗАЦИЯ СМО. ПРИМЕР

Вариант 1. Сколько можно присоединить терминалов, чтобы мультиплексор не был перенасыщен?

$$\rho = \lambda / \mu < 1; \quad \lambda = n \lambda_1 < \mu;$$

$$n < [\mu / \lambda_1] = [20/3] = 6 \text{ терминалов}$$

Среднее время ожидания (среднее время задержки пакетов в системе: мультиплексор-линия):

$$W_{сист} = 1/(\mu - \lambda) = 1/(\mu - n\lambda_1) = 1/(20 - 18) = 0.5 \text{ с}$$

Вариант 2. Средняя задержка пакета $W_{сист} < 250 \text{ мс}$.
Сколько можно присоединить терминалов?

$$1/(\mu - n\lambda_1) < 0.25 \quad n < [(\mu - 4) / \lambda_1] = [16/3] = 5 \text{ терминалов}$$

$$W_{сист} = 1/(20 - 5 \cdot 3) = 0.2 \text{ с}$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СМО. ПРИМЕР

Вариант 3. Чему равен размер буфера?

Среднее число пакетов в очереди: $L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Число терминалов

$n=6$	➔	$\rho = n\lambda_1/\mu = 18/20 = 0.9$	➔	$L_{оч} = 8.1 \approx 9$ пакетов
$n=5$	➔	$\rho = n\lambda_1/\mu = 15/20 = 0.75$	➔	$L_{оч} = 2.25 \approx 3$ пакета
$n=4$	➔	$\rho = n\lambda_1/\mu = 12/20 = 0.6$	➔	$L_{оч} = 0.9 \approx 1$ пакет