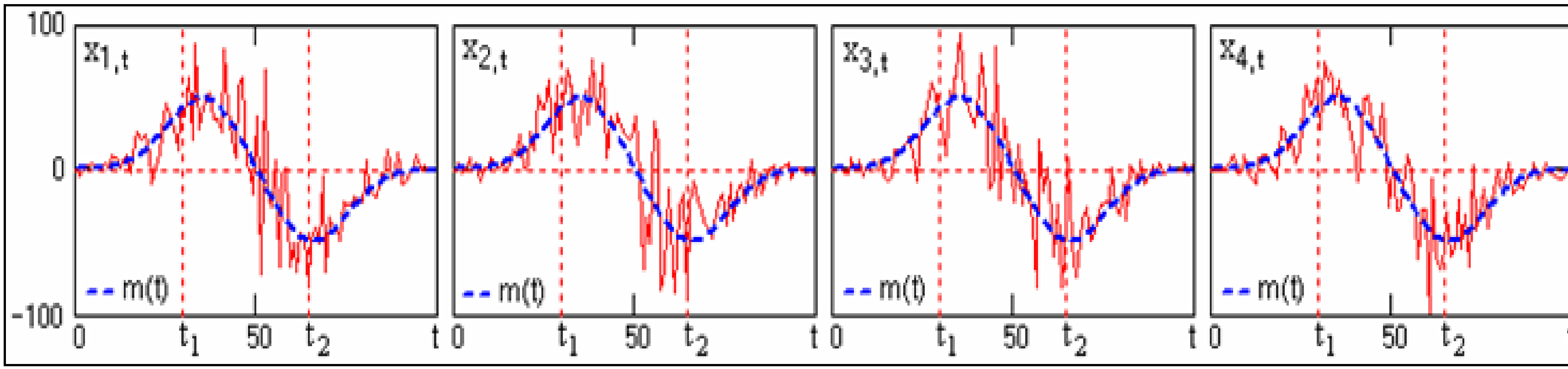
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайный процесс *X(t)* – функция неслучайного аргумента *t* (времени), сечение которой является случайной величиной

Реализация СП *X(t)* - неслучайная функция *x(t)*, в которую превращается СП в результате опыта



Реализации случайного процесса.

Ансамбль – совокупность всех возможных реализаций СП

Случайный процесс – совокупность всех возможных реализаций вместе с соответствующим распределением вероятностей появления этих реализаций

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Одномерная функция распределения (ФР) СП:

$$F_1(x_1;t_1) = P(X(t_1) \le x_1)$$

Одномерная плотность распределения вероятностей (ПРВ) СП:

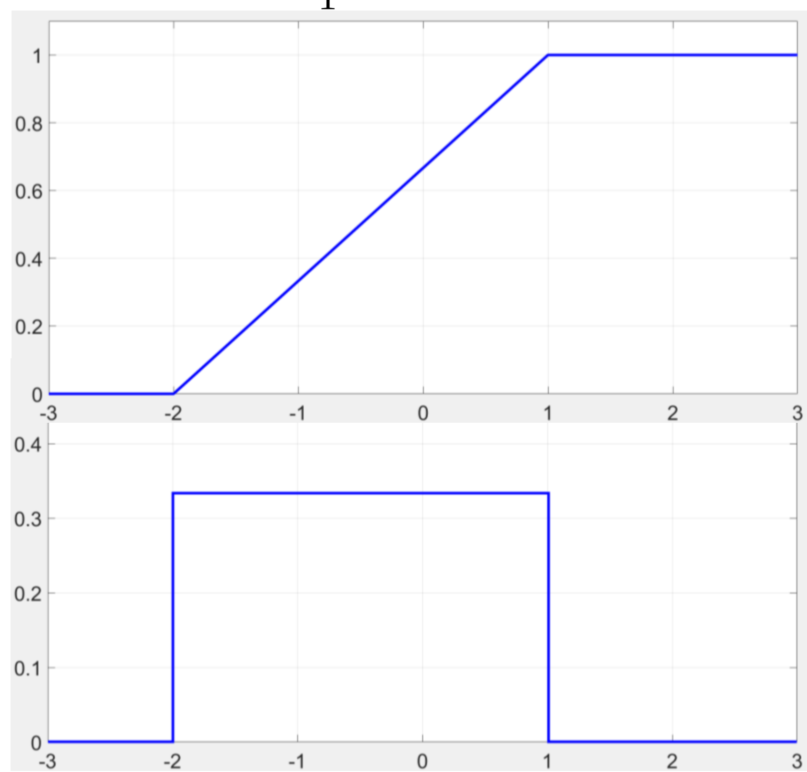
$$w_1(x_1;\ t_1) = \frac{\partial F_1(x_1;\ t_1)}{\partial x_1}$$

Одномерная функция **равномерного** распределения СП:

$$F_1(x_1;t_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < a, \\ \dfrac{x_1 - a}{b - a}, & a \le x_1 < b \\ 1, & x_1 \ge b. \end{cases}$$

Одномерная плотность **равномерного** распределения вероятностей СП:

$$w_1(x_1;t_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & a \le x_1 \le b \\ 0, & x_1 < a,\ x_1 > b \end{cases}$$



ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

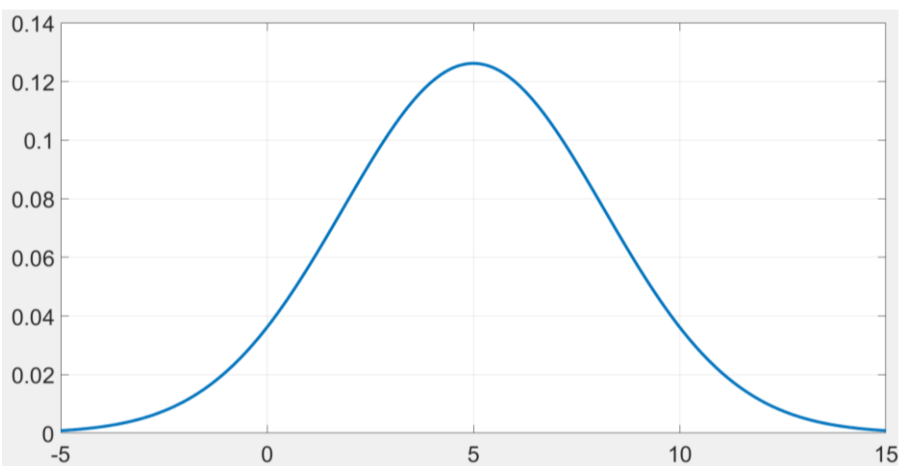
Одномерная функция **нормального** распределения (ФР) СП:

$$F_1(x_1;t_1) = \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2)\,dt$$ - функция Лапласа

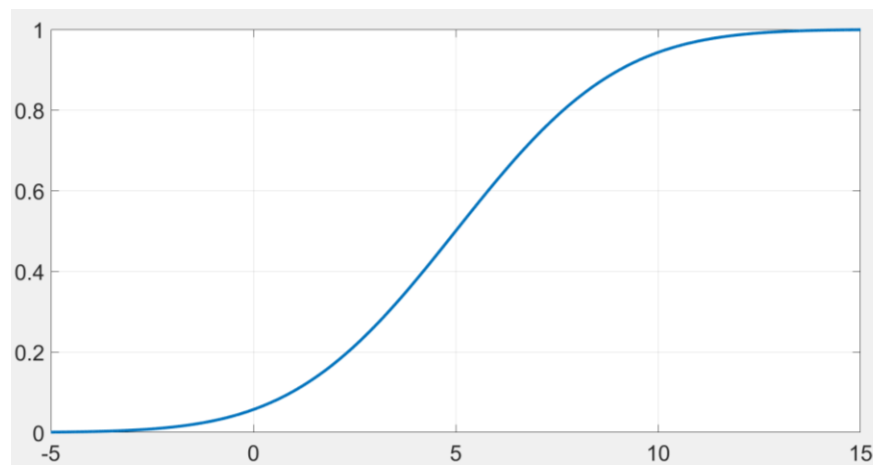
Одномерная плотность **нормального** распределения вероятностей (ПРВ) СП:

$$w_1(x_1;t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} exp\left(-\frac{(x_1 - m_x)^2}{2D_x}\right)$$

ПРВ



ФР



ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

ПРВ произвольного порядка :

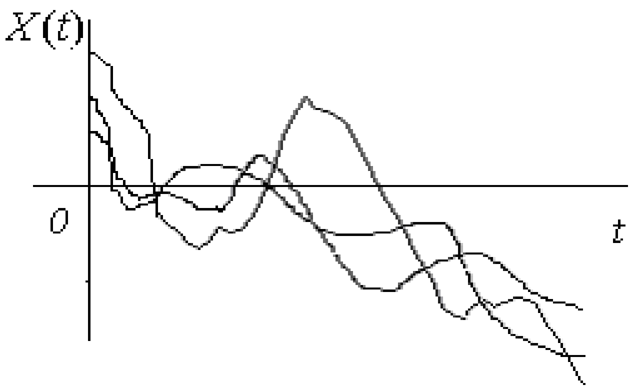
$$w_n(x_1, ..., x_n;\ t_1, ..., t_n)$$

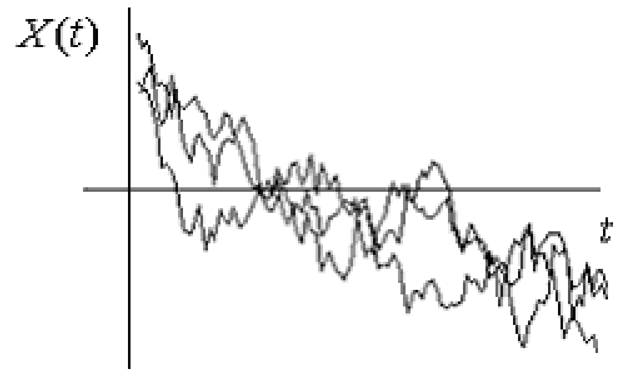
Эквивалентные СП - процессы, у которых все конечномерные ПРВ совпадают

Дискретный белый шум - случайная последовательность с независимыми сечениями :

$$w_n(x_1, ..., x_n;\ t_1, ..., t_n) = \prod_{i=1}^{n} w_1(x_i; t_i)$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА





Двумерная ФР: $$F_2(x_1,\ x_2;\ t_1, t_2) = P(X(t_1) \le x_1;\ X(t_2) \le x_2)$$

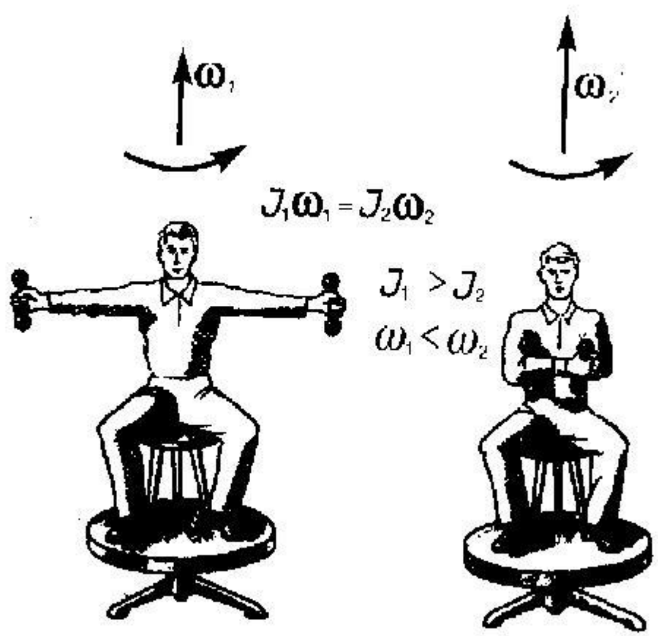
Двумерная ПРВ: $$w_2(x_1,\ x_2;\ t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1,\ x_2;\ t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

СП называется **марковским**, если для любых *n* моментов времени ПРВ последнего значения $X(t_n)$ при фиксированных значениях $X(t_1)$ … $X(t_{n-1})$ зависит только от предыдущего значения $X(t_{n-1})$:

$$w_1(x_n, t_n | x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}) = w_1(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \qquad n \ge 2,$$

$$w_1(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{w_2(x_{i-1}, x_i; t_{i-1}, t_i)}{w_1(x_{i-1}, t_{i-1})}.$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СП



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Начальные моменты:

$$m_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_1(x)dx$$

$$m_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

Центральные моменты:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_1$$

$$\mu_k = M\left[\left(X - m_1\right)^k\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k w_1(x)dx$$

$$\mu_k = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x - m_1)_i^k p_i$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Смешанные начальные моменты:

$$m_{1,1} = M\left[X_1 \cdot X_2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \ x_2 \ w_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Смешанные центральные моменты:

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_2 \right]$$

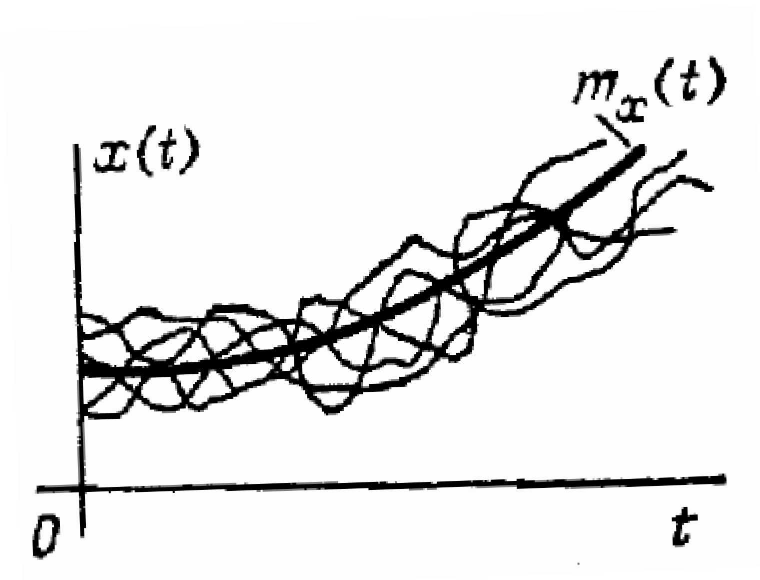
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{1,x_1}) \ (x_2 - m_{1,x_2}) \ w_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СП

Математическое ожидание (МО) СП - неслучайная функция $m_x(t)$, которая при любом значении аргумента равна МО соответствующего сечения СП

$$m_{1,x}(t) = m_x(t) = M[X(t)]$$

МО – “средняя” функция, вокруг которой происходит разброс реализаций СП



СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

$\tilde{m}_1 = 40$

$\tilde{m}_1 = 120$

$\tilde{m}_1 = 200$

СВОЙСТВА МО СП

$$m_{1,x}(t) = m_x(t) = M[X(t)]$$

1. $M[\phi(t)] = \phi(t)$
2. $M[\phi(t) + X(t)] = \phi(t) + m_x(t)$
3. $M[\phi(t)X(t)] = \phi(t)m_x(t)$
4. $M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t)$
5. **Для независимых СП:** $M[X(t)Y(t)] = m_x(t) \cdot m_y(t)$

Начальная моментная функция второго порядка :

$$m_{2,x}(t) = M[(X(t))^2]$$

ПРИМЕР

Найти МО СП *X(t)=Ucos(5t)*, где *U* – случайная величина, равномерно распределенная на интервале [1,5]

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[U\cos(5t)] = M[U]M[\cos(5t)] = 3\cos(5t)$$

ЦЕНТРИРОВАННЫЙ СП. ДИСПЕРСИЯ СП

Центрированный СП: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ 1. $M[\overset{\circ}{X}(t)] = 0$

2. Прибавление к СП неслучайной функции не изменяет ЦСП:

$$Y(t) = X(t) + \phi(t) \quad \Rightarrow \overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t)$$

3. $Y(t) = \phi(t) X(t) \quad \Rightarrow \overset{\circ}{Y}(t) = \phi(t)\overset{\circ}{X}(t)$

Дисперсия СП:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2]$$

$$D_x(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] = \quad m_{2,x}(t) - m_x^2(t)$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

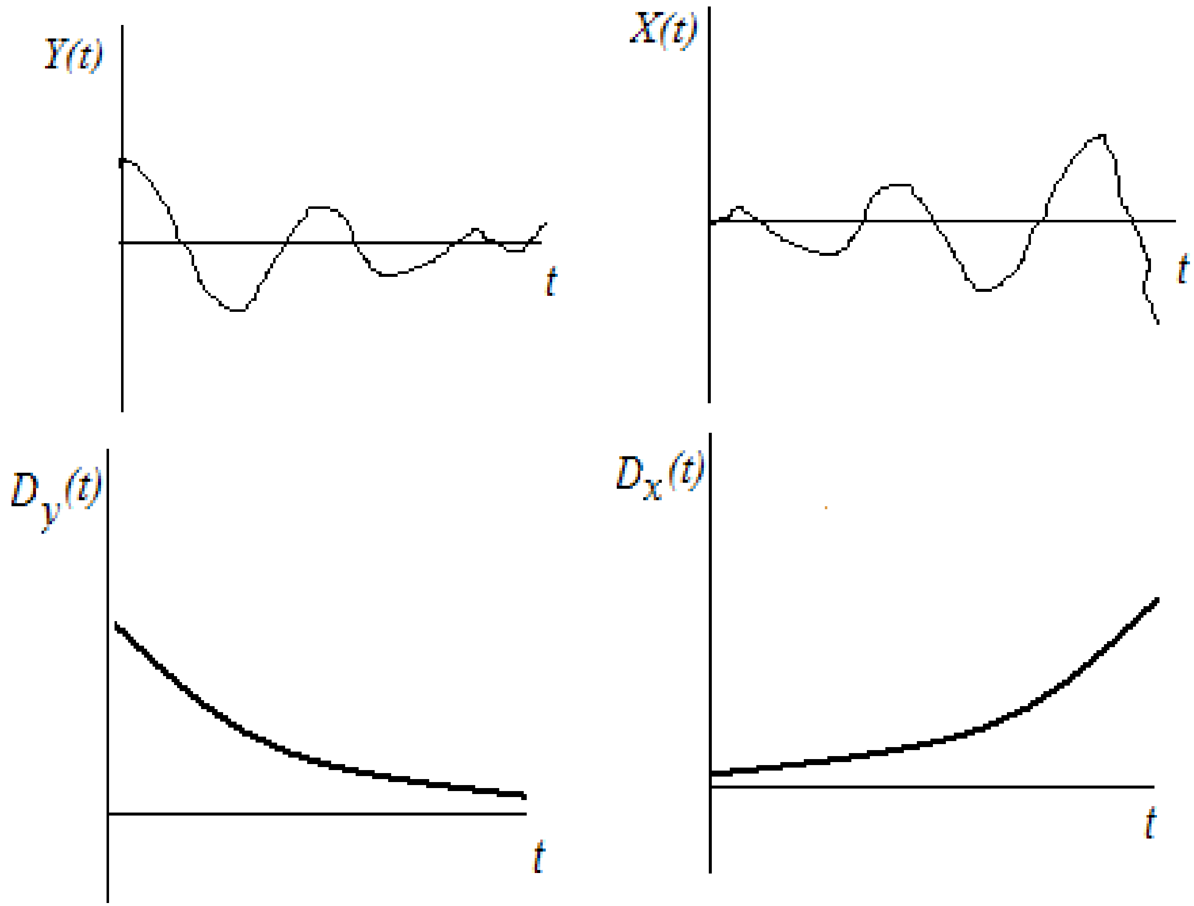
$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x}$$

$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 19$

$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 38$

$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 57$

ДИСПЕРСИЯ СП



СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

1. $D[\phi(t)] = 0$

2. $D[\phi(t)X(t)] = \phi^2(t)D[X(t)] = \phi^2(t)D_x(t)$

3. $D[\phi(t) + X(t)] = D_x(t)$

Для НСП

4. $D[X(t) \pm Y(t)] = D[X(t)] + D[Y(t)] = D_x(t) + D_y(t)$

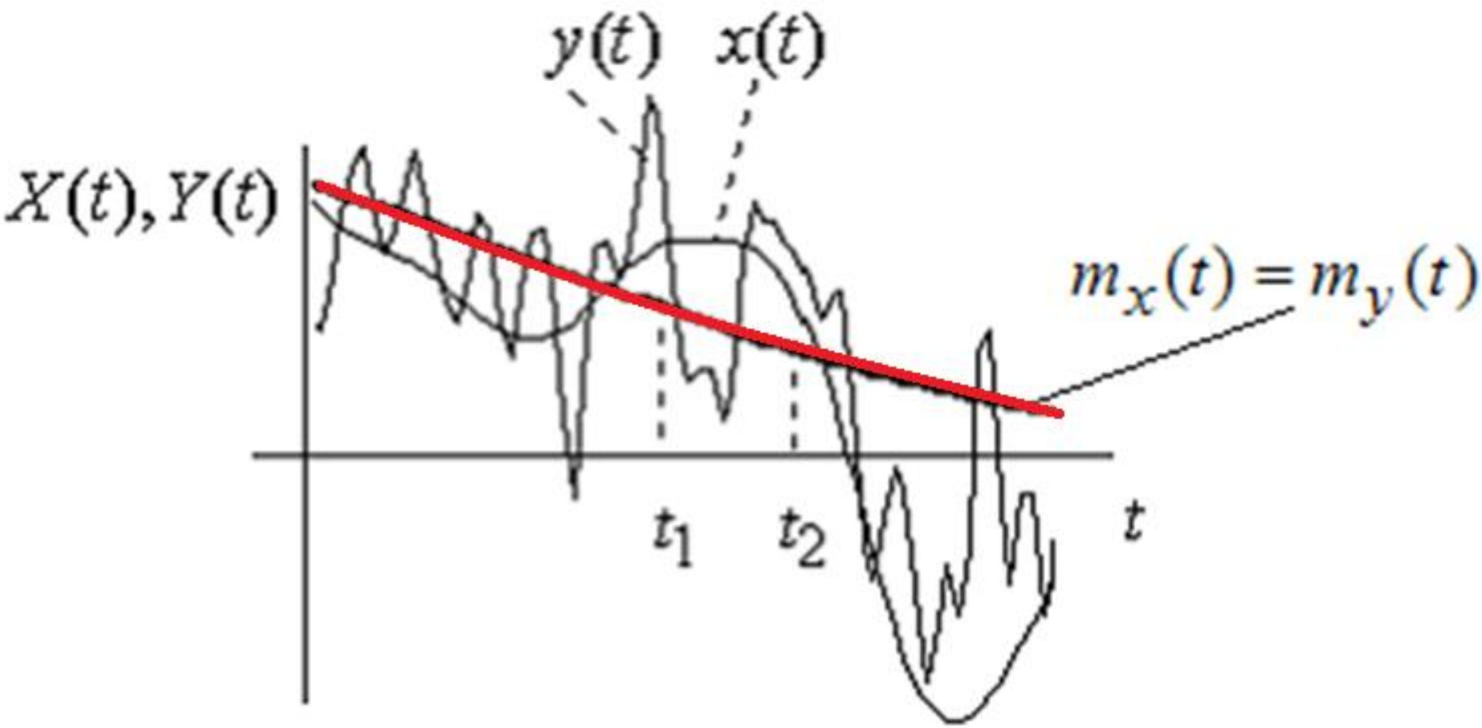
5. $D[X(t) \cdot Y(t)] = m_{2,x}(t)m_{2,y}(t) - m_x^2(t)m_y^2(t)$

Пример

Найти дисперсию случайного процесса *X(t)=Ucos(5t)+t*^{2}, где *U* – случайная величина, равномерно распределенная на интервале [1,5]

$$D[X(t)] = D[U\cos(5t) + t^2] = D[U](\cos(5t))^2 = \frac{4}{3}(\cos(5t))^2$$

КОВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



КОВАРИАЦИОННАЯ (АВТОКОВАРИАЦИОННАЯ) ФУНКЦИЯ СП

Ковариационная (автоковариационная) функция СП:

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2)]$$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$$

Корреляционная (автокорреляционная) функция СП:

$$B_x(t_1,t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$$

Связь между корреляционной и ковариационной функциями:

$$K_x(t_1,t_2) = B_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. $K_x(t,t) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t)$

$$B_x(t,t) = M[(X(t))^2] = m_{2x}(t)$$

2. $K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2,t_1)$

3. $Y(t) = X(t) + \phi(t) \Rightarrow K_y(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2)$

4. $Y(t) = \phi(t)X(t) \Rightarrow K_y(t_1,t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_x(t_1,t_2)$

5. $|K_x(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}$

Пример

Найти КФ СП *X(t)=Ucos(5t)+t²*, где *U* – СВ, равномерно распределенная на интервале [1,5] .

$$\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{U}\cos(5t)$$

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{U}\cos(5t_1)\overset{\circ}{U}\cos(5t_2)] = M[\overset{\circ}{U}{}^2]\cdot\cos(5t_1)\cos(5t_2) = \frac{4}{3}\cos(5t_1)\cos(5t_2).$$

НОРМИРОВАННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

$$R_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}}=\frac{B_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$$

1. $R_x(t,t)=\dfrac{K_x(t,t)}{D_x(t)}=1$

2. $R_x(t_1,t_2)=R_x(t_2,t_1)$

3. $Y(t)=X(t)+\phi(t) \Rightarrow R_y(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2)$

4. $Y(t)=\phi(t)X(t) \Rightarrow R_y(t_1,t_2)=sign(\phi(t_1)\phi(t_2))R_x(t_1,t_2)$

5. $|R_x(t_1,t_2)|\le 1$

Пример

Найти нормированную КФ СП *X(t)=Ucos(5t)+t*^{2}, где *U* – СВ, равномерно распределенная на интервале [1,5]

$$R_x(t_1,t_2)=sign(\cos(5t_1)\cos(5t_2))$$

ВЗАИМНАЯ КФ

$$K_{xy}(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(Y(t_2) - m_y(t_2))]$$

$$K_{yx}(t_1,t_2) = M[(Y(t_1) - m_y(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))]$$

Взаимная корреляционная функция:

$$B_{xy}(t_1,t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)]$$

Связь между взаимной корреляционной и взаимной ковариационной функциями:

$$K_{xy}(t_1,t_2) = B_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)$$

Нормированная ВКФ:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \frac{B_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} = \frac{K_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}}$$

СВОЙСТВА ВЗАИМНОЙ КФ

1. $K_{xy}(t_1,t_2)=K_{yx}(t_2,t_1)$

2. $\left.\begin{aligned} S(t)&=X(t)+\phi(t)\\ Z(t)&=Y(t)+\varphi(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow K_{sz}(t_1,t_2)=K_{xy}(t_1,t_2)$

3. $\left.\begin{aligned} S(t)&=X(t)\phi(t)\\ Z(t)&=Y(t)\varphi(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow K_{sz}(t_1,t_2)=\phi(t_1)\varphi(t_2)K_{xy}(t_1,t_2)$

4. $|K_{xy}(t_1,t_2)|\le\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}$ $\qquad |R_{xy}(t_1,t_2)|\le 1$

НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ СП

СП **некоррелированы**, если их ВКФ равна нулю:

$$K_{xy}(t_1,t_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} R_{xy}(t_1,t_2)=0 \\ B_{xy}(t_1,t_2)=m_x(t_1)m_y(t_2) \end{cases}$$

Статистически независимые СП $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Некоррелированные СП

ПРИМЕР

Определить моментные функции суммы двух случайных процессов, если заданы их МО, КФ и ВКФ

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

1. $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$

2. $\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t)$

3. $K_z(t_1,t_2) = M[(\overset{\circ}{X}(t_1) + \overset{\circ}{Y}(t_1))(\overset{\circ}{X}(t_2) + \overset{\circ}{Y}(t_2))] =$

$$M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] + M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] =$$

$$= K_x(t_1,t_2) + K_{xy}(t_2,t_1) + K_{xy}(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2)$$

4. $D_z(t) = D_x(t) + D_y(t) + 2K_{xy}(t,t)$

Для некоррелированных СП:

$$K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2) \qquad D_z(t) = D_x(t) + D_y(t)$$