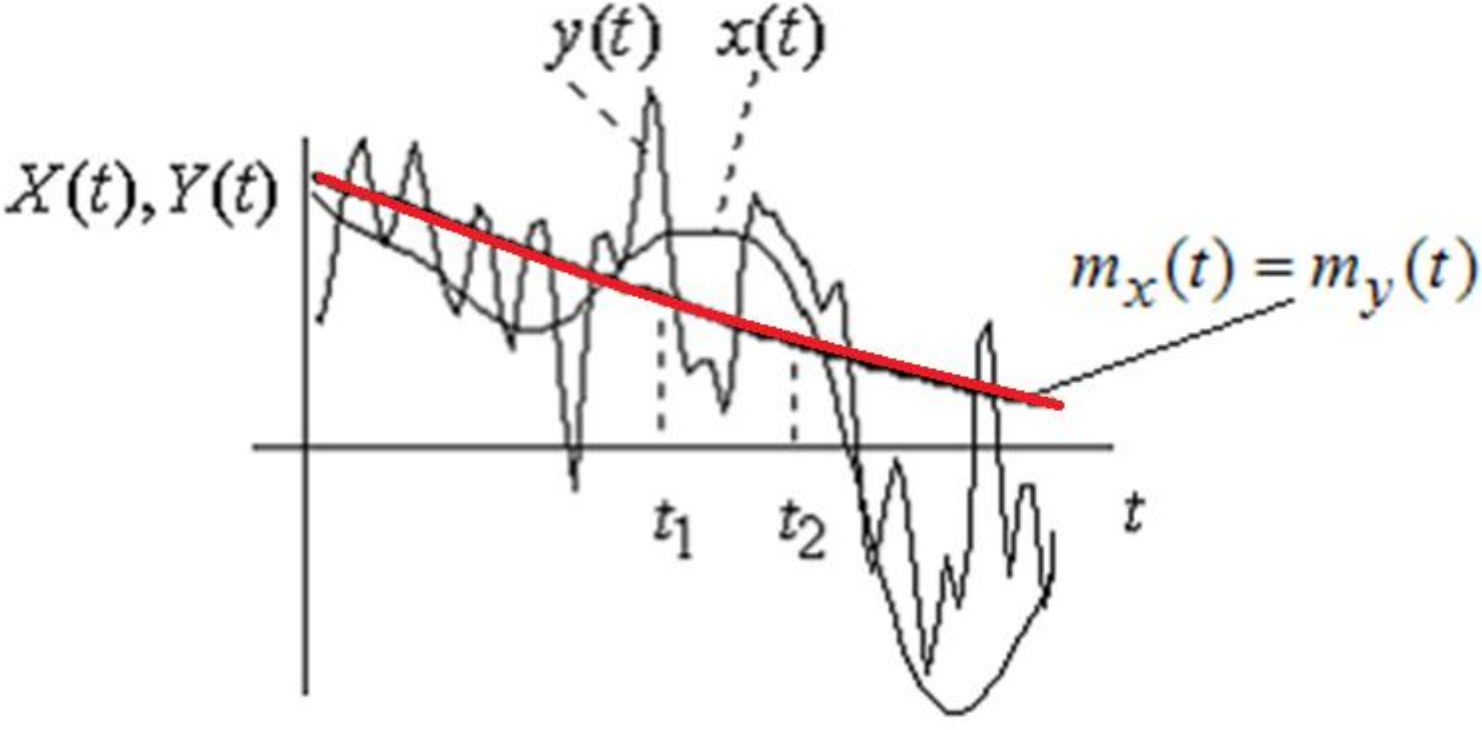
КОВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



КОВАРИАЦИОННАЯ (АВТОКОВАРИАЦИОННАЯ) ФУНКЦИЯ СП

Ковариационная (автоковариационная) функция СП:

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2)]$$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$$

Корреляционная (автокорреляционная) функция СП:

$$B_x(t_1,t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$$

Связь между корреляционной и ковариационной функциями:

$$K_x(t_1,t_2) = B_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. $K_x(t,t) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t)$

$$B_x(t,t) = M[(X(t))^2] \quad = m_{2x}(t)$$

2. $K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2,t_1)$

3. $Y(t) = X(t) + \phi(t) \;\Rightarrow K_y(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2)$

4. $Y(t) = \phi(t)X(t) \;\Rightarrow K_y(t_1,t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_x(t_1,t_2)$

5. $|K_x(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}$

Пример

Найти КФ СП *X(t)=Ucos(5t)+t*^{2}, где *U* – СВ, равномерно распределенная на интервале [1,5] .

$$\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{U}\cos(5t)$$

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{U}\cos(5t_1)\overset{\circ}{U}\cos(5t_2)] = M[\overset{\circ}{U}{}^2]\cdot\cos(5t_1)\cos(5t_2) = \frac{4}{3}\cos(5t_1)\cos(5t_2).$$

НОРМИРОВАННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

$$R_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}}=\frac{B_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$$

1. $R_x(t,t)=\dfrac{K_x(t,t)}{D_x(t)}=1$

2. $R_x(t_1,t_2)=R_x(t_2,t_1)$

3. $Y(t)=X(t)+\phi(t)\Rightarrow R_y(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2)$

4. $Y(t)=\phi(t)X(t)\Rightarrow R_y(t_1,t_2)=sign(\phi(t_1)\phi(t_2))R_x(t_1,t_2)$

5. $|R_x(t_1,t_2)|\le 1$

Пример

Найти нормированную КФ СП *X(t)=Ucos(5t)+t*^{2}, где *U* – СВ, равномерно распределенная на интервале [1,5]

$$R_x(t_1,t_2)=sign(\cos(5t_1)\cos(5t_2))$$

ВЗАИМНАЯ КФ

$$K_{xy}(t_1,t_2)=M[(X(t_1)-m_x(t_1))(Y(t_2)-m_y(t_2))]$$

$$K_{yx}(t_1,t_2)=M[(Y(t_1)-m_y(t_1))(X(t_2)-m_x(t_2))]$$

Взаимная корреляционная функция: $B_{xy}(t_1,t_2)=M[X(t_1)Y(t_2)]$

Связь между взаимной корреляционной и взаимной ковариационной функциями:

$$K_{xy}(t_1,t_2)=B_{xy}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_2)$$

Нормированная ВКФ:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\frac{B_{xy}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}=\frac{K_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}}$$

СВОЙСТВА ВЗАИМНОЙ КФ

1. $K_{xy}(t_1,t_2)=K_{yx}(t_2,t_1)$

2. $$\left.\begin{array}{l} S(t)=X(t)+\phi(t) \\ Z(t)=Y(t)+\varphi(t) \end{array}\right\} \Rightarrow K_{sz}(t_1,t_2)=K_{xy}(t_1,t_2)$$

3. $$\left.\begin{array}{l} S(t)=X(t)\phi(t) \\ Z(t)=Y(t)\varphi(t) \end{array}\right\} \Rightarrow K_{sz}(t_1,t_2)=\phi(t_1)\varphi(t_2)K_{xy}(t_1,t_2)$$

4. $|K_{xy}(t_1,t_2)|\le\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}$ $\qquad |R_{xy}(t_1,t_2)|\le 1$

НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ СП

СП **некоррелированы**, если их ВКФ равна нулю:

$$K_{xy}(t_1,t_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} R_{xy}(t_1,t_2)=0 \\ B_{xy}(t_1,t_2)=m_x(t_1)m_y(t_2) \end{cases}$$

Статистически независимые СП $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Некоррелированные СП

ПРИМЕР

Определить моментные функции суммы двух случайных процессов, если заданы их МО, КФ и ВКФ

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

1. $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$

2. $\mathring{Z}(t) = \mathring{X}(t) + \mathring{Y}(t)$

3. $K_z(t_1,t_2) = M[(\mathring{X}(t_1) + \mathring{Y}(t_1))(\mathring{X}(t_2) + \mathring{Y}(t_2))] =$

$$M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)] + M[\mathring{Y}(t_1)\mathring{X}(t_2)] + M[\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] + M[\mathring{Y}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] =$$

$$= K_x(t_1,t_2) + K_{xy}(t_2,t_1) + K_{xy}(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2)$$

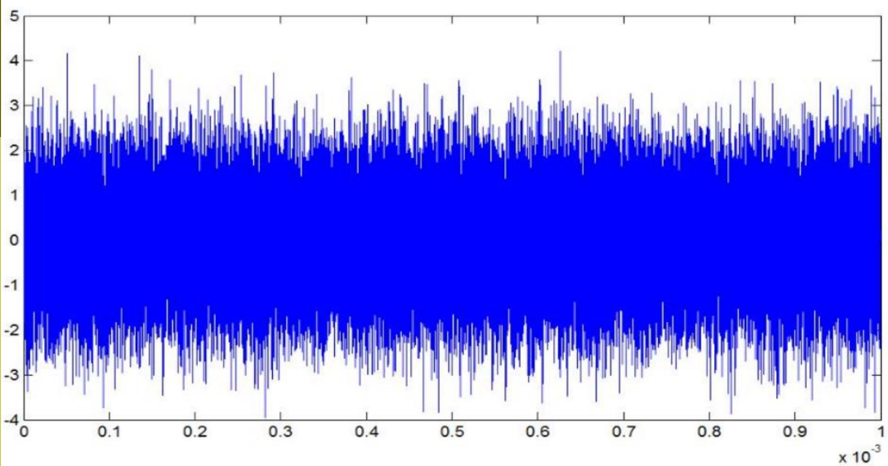
4. $D_z(t) = D_x(t) + D_y(t) + 2K_{xy}(t,t)$

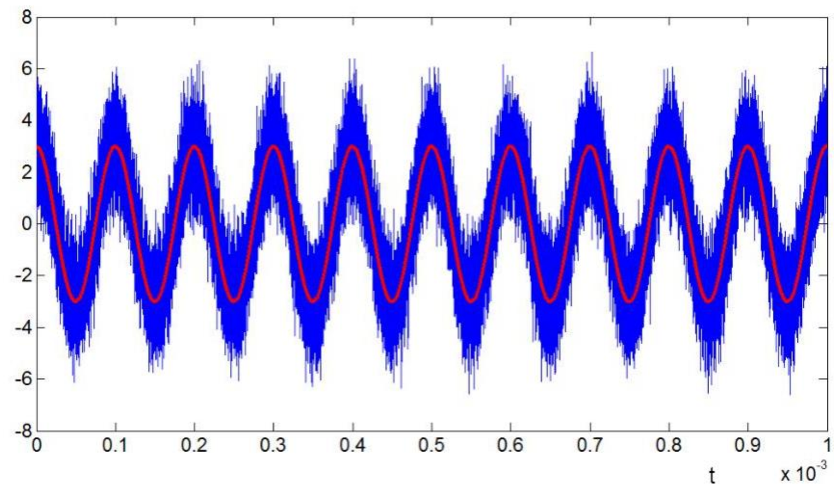
Для некоррелированных СП:

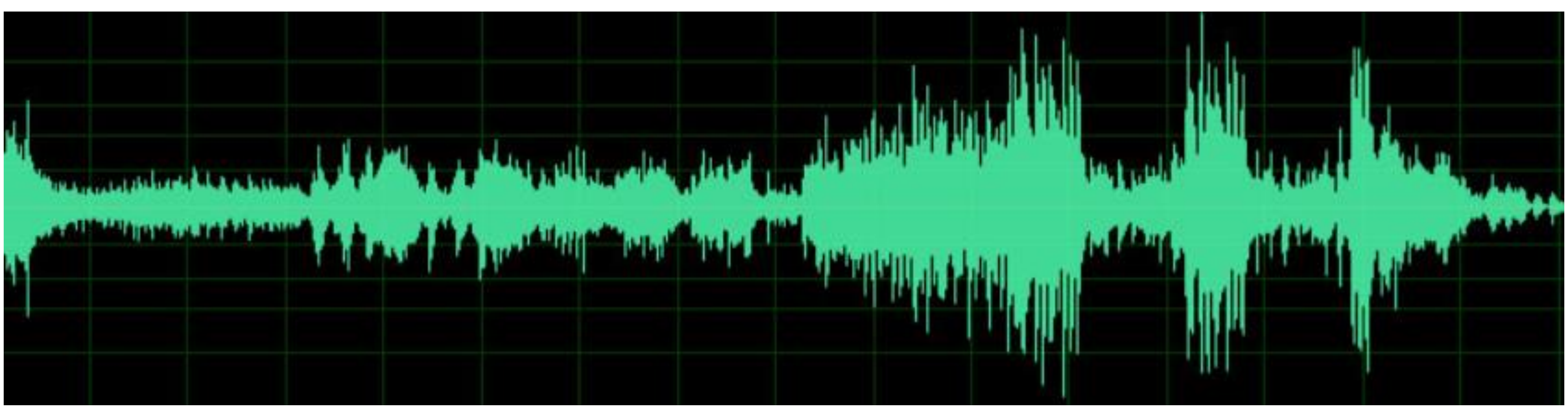
$$K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2) \qquad D_z(t) = D_x(t) + D_y(t)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СП

СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ССП)







СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ССП)

Строго стационарный (стационарный в узком смысле) СП:

$$w_n(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = w_n(x_1,...,x_n;t_1+\tau,...,t_n+\tau)$$

$$w_n(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = w_n(x_1,...,x_n;0,t_2-t_1,...,t_n-t_1)$$

Свойства строго стационарных СП:

1. $w(x_1;t_1) = w(x_1;t_1+\tau) = w(x_1)$

2. $m_x(t) = m_x$ 3. $D_x(t) = D_x$

4. $w_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = w_2(x_1,x_2;t_2-t_1)$ 5. $K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2-t_1) = K_x(\tau)$

СП называется **стационарным в широком смысле**, если :

1. $m_x(t) = m_x$ 2. $K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2-t_1) = K_x(\tau)$

ПРИМЕР

Установить, является ли СП $X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t + c$

стационарным в широком смысле, если: *U* и *V* – некоррелированные СВ; *c* - неслучайная величина;

$$D[U] = D[V] = D; \qquad M[U] = M[V] = 0$$

$$m_x(t) = c \qquad \overset{\circ}{X}(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$$

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$$

$$= M[U^2]\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + M[V^2]\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$$

$$= D\cos\omega(t_2 - t_1) \quad = D\cos\omega\tau = K_x(\tau)$$

СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНОГО В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СП

1. $D_x(t) = K_x(t,t) = K_x(t-t) = K_x(0) = D_x$

2. $B_x(0) = m_{2x}$ $\qquad R_x(0) = 1$

3. $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$

4. $|K_x(\tau)| \le K_x(0) = D_x$ $\qquad |B_x(\tau)| \le B_x(0) = m_{2x}$

$|R_x(\tau)| \le R_x(0) = 1$

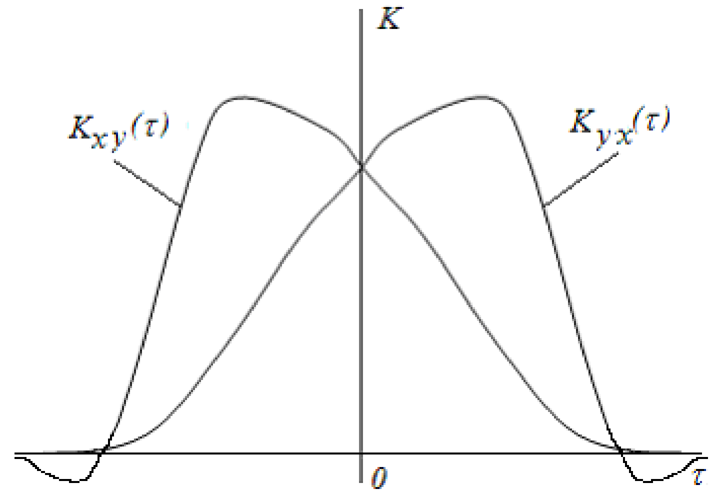
5. $K_x(\tau) = B_x(\tau) - m_x^2$

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x} = \frac{B_x(\tau) - m_x^2}{D_x}$$

СТАЦИОНАРНО СВЯЗАННЫЕ СП

Два **ССП** называют **стационарно связанными**, если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов

Свойства стационарно связанных СП:



1. $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_2 - t_1) = K_{xy}(\tau)$
2. $|K_{xy}(\tau)| \le \sqrt{D_x D_y}$
3. $K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau)$

Строго стационарный СП $\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ Стационарный в широком смысле

Стационарные СП $\not\Rightarrow$ $\Leftarrow$ Стационарно связанные СП

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СП

Евгений Евгеньевич Слуцкий
(1880-1948)

Выдающийся российский и советский математик, статистик и экономист. Один из создателей современной теории случайных функций

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ЭСП)

Начальные моменты реализации ССП: $$< x^k(t) > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^k(t)dt$$

Математическое ожидание

(постоянная составляющая реализации): $$< x(t) > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

Средний квадрат реализации (полная мощность реализации): $$< x^2(t) > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Дисперсия (средняя мощность флуктуаций): $$< (x(t) - < x(t) >)^2 > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - < x(t) >)^2 dt$$

Корреляционная функция: $$< x(t+\tau)x(t) > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)x(t)dt$$

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ССП называется **эргодическим в строгом смысле**, если с вероятностью единица усреднение по всей совокупности реализаций дает тот же результат, что и усреднение по времени:

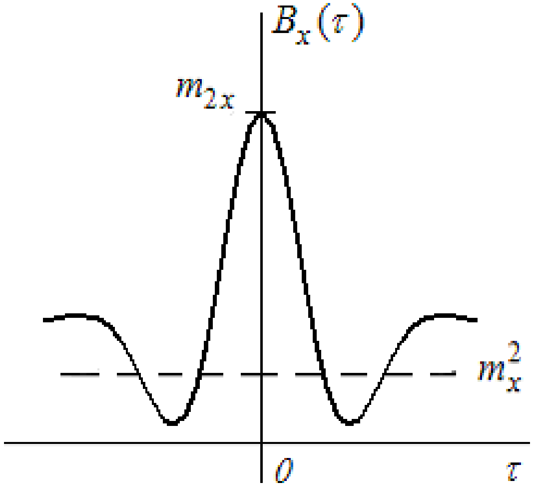
$$M[X(t)^k] = < x(t)^k >$$

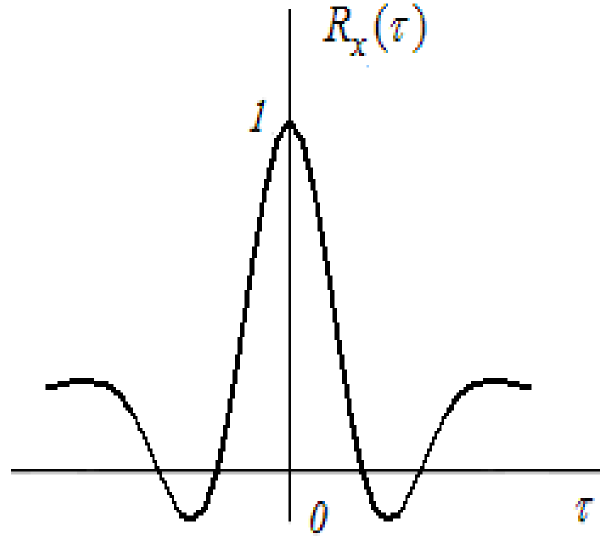
Достаточное условие эргодичности:

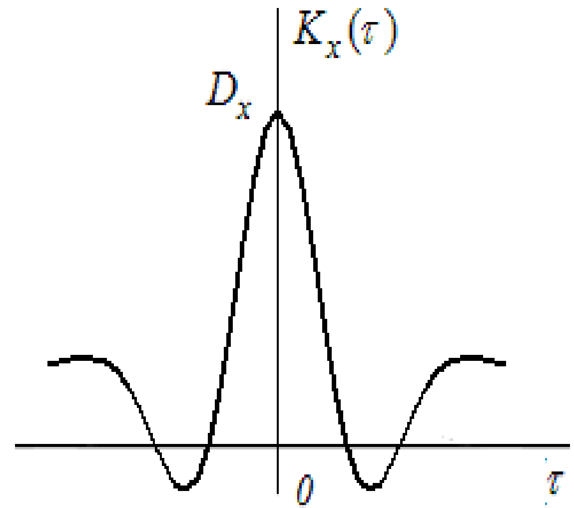
$$\lim_{\tau\to\infty} w_2(x_1,\ x_2;\ \tau) = w_1(x_1) w_1(x_2)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau\to\infty} B_x(\tau) = m_x^2$$

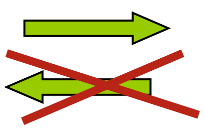
ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ







ЭСП



ССП

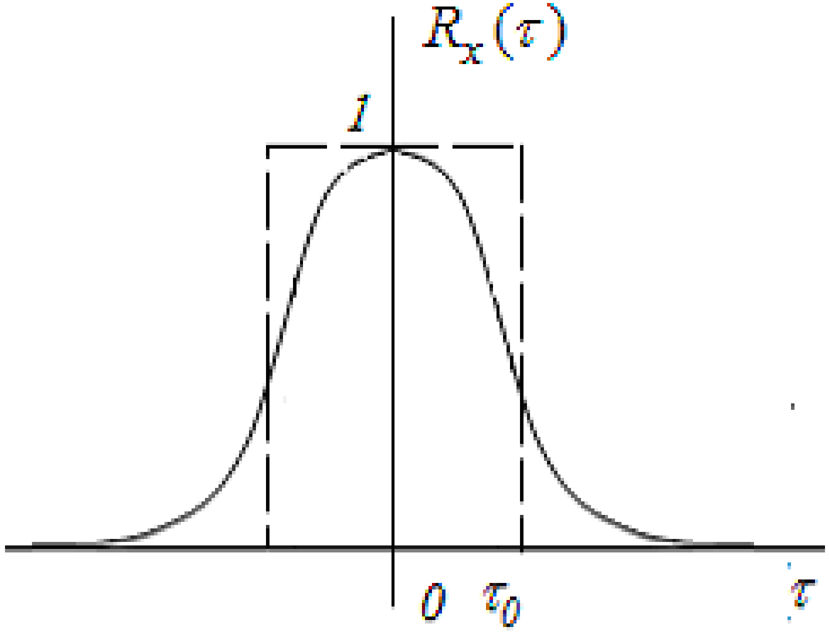
Пример

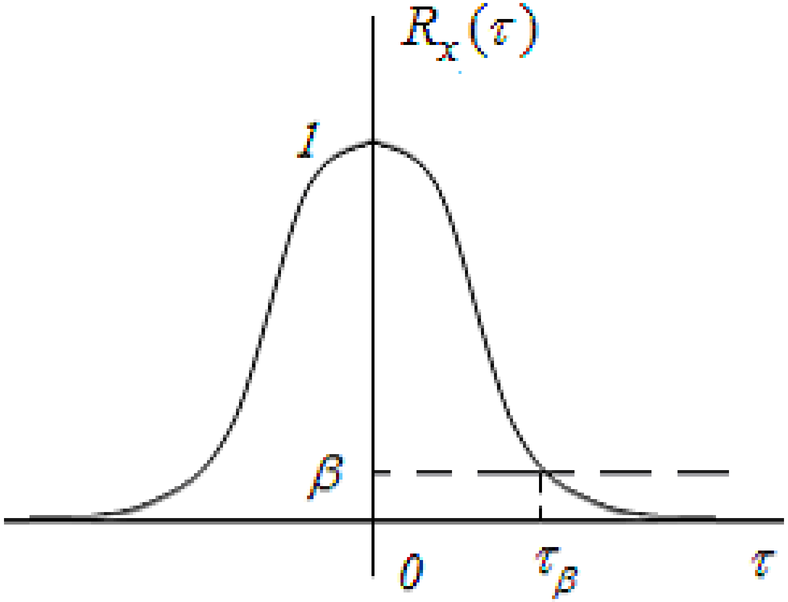
Дано $Z(t)=X(t)+Y$, $X(t)$ – стационарный СП, Y – СВ. $Z(t)$ - ЭСП?

ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

$$\tau_0 = \int_0^\infty |R_x(\tau)|\,d\tau = \frac{\int_0^\infty |K_x(\tau)|\,d\tau}{D_x}$$

$$R_x(\tau_\beta) = \beta$$





ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

Пример Найти интервалы корреляции τ_0, $\tau_{0,1}$ ЭСП с КФ

$$B_x(\tau) = A\exp(-\alpha|\tau|) + C$$

$$B_x(\infty) = m_1^2 = C$$

$$K_x(\tau) = B_x(\tau) - m_1^2 = A\exp(-\alpha|\tau|)$$

$$K_x(0) = D_x = A$$

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x} = \exp(-\alpha|\tau|)$$

ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

Пример Найти интервалы корреляции τ_0, $\tau_{0,1}$ ЭСП с КФ

$$B_x(\tau) = A\exp(-\alpha\,|\,\tau\,|) + C$$

$$\tau_0 = \int_0^\infty \exp(-\alpha\,|\,\tau\,|)d\tau = \frac{1}{\alpha}$$

$$\tau_\beta = -\frac{\ln(\beta)}{\alpha}$$

$$\tau_{0.1} = -\frac{\ln(0.1)}{\alpha} = \frac{2.3}{\alpha}$$

$$\tau_{0.05} = -\frac{\ln(0.05)}{\alpha} = \frac{2.99}{\alpha}$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАДЕРЖКИ

$s_1(t)$ - первый сигнал; $M[s_1(t)] = 0$

$s_2(t) = s_1(t+\tau_0) + \nu(t)$ - второй сигнал. $M[\nu(t)] = 0$

$$K_{s_2 s_1}(\tau) = M[s_2(t) s_1(t+\tau)] = M[(s_1(t+\tau_0) + \nu(t)) s_1(t+\tau)] =$$

$$M[s_1(t+\tau_0) s_1(t+\tau)] + M[\nu(t) s_1(t+\tau)] = K_{s_1}(\tau_0 - \tau)$$

$$\tau = \tau_0 \implies K_{s_2 s_1}(\tau = \tau_0) = K_{s_1}(0) = \max$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО -ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА

Первое изображение

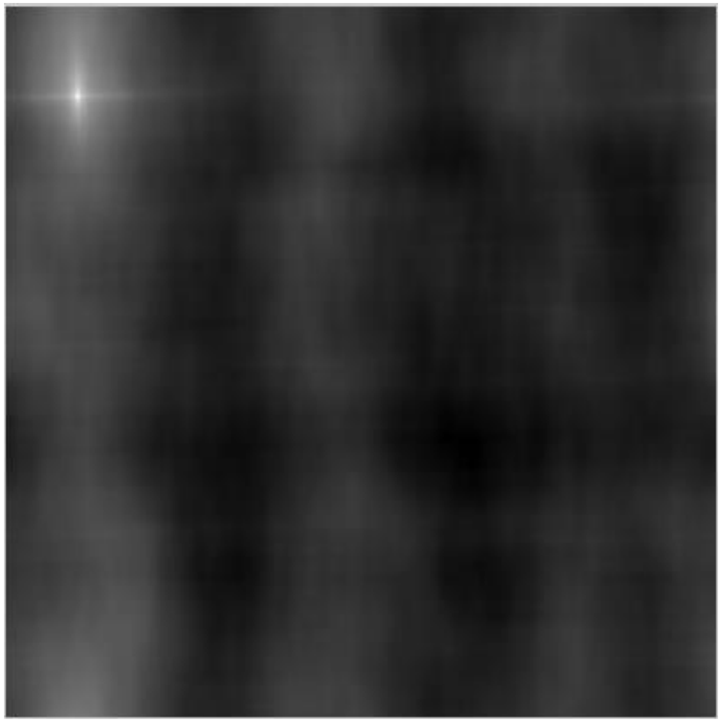
$$I_1(i_1, i_2)$$

Второе изображение

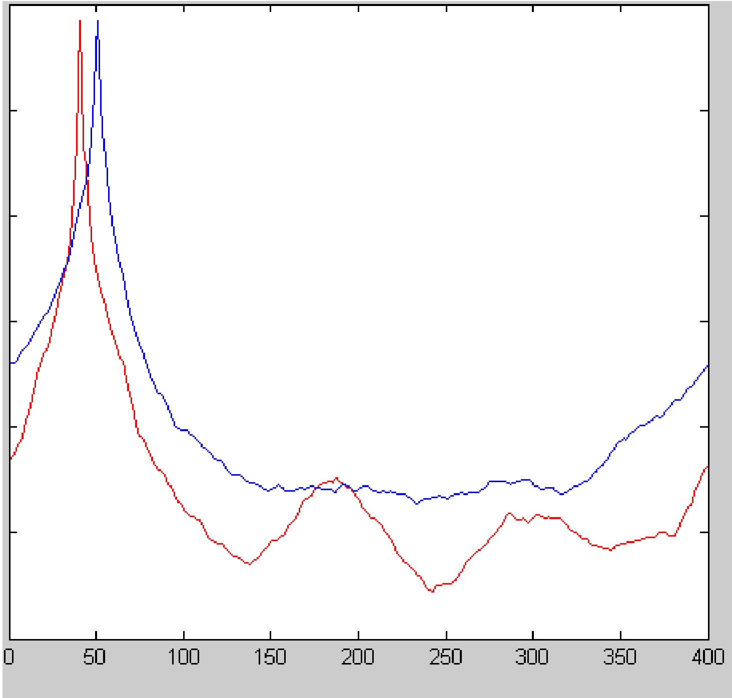
$$I_2(i_1, i_2) = I_1(i_1 + 50, i_2 + 40) + \nu(i_1, i_2)$$

$$q = 2$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО -ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА



$K_{I_1 I_2}(i_1, i_2)$



Одномерные сечения $K_{I_1 I_2}(i_1, i_2)$