

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СП





Жан Батист Жозеф Фурье

(21.3.1768, Осер, — 16.5.1830, Париж).

Французский математик, член Парижской АН. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) он использовал в теории распространения тепла, которые стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач — особенно там, где есть волны и колебания

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ (СПМ)

1. При конечной средней мощности случайный процесс обладает бесконечной энергией:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \infty$$

2. Амплитудный и фазовый спектры реализаций одного и того же случайного процесса будут отличаться друг от друга

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ (СПМ)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), t \in [-T, T]; \\ 0, t \notin [-T, T] \end{cases} \quad - \text{усеченная реализация ССП } X(t)$$

Спектральная плотность усеченной реализации:

$$S_{x_T}(f) = F\{x_T(t)\} = \int_{-T}^T x_T(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Энергия усеченной реализации:

$$E_{x_T} = \int_{-T}^T (x_T(t))^2 dt$$

В соответствии с теоремой Парсеваля:

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{x_T}(f)|^2 df$$

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ (СПМ)

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{x_T}(f)|^2 df$$

Средняя мощность реализации:

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{2T} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_{x_T}(f)|^2}{2T} df$$

Распределение мощности по частоте для усеченной реализации:

$$G_{x_T}(f) = \frac{|S_{x_T}(f)|^2}{2T}$$



Марк-Антуан Парсеваль
(27 апреля 1755 — 16 августа 1836)

Французский математик. Сформулировал теорему о том, что сумма (или интеграл) квадрата функции равна сумме (или интегралу) квадрата преобразованной функции. Теорема была доказана Парсевалем для рядов в 1799 году и была позднее применена к рядам Фурье

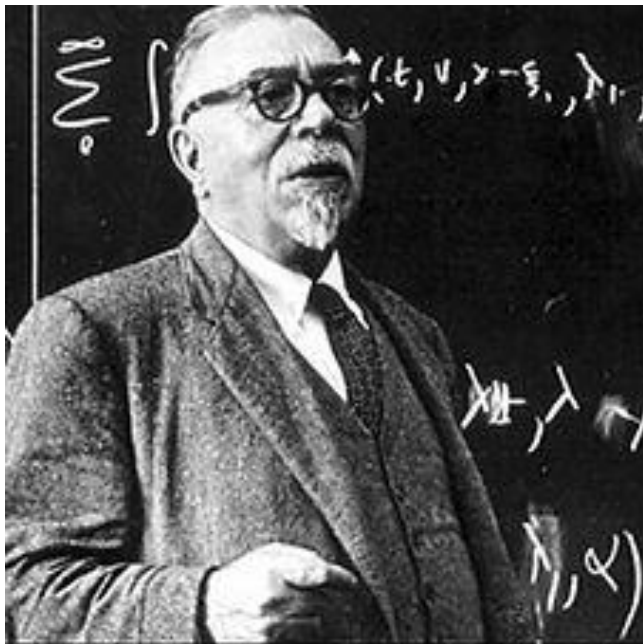
СВОЙСТВА СПМ

СПМ:

$$G_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M[G_{x_T}(f)] = \lim_{T \rightarrow \infty} M\left[\frac{|S_{x_T}(f)|^2}{2T}\right]$$

$$1. \quad G_X(f) \geq 0 \qquad 2. \quad G_X(f) = G_X(-f)$$

$$3. \quad B_X(\tau) = K_X(\tau) + m_X^2 \longrightarrow G_X(f) + m_X^2 \delta(f)$$



Норберт Винер
(26.11. 1894- 18.03.1964)

Американский учёный, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта. Во время Второй мировой войны, занимался исследованиями в области противовоздушной обороны. Н. Винер сформулировал основные положения новой науки — кибернетики



Александр Яковлевич
Хинчин

19.07.1894 – 18.11.1959

А.Я. Хинчин - один из основателей современной теории вероятностей. Одним из значительных результатов, принесших Хинчину мировую славу выдающегося математика, является элегантная формула Леви-Хинчина для характеристической функции процесса в теории стохастических процессов
Леви

СВОЙСТВА СПМ

$$4. \quad G_x(f) = F\{K_x(\tau)\} = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(-2\pi f \tau) d\tau$$

$$K_x(\tau) = F^{-1}\{G_x(f)\} = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) \cos(2\pi f \tau) df$$

Для некоррелированных СП:

$$5. \quad Z(t) = X(t) + Y(t) \longrightarrow G_z(f) = G_x(f) + G_y(f)$$

$$6. \quad D_x = K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df$$

СВОЙСТВА СПМ

$$7. \quad G_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) d\tau$$

$$8. \quad R_x(\tau) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad G_x(0) = 2D_x \tau_0$$

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau = \frac{1}{D_x} \int_0^{\infty} K_x(\tau) d\tau = \frac{G_x(0)}{2D_x}$$

$$9. \quad \Delta f_{\vartheta} = \frac{1}{G_{x \max}} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \frac{D_x}{G_{x \max}} \quad \longrightarrow \quad D_x = \Delta f_{\vartheta} G_{x \max}$$

$$10. \quad \Delta f_{\vartheta} \tau_0 \geq \frac{1}{2}$$

ПРИМЕР

Найти эффективную ширину спектра эргодического СП с КФ

$$B_x(\tau) = A \exp(-\alpha |\tau|) + C$$

$$K_x(\tau) = B_x(\tau) - B_x(\infty) = A \exp(-\alpha |\tau|) \quad \tau_0 = \frac{1}{\alpha}$$

$$G_x(f) = A \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad \Delta f_{\text{э}} = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta f_{\text{э}} \tau_0 = \frac{1}{2}$$

ВЗАИМНАЯ СПМ

$$G_{xy}(f) = F\{K_{xy}(\tau)\}$$

$$K_{xy}(\tau) = F^{-1}\{G_{xy}(f)\}$$

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau) \quad \longrightarrow \quad G_{xy}(f) = G_{yx}^*(f)$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО -ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА

Первое изображение



$$I_1(i_1, i_2)$$

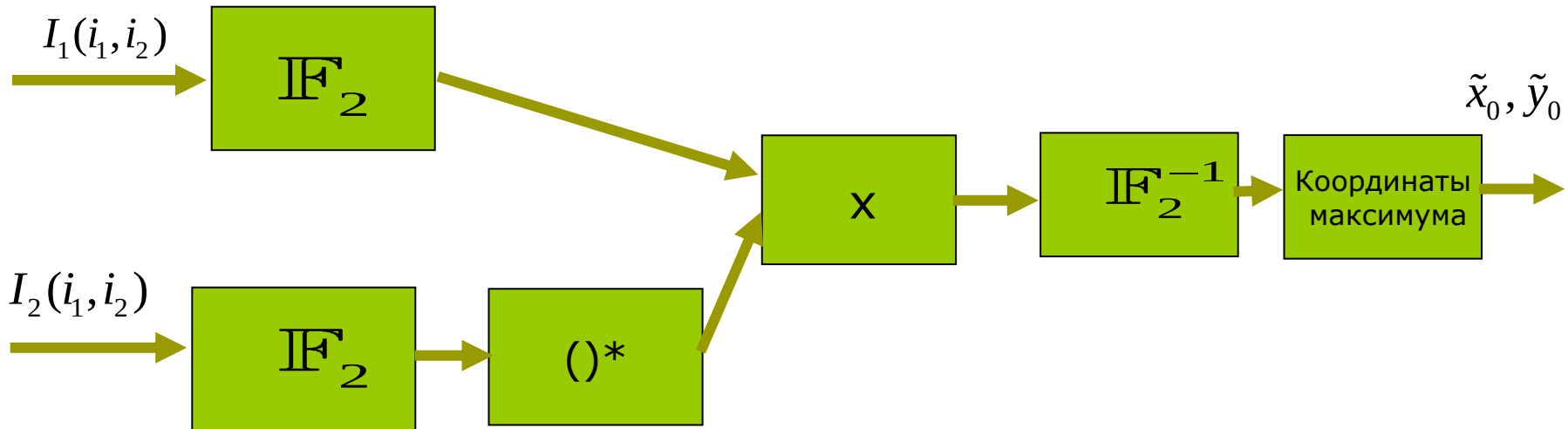
Второе изображение



$$I_2(i_1, i_2) = I_1(i_1 + 50, i_2 + 40) + v(i_1, i_2)$$

$$q = 2$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО - ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА (ВЫЧИСЛЕНИЯ ВКФ)



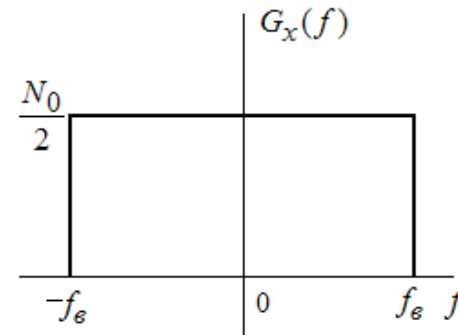
ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



СП С РАВНОМЕРНОЙ В ПОЛОСЕ ЧАСТОТ СПМ

СПМ:

$$G_x(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f| \leq f_B, \\ 0, & |f| > f_B. \end{cases}$$

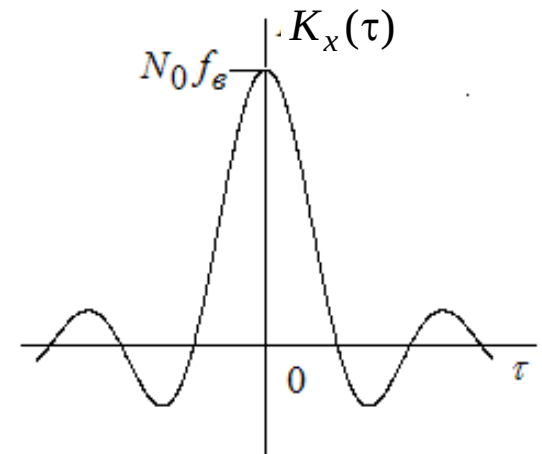


Дисперсия:

$$D_x = 2 \int_0^{f_B} \frac{N_0}{2} df = N_0 f_B$$

КФ:

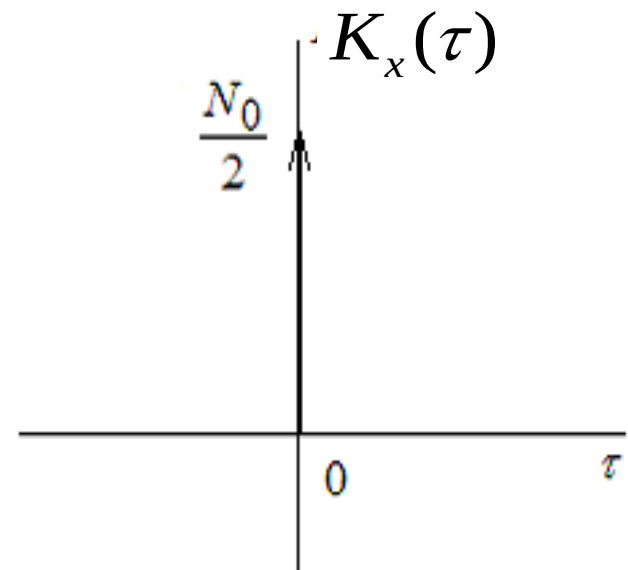
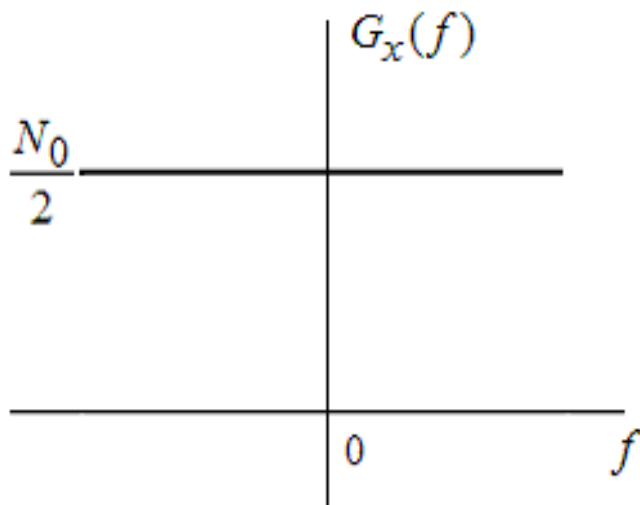
$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{f_B} \frac{N_0}{2} \cos 2\pi f \tau df = N_0 f_B \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau}$$



$$K_x\left(n \frac{1}{2f_B}\right) = 0 \longrightarrow \Delta t = \frac{1}{2f_B}$$

БЕЛЫЙ ШУМ

$$\begin{array}{l} f_B \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0; \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} G_x(f) = \frac{N_0}{2} = \text{const}; \\ D_x = \infty; \\ B_x(\tau) = F \left\{ \frac{N_0}{2} \right\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \end{array} \right.$$



ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

СП называется **гауссовским**, если для **любого** конечного множества моментов времени совокупность сечений СП имеет совместную **гауссовскую** плотность

Стационарный ГСП:

$$w(x; t) = w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2D_x}\right)$$

ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

$$w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = w_2(x_1, x_2; \tau) = \\ = \frac{1}{2\pi D_x \sqrt{1 - R^2(\tau)}} \exp \left(- \frac{(x_1 - m_x)^2 - 2R_x(\tau)(x_1 - m_x)(x_2 - m_x) + (x_2 - m_x)^2}{2D_x(1 - R^2(\tau))} \right)$$

1. Исчерпывающие характеристики СГСП:

$$m_x; K_x(\tau) \quad \text{или} \quad m_x; G_x(f)$$

2. Независимость сечений $\longleftrightarrow$ Некоррелированность сечений

ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

2. Независимость сечений $\longleftrightarrow$ Некоррелированность сечений $R(\tau) = 0$

$$w_2(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi D_x} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_x)^2 + (x_2 - m_x)^2}{2D_x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_x)^2}{2D_x}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{(x_2 - m_x)^2}{2D_x}\right) = w_1(x_1)w_1(x_2)$$

3. Стационарность в узком смысле $\longleftrightarrow$ Стационарность в широком смысле



Карл Фри́дрих Га́усс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

Выдающийся немецкий математик, астроном и физик.

Считается одним из величайших математиков всех времён