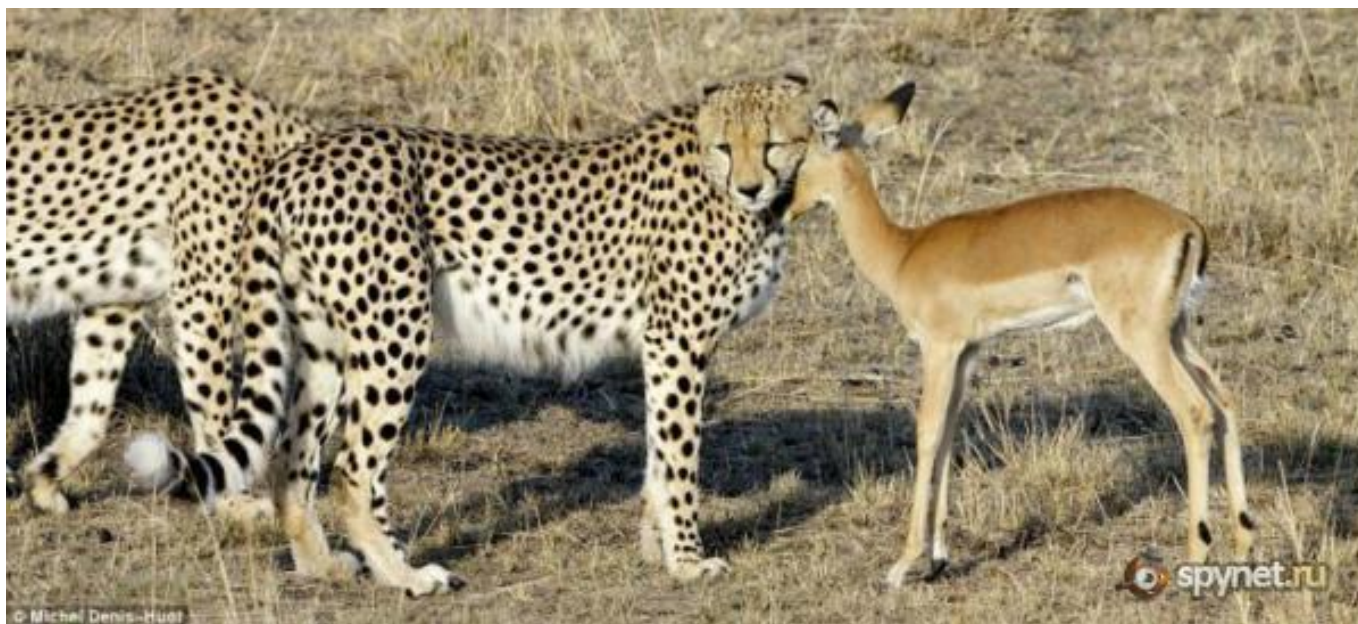
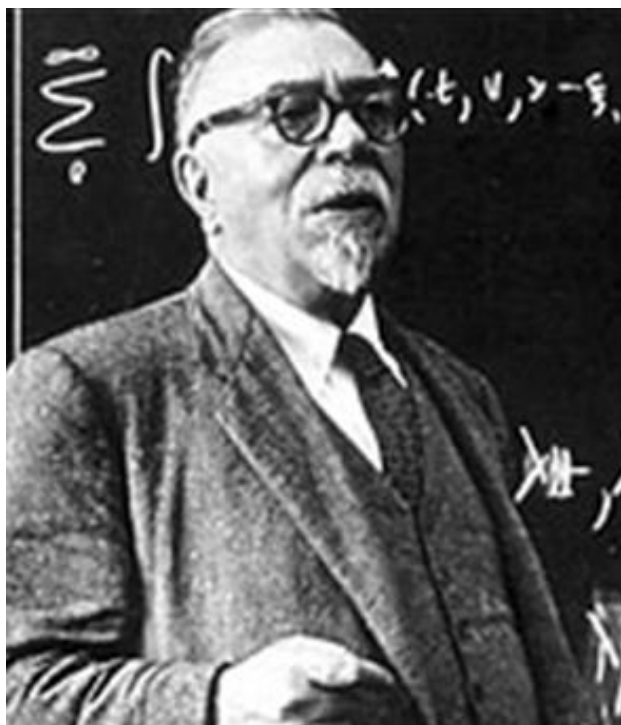


ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛС



ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

1. Создание теории оптимальной линейной фильтрации, экстраполяции и интерполяции гауссовских случайных сигналов, принимаемых на фоне гауссовского шума (Н. Винер, А.Н. Колмогоров, 40-е годы).



Норберт Винер



Андрей Колмогоров

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

2. Создание теории оптимальной рекуррентной фильтрации, экстраполяции и интерполяции случайных сигналов, принимаемых на фоне шума (Р. Калман 60-е годы).



“Фильтр Калмана был истинным открытием, так как никто не представлял, что результат будет так прост?!

Никто не ожидал, что результат будет таким общим. Никто не думал, что фильтр будет таким полезным”

«Конечно, я хорошо осознавал важность своего открытия и даже пробовал его объяснить своим друзьям. Но, честно говоря, совершенно не представлял, что оно окажется таким важным и нужным»

Рудольф Калман

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

3. Синтез оптимальных фильтров, согласованных со спектром детерминированного полезного сигнала, принимаемого на фоне случайного шума с известным спектром мощности (1943 г. — Д.О. Норт, Д. Миддлтон и Дж. Г. Ван Флек, 1946 г. — В.И. Сифоров).



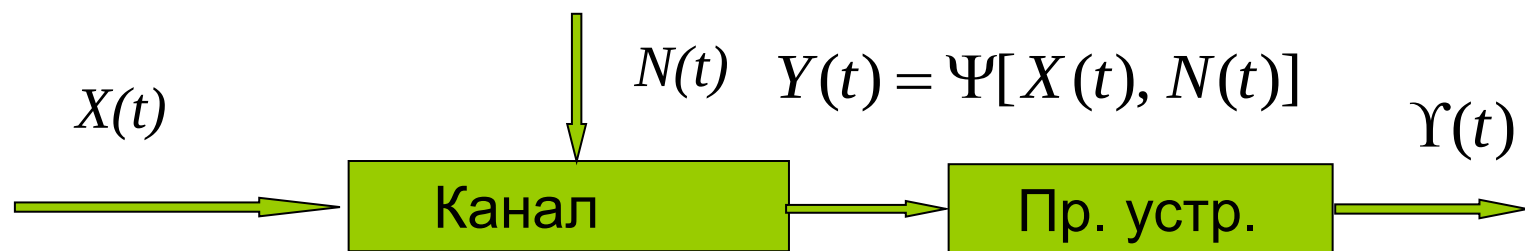
Девид Миддлтон



Владимир Иванович Сифоров

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛС

Статистический синтез **оптимальных** (наилучших) **методов** состоит в отыскании методов, которые обеспечивали бы **наилучший** (в некотором смысле) прием сигналов при наличии помех.



В результате синтеза должен был получен оптимальный (в смысле выбранного критерия) алгоритм преобразования $Y(t)$ в $\Upsilon(t)$

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛС

1. Априорная информация в виде математических моделей

$$\Psi[\cdot], X(t), N(t).$$

2. Критерии оптимальности (качества).

3. Ограничения на синтез ОС.

4. Синтез ОС.

5. Анализ ОС.

6. Точная или приближенная реализация ОС.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

1. Сигнал и помеха случайные процессы

- Спектрально корреляционные характеристики сигнала и помехи
- Распределения сигнала и помехи

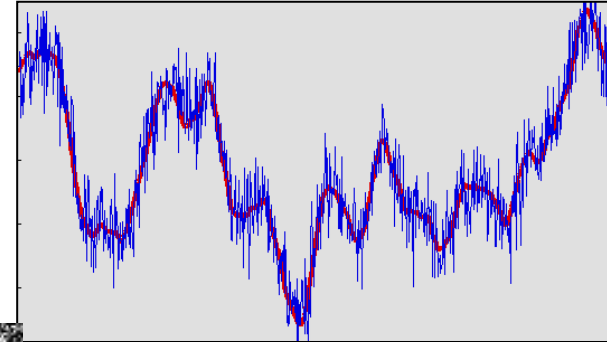
2. Детерминированный сигнал

- Характеристики сигнала – форма, длительность, частота, начальная фаза и т.п.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

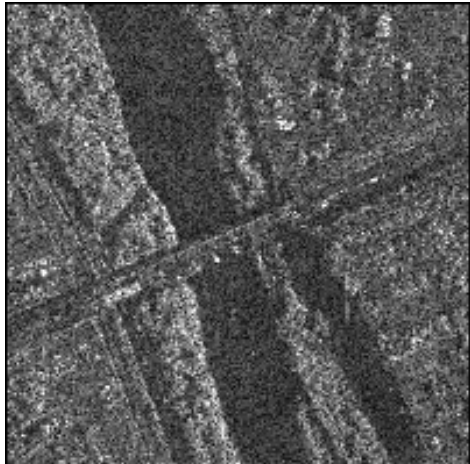
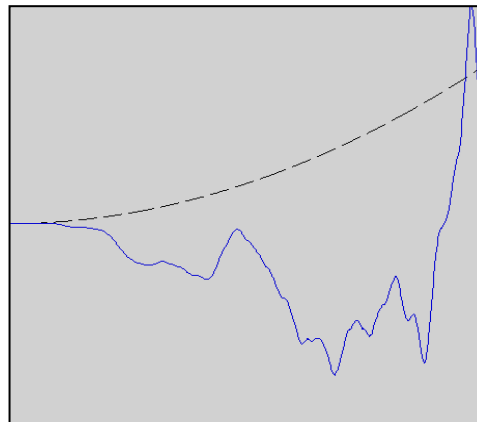
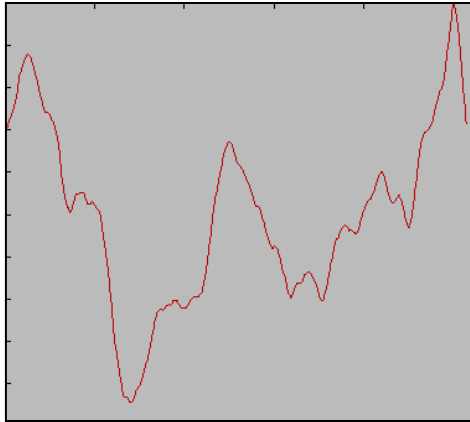
- Аддитивная помеха

$$Y(t) = X(t) + N(t)$$



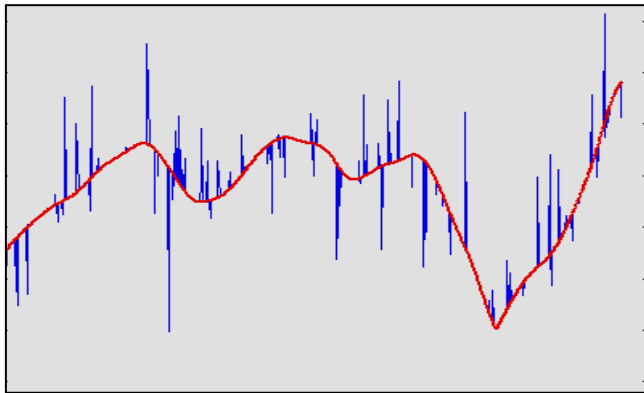
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

- Мультипликативная помеха $Y(t) = X(t) \cdot N(t)$



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

- Импульсная помеха



$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & \text{с вероятностью } p; \\ N(t) & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$



КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

1. Минимум среднеквадратической ошибки оценивания

$$Y(t) = \hat{X}(t) \quad - \text{оценка СП}$$

Для случайного процесса:

$$\Delta(t) = X(t) - \hat{X}(t) \quad - \text{мгновенная ошибка оценивания}$$

$$M[\Delta^2(t)] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2] = \min_{h(\tau)}$$

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

2. Максимум отношения сигнал/шум

Для детерминированного сигнала

$$Y(t) = s_{\text{ВХ}}(t) + N_{\text{ВХ}}(t)$$

$$\Upsilon(t) = s_{\text{ВЫХ}}(t) + N_{\text{ВЫХ}}(t)$$



$$q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{h(\tau)}$$

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛС

ОГРАНИЧЕНИЯ НА СИНТЕЗИРУЕМУЮ СИСТЕМУ

1. Линейная система
2. Стационарная система
3. Каузальная (физически осуществимая) система

СИНТЕЗ ОС

В результате синтеза должен был получен оптимальный (в смысле выбранного критерия) алгоритм преобразования $Y(t)$ в $\Upsilon(t)$

АНАЛИЗ ОС

Определяются количественные оценки качества (потенциально достижимое) ОС

1. Для определения предела, к которому необходимо стремиться
2. Для сравнения с существующими аналогами

ТОЧНАЯ ИЛИ ПРИБЛИЖЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР



ФИЛЬТР, МАКСИМИЗИРУЮЩИЙ ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ (СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР)

1. Априорная информация

Наблюдаемый сигнал: $Y(t) = s_{\text{BX}}(t) + N_{\text{BX}}(t)$

$s_{\text{BX}}(t)$ - детерминированный сигнал

$N_{\text{BX}}(t)$ - белый шум с КФ

$$K_{n_{\text{BX}}}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

2. Критерий оптимальности: $q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{h_{\text{сф}}(\tau)}$

3. Ограничения на синтез ОС: каузальный линейный фильтр с постоянными параметрами

КЧХ фильтра

$$\dot{H}_{\text{сф}}(f) = C_{\text{сф}}(f) \exp(j\varphi_{\text{сф}}(f))$$

ИХ фильтра

$$h_{\text{сф}}(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0$$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Спектральная плотность входного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{BX}}(f) = F\{s_{\text{BX}}(t)\} = S_{\text{BX}}(f) \exp(j\varphi_{\text{BX}}(f))$$

Спектральная плотность выходного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = \dot{H}_{\text{сф}}(f) \dot{S}_{\text{BX}}(f) = C_{\text{сф}}(f) S_{\text{BX}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{BX}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f)))$$

Сигнал на выходе фильтра:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = F^{-1} \left\{ \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}(f) S_{\text{BX}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{BX}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f) + 2\pi ft)) df$$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Сигнал на выходе фильтра при $t=t_0$:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}(f) S_{\text{ВХ}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{ВХ}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f) + 2\pi f t_0)) df$$

Дисперсия шума на выходе фильтра: $D_{n_{\text{ВЫХ}}} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}^2(f) df$

$$q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{\dot{H}_{\text{сф}}(f)}$$

1. $\varphi_{\text{сф}}(f) = -\varphi_{\text{ВХ}}(f) - 2\pi f t_0$

2. $C_{\text{сф}}(f) = B S_{\text{ВХ}}(f)$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА (предыдущая лекция)

КОМПЛЕКСНАЯ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА (СФ)

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\text{сф}}(f) &= BS_{\text{ВХ}}(f) \exp(-j(\varphi_{\text{ВХ}}(f) + 2\pi ft_0)) = \\ &= BS_{\text{ВХ}}(f) \exp(-j \cdot \varphi_{\text{ВХ}}(f)) \exp(-j \cdot 2\pi ft_0) \\ &= B\dot{S}_{\text{ВХ}}^*(f) \exp(-j \cdot 2\pi ft_0)\end{aligned}$$

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СФ

$$h_{\text{сф}}(t) = F^{-1}\{\dot{H}_{\text{сф}}(f)\} = Bs_{\text{ВХ}}(t_0 - t)$$

$$t_0 \geq t_c$$

ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СИНТЕЗА

$$\dot{H}_{\text{сф}}(f) = B \dot{S}_{\text{ВХ}}^*(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0)$$

$$h_{\text{сф}}(t) = B s_{\text{ВХ}}(t_0 - t)$$

$$t_0 \geq t_c$$

$$B > 0$$

1. Спектральная плотность выходного сигнала

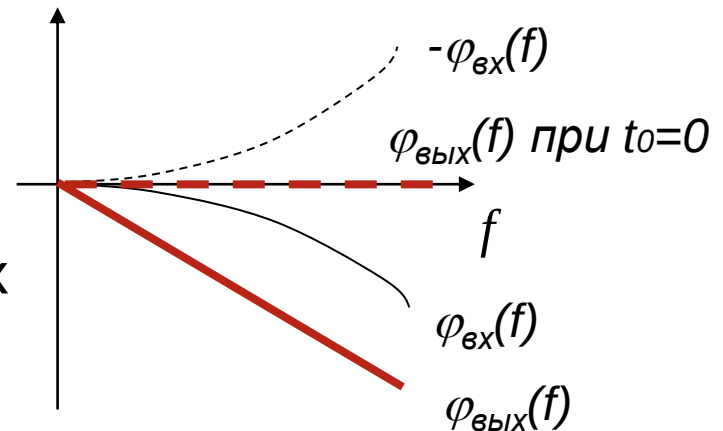
$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = B S_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0) \rightarrow \varphi_{\text{ВЫХ}}(f) = -2\pi f t_0$$

Компенсируются начальные фазы
в спектре входного сигнала

2. СФ является оптимальным для всех
сигналов одной и той же формы, т.е.
отличающихся от сигнала только
постоянным множителем

3. Если $s_{\text{вх}}(t)$ – четная функция относительно $t_c/2$

$$h_{\text{сф}}(t) = B s_{\text{вх}}(t)$$



АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Сигнал на выходе СФ

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = BS_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0)$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = F^{-1} \left\{ \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) \right\} = B \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f (t_0 - t)) df$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = B \Theta_{S_{\text{ВХ}}}(t - t_0)$$

1. Сигнал на выходе СФ с точностью до константы равен КФ входного сигнала, сдвинутой вправо по оси времени на величину t_0

$$S_{\text{ВЫХ}}(t_0) = BE_{S_{\text{ВХ}}}$$

2. Сигнал на выходе СФ при $t=t_0$ с точностью до константы равен энергии входного сигнала

АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

СПМ шума на выходе СФ

$$G_{n_{\text{ВЫХ}}}(f) = \frac{N_0}{2} C_{\text{сф}}^2(f) = \frac{N_0}{2} B^2 S_{\text{ВХ}}^2(f)$$

КФ шума на выходе СФ

$$K_{n_{\text{ВЫХ}}}(\tau) = F^{-1} \left\{ G_{n_{\text{ВЫХ}}}(f) \right\} = B^2 \frac{N_0}{2} F^{-1} \left\{ S_{\text{ВХ}}^2(f) \right\} = B^2 \frac{N_0}{2} \Theta_{S_{\text{ВХ}}}(\tau)$$

3. КФ шума на выходе СФ с точностью до константы равна КФ входного сигнала

4. Шум на выходе СФ коррелирован. КФ шума равна нулю

при $|\tau| \geq t_c$

АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Дисперсия шума на выходе СФ

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = BE_{s_{\text{ВХ}}}$$

$$D_{n_{\text{ВЫХ}}} = K_{n_{\text{ВЫХ}}}(0) = B^2 \frac{N_0}{2} \Theta_{s_{\text{ВХ}}}(0) = B^2 \frac{N_0}{2} E_{s_{\text{ВХ}}}$$

Отношение сигнал/шум на выходе СФ при $t=t_0$

$$q_{\text{сф}}^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \frac{2E_{s_{\text{ВХ}}}}{N_0}$$

5. Отношение сигнал/шум на выходе СФ зависит от энергии полезного сигнала и интенсивности белого шума, т.е. зависит от характеристик **входного сигнала и входного шума**