

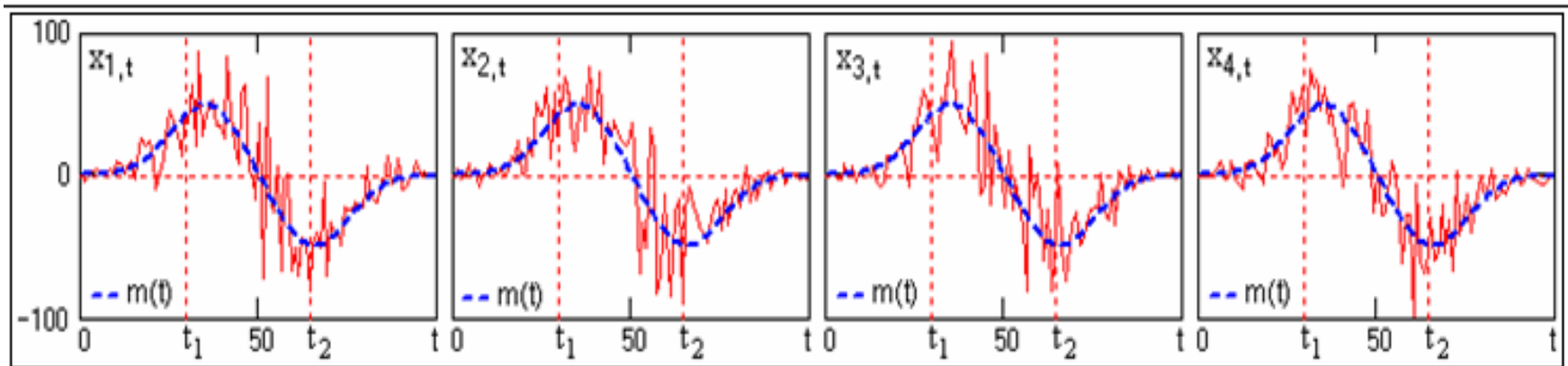
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ



СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайный процесс $X(t)$ – функция неслучайного аргумента t (времени), сечение которой является случайной величиной

Реализация СП $X(t)$ - неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается СП в результате опыта



Реализации случайного процесса.

Ансамбль – совокупность всех возможных реализаций СП

Случайный процесс – совокупность всех возможных реализаций вместе с соответствующим распределением вероятностей появления этих реализаций

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Одномерная функция распределения (ФР) СП:

$$F_1(x_1; t_1) = P(X(t_1) \leq x_1)$$

Одномерная плотность распределения вероятностей (ПРВ) СП:

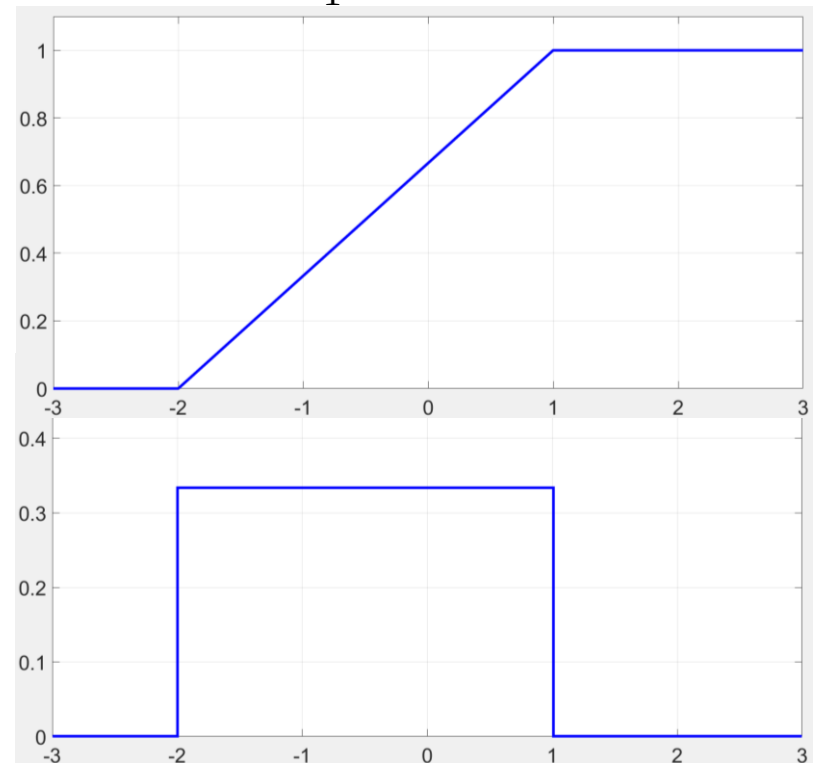
$$w_1(x_1; t_1) = \frac{\partial F_1(x_1; t_1)}{\partial x_1}$$

Одномерная функция **равномерного** распределения СП:

$$F_1(x_1; t_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < a, \\ \frac{x_1 - a}{b - a}, & a \leq x_1 < b \\ 1, & x_1 \geq b. \end{cases}$$

Одномерная плотность **равномерного** распределения вероятностей СП:

$$w_1(x_1; t_1) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq x_1 \leq b \\ 0, & x_1 < a, x_1 > b \end{cases}$$



ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

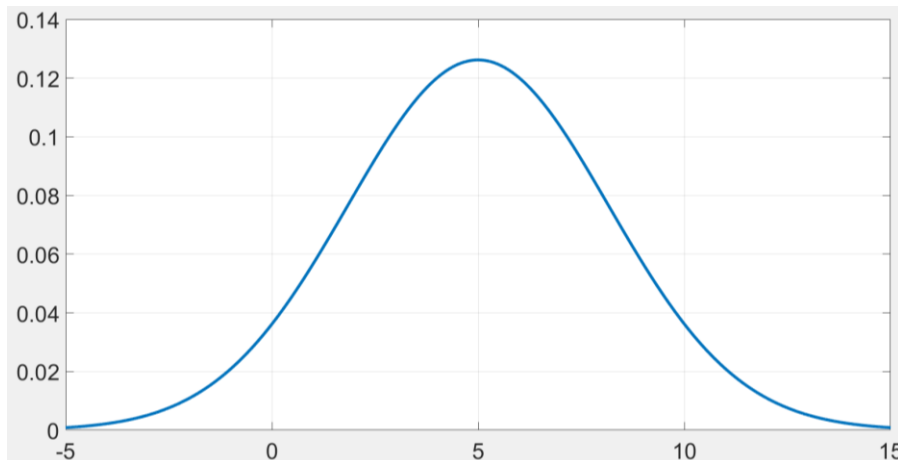
Одномерная функция **нормального** распределения (ФР) СП:

$$F_1(x_1; t_1) = \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2) dt \quad - \text{функция Лапласа}$$

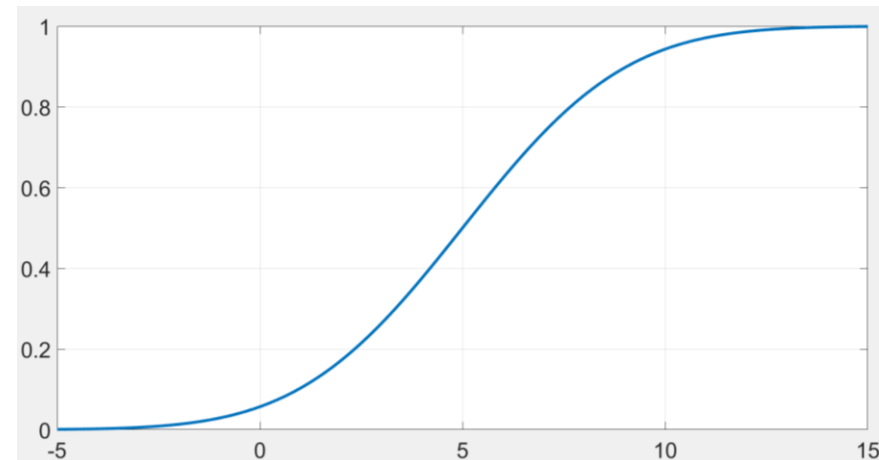
Одномерная плотность **нормального** распределения вероятностей (ПРВ) СП:

$$w_1(x_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_x)^2}{2D_x}\right)$$

ПРВ



ФР



ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

ПРВ произвольного порядка :

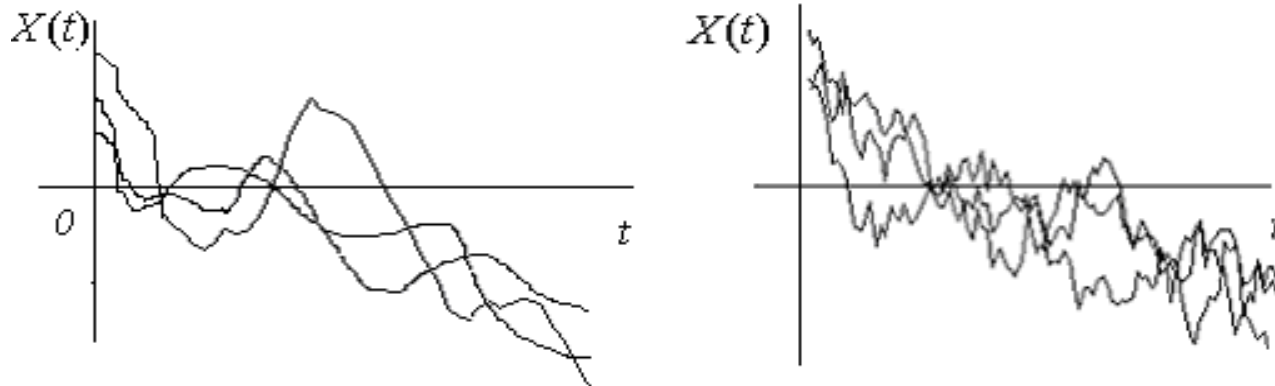
$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

Эквивалентные СП - процессы, у которых все конечномерные ПРВ совпадают

Дискретный белый шум - случайная последовательность с независимыми сечениями :

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n w_1(x_i; t_i)$$

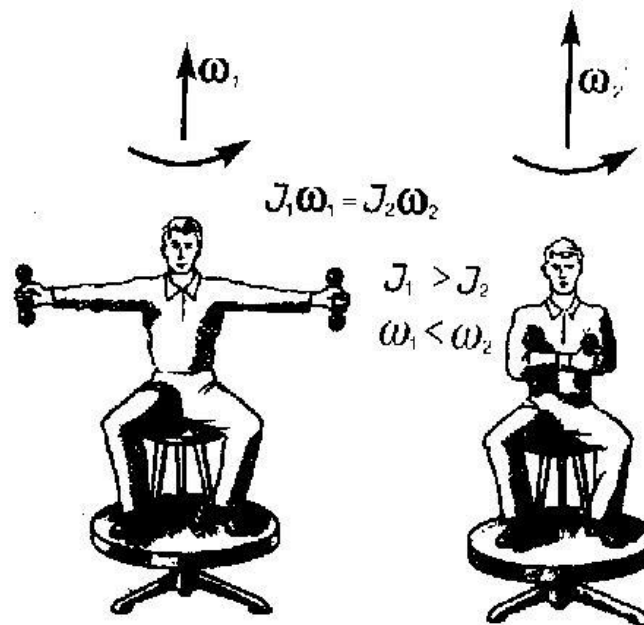
ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



Двумерная ФР: $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2)$

Двумерная ПРВ: $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СП



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Начальные моменты:

$$m_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_1(x) dx$$

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i$$

Центральные моменты:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_1$$

$$\mu_k = M\left[\left(X - m_1\right)^k\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k w_1(x) dx$$

$$\mu_k = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^k\right] = \sum_{i=1}^n (x - m_1)_i^k p_i$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Смешанные начальные моменты:

$$m_{1,1} = M \left[X_1 \cdot X_2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Смешанные центральные моменты:

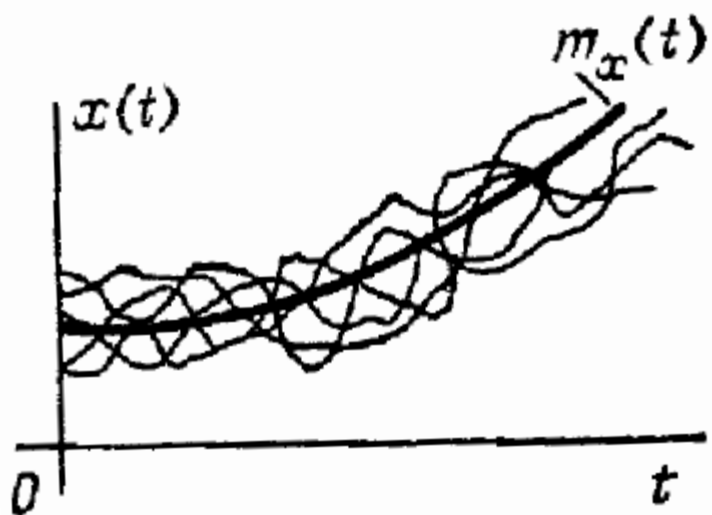
$$\begin{aligned} \mu_{1,1} &= M \left[\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{1,x_1}) (x_2 - m_{1,x_2}) w_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СП

Математическое ожидание (МО) СП - неслучайная функция $m_x(t)$, которая при любом значении аргумента равна МО соответствующего сечения СП

$$m_{1,x}(t) = m_x(t) = M[X(t)]$$

МО – “средняя” функция, вокруг которой происходит разброс реализаций СП



СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

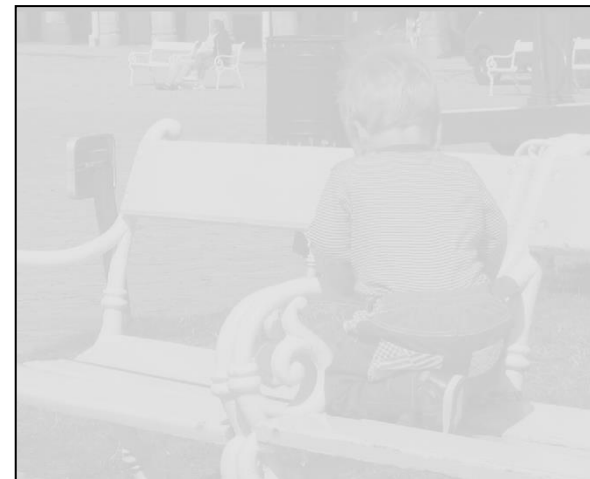
$$\tilde{m}_1 = 40$$



$$\tilde{m}_1 = 120$$



$$\tilde{m}_1 = 200$$



СВОЙСТВА МО СП

$$m_{1,x}(t) = m_x(t) = M[X(t)]$$

$$1. \quad M[\phi(t)] = \phi(t)$$

$$2. \quad M[\phi(t) + X(t)] = \phi(t) + m_x(t)$$

$$3. \quad M[\phi(t)X(t)] = \phi(t)m_x(t)$$

$$4. \quad M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t)$$

$$5. \quad \text{Для независимых СП:} \quad M[X(t)Y(t)] = m_x(t) \cdot m_y(t)$$

Начальная моментная функция второго порядка :

$$m_{2,x}(t) = M[(X(t))^2]$$

ПРИМЕР

Найти МО СП $X(t) = U \cos(5t)$, где U – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[1,5]$

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[U \cos(5t)] = M[U]M[\cos(5t)] = 3 \cos(5t)$$

ЦЕНТРИРОВАННЫЙ СП. ДИСПЕРСИЯ СП

Центрированный СП: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ 1. $M[\overset{\circ}{X}(t)] = 0$

2. Прибавление к СП неслучайной функции не изменяет ЦСП:

$$Y(t) = X(t) + \phi(t) \Rightarrow \overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t)$$

$$3. Y(t) = \phi(t)X(t) \Rightarrow \overset{\circ}{Y}(t) = \phi(t) \overset{\circ}{X}(t)$$

Дисперсия СП:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2]$$

$$D_x(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] = m_{2,x}(t) - m_x^2(t)$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x}$$

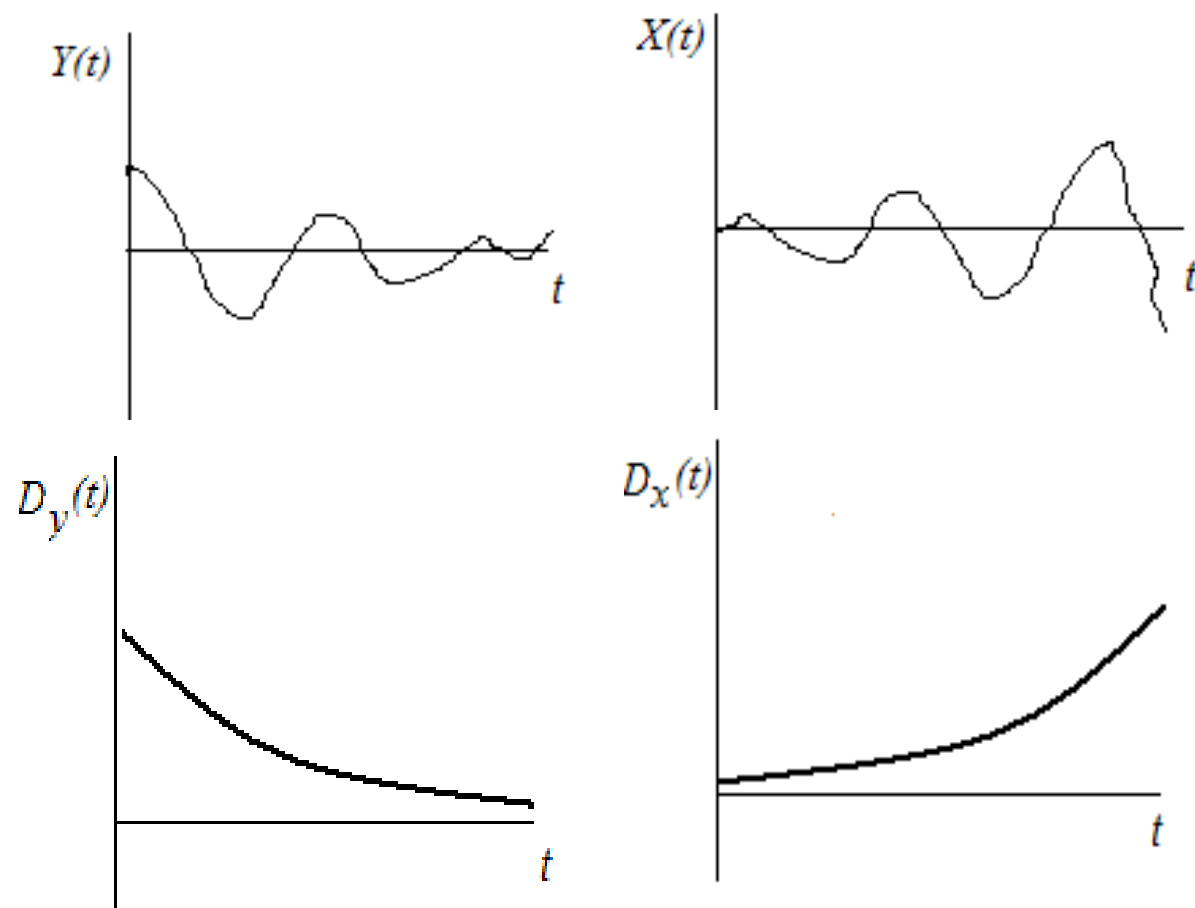
$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 19$$

$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 38$$

$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{\sigma} = 57$$



ДИСПЕРСИЯ СП



СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

1. $D[\phi(t)] = 0$
2. $D[\phi(t)X(t)] = \phi^2(t)D[X(t)] = \phi^2(t)D_x(t)$
3. $D[\phi(t) + X(t)] = D_x(t)$

Для НСП

4. $D[X(t) \pm Y(t)] = D[X(t)] + D[Y(t)] = D_x(t) + D_y(t)$
5. $D[X(t) \cdot Y(t)] = m_{2,x}(t)m_{2,y}(t) - m_x^2(t)m_y^2(t)$

Пример

Найти дисперсию случайного процесса $X(t) = U \cos(5t) + t^2$, где U – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[1, 5]$

$$D[X(t)] = D[U \cos(5t) + t^2] = D[U](\cos(5t))^2 = \frac{4}{3}(\cos(5t))^2$$