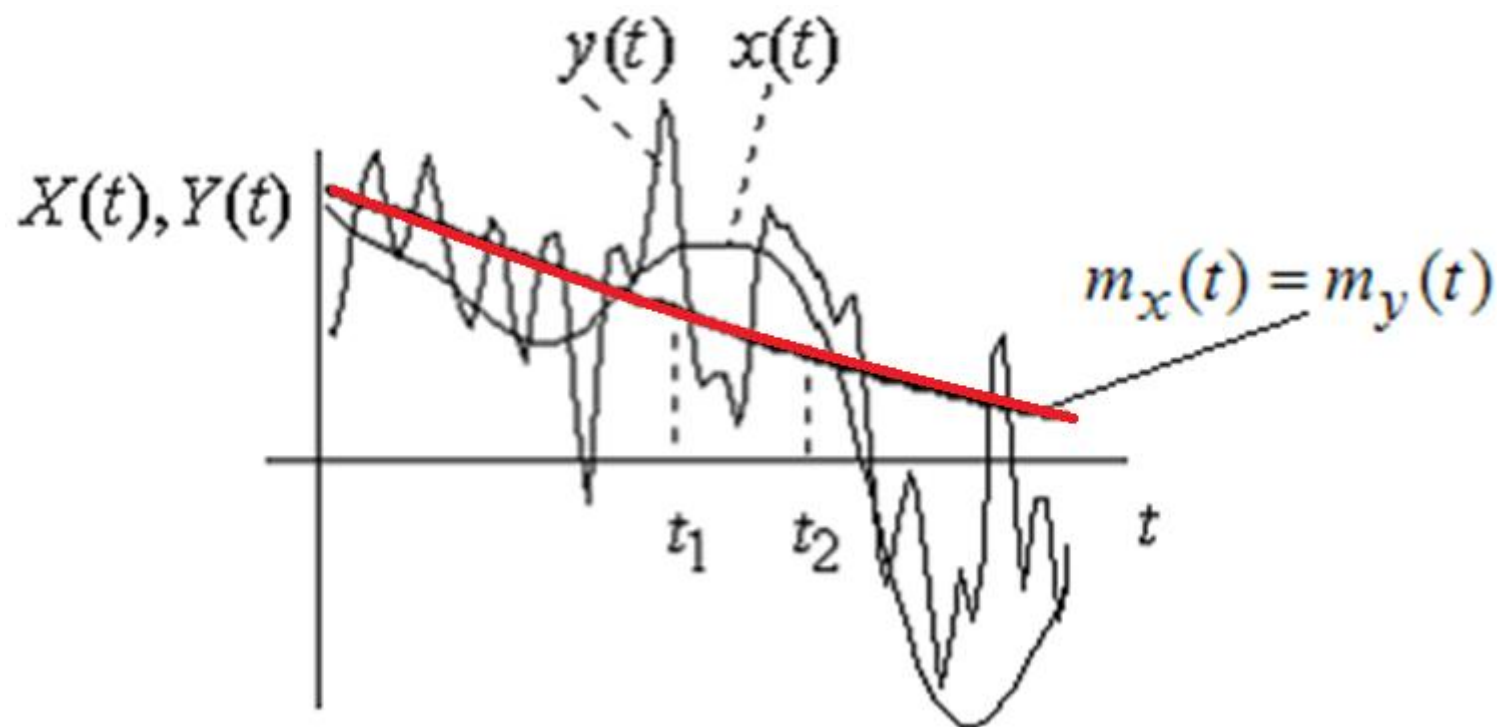


КОВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



КОВАРИАЦИОННАЯ (АВТОКОВАРИАЦИОННАЯ) ФУНКЦИЯ СП

Ковариационная (автоковариационная) функция СП:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \\ &= M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)] \end{aligned}$$

Корреляционная (автокорреляционная) функция СП:

$$B_X(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$$

Связь между корреляционной и ковариационной функциями:

$$K_X(t_1, t_2) = B_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

$$1. \quad K_x(t, t) = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t)$$

$$B_x(t, t) = M[(X(t))^2] = m_{2x}(t)$$

$$2. \quad K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$$

$$3. \quad Y(t) = X(t) + \phi(t) \Rightarrow K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$$

$$4. \quad Y(t) = \phi(t)X(t) \Rightarrow K_y(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_x(t_1, t_2)$$

$$5. \quad |K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}$$

Пример

Найти КФ СП $X(t) = U \cos(5t) + t^2$, где U – СВ, равномерно распределенная на интервале $[1, 5]$.

$$\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{U} \cos(5t)$$

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{U} \cos(5t_1) \overset{\circ}{U} \cos(5t_2)] = M[\overset{\circ}{U}^2] \cdot \cos(5t_1) \cos(5t_2) = \frac{4}{3} \cos(5t_1) \cos(5t_2).$$

НОРМИРОВАННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}} = \frac{B_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$$

1. $R_x(t, t) = \frac{K_x(t, t)}{D_x(t)} = 1$
2. $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$
3. $Y(t) = X(t) + \phi(t) \Rightarrow R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$
4. $Y(t) = \phi(t)X(t) \Rightarrow R_y(t_1, t_2) = \text{sign}(\phi(t_1)\phi(t_2))R_x(t_1, t_2)$
5. $|R_x(t_1, t_2)| \leq 1$

Пример

Найти нормированную КФ СП $X(t) = U \cos(5t) + t^2$, где U – СВ, равномерно распределенная на интервале $[1, 5]$

$$R_x(t_1, t_2) = \text{sign}(\cos(5t_1)\cos(5t_2))$$

ВЗАИМНАЯ КФ

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(Y(t_2) - m_y(t_2))]$$

$$K_{yx}(t_1, t_2) = M[(Y(t_1) - m_y(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))]$$

Взаимная корреляционная функция:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)]$$

Связь между взаимной корреляционной и взаимной ковариационной функциями:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = B_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)$$

Нормированная ВКФ:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \frac{B_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}}$$

СВОЙСТВА ВЗАИМНОЙ КФ

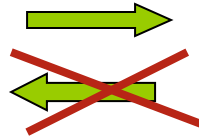
1. $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{yx}(t_2, t_1)$
2.
$$\left. \begin{aligned} S(t) &= X(t) + \phi(t) \\ Z(t) &= Y(t) + \phi(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_{sz}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_1, t_2)$$
3.
$$\left. \begin{aligned} S(t) &= X(t)\phi(t) \\ Z(t) &= Y(t)\phi(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_{sz}(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_{xy}(t_1, t_2)$$
4. $|K_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)} \quad |R_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1$

НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ СП

СП некоррелированы, если их ВКФ равна нулю:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{xy}(t_1, t_2) = 0 \\ B_{xy}(t_1, t_2) = m_x(t_1)m_y(t_2) \end{cases}$$

Статистически независимые СП



Некоррелированные СП

ПРИМЕР

Определить моментные функции суммы двух случайных процессов, если заданы их МО, КФ и ВКФ

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

$$1. \quad m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t)$$

$$2. \quad \overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad K_Z(t_1, t_2) &= M[(\overset{\circ}{X}(t_1) + \overset{\circ}{Y}(t_1))(\overset{\circ}{X}(t_2) + \overset{\circ}{Y}(t_2))] = \\ &= M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] + M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = \\ &= K_X(t_1, t_2) + K_{XY}(t_2, t_1) + K_{XY}(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) \end{aligned}$$

$$4. \quad D_Z(t) = D_X(t) + D_Y(t) + 2K_{XY}(t, t)$$

Для некоррелированных СП:

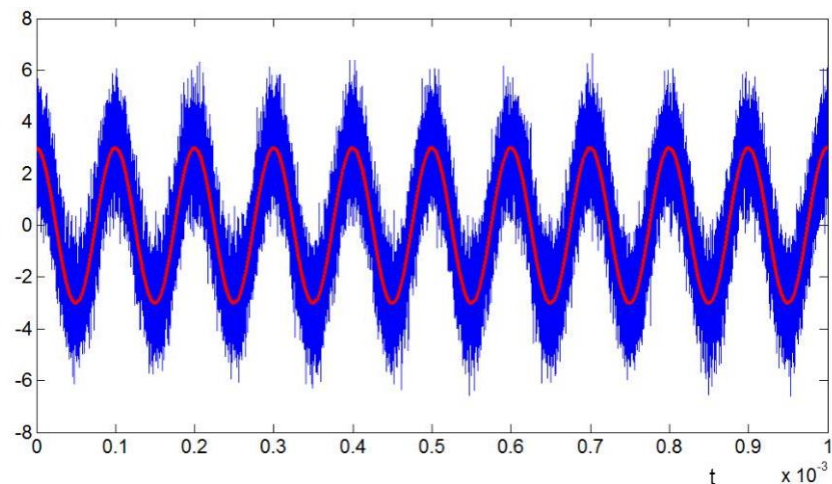
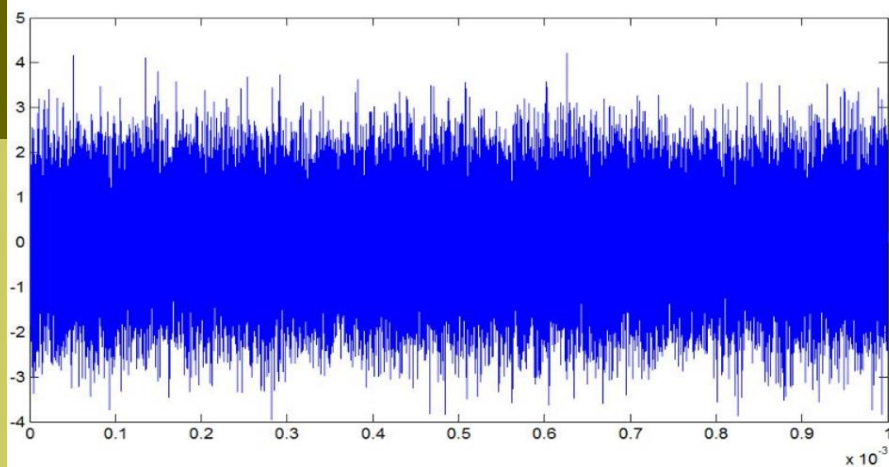
$$K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2)$$

$$D_Z(t) = D_X(t) + D_Y(t)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СП



СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ССП)



СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ССП)

Строго стационарный (стационарный в узком смысле) СП:

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; 0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1)$$

Свойства строго стационарных СП:

1. $w(x_1; t_1) = w(x_1; t_1 + \tau) = w(x_1)$
2. $m_x(t) = m_x$ 3. $D_x(t) = D_x$
4. $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = w_2(x_1, x_2; t_2 - t_1)$ 5. $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau)$

СП называется **стационарным в широком смысле**, если :

1. $m_x(t) = m_x$ 2. $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau)$

ПРИМЕР

Установить, является ли СП $X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t + c$ стационарным в широком смысле, если: U и V – некоррелированные СВ; c – неслучайная величина;

$$D[U] = D[V] = D; \quad M[U] = M[V] = 0$$

$$m_x(t) = c \quad \overset{\circ}{X}(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$$

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)]$$

$$= M[U^2] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + M[V^2] \sin \omega t_1 \sin \omega t_2$$

$$= D \cos \omega(t_2 - t_1) = D \cos \omega \tau = K_x(\tau)$$

СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНОГО В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СП

1. $D_x(t) = K_x(t, t) = K_x(t - t) = K_x(0) = D_x$

2. $B_x(0) = m_{2x} \qquad R_x(0) = 1$

3. $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$

4. $|K_x(\tau)| \leq K_x(0) = D_x \qquad |B_x(\tau)| \leq B_x(0) = m_{2x}$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = 1$$

5. $K_x(\tau) = B_x(\tau) - m_x^2$

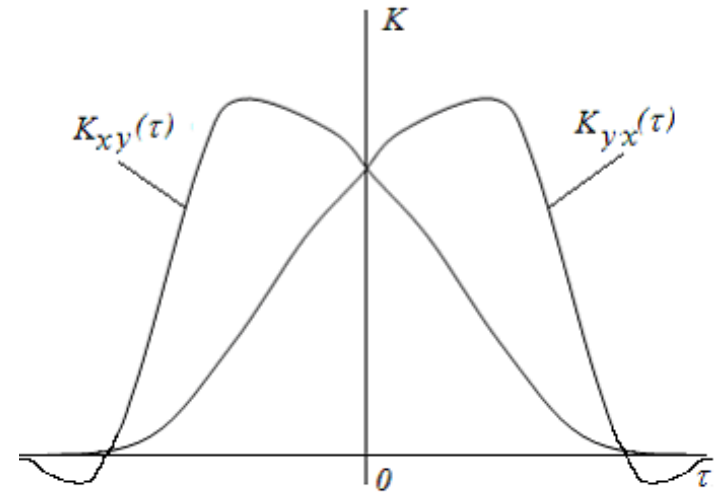
$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x} = \frac{B_x(\tau) - m_x^2}{D_x}$$

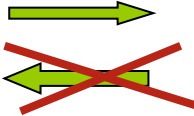
СТАЦИОНАРНО СВЯЗАННЫЕ СП

Два **ССП** называют **стационарно связанными**, если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов

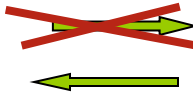
Свойства стационарно связанных СП:

1. $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_2 - t_1) = K_{xy}(\tau)$
2. $|K_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{D_x D_y}$
3. $K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau)$



Строго стационарный СП 

Стационарный в широком смысле

Стационарные СП 

Стационарно связанные СП

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СП



ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ЭСП)

Начальные моменты реализации ССП: $\langle x^k(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^k(t) dt$

Математическое ожидание
(постоянная составляющая
реализации):

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Средний квадрат реализации
(полная мощность
реализации):

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Дисперсия (средняя
мощность флуктуаций): $\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 dt$

Корреляционная функция: $\langle x(t + \tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau)x(t) dt$

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ССП называется **эргодическим в строгом смысле**, если с вероятностью единица усреднение по всей совокупности реализаций дает тот же результат, что и усреднение по времени:

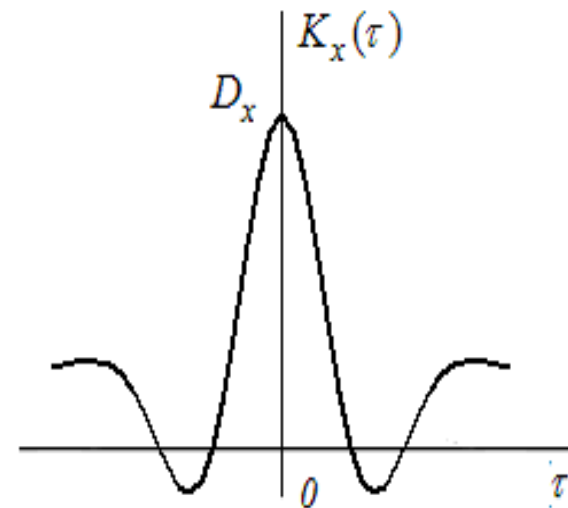
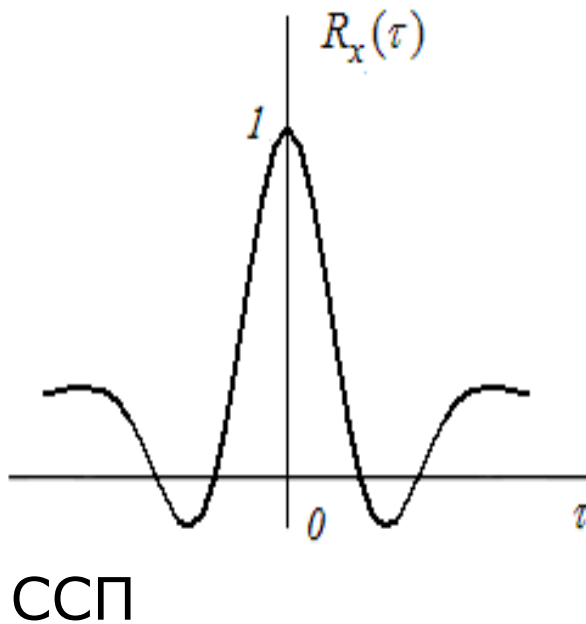
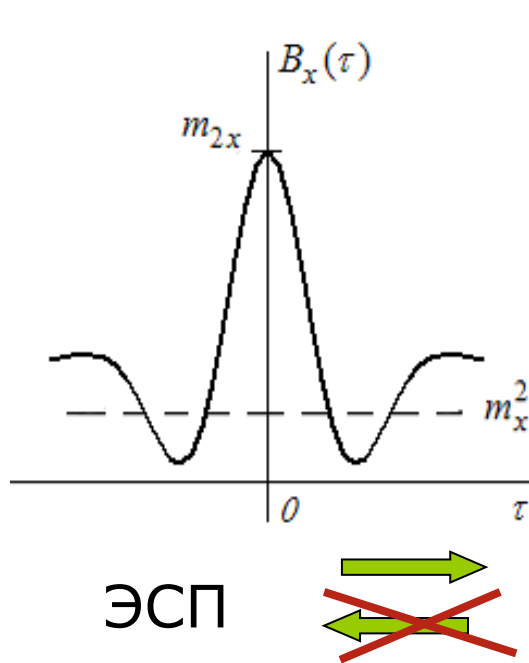
$$M[X(t)^k] = \langle x(t)^k \rangle$$

Достаточное условие эргодичности:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} w_2(x_1, x_2; \tau) = w_1(x_1)w_1(x_2)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = m_x^2$$

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ



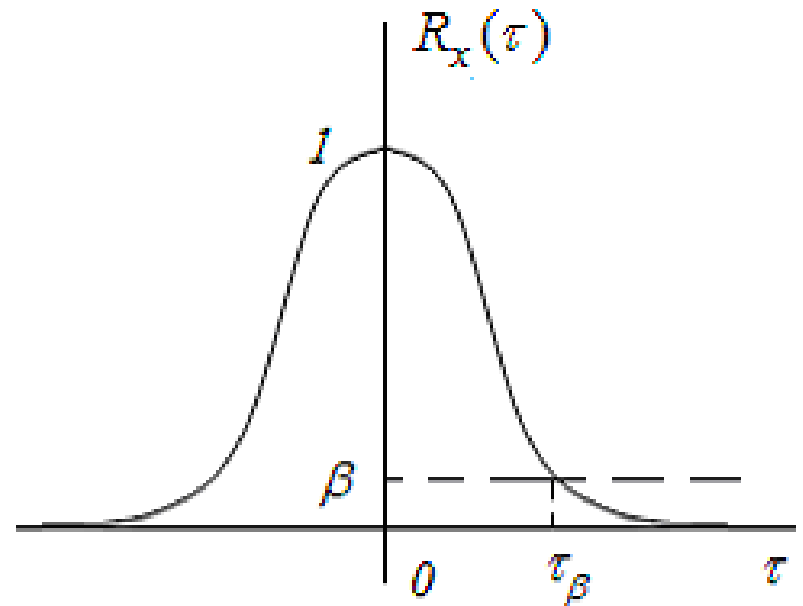
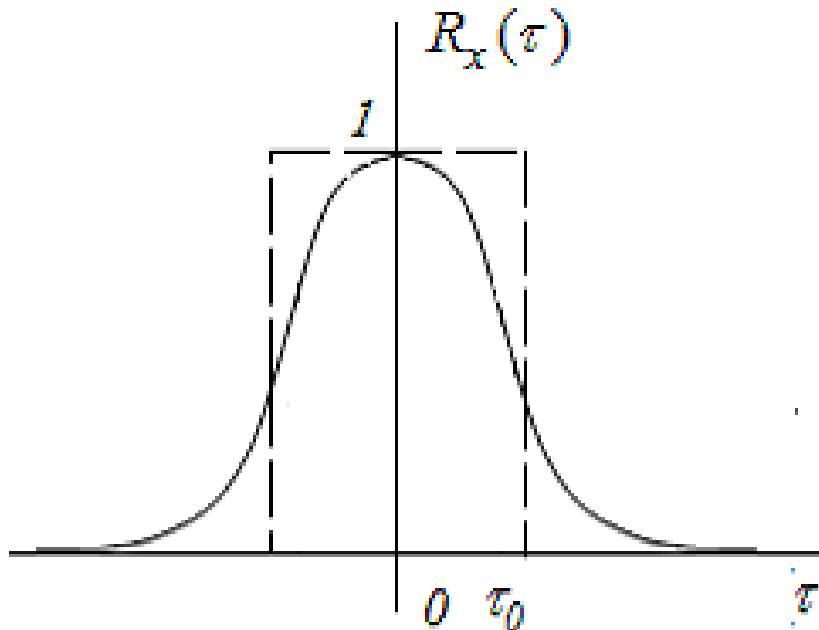
Пример

Дано $Z(t) = X(t) + Y$, $X(t)$ – стационарный СП, Y – СВ. $Z(t)$ – ЭСП?

ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \frac{\int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau}{D_x}$$

$$R_x(\tau_\beta) = \beta$$



ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

Пример Найти интервалы корреляции $\tau_0, \tau_{0,1}$ ЭСП с КФ

$$B_x(\tau) = A \exp(-\alpha |\tau|) + C$$

$$B_x(\infty) = m_1^2 = C$$

$$K_x(\tau) = B_x(\tau) - m_1^2 = A \exp(-\alpha |\tau|)$$

$$K_x(0) = D_x = A$$

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x} = \exp(-\alpha |\tau|)$$

ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ СП

Пример Найти интервалы корреляции $\tau_0, \tau_{0.1}$ ЭСП с КФ

$$B_x(\tau) = A \exp(-\alpha |\tau|) + C$$

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha |\tau|) d\tau = \frac{1}{\alpha} \qquad \tau_{\beta} = -\frac{\ln(\beta)}{\alpha}$$

$$\tau_{0.1} = -\frac{\ln(0.1)}{\alpha} = \frac{2.3}{\alpha}$$

$$\tau_{0.05} = -\frac{\ln(0.05)}{\alpha} = \frac{2.99}{\alpha}$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАДЕРЖКИ

$s_1(t)$ - первый сигнал; $M[s_1(t)] = 0$

$s_2(t) = s_1(t + \tau_0) + v(t)$ - второй сигнал. $M[v(t)] = 0$

$$K_{s_2 s_1}(\tau) = M[s_2(t)s_1(t + \tau)] = M[(s_1(t + \tau_0) + v(t))s_1(t + \tau)] =$$

$$M[s_1(t + \tau_0)s_1(t + \tau)] + M[v(t)s_1(t + \tau)] = K_{s_1}(\tau_0 - \tau)$$

$$\tau = \tau_0 \quad \longrightarrow \quad K_{s_2 s_1}(\tau = \tau_0) = K_{s_1}(0) = \max$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО -ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА

Первое изображение



$$I_1(i_1, i_2)$$

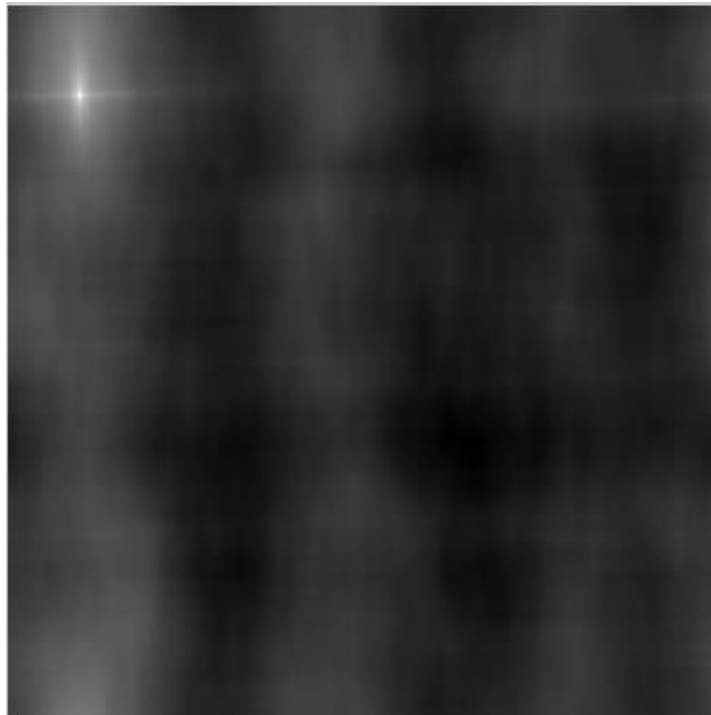
Второе изображение



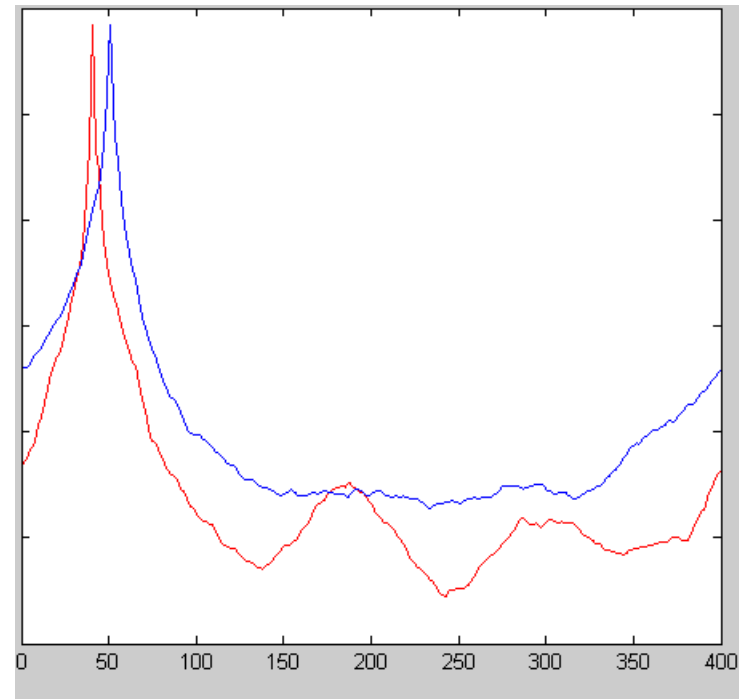
$$I_2(i_1, i_2) = I_1(i_1 + 50, i_2 + 40) + v(i_1, i_2)$$

$$q = 2$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВКФ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО -ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА



$K_{I_1 I_2}(i_1, i_2)$



Одномерные сечения $K_{I_1 I_2}(i_1, i_2)$