КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Система называется **линейной**, если для нее справедлив **принцип суперпозиции :**

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t) \qquad y(t) = L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[x_i(t)]$$

Стационарная ЛС (система с постоянными параметрами):

$$y(t+\tau) = L[x(t+\tau)]$$

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Комплексная частотная характеристика ЛС:

$$\dot{H}(f) = C(f)\exp(j\varphi(f))$$

$$C(f) = |\dot{H}(f)|$$ - АЧХ

$$\varphi(f) = \arg \dot{H}(f)$$ - ФЧХ

Отклик ЛС :

$$y(t) = F^{-1}\{\dot{S}_y(f)\} = F^{-1}\{\dot{H}(f)\dot{S}_x(f)\}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{S}_y(f) &= F\{y(t)\} \\ \dot{S}_x(f) &= F\{x(t)\} \end{aligned}\right\}$$

спектральные плотности входного и выходного процессов

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Отклик ЛС :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) \otimes x(t)$$

Каузальная ЛС:

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Если *x(t)=0* при *t<0* , то

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СП В СТАЦИОНАРНЫХ ЛС

СТАЦИОНАРНАЯ ЛС

$$Y(t) = L[X(t)] = h(t) \otimes X(t)$$

Свойство ЛС: $M[L[\cdot]] = L[M[\cdot]]$

ЗАДАЧА АНАЛИЗА

По заданным характеристикам СП $X(t)$ и характеристикам ЛС найти характеристики СП $Y(t)$.

Например: $m_y(t),\ K_y(t_1, t_2),\ G_y(f),\ K_{xy}(t_1, t_2),\ G_{xy}(f).$

МО ОТКЛИКА ЛС

Некаузальная ЛС: $m_y(t) = M[Y(t)] = M\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)M[X(t-\tau)]d\tau = m_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_x H(0) = m_y$$

Каузальная ЛС (*h(t)=0, t<0*):

$$m_y = m_x \int\limits_0^{\infty} h(\tau)d\tau = m_x H(0)$$

Каузальная ЛС и (*X(t)=0, t<0*):

$$m_y(t) = M[\int\limits_0^t h(\tau)X(t-\tau)d\tau] = m_x \int\limits_0^t h(\tau)d\tau$$

МО ОТКЛИКА ЛС

выводы

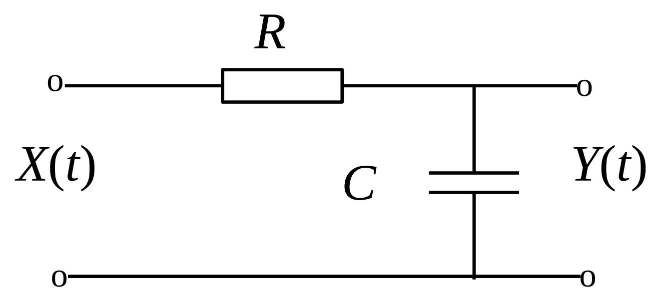
Если на вход стационарной ЛС воздействует стационарный СП, то

1. МО СП на выходе ЛС в установившемся режиме постоянно;
2. МО СП на выходе ЛС в установившемся режиме равно произведению МО входного СП на коэффициент передачи ЛС по постоянной составляющей

$$\boxed{m_y = m_x H(0)}$$

ПРИМЕР

На интегрирующую *RC*-цепь с момента $t=0$ воздействует СП с известным МО. При $t<0$ емкость разряжена. Найти МО выходного процесса .



$$h(\tau)=\alpha\exp(-\alpha\tau),\ \tau\geq 0$$

$$\dot{H}(f)=\frac{\alpha}{\alpha+j\cdot 2\pi f}$$

$$\alpha=\tau_{\text{ц}}^{-1}=(RC)^{-1}$$

$$m_y(t)=\begin{cases} 0,\ t<0. \\ m_x\int\limits_0^t \alpha\exp(-\alpha\tau)d\tau=m_x(1-\exp(-\alpha t)),\ t\geq 0, \end{cases}$$

при $t\to\infty$ $\quad m_y(\infty)=m_y=m_x$

$$m_y(\tau_{\text{п}})=0.999m_x \qquad \tau_{\text{п}}\approx\frac{8}{\alpha}=8\tau_{\text{ц}}$$

КФ ОТКЛИКА ЛС

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\overset{\circ}{X}(t-\tau)d\tau$$

$$K_y(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)M\left[\overset{\circ}{X}(t_1-\tau_1)\overset{\circ}{X}(t_2-\tau_2)\right]d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(t_2-t_1-\tau_2+\tau_1)d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau-\tau_2+\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \quad =K_y(\tau)$$

$$\boxed{K_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau-\tau_2+\tau_1)d\tau_1 d\tau_2}$$

$$\boxed{D_y=K_y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}$$

СПМ ОТКЛИКА ЛС

$$G_y(f) = F\{K_y(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)F\{K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1)\}d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\left(\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1)e^{-j\cdot 2\pi f\tau}d\tau\right)d\tau_1 d\tau_2$$

Замена переменных: $\nu = \tau - \tau_2 + \tau_1$

$$G_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)e^{j\cdot 2\pi f\tau_1}d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)e^{-j\cdot 2\pi f\tau_2}d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\nu)e^{-j\cdot 2\pi f\nu}d\nu$$

$$\boxed{G_y(f) = \dot{H}(-f)\dot{H}(f)\tilde{G}_x(f) = C^2(f)G_x(f)}$$

МОМЕНТЫ ОТКЛИКА ЛС

Дисперсия

1. $$D_y = K_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

2. $$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df \quad = \int_{-\infty}^{\infty} C^2(f)G_x(f)df$$

ВЗАИМНЫЕ КФ И СПМ ПРОЦЕССОВ НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ ЛС

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\overset{\circ}{X}(t-\tau)d\tau$$

Некаузальная ЛС

$$K_{xy}(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)\overset{\circ}{X}(t_2-\tau_2)d\tau_2\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2 \quad = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)K_x(\tau-\tau_2)d\tau_2$$

$$\boxed{K_{xy}(\tau) = h(\tau)\otimes K_x(\tau)}$$

$$\boxed{\dot{G}_{xy}(f) = \dot{H}(f)G_x(f)}$$

ВОЗДЕЙСТВИЕ БЕЛОГО ШУМА НА ЛС

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad G_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$D_y(t) = \int_0^t\int_0^t h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \Rightarrow \boxed{D_y(t) = \frac{N_0}{2}\int_0^t h^2(\tau)d\tau}$$

Установившийся режим. Каузальная ЛС

$$K_y(\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \qquad D_y = \frac{N_0}{2}\int_0^\infty h^2(\tau)d\tau$$

$$K_y(\tau) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau + \tau_1)d\tau_1, \ \tau \ge 0, \\ \dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_{-\tau}^\infty h(\tau_1)h(\tau + \tau_1)d\tau_1, \ \tau < 0. \end{cases}$$

ВОЗДЕЙСТВИЕ БЕЛОГО ШУМА НА ЛС. Установившийся режим. Некаузальная ЛС

$$K_y(\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1)d\tau_1 d\tau_2$$

$$\boxed{K_y(\tau) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau + \tau_1)d\tau_1}$$

$$\boxed{D_y = K_y(0) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau)d\tau}$$

$$G_y(f) = C^2(f)G_x(f)$$

$$\boxed{G_y(f) = \frac{N_0}{2}C^2(f)}$$

$$K_y(\tau) = F^{-1}\{G_y(f)\}$$

$$\boxed{K_y(\tau) = \frac{N_0}{2}2\int_0^{\infty} C^2(f)\cos(2\pi f\tau)df,}$$

$$\boxed{D_y = K_y(0) = \frac{N_0}{2}2\int_0^{\infty} C^2(f)df}$$

ВОЗДЕЙСТВИЕ БЕЛОГО ШУМА НА ЛС. ВЗАИМНЫЕ КФ И СПМ

$$K_{xy}(\tau) = h(\tau) \otimes K_x(\tau)$$

некауз.система

$$\boxed{K_{xy}(\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau)}$$

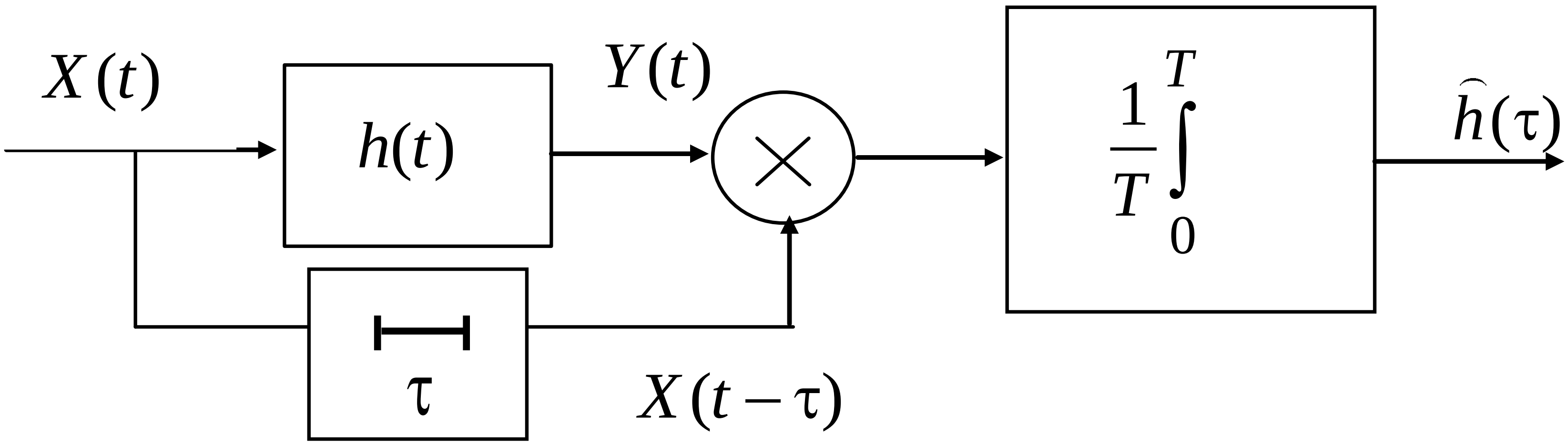
кауз. система

$$\boxed{K_{xy}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} h(\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}}$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = \dot{H}(f) G_x(f)$$

$$\boxed{\dot{G}_{xy}(f) = \frac{N_0}{2} \dot{H}(f)}$$

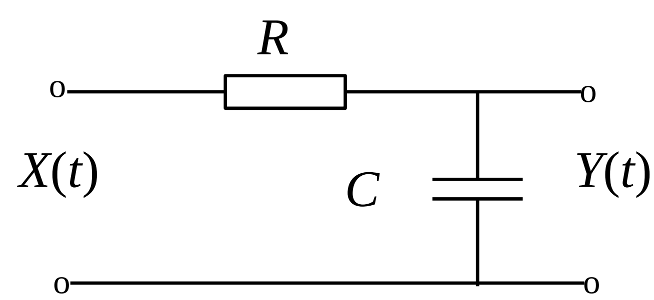
ИЗМЕРЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛС



ПРИМЕР

На интегрирующую *RC*-цепь с момента $t=0$ воздействует белый шум с известным МО. При $t<0$ емкость разряжена. Найти спектрально-корреляционные характеристики выходного процесса

$$h(\tau) = \alpha \exp(-\alpha\tau), \; \tau \geq 0$$



$$\dot{H}(f) = \frac{\alpha}{\alpha + j \cdot 2\pi f} \qquad \alpha = \tau_{\text{ц}}^{-1} = (RC)^{-1}$$

РЕШЕНИЕ

Дисперсия в переходном режиме:

$$D_y(t) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_0^t h^2(\tau)d\tau, \; t \ge 0, \\ 0, \; t < 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2}\dfrac{\alpha}{2}(1 - \exp(-\alpha \cdot 2t)), \; t \ge 0, \\ 0, \; t < 0. \end{cases}$$

Нарастает в два раза быстрее, чем МО:

$$0.999 = (1 - \exp(-2\alpha\tau_n)) \quad \Longrightarrow \quad \tau_{\text{п}} \approx \frac{4}{\alpha} = 4\tau_{\text{ц}}$$

Дисперсия в установившемся режиме: $D_y = D_y(\infty) = \dfrac{N_0}{2}\dfrac{\alpha}{2}$

РЕШЕНИЕ

АЧХ интегрирующей цепи (установившийся режим):

$$C^2(f) = \dot{H}(f)\dot{H}^*(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

СПМ и КФ белого шума:

$$G_x(f) = \frac{N_0}{2} + m_x^2\delta(f) \qquad B_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) + m_x^2$$

СПМ выходного процесса:

$$G_y(f) = G_x(f)C^2(f) = \frac{N_0}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + m_x^2\delta(f)\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$= \frac{N_0}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + m_x^2\delta(f)$$

РЕШЕНИЕ

Ковариационная функция выходного процесса:

$$K_y(\tau) = \frac{N_0}{2} F^{-1}\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}\right\} = \frac{N_0}{2}\frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha\,|\,\tau\,|)$$

Корреляционная функция выходного процесса:

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2}\frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha\,|\,\tau\,|) + m_x^2$$

Нормированная КФ:

$$R_y(\tau) = \frac{K_y(\tau)}{K_y(0)} = \exp(-\alpha\,|\,\tau\,|)$$

РЕШЕНИЕ

Интервал корреляции выходного процесса:

1-й способ

$$\tau_0 = \int_0^\infty \left|R_y(\tau)\right| d\tau = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} = \tau_{ц}$$

2-й способ

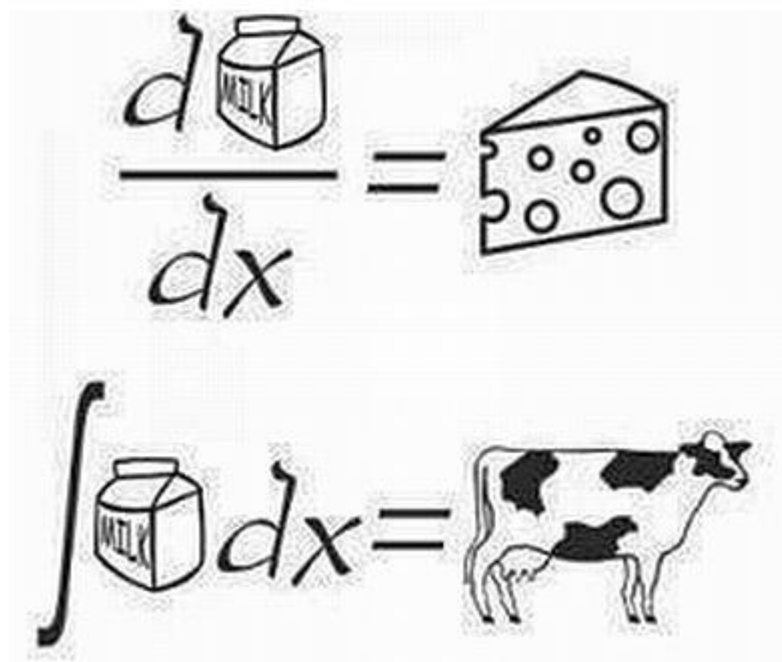
$$R_x(\tau_\beta) = \beta \qquad \tau_\beta = -\frac{\ln(\beta)}{\alpha};$$

Взаимные КФ и СПМ

$$K_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} h(\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \alpha \exp(-\alpha\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = \frac{N_0}{2} \dot{H}(f) = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{\alpha + j \cdot 2\pi f}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СП

Производная СП

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

Последовательность СВ $X_1, X_2, ..., X_n$ сходится в среднеквадратическом к СВ X , если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} M\left[\left(X_n - X\right)^2\right] = 0$$

СП $X(t)$ дифференцируем, если существует такой СП $X'(t)$, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\left(\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} - X'(t)\right)^2\right] = 0$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СП

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

МО производной СП

$$m_{x'}(t) = M\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{dM\left[X(t)\right]}{dt} = m'_x = 0$$

КФ производной СП

$$K_{x'}(t_1, t_2) = M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t_1)}{dt_1}\frac{d\overset{\circ}{X}(t_2)}{dt_2}\right] = M\left[\frac{\partial^2\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]}{\partial t_1 \partial t_2}\right] = \left[\frac{\partial^2\left[M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]\right]}{\partial t_1 \partial t_2}\right]$$

$$= \frac{\partial^2\left[K_x(\tau)\right]}{\partial t_1 \partial t_2}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СП

t_1 и t_2 – независимые переменные;

$$\tau = t_2 - t_1 \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -1 \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = 1$$

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \left[K_x(\tau) \right]}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 \left[K_x(\tau) \right]}{\partial \tau \partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = -\frac{\partial^2 \left[K_x(\tau) \right]}{\partial \tau^2}$$

$$\boxed{K_{x'}(\tau) = -K_x''(\tau)} \qquad \boxed{D_{x'} = K_{x'}(0) = -K_x''(\tau)\big|_{\tau=0}}$$

Чтобы стационарный СП был дифференцируем, достаточно существования второй производной от его КФ при нулевом значении аргумента

СПМ ПРОИЗВОДНОЙ

$$\dot{H}(f) = j2\pi f \qquad C^2(f) = \left|\dot{H}(f)\right|^2 = 4\pi^2 f^2 \qquad H(0) = 0$$

$$G_{x'}(f) = C^2(f) G_x(f) = 4\pi^2 f^2 G_x(f) \qquad G_{x'}(0) = 0$$

$$D_{x'} = 2\int_0^\infty G_{x'}(f)df = 2\int_0^\infty 4\pi^2 f^2 G_x(f)df$$

$$G_{xx'}(f) = \dot{H}(f) G_x(f) = j2\pi f G_x(f)$$

$$K_{xx'}(\tau) = F^{-1}\{G_{xx'}(f)\} = F^{-1}\{j2\pi f G_x(f)\} = K'_x(\tau)$$

ПРИМЕР

Стационарный СП с КФ: $B_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2\tau^2} + m_x^2$

$$G_x(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} D_x e^{-(\pi f/\alpha)^2} + m_x^2 \delta(f)$$

МО производной СП: $\boxed{m_{x'} = 0}$

Взаимная КФ: $\boxed{K_{xx'}(\tau) = B'_x(\tau) = -D_x 2\alpha^2 \tau e^{-\alpha^2\tau^2}}$

КФ производной: $B''_x(\tau) = -D_x 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2\tau^2) e^{-\alpha^2\tau^2}$

$$\boxed{B_{x'}(\tau) = K_{x'}(\tau) = -B''_x(\tau) = D_x 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2\tau^2) e^{-\alpha^2\tau^2}}$$

$D_{x'} = K_{x'}(0) = 2\alpha^2 D_x$ $\qquad$ $R_{x'}(\tau) = (1 - 2\alpha^2\tau^2) e^{-\alpha^2\tau^2}$

ПРИМЕР

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2} \qquad R_{x'}(\tau) = (1-2\alpha^2\tau^2)e^{-\alpha^2\tau^2}$$

$$\tau_{0x} = \int_0^\infty |R_x(\tau)|\, d\tau = \int_0^\infty e^{-\alpha^2\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\alpha} = 0.89\frac{1}{\alpha}$$

$$\tau_{0x'} = \int_0^\infty |R_{x'}(\tau)|\, d\tau = \int_0^\infty |(1-2\alpha^2\tau^2)e^{-\alpha^2\tau^2}|\, d\tau = \sqrt{\frac{2}{e}}\frac{1}{\alpha} = 0.86\frac{1}{\alpha}$$

ПРИМЕР

СПМ производной СП:

$$G_{x'}(f) = 4\pi^2 f^2 G_x(f) \qquad = 4\pi^2 f^2 D_x \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\pi f/\alpha)^2} + \cancel{4\pi^2 m_x^2 \delta(f) f^2}$$

Взаимная СПМ:

$$G_{xx'}(f) = j2\pi f G_x(f) \qquad = j2\pi f D_x \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\pi f/\alpha)^2} + \cancel{j2\pi f m_x^2 \delta(f)}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СП

$$\int X(t)dt = \underset{\max \Delta t_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_i X(t_i)\Delta t_i$$

$$m_y(t) = M\left[\int_0^t X(t)dt\right] = \int_0^t M\left[X(t)\right]dt = m_x \int_0^t dt = m_x t$$

$$K_y(t_1, t_2) = M\left[\int_0^{t_1} \overset{\circ}{X}(t_1)dt_1 \int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(t_2)dt_2\right] = M\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)dt_1 dt_2\right]$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]dt_1 dt_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(t_2 - t_1)dt_1 dt_2$$

$$D_y(t) = 2\int_0^t (t - \tau)K_x(\tau)d\tau$$

ПРИМЕР

Найти ковариационную функцию интеграла от белого шума с ковариационной функцией $K_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

$$K_y(t_1,t_2) = \frac{N_0}{2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\delta(t_2 - t_1)dt_1dt_2$$

Пусть $t_1 > t_2:$ $K_y(t_1,t_2) = \frac{N_0}{2}\int_0^{t_2}dt_2 = \frac{N_0}{2}t_2$

Пусть $t_2 > t_1:$ $K_y(t_1,t_2) = \frac{N_0}{2}\int_0^{t_1}dt_1 = \frac{N_0}{2}t_1$

$$K_y(t_1,t_2) = \frac{N_0}{2}\min(t_1,t_2) \qquad D_y(t) = K_y(t,t) = \frac{N_0}{2}t$$