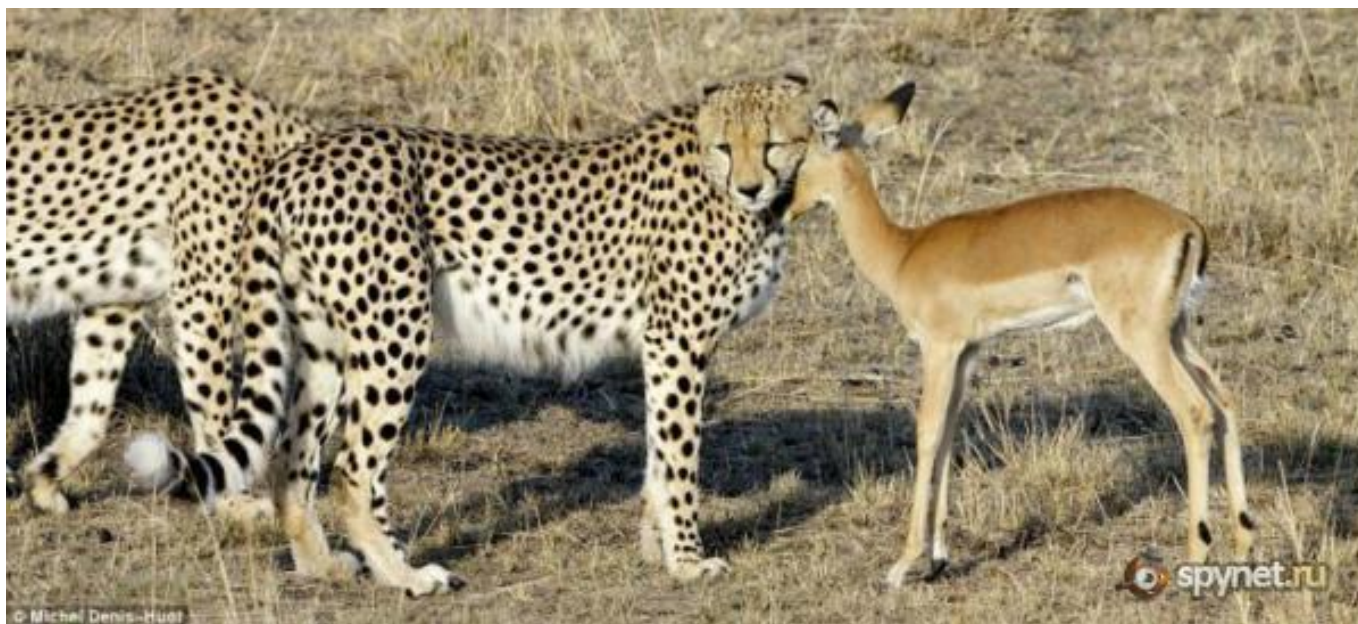
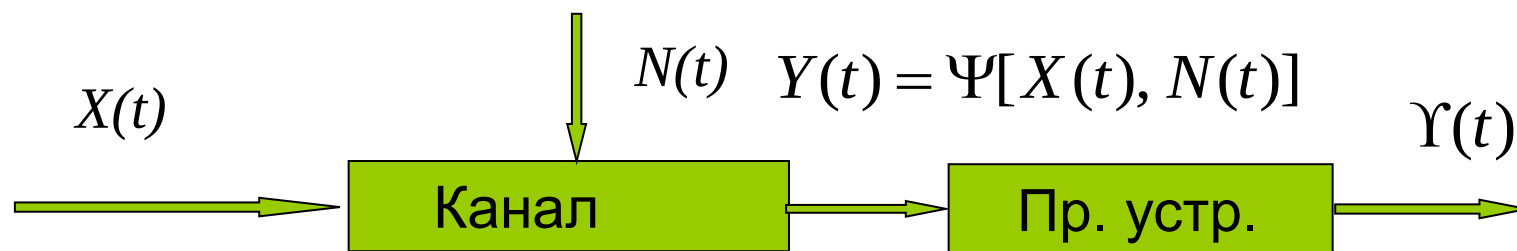


ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛС



ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛС

Статистический синтез **оптимальных** (наилучших) **методов** состоит в отыскании методов, которые обеспечивали бы **наилучший** (в некотором смысле) прием сигналов при наличии помех.



В результате синтеза должен быть получен оптимальный (в смысле выбранного критерия) алгоритм преобразования $Y(t)$ в $\Upsilon(t)$

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛС

1. Априорная информация в виде математических моделей

$$\Psi[\cdot], X(t), N(t).$$

2. Критерии оптимальности (качества).

3. Ограничения на синтез ОС.

4. Синтез ОС.

5. Анализ ОС.

6. Точная или приближенная реализация ОС.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

1. Сигнал и помеха случайные процессы

- Спектрально корреляционные характеристики сигнала и помехи
- Распределения сигнала и помехи

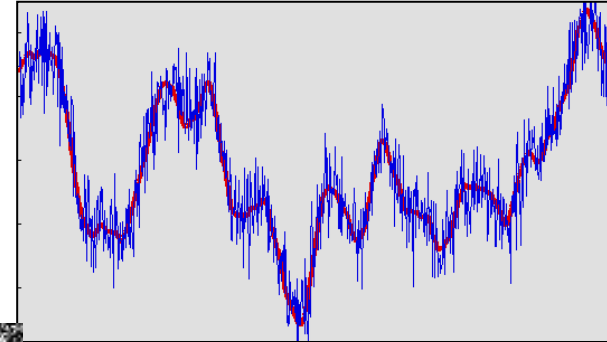
2. Детерминированный сигнал

- Характеристики сигнала – форма, длительность, частота, начальная фаза и т.п.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

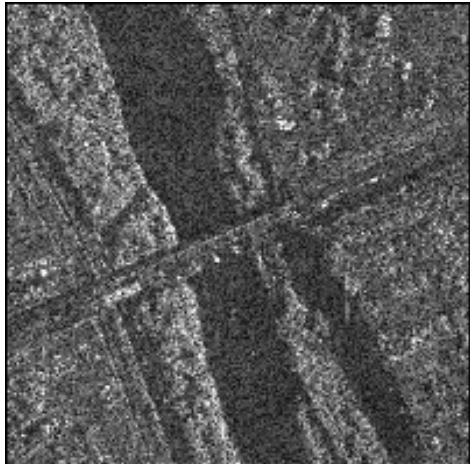
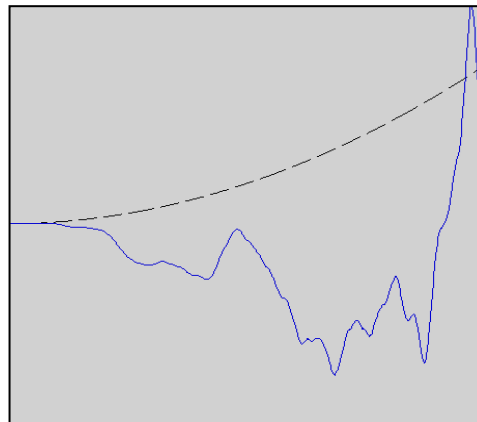
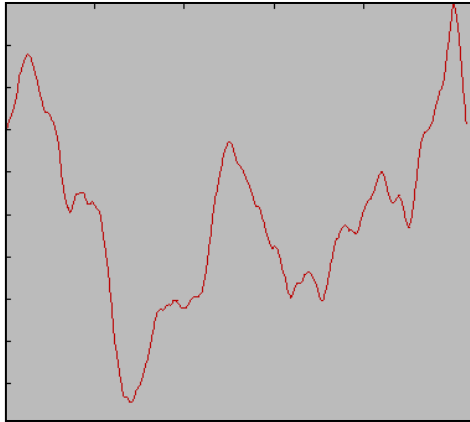
- Аддитивная помеха

$$Y(t) = X(t) + N(t)$$



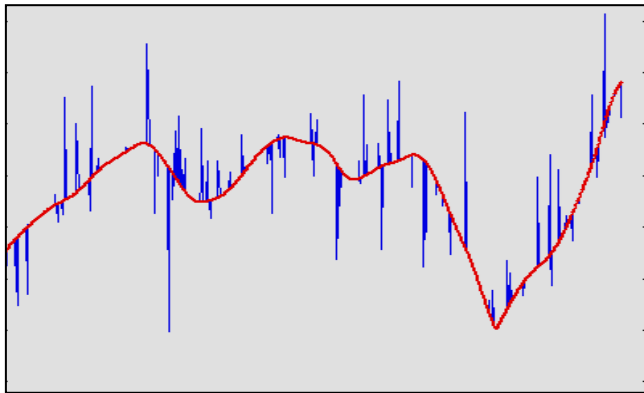
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

- Мультипликативная помеха $Y(t) = X(t) \cdot N(t)$



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

- Импульсная помеха



$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & \text{с вероятностью } p; \\ N(t) & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$



КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

1. Минимум среднеквадратической ошибки оценивания

$$Y(t) = \hat{X}(t) \quad - \text{оценка СП}$$

Для случайного процесса:

$$\Delta(t) = X(t) - \hat{X}(t) \quad - \text{мгновенная ошибка оценивания}$$

$$M[\Delta^2(t)] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2] = \min_{h(\tau)}$$

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

2. Максимум отношения сигнал/шум

Для детерминированного сигнала

$$Y(t) = s_{\text{ВХ}}(t) + N_{\text{ВХ}}(t)$$

$$\Upsilon(t) = s_{\text{ВЫХ}}(t) + N_{\text{ВЫХ}}(t)$$



$$q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{h(\tau)}$$

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛС

ОГРАНИЧЕНИЯ НА СИНТЕЗИРУЕМУЮ СИСТЕМУ

1. Линейная система
2. Стационарная система
3. Каузальная (физически осуществимая) система

СИНТЕЗ ОС

В результате синтеза должен был получен оптимальный (в смысле выбранного критерия) алгоритм преобразования $Y(t)$ в $\Upsilon(t)$

АНАЛИЗ ОС

Определяются количественные оценки качества (потенциально достижимое) ОС

1. Для определения предела, к которому необходимо стремиться
2. Для сравнения с существующими аналогами

ТОЧНАЯ ИЛИ ПРИБЛИЖЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР



ФИЛЬТР, МАКСИМИЗИРУЮЩИЙ ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ (СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР)

1. Априорная информация

Наблюдаемый сигнал: $Y(t) = s_{\text{BX}}(t) + N_{\text{BX}}(t)$

$s_{\text{BX}}(t)$ - детерминированный сигнал

$N_{\text{BX}}(t)$ - белый шум с КФ

$$K_{n_{\text{BX}}}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

2. Критерий оптимальности: $q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{h_{\text{сф}}(\tau)}$

3. Ограничения на синтез ОС: каузальный линейный фильтр с постоянными параметрами

КЧХ фильтра

$$\dot{H}_{\text{сф}}(f) = C_{\text{сф}}(f) \exp(j\varphi_{\text{сф}}(f))$$

ИХ фильтра

$$h_{\text{сф}}(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0$$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Спектральная плотность входного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{BX}}(f) = F\{s_{\text{BX}}(t)\} = S_{\text{BX}}(f) \exp(j\varphi_{\text{BX}}(f))$$

Спектральная плотность выходного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = \dot{H}_{\text{сф}}(f) \dot{S}_{\text{BX}}(f) = C_{\text{сф}}(f) S_{\text{BX}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{BX}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f)))$$

Сигнал на выходе фильтра:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = F^{-1} \left\{ \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}(f) S_{\text{BX}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{BX}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f) + 2\pi ft)) df$$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Сигнал на выходе фильтра при $t=t_0$:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}(f) S_{\text{ВХ}}(f) \exp(j(\varphi_{\text{ВХ}}(f) + \varphi_{\text{сф}}(f) + 2\pi f t_0)) df$$

Дисперсия шума на выходе фильтра: $D_{n_{\text{ВЫХ}}} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{сф}}^2(f) df$

$$q^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \max_{\dot{H}_{\text{сф}}(f)}$$

1. $\varphi_{\text{сф}}(f) = -\varphi_{\text{ВХ}}(f) - 2\pi f t_0$

2. $C_{\text{сф}}(f) = B S_{\text{ВХ}}(f)$

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА (предыдущая лекция)

КОМПЛЕКСНАЯ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА (СФ)

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\text{сф}}(f) &= BS_{\text{ВХ}}(f) \exp(-j(\varphi_{\text{ВХ}}(f) + 2\pi ft_0)) = \\ &= BS_{\text{ВХ}}(f) \exp(-j \cdot \varphi_{\text{ВХ}}(f)) \exp(-j \cdot 2\pi ft_0) \\ &= B\dot{S}_{\text{ВХ}}^*(f) \exp(-j \cdot 2\pi ft_0)\end{aligned}$$

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СФ

$$h_{\text{сф}}(t) = F^{-1}\{\dot{H}_{\text{сф}}(f)\} = Bs_{\text{ВХ}}(t_0 - t)$$

$$t_0 \geq t_c$$

ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СИНТЕЗА

$$\dot{H}_{\text{сф}}(f) = B \dot{S}_{\text{ВХ}}^*(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0)$$

$$h_{\text{сф}}(t) = B s_{\text{ВХ}}(t_0 - t)$$

$$t_0 \geq t_c$$

$$B > 0$$

1. Спектральная плотность выходного сигнала

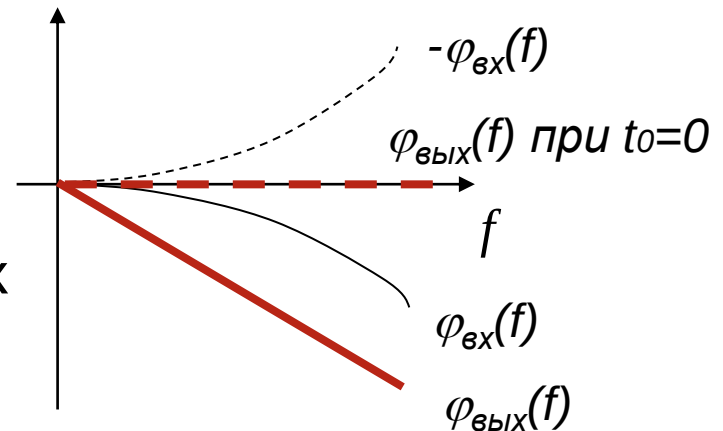
$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = B S_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0) \rightarrow \varphi_{\text{ВЫХ}}(f) = -2\pi f t_0$$

Компенсируются начальные фазы
в спектре входного сигнала

2. СФ является оптимальным для всех
сигналов одной и той же формы, т.е.
отличающихся от сигнала только
постоянным множителем

3. Если $s_{\text{вх}}(t)$ – четная функция относительно $t_c/2$

$$h_{\text{сф}}(t) = B s_{\text{вх}}(t)$$



АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Сигнал на выходе СФ

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) = BS_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f t_0)$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = F^{-1} \left\{ \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(f) \right\} = B \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}^2(f) \exp(-j \cdot 2\pi f (t_0 - t)) df$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = B \Theta_{S_{\text{ВХ}}}(t - t_0)$$

1. Сигнал на выходе СФ с точностью до константы равен КФ входного сигнала, сдвинутой вправо по оси времени на величину t_0

$$S_{\text{ВЫХ}}(t_0) = BE_{S_{\text{ВХ}}}$$

2. Сигнал на выходе СФ при $t=t_0$ с точностью до константы равен энергии входного сигнала

АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

СПМ шума на выходе СФ

$$G_{n_{\text{ВЫХ}}}(f) = \frac{N_0}{2} C_{\text{сф}}^2(f) = \frac{N_0}{2} B^2 S_{\text{ВХ}}^2(f)$$

КФ шума на выходе СФ

$$K_{n_{\text{ВЫХ}}}(\tau) = F^{-1} \left\{ G_{n_{\text{ВЫХ}}}(f) \right\} = B^2 \frac{N_0}{2} F^{-1} \left\{ S_{\text{ВХ}}^2(f) \right\} = B^2 \frac{N_0}{2} \Theta_{S_{\text{ВХ}}}(\tau)$$

3. КФ шума на выходе СФ с точностью до константы равна КФ входного сигнала

4. Шум на выходе СФ коррелирован. КФ шума равна нулю

при $|\tau| \geq t_c$

АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Дисперсия шума на выходе СФ

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = BE_{s_{\text{ВХ}}}$$

$$D_{n_{\text{ВЫХ}}} = K_{n_{\text{ВЫХ}}}(0) = B^2 \frac{N_0}{2} \Theta_{s_{\text{ВХ}}}(0) = B^2 \frac{N_0}{2} E_{s_{\text{ВХ}}}$$

Отношение сигнал/шум на выходе СФ при $t=t_0$

$$q_{\text{сф}}^2 = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{D_{n_{\text{ВЫХ}}}} = \frac{2E_{s_{\text{ВХ}}}}{N_0}$$

5. Отношение сигнал/шум на выходе СФ зависит от энергии полезного сигнала и интенсивности белого шума, т.е. зависит от характеристик **входного сигнала и входного шума**