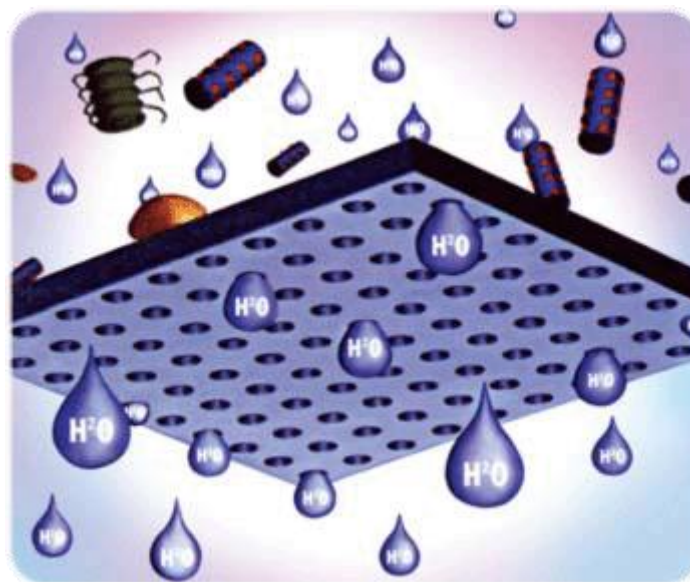


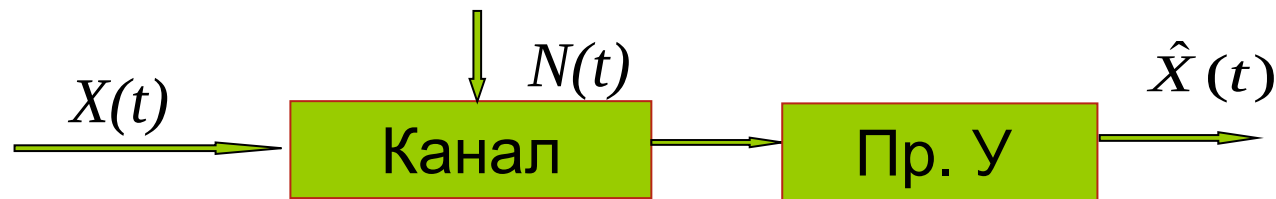
ФИЛЬТР ВИНЕРА



ФИЛЬТР ВИНЕРА

1. Априорная информация

Наблюдаемый сигнал: $Y(t) = \Psi[X(t), N(t)], \quad -\infty < t < \infty$



$X(t)$ и $N(t)$ стационарно связанные (необязательно гауссовские) СП с нулевыми математическими ожиданиями.

$K_y(\tau)$ и $K_{xy}(\tau)$ - полагаются известными.

ФИЛЬТР ВИНЕРА

2. Критерий оптимальности: минимум
среднеквадратической ошибки оценивания

$$M[\Delta^2(t)] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2] = \min$$

3. Ограничения на синтез ОС: линейный фильтр с
постоянными параметрами

$$\dot{H}_B(f) = C_B(f) \exp(j\varphi_B(f)) \longleftrightarrow h_B(\tau)$$

СИНТЕЗ НЕКАУЗАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО ЛФ

$$\hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_B(\tau) Y(t - \tau) d\tau$$

$h_B(\tau)$ - ИХ, минимизирующая СКО

$h(\tau) = h_B(\tau) + \alpha h_\alpha(\tau)$ - произвольная ИХ ЛС

$$M[\Delta^2(t)] = M \left[\left(X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} (h_B(\tau) + \alpha h_\alpha(\tau)) Y(t - \tau) d\tau \right)^2 \right] \geq$$

$$M \left[\left(X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h_B(\tau) Y(t - \tau) d\tau \right)^2 \right]$$

$$M[\Delta^2(t)] = \min_{\alpha} \left. \frac{\partial M[\Delta^2(t)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

СИНТЕЗ НЕКАУЗАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО ЛФ

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_B(\tau_1) K_y(\tau - \tau_1) d\tau_1 = h_B(\tau) \otimes K_y(\tau)$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = F\{K_{xy}(\tau)\}; \quad F\{h_B(\tau) \otimes K_y(\tau)\} = \dot{H}_B(f) G_y(f)$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = \dot{H}_B(f) G_y(f)$$

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\dot{G}_{xy}(f)}{G_y(f)}$$

АНАЛИЗ ФИЛЬТРА ВИНЕРА

$$M[\Delta(t)^2] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2] \quad M[\Delta^2(t)]_{\min} = D_x - D_{\hat{x}}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df; \quad D_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{x}}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) |\dot{H}_B(f)|^2 df$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = D_x - D_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_x(f) - G_y(f) |\dot{H}_B(f)|^2) df$$

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\dot{G}_{xy}(f)}{G_y(f)}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_x(f) - \frac{|\dot{G}_{xy}(f)|^2}{G_y(f)} \right) df$$

ВЫВОДЫ

Для отыскания оптимальной линейной оценки необходимо знать только $K_y(t)$ и $K_{xy}(t)$ (или $G_y(f)$ и $G_{xy}(f)$).

Для вычисления минимальной среднеквадратической ошибки также необходимо знать эти характеристики и $G_x(f)$.

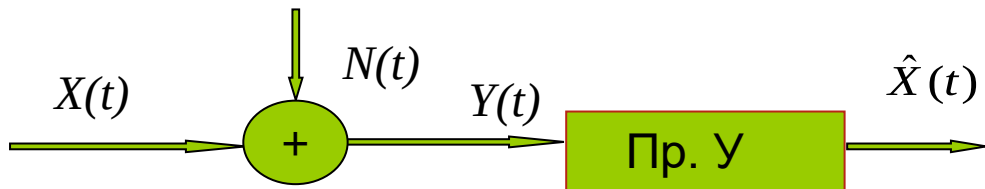
Любые другие статистические характеристики сигнала и помехи оказываются бесполезными.

ВЫВОДЫ

- Для всех гауссовских и негауссовских процессов, имеющих одинаковые $K_y(t)$, $K_x(t)$ и $K_{xy}(t)$, оптимальный линейный фильтр является одинаковым и обладает одинаковой среднеквадратической ошибкой.
- Если сообщение, помеха и наблюдаемый сигнал являются совместно гауссовскими стационарно связанными СП, то фильтр Винера является абсолютно оптимальным

ФИЛЬТР ВИНЕРА ДЛЯ СИГНАЛА, НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО С АДДИТИВНОЙ ПОМЕХОЙ

Оцениваемый процесс $X(t)$ и шум $N(t)$ являются некоррелированными СП с нулевыми МО и $Y(t) = X(t) + N(t)$



$$K_y(\tau) = K_x(\tau) + K_\eta(\tau) \qquad G_y(f) = G_x(f) + G_\eta(f)$$

$$K_{xy}(\tau) = M[X(t)Y(t + \tau)]$$

$$= M[X(t)(X(t + \tau) + N(t + \tau))] = K_x(\tau)$$

$$G_{xy}(f) = G_x(f)$$

ФИЛЬТР ВИНЕРА ДЛЯ СИГНАЛА, НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО С АДДИТИВНОЙ ПОМЕХОЙ

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\dot{G}_{yx}(f)}{G_y(f)} \quad \rightarrow \quad H_B(f) = \frac{G_x(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_x(f) - \frac{|\dot{G}_{yx}(f)|^2}{G_y(f)} \right) df$$

↓

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_x(f)G_\eta(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)} df$$

ВЫВОДЫ

1. Поскольку СПМ являются вещественными и четными функциями, то

- КЧХ фильтра Винера также является вещественной и четной:

$$\dot{H}_B(f) = C_B(f);$$

- ФЧХ фильтра Винера тождественно равна нулю на всех частотах:

$$\varphi(f) \equiv 0.$$

Фильтр Винера не вносит фазовых искажений в наблюдаемый сигнал и тем самым максимально сохраняет форму оцениваемого сигнала.

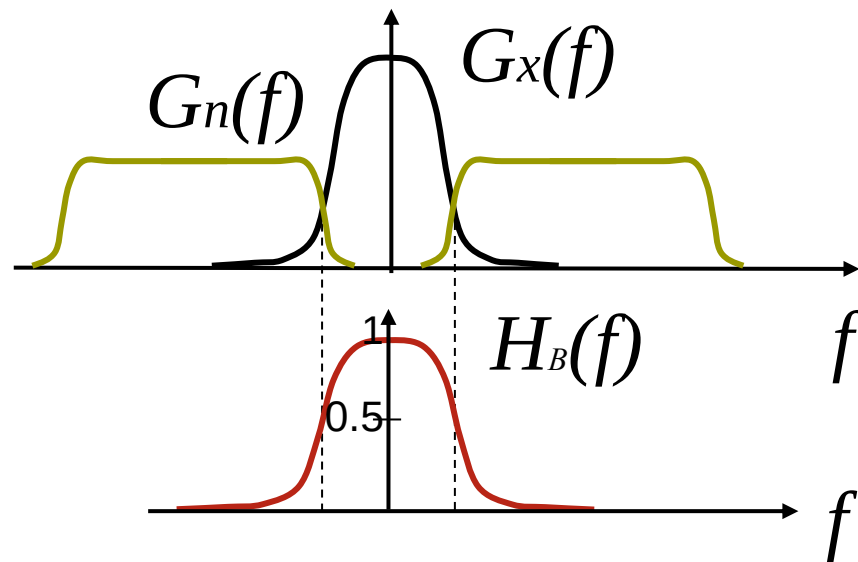
ВЫВОДЫ

$$2. \quad H_B(f) = C_B(f) = \frac{G_x(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)} = \frac{1}{1 + G_\eta(f) / G_x(f)}$$

$$G_x(f) \gg G_\eta(f) \qquad G_x(f) \ll G_\eta(f)$$

$$H_B(f) \approx 1$$

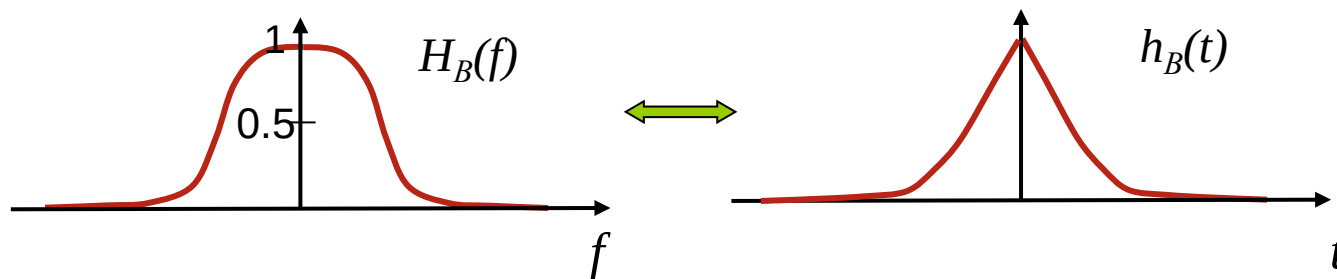
$$H_B(f) \approx 0$$



ВЫВОДЫ

3. Импульсная характеристика фильтра Винера является четной функцией

$$H_B(f) = H_B(-f) \Leftrightarrow h_B(t) = h_B(-t)$$



ВЫВОДЫ

4. Величина среднеквадратической ошибки не превышает дисперсии шума:

$$M[\Delta(t)^2]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\eta}(f)}{1 + G_{\eta}(f)/G_x(f)} df \leq \int_{-\infty}^{\infty} G_{\eta}(f) df = D_{\eta}$$

$$\hat{X}(t) = Y(t) = X(t) + N(t) \qquad M[\Delta(t)^2]_{\min} = D_n$$

Использование фильтра Винера не может привести к увеличению среднеквадратической ошибки

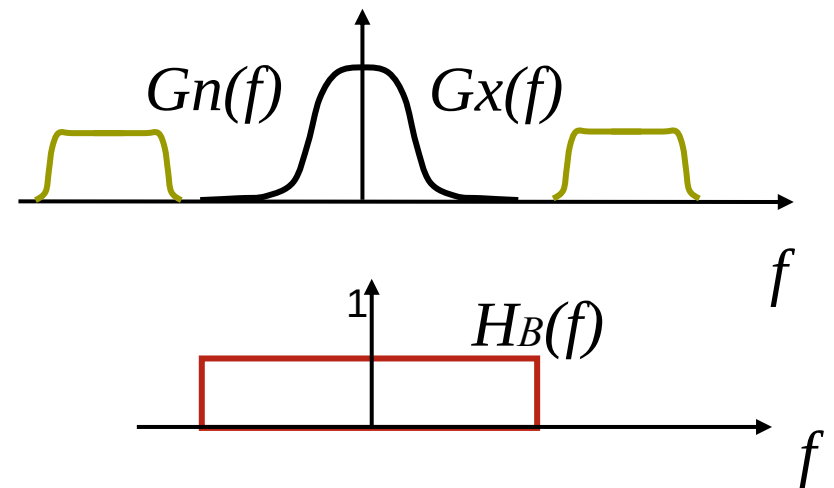
ВЫВОДЫ

5. $M[\Delta^2(t)]_{\min} = 0$

- при отсутствии шума;
- СПМ сигнала и помехи не перекрываются на всех частотах.

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_x(f)G_n(f)}{G_x(f) + G_n(f)} df$$

$$G_x(f)G_n(f) = 0$$



$$H_B(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } G_x(f) \neq 0, \\ 0 & \text{при } G_x(f) = 0. \end{cases}$$

ВЫВОДЫ

6. Если СПМ сообщения и помехи перекрываются, например, при $f_1 < f < f_2$, то СКО фильтрации не равна нулю.

Ошибка фильтрации возникает как от пропускания помехи в частотном диапазоне $f_1 < f < f_2$, так и от ослабления сигнала в этом же частотном диапазоне.

Чем выше уровень СПМ помехи в диапазоне перекрытия, тем сильнее искажение информационного сигнала.

ПРИМЕР

Сигнал с КФ $K_x(\tau) = D_x \exp(-\alpha |\tau|)$

наблюдается на фоне аддитивного белого шума с КФ:

$$K_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

МО сигнала и шума равны нулю. Сигнал и шум взаимно некоррелированные СП. Выполнить синтез и анализ фильтра Винера.

СПМ сигнала и помехи:

$$G_x(f) = F\{K_x(\tau)\} = \frac{D_x 2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}; \quad G_\eta(f) = F\{K_\eta(\tau)\} = \frac{N_0}{2}$$

ЭФФЕКТИВНАЯ ШИРИНА СПЕКТРА СООБЩЕНИЯ

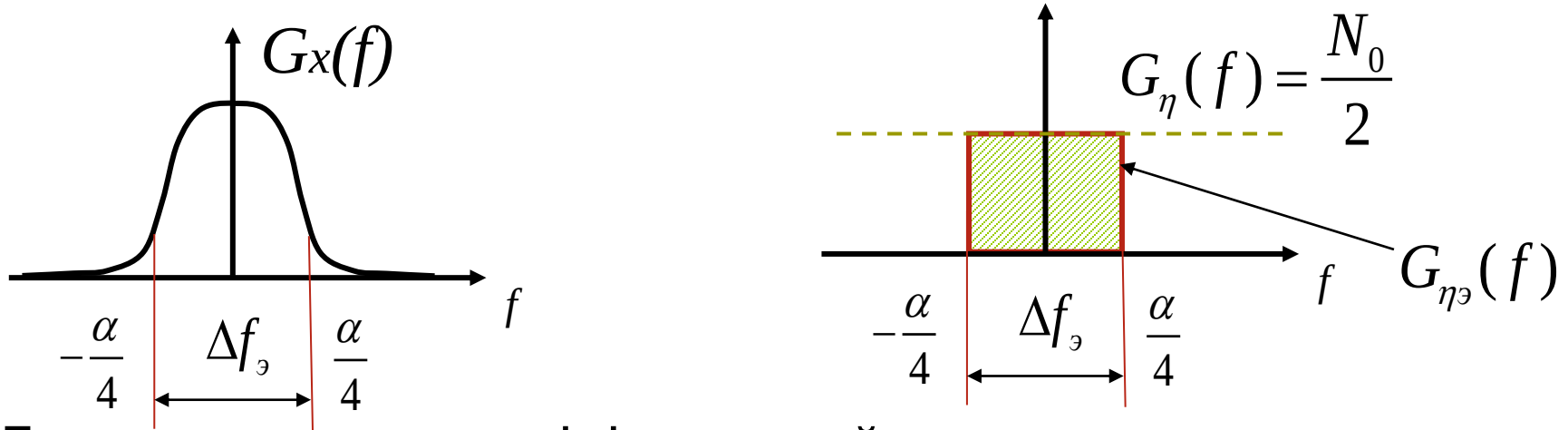
$$\Delta f_{\text{э}} = \frac{1}{G_{x \max}} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \frac{D_x}{G_{x \max}}$$

$$G_x(f) = F\{K_x(\tau)\} = \frac{D_x 2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2};$$

$$G_{x \max} = G_x(0) = \frac{2D_x}{\alpha};$$

$$\Delta f_{\text{э}} = \frac{\alpha}{2}$$

ПРИМЕР



Дисперсия шума в эффективной полосе частот:

$$D_{\eta_{\text{э}}} = \Delta f_{\text{э}} \frac{N_0}{2} = \frac{\alpha}{2} \frac{N_0}{2}$$

Отношение сигнал/шум в эффективной полосе частот:

$$\Lambda = \frac{D_x}{D_{\eta_{\text{э}}}} = D_x \frac{4}{\alpha N_0}$$

ПРИМЕР

КЧХ фильтра Винера:

$$\dot{H}_B(f) = C_B(f) = \frac{\frac{D_x 2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}{\frac{D_x 2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + \frac{N_0}{2}} = \frac{\alpha^2 \Lambda}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2 (1 + \Lambda)}$$

$$H_B(f) = \frac{G_x(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)}$$

СКО фильтра Винера:

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{N_0}{2} G_x(f)}{\frac{N_0}{2} + G_x(f)} df = \frac{D_x}{\sqrt{1 + \Lambda}}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_x(f) G_\eta(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)} df$$

ВЫВОДЫ

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\alpha^2 \Lambda}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2 (1 + \Lambda)}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \frac{D_x}{\sqrt{1 + \Lambda}}$$

1. При неограниченном увеличении отношения сигнал/шум в эффективной полосе частот:
 - АЧХ фильтра Винера стремится к единице на всех частотах
 - фильтр будет пропускать сигнал без искажений, при этом среднеквадратическая ошибка стремится к нулю.
2. При неограниченном уменьшении отношения сигнал/шум в эффективной полосе частот АЧХ фильтра Винера на всех частотах стремится к нулю

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА

(КАУЗАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ВИНЕРА)

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\alpha^2 \Lambda}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2(1 + \Lambda)}$$

$$G_x(f) = \frac{D_x 2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2};$$

Частота среза сообщения $f_{C,x} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\Delta f_{\vartheta}}{2} \frac{2}{\pi}$

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\alpha \Lambda}{1 + \sqrt{1 + \Lambda}} \frac{1}{j2\pi f + \alpha \sqrt{1 + \Lambda}}$$

Частота среза фильтра $f_{C,K\Phi B} = \frac{\alpha \sqrt{1 + \Lambda}}{2\pi} = \frac{\Delta f_{\vartheta}}{2} \frac{2\sqrt{1 + \Lambda}}{\pi}$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \frac{D_x}{\sqrt{1 + \Lambda}}$$

$$M[\Delta_{K\Phi B}^2(t)] = \frac{2D_x}{1 + \sqrt{1 + \Lambda}} = M[\Delta^2(t)]_{\min} \frac{2\sqrt{1 + \Lambda}}{1 + \sqrt{1 + \Lambda}}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА (КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ВИНЕРА)

Идеальный фильтр нижних частот с передаточной функцией

$$H_{\text{КОФВ}}(f) = \begin{cases} k & \text{при } |f| \leq f_c, \\ 0 & \text{при } |f| > f_c, \end{cases}$$

Оптимальные параметры:

$$k_{\text{КОФВ}} \approx \frac{\Lambda}{1 + \Lambda};$$

$$f_{c,\text{КОФВ}} \approx \frac{\alpha \sqrt{1 + \Lambda}}{2\pi} = \frac{\Delta f_{\text{э}}}{2} \frac{2\sqrt{1 + \Lambda}}{\pi}$$

ПРИМЕР ВИНЕРОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

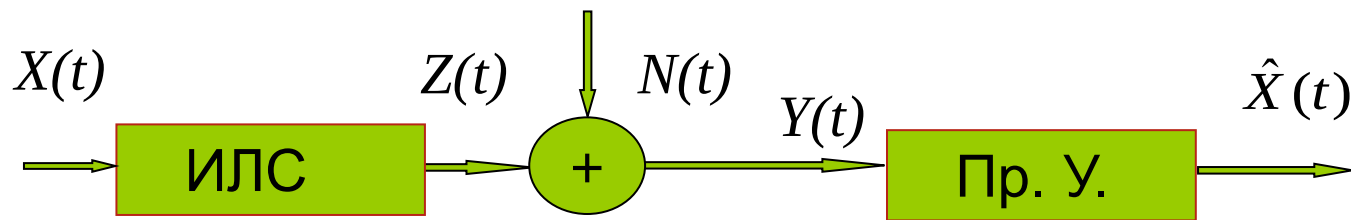
$$q^2 = -5 \text{ дБ}$$

Масочный фильтр
(5*5)

Фильтр Винера



ПОМЕХОУСТОЙЧИВАЯ ОЦЕНКА ЛИНЕЙНО ИСКАЖЕННЫХ СП



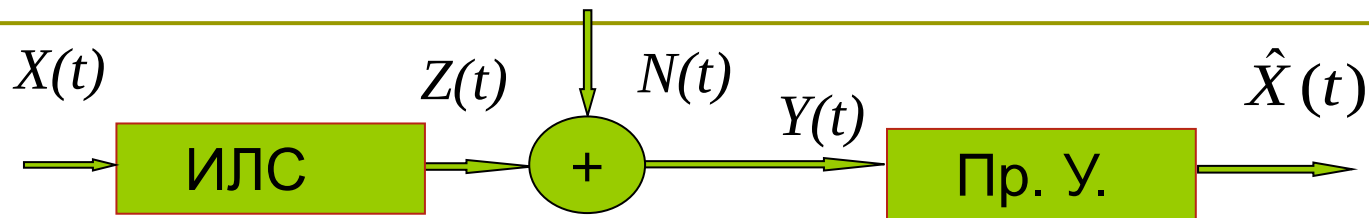
Сигнал искажается не только шумом, но и линейной системой с известной импульсной характеристикой:

$$Y(t) = Z(t) + N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{и}}(\tau) X(t - \tau) d\tau + N(t)$$

$h_{\text{и}}(\tau)$ - ИХ искажающей линейной системы (ИЛС)

Оцениваемый процесс $X(t)$ и $N(t)$ являются некоррелированными СП с известными СПМ $G_X(f)$ и $G_N(f)$.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВАЯ ОЦЕНКА ЛИНЕЙНО ИСКАЖЕННЫХ СП



$$G_z(f) = |\dot{H}_{\text{и}}(f)|^2 G_x(f);$$

$$G_y(f) = G_z(f) + G_{\eta}(f)$$

$$= |\dot{H}_{\text{и}}(f)|^2 G_x(f) + G_{\eta}(f)$$

$$\dot{H}_{\text{Б}}(f) = \frac{\dot{G}_{xy}(f)}{G_y(f)}$$

$$G_{xy}(f) = G_{xz}(f) = \dot{H}_{\text{и}}^*(f) G_x(f); \quad \dot{H}_{\text{Б}}(f) = \frac{\dot{H}_{\text{и}}^*(f) G_x(f)}{|\dot{H}_{\text{и}}(f)|^2 G_x(f) + G_{\eta}(f)}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\eta}(f) G_x(f)}{|\dot{H}_{\text{и}}(f)|^2 G_x(f) + G_{\eta}(f)} df$$

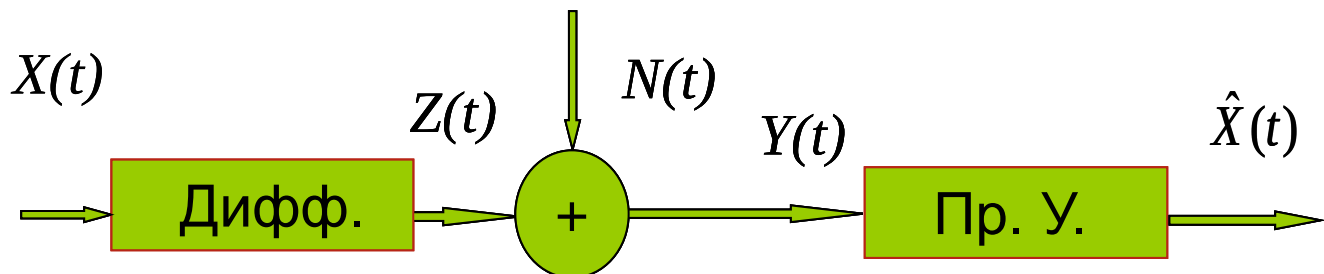
ПОМЕХОУСТОЙЧИВАЯ ОЦЕНКА ЛИНЕЙНО ИСКАЖЕННЫХ СП

При отсутствии шума фильтр Винера вырождается в инверсный фильтр

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\dot{H}_i^*(f) G_x(f)}{|\dot{H}_i(f)|^2 G_x(f) + G_\eta(f)} \quad \longrightarrow \quad \dot{H}_{\text{инв}}(f) = \frac{1}{\dot{H}_i(f)}$$

Пример. Пусть наблюдаемый сигнал

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + N(t), \quad X(0) = 0$$



ИНВЕРСНЫЙ ФИЛЬТР

$$\dot{H}_{\text{ИНВ}}(f) = \frac{1}{\dot{H}_{\text{И}}(f)}$$

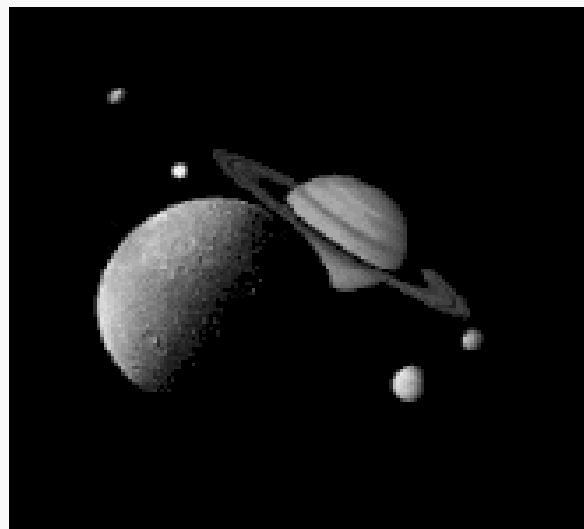
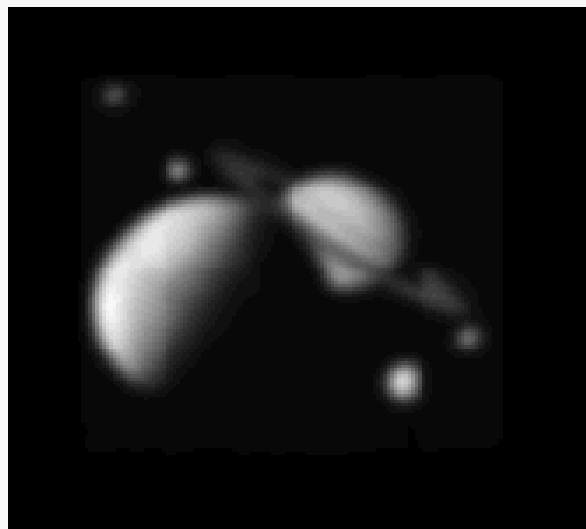
$$X_{\text{ИНВ}}(t) = \int_0^t Y(t)dt = X(t) + \int_0^t N(t)dt$$

Ошибка фильтрации: $\Delta(t) = X(t) - X_{\text{ИНВ}}(t) = \int_0^t N(t)dt$

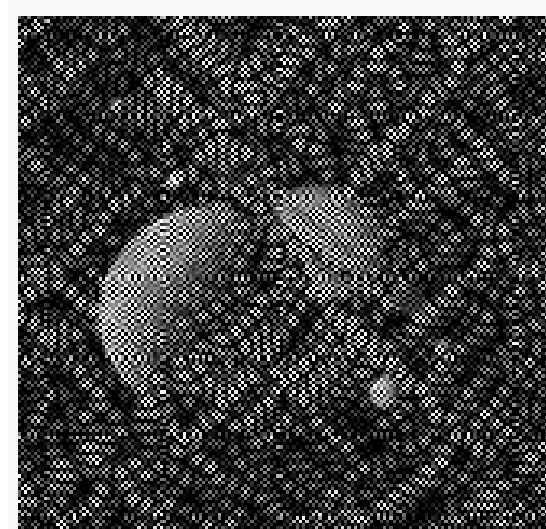
СКО: $M[\Delta^2(t)] = \frac{N_0}{2}t$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M[\Delta^2(t)] = \infty$$

ИНВЕРСНЫЙ ФИЛЬТР



$$q^2 = \infty$$



$$q^2 = 10^{10}$$

Результаты восстановления изображения «Сатурн»

ФИЛЬТР ВИНЕРА

$$\dot{H}_B(f) = \frac{\dot{H}_x^*(f) G_x(f)}{|\dot{H}_x(f)|^2 G_x(f) + G_\eta(f)}$$

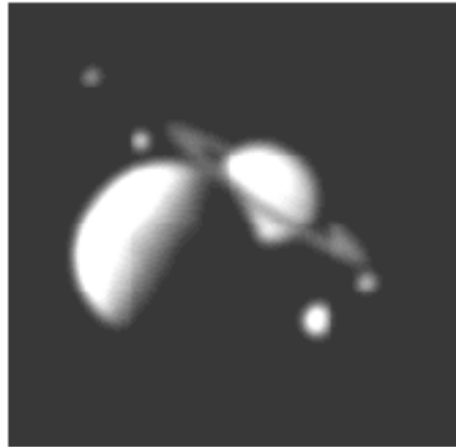
КЧХ дифференциатора: $\dot{H}_x(f) = j \cdot 2\pi f$

$$\dot{H}_B(f) = \frac{-j \cdot 2\pi f G_x(f)}{4\pi^2 f^2 G_x(f) + \frac{N_0}{2}};$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{N_0}{2} G_x(f)}{4\pi^2 f^2 G_x(f) + \frac{N_0}{2}} df < \infty$$

ФИЛЬТР ВИНЕРА

$$q^2 = 10^4$$



Восстановление дефокусированного изображения «Сатурн»



Восстановление смазанного изображения «Часы»

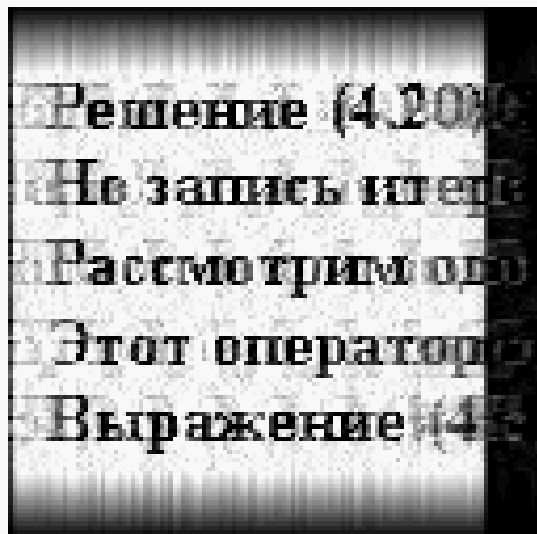
НЕЛИНЕЙНЫЙ ФИЛЬТРЫ



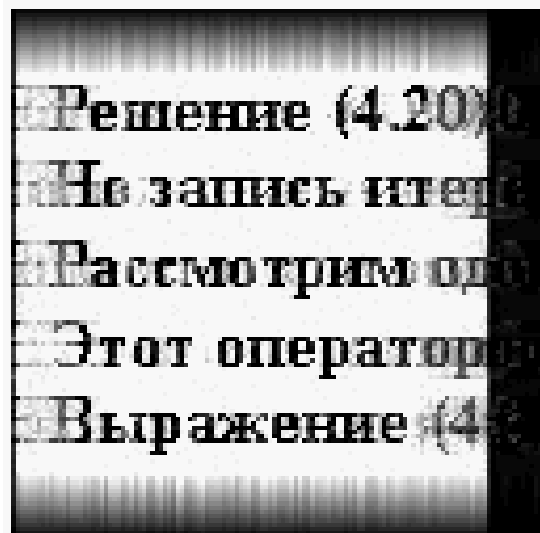
Нелинейная архитектура в нелинейном мире

НЕЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

НАБЛЮДАЕМОЕ
ИЗОБРАЖЕНИЕ



ФИЛЬТР ВИНЕРА



НЕЛИНЕЙНЫЙ
ФИЛЬТР

НЕЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ. МЕДИАННЫЙ ФИЛЬТР

Дж. Тьюки в 1971 г.

В качестве оценки выбирается медиана среди значений яркости отсчетов в некоторой окрестности.

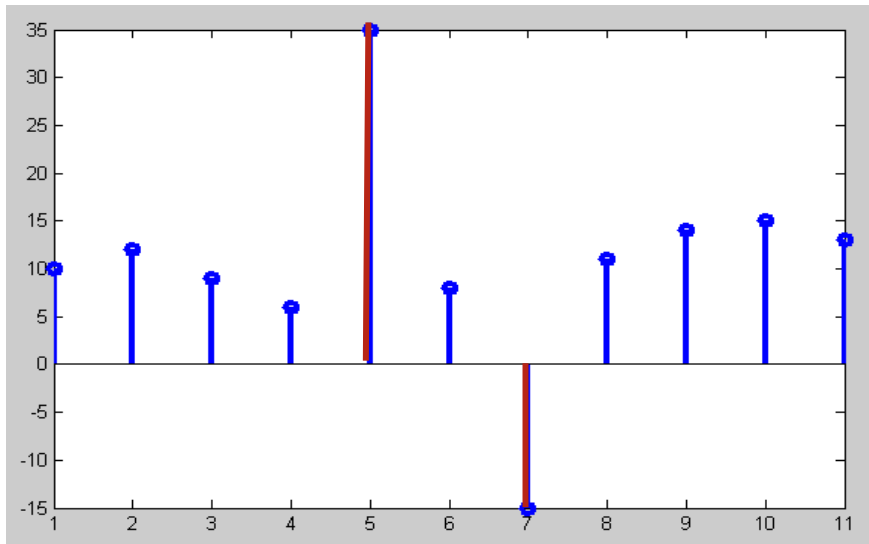
$$\tilde{x}_{med} = \text{med}(y_1, y_2, \dots, y_{2n+1})$$

$$\check{y}_1, \check{y}_2, \dots, \check{y}_{2n+1} = \text{sort}(y_1, y_2, \dots, y_{2n+1})$$

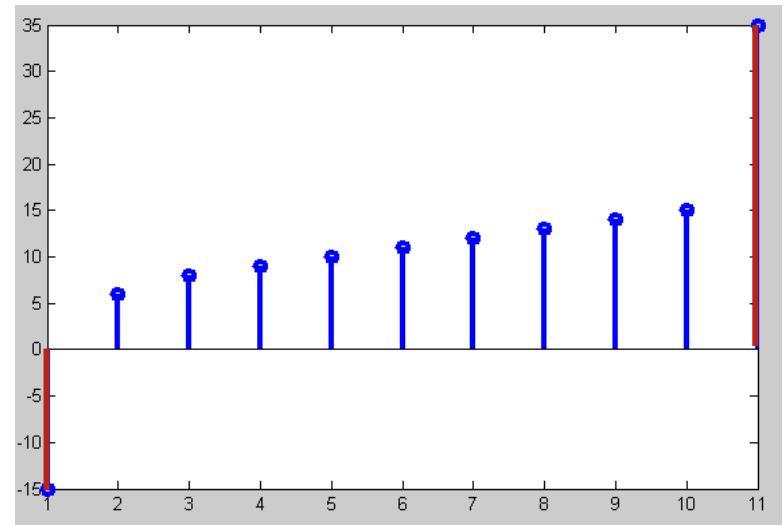
$$\tilde{x}_{med} = \check{y}(n)$$

МЕДИАННЫЙ ФИЛЬТР

Сигнал, искаженный ИП



Вариационный ряд

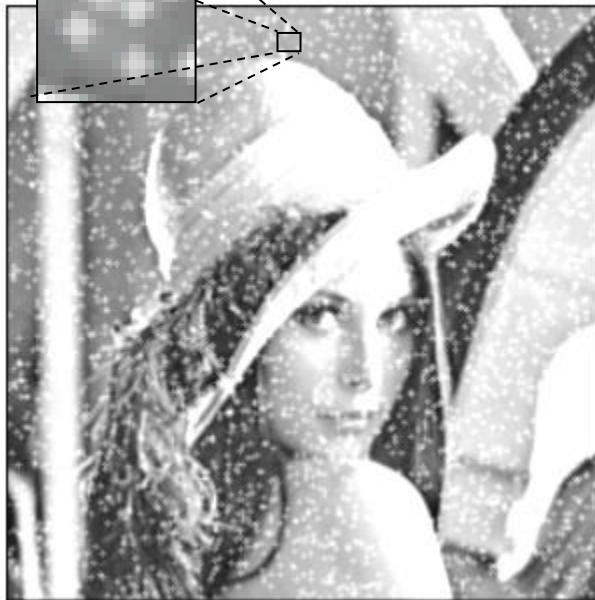


МЕДИАННЫЙ ФИЛЬТР

Изображение, искаженное
импульсной помехой



Результат линейной
фильтрации



Результат медианной
фильтрации



МЕДИАННЫЙ ФИЛЬТР

$p = 0.05$



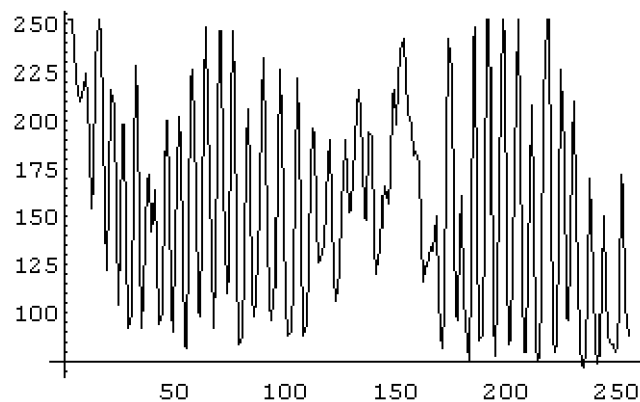
(3*3)

$p = 0.1$



(3*3)

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СП



$$x(t) = \cos(\omega t + \theta(t))$$

Аддитивная и мультипликативная
помеха

$$y(t) = A(t) \cos(\omega t + \theta(t)) + \eta(t)$$

