

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ (продолжение)



РЛС обнаружения низколетящих
целей

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

1. Источник может находиться в том или другом состоянии с заранее известными вероятностями.

Априорные вероятности гипотез:

$$\begin{cases} p_0 = P(H_0); \\ p_1 = P(H_1) = 1 - p_0; \end{cases}$$

2. Каждому из четырех возможных событий назначена некоторая стоимость

$$\begin{cases} \gamma_0, H_1 \Rightarrow \Pi_{01} \\ \gamma_1, H_1 \Rightarrow \Pi_{11} \\ \gamma_1, H_0 \Rightarrow \Pi_{10} \\ \gamma_0, H_0 \Rightarrow \Pi_{00} \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 \leq \Pi_{11} &< \Pi_{01} \\ 0 \leq \Pi_{00} &< \Pi_{10} \end{aligned}$$

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

	Гипотеза	Априорные вероятности	Решение	Наименование события	Условные вероятности	Штраф
1.	H_1	p_1	γ_0	Ошибка второго рода (пропуск сигнала)	$P(\gamma_0 H_1) = \beta$	Π_{01}
2.			γ_1	Правильное обнаружение	$P(\gamma_1 H_1) = 1 - \beta$	Π_{11}
3.	H_0	p_0	γ_1	Ошибка первого рода (ложная тревога)	$P(\gamma_1 H_0) = \alpha$	Π_{10}
4.			γ_0	Правильное необнаружение	$P(\gamma_0 H_0) = 1 - \alpha$	Π_{00}

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

r_0 и r_1 -условные риски (условные потери)

Если истинной является гипотеза H_0 , то потери составят

$$r_0 = \alpha \Pi_{10} + (1 - \alpha) \Pi_{00}$$

в противном случае

$$r_1 = \beta \Pi_{01} + (1 - \beta) \Pi_{11}$$

Средний риск(средние потери):

$$R = r_0 p_0 + r_1 p_1$$

Оптимальным байесовским правилом принятия решения будет такой выбор области G_0 , при котором средний риск будет наименьшим

$$R = \min_{G_0}$$

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

$$R = r_0 p_0 + r_1 p_1 = (\alpha \Pi_{10} + (1 - \alpha) \Pi_{00}) p_0 + (\beta \Pi_{01} + (1 - \beta) \Pi_{11}) p_1$$

$$R = p_0 \Pi_{10} + p_1 \Pi_{11} - (1 - \alpha)(\Pi_{10} - \Pi_{00}) p_0 + \beta(\Pi_{01} - \Pi_{11}) p_1 =$$

$$= \text{const} - \left(\int_{G_0} w(\vec{y} | H_0) d\vec{y} \right) (\Pi_{10} - \Pi_{00}) p_0 + \left(\int_{G_0} w(\vec{y} | H_1) d\vec{y} \right) (\Pi_{01} - \Pi_{11}) p_1$$

$$= \text{const} - \int_{G_0} (w(\vec{y} | H_0)(\Pi_{10} - \Pi_{00}) p_0 - w(\vec{y} | H_1)(\Pi_{01} - \Pi_{11}) p_1) d\vec{y}$$

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

$$R = \text{const} - \int_{G_0} (w(\vec{y} | H_0)(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0 - w(\vec{y} | H_1)(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1) d\vec{y} = \min_{G_0}$$

Риск будет минимальным, если подынтегральное выражение $\rightarrow$ будет больше 0. В область G_0 необходимо включить те и только те значения $\vec{y}$, при которых

$$w(\vec{y} | H_0)(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0 - w(\vec{y} | H_1)(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{y} \in G_0 \Rightarrow \gamma_0$$

$$w(\vec{y} | H_0)(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0 - w(\vec{y} | H_1)(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{y} \notin G_0 \Rightarrow \gamma_1$$



$$\frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1}$$

КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

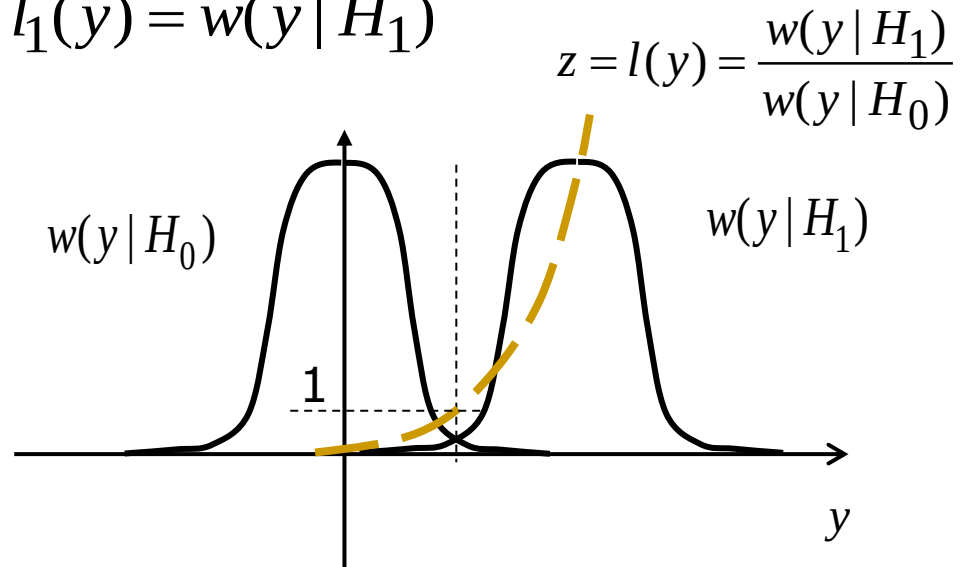
$$\frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1}$$

Отношение правдоподобия: $z = l(\vec{y}) = \frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)}$

Функции правдоподобия: $\begin{cases} l_0(\vec{y}) = w(\vec{y} | H_0) \\ l_1(\vec{y}) = w(\vec{y} | H_1) \end{cases}$

Байесовский порог :

$$C_B = \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1}$$



ОТНОШЕНИЕ ПРАВДОПОДОБИЯ

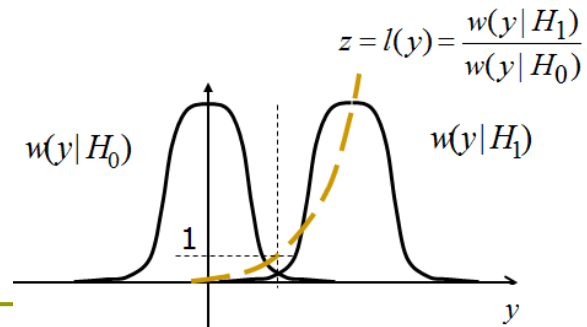
Отношение правдоподобия показывает какую из двух взаимоисключающих гипотез следует считать более вероятной

Решающей статистикой называют функцию выборочных значений. Чем меньше размерность решающей статистики, тем проще ее использовать для построения решающего правила.

Достаточная статистика - некоторая функция от результатов наблюдений, содержащая ту же статистическую информацию о гипотезах, что и сами результаты наблюдений.

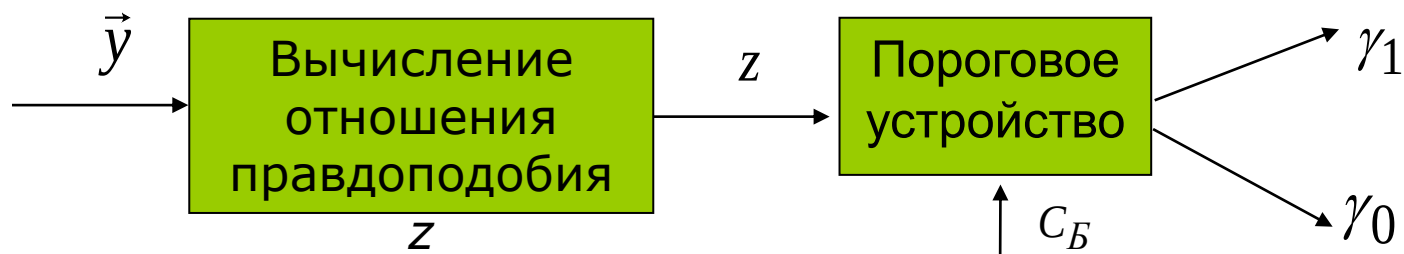
Минимальная достаточная статистика – статистика минимальной размерности, при которой свойство достаточности еще сохраняется

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ



1. Если элементы выборки как при гипотезе, так и при альтернативе статистически независимы, отношение правдоподобия является минимальной достаточной статистикой при различении простых гипотез
2. Поскольку отношение правдоподобия представляет собой отношение двух неотрицательных функций случайных величин, оно является неотрицательной одномерной случайной величиной независимо от объема выборки
3. Если функция правдоподобия для гипотезы H_1 выше, чем для гипотезы H_0 то отношение правдоподобие больше единицы, в противном случае отношение правдоподобия меньше единицы. При равных функциях правдоподобия оно равно единице.
4. Для гипотезы H_0 и H_1 величина z подчиняется соответствующему условному распределению
 $w(z | H_0)$ и $w(z | H_1)$

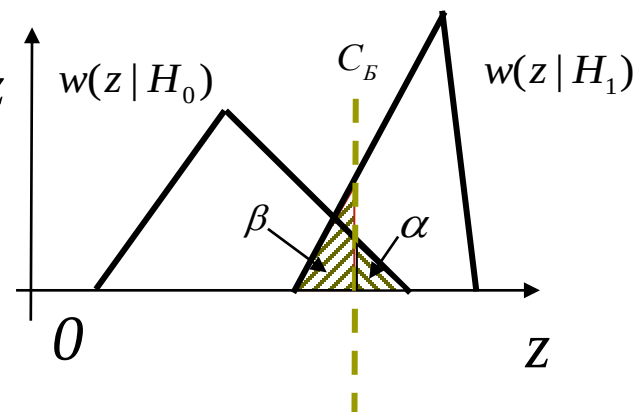
КРИТЕРИЙ БАЙЕСА



Байесовский порог:
$$C_B = \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1}$$

4. Условные вероятности ошибок:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = P(\gamma_1 | H_0) = 1 - \int_{G_0} w(\vec{y} | H_0) d\vec{y} = \int_{C_B}^{\infty} w(z | H_0) dz \\ \beta = P(\gamma_0 | H_1) = \int_{G_0} w(\vec{y} | H_1) d\vec{y} = \int_0^{C_B} w(z | H_1) dz \end{array} \right.$$



5. Средний риск:
$$R = (\alpha \Pi_{10} + (1 - \alpha) \Pi_{00}) p_0 + (\beta \Pi_{01} + (1 - \beta) \Pi_{11}) p_1$$

КРИТЕРИЙ МАКСИМУМА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ (МАВ)

Апостериорные вероятности гипотез при заданной выборке: $\vec{y}$

$$\begin{cases} p(H_0 | \vec{y}) = \frac{w(\vec{y} | H_0) p_0}{w(\vec{y})}; \\ p(H_1 | \vec{y}) = \frac{w(\vec{y} | H_1) p_1}{w(\vec{y})}; \end{cases}$$

При фиксированной выборке $\vec{y}$ в качестве истинной следует выбрать ту гипотезу, для которой апостериорная вероятность выше:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p(H_1 | \vec{y})}{p(H_0 | \vec{y})} > 1 \Rightarrow \gamma_1 \\ \frac{p(H_1 | \vec{y})}{p(H_0 | \vec{y})} \leq 1 \Rightarrow \gamma_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} \begin{array}{l} \gamma_1 \\ > \\ \gamma_0 \end{array} \frac{p_0}{p_1} \equiv l(\vec{y}) \begin{array}{l} \gamma_1 \\ > \\ \gamma_0 \end{array} C_{MAV}$$

КРИТЕРИЙ МАКСИМУМА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ (МАВ)

1. Если $\Pi_{10} - \Pi_{00} = \Pi_{01} - \Pi_{11} \xrightarrow{\text{green arrow}} C_{\text{МАВ}} = C_{\text{Б}}$,
то правило, полученное по критерию МАВ, совпадает с
правилом, полученным по критерию Байеса

$$2. \quad R = (\alpha \Pi_{10} + (1 - \alpha) \Pi_{00}) p_0 + (\beta \Pi_{01} + (1 - \beta) \Pi_{11}) p_1$$

$$\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0 \text{ и } \Pi_{01} = \Pi_{10} = 1$$

$$R = \alpha p_0 + \beta p_1 = P_{\text{ош}}$$

где $\alpha = \int_{C_{\text{МАВ}}}^{\infty} w(z | H_0) dz; \quad \beta = \int_0^{C_{\text{МАВ}}} w(z | H_1) dz$

Правило, оптимальное по критерию МАВ, минимизирует
общую вероятность ошибки

НЕБАЙЕСОВСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ. КРИТЕРИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ (МП)

При фиксированной выборке $\vec{y}$ в качестве истинной следует выбрать ту гипотезу, для которой функция правдоподобия больше:

$$\frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} > \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad l(\vec{y}) > C_{МП}$$

Если $p_0 = p_1$,

то правило, полученное по МП критерию, формально совпадает с правилом, полученным по МАВ критерию

$$\alpha = \int_{C_{МП}}^{\infty} w(z | H_0) dz; \quad \beta = \int_0^{C_{МП}} w(z | H_1) dz$$

НЕБАЙЕСОВСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ. КРИТЕРИЙ НЕЙМАНА-ПИРСОНА

Оптимальным решением считается решение, обеспечивающее минимум вероятности пропуска цели β при заданной вероятности ложной тревоги α

$$\beta = \min_{G_0} \quad \text{при} \quad \alpha \leq \alpha_0$$

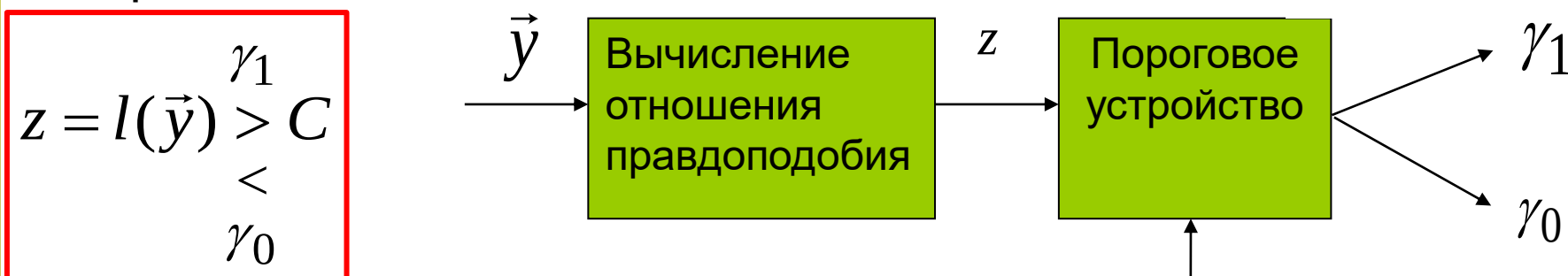
$$\frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C_{НП} \quad \equiv \quad l(\vec{y}) \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C_{НП}$$

Порог выбирается из условия:

$$\alpha = \int_{C_{НП}}^{\infty} w(z | H_0) dz \leq \alpha_0$$

ВЫВОДЫ

1. Все рассмотренные алгоритмы проверки простой гипотезы при простой альтернативе сводятся к вычислению отношения правдоподобия по наблюдаемой выборке и сравнению его с порогом:



2. Отношение правдоподобия зависит только от вида условных ПРВ $w(\vec{y}|H_0)$, $w(\vec{y}|H_1)$ и не зависит от априорных вероятностей, а также от стоимостей
3. Априорные вероятности и стоимости влияют лишь на величину порога. Изменение критерия, априорных вероятностей и стоимостей не влияет на схему устройства обнаружения.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОРОГОВ

Критерий	Порог
Байеса	$C_B = \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1}$
Максимум апостериорной вероятности	$C_{MAV} = \frac{p_0}{p_1}$
Максимум правдоподобия	$C_{МП} = 1$
Неймана - Пирсона	$C_{НП} = \int_{-\infty}^{\infty} w(z H_0) dz = \alpha_0$

ВЫВОДЫ

4. Так как обе части неравенства не отрицательны, то оптимальность процедуры проверки гипотез не нарушается если взять любые монотонные функции от обеих частей неравенства:

$$z = l(\vec{y}) \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln l(\vec{y}) \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \ln C}$$