

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ АДДИТИВНОЙ ПОМЕХИ



ПРИМЕР

$$H_0 : \vec{y} = \{y_i = \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y_i = s_i + \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$\vec{s} = \{s_i, i = \overline{1, n}\}$ - детерминированный сигнал

$\vec{\eta} = \{\eta_i, i = \overline{1, n}\}$ - аддитивный гауссовский шум с независимыми отсчетами, нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_{η}

Найти алгоритм обнаружения

РЕШЕНИЕ

n -мерная ПРВ шума

$$\begin{aligned} w_n(\vec{\eta}) &= \prod_{i=1}^n w_1(\eta_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi D_\eta)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta_i^2}{2D_\eta}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi D_\eta)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n \eta_i^2\right) \end{aligned}$$

Условные ПРВ

$$\begin{aligned} w(\vec{y} | H_0) &= \frac{1}{(2\pi D_\eta)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) \\ w(\vec{y} | H_1) &= \frac{1}{(2\pi D_\eta)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (y_i - s_i)^2\right) \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

Отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} l(\vec{y}) &= \frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} = \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (y_i - s_i)^2 + \frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n s_i^2\right) \end{aligned}$$

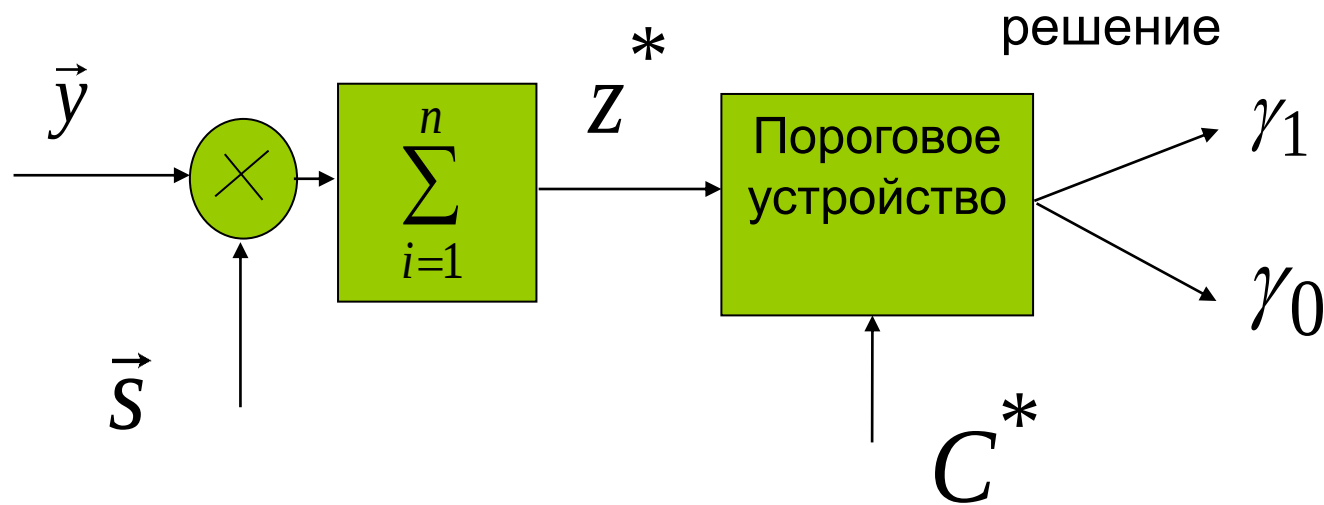
Логарифм отношения правдоподобия

$$\ln l(\vec{y}) = \frac{1}{D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n s_i^2$$

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

$$\frac{1}{D_{\eta}} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{1}{2D_{\eta}} \sum_{i=1}^n s_i^2 \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \ln C \quad \Leftrightarrow \quad z^* = \sum_{i=1}^n y_i s_i \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C^*$$

$$C^* = D_{\eta} \ln C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad - \text{приведенный порог}$$



КАЧЕСТВО КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ

$$z^* = \sum_{i=1}^n y_i s_i$$

$$M[z^* | H_0] = M\left[\sum_{i=1}^n \eta_i s_i\right] = M\left[\sum_{i=1}^n y_i s_i | H_0\right] = 0$$

$$M[z^* | H_1] = M\left[\sum_{i=1}^n y_i s_i | H_1\right] = M\left[\sum_{i=1}^n (\eta_i + s_i) s_i\right] = \sum_{i=1}^n s_i^2 = E_s$$

$$D[z^* | H_1] = D[z^* | H_0] = \sum_{i=1}^n D[y_i] s_i^2 = D_\eta E_s$$

ПРИМЕР

$$H_0 : \vec{y} = \{y(t) = \eta(t), t = \overline{0, T}\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y(t) = s(t) + \eta(t), t = \overline{0, T}\}$$

$\vec{s} = \{s(t), t = \overline{0, T}\}$ - детерминированный сигнал

$\vec{\eta} = \{\eta(t), t = \overline{0, T}\}$ - аддитивный белый шум с нулевым математическим ожиданием и КФ: $K_{\eta}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

Найти алгоритм обнаружения

РЕШЕНИЕ

Последовательность с независимыми сечениями имеет равномерную СПМ в полосе частот

$$G_{\eta}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & \text{при } |f| \leq f_e \\ 0, & \text{при } |f| > f_e \end{cases}$$

Дисперсия $D_{\eta} = \frac{N_0}{2} 2 f_e = \frac{N_0}{2} \frac{1}{\Delta t}$

$$n = \frac{T}{\Delta t}$$

-число независимых отсчетов на интервале $[0, T]$

РЕШЕНИЕ

Логарифм отношения правдоподобия

$$\ln l(\vec{y}) = \frac{1}{D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n s_i^2 = \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^n y_i s_i \Delta t - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^n s_i^2 \Delta t$$
$$D_\eta = \frac{N_0}{2} \frac{1}{\Delta t}$$

$$f_\theta \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad n \rightarrow \infty$$

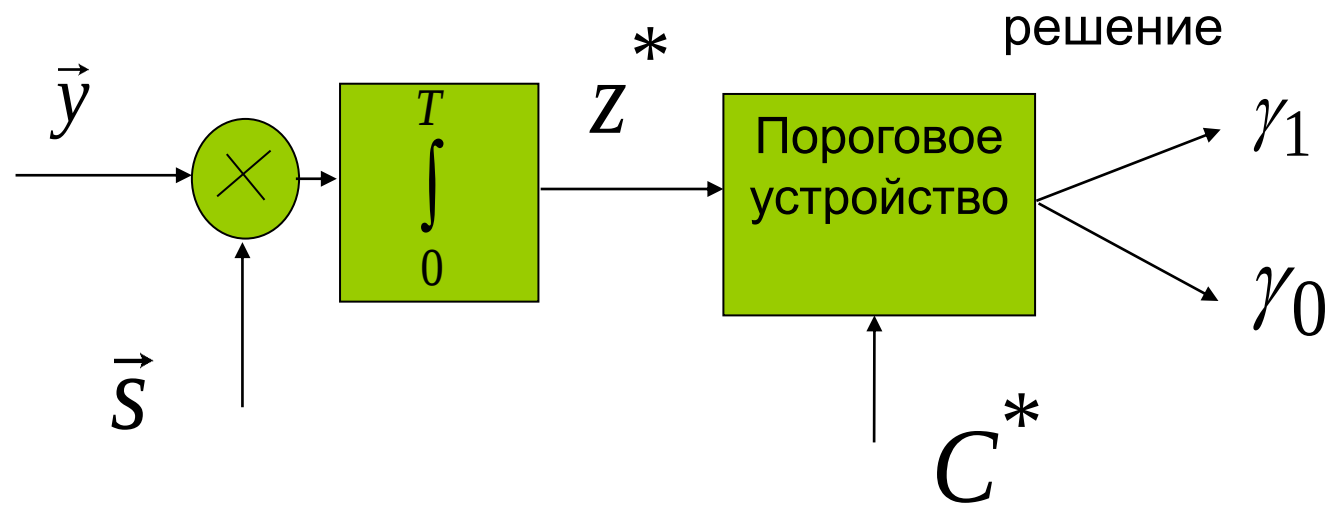
$$\ln l(\vec{y}) = \lim_{f_\theta \rightarrow \infty} \ln l_n(\vec{y}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s(t)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t)dt$$

$$\ln l(\vec{y}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s(t)dt - \frac{1}{N_0} E_s$$

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s(t)dt - \frac{1}{N_0} E_s \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \ln C \quad \Leftrightarrow \quad z^* = \int_0^T y(t)s(t)dt \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C^*$$

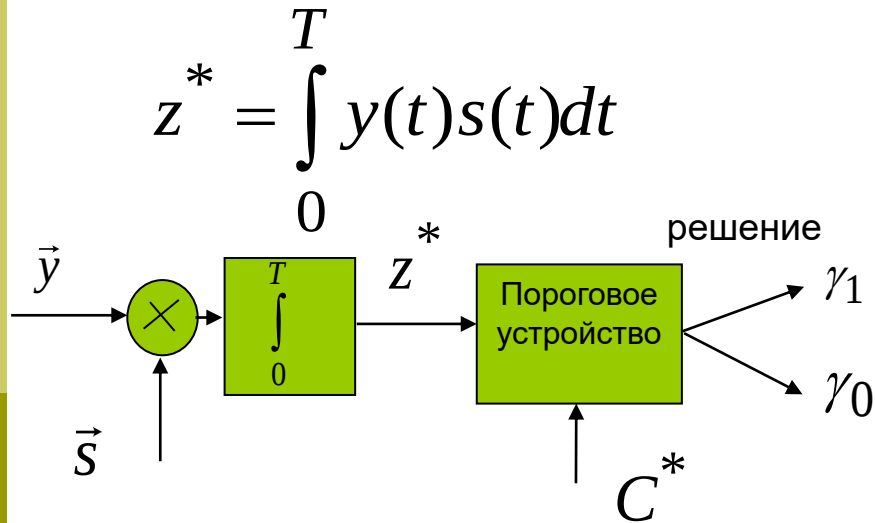
$$C^* = \frac{N_0}{2} \ln C + \frac{E_s}{2} \quad - \text{приведенный порог}$$



Непрерывное время

$$H_0 : \vec{y} = \{y(t) = \eta(t), t \in [0, T]\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y(t) = \eta(t) + s(t), t \in [0, T]\}$$

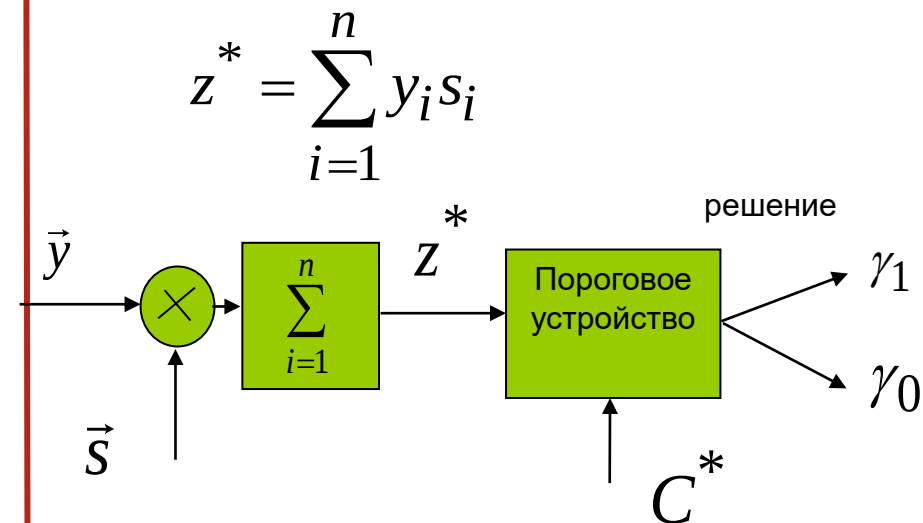


$$C^* = \frac{N_0}{2} \ln C + \frac{E_s}{2}$$

Дискретное время

$$H_0 : \vec{y} = \{y_i = \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y_i = s_i + \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$



$$C^* = D_\eta \ln C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2$$

Непрерывное время

$$H_0 : \vec{y} = \{y(t) = \eta(t), t \in [0, T]\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y(t) = \eta(t) + s(t), t \in [0, T]\}$$

$$z^* = \int_0^T y(t)s(t)dt$$

$$M[z^* | H_0] = 0$$

$$M[z^* | H_1] = \int_0^T s^2(t)dt = E_s$$

$$\begin{aligned} D[z^* | H_0] &= D[z^* | H_1] \\ &= \frac{N_0}{2} E_s = D_{z^*} \end{aligned}$$

Дискретное время

$$H_0 : \vec{y} = \{y_i = \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y_i = s_i + \eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$$z^* = \sum_{i=1}^n y_i s_i$$

$$M[z^* | H_0] = 0$$

$$M[z^* | H_1] = \sum_{i=1}^n s_i^2 = E_s$$

$$\begin{aligned} D[z^* | H_0] &= D[z^* | H_1] \\ &= D_\eta E_s = D_{z^*} \end{aligned}$$

КАЧЕСТВО КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ

$$w(z^* | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z^*}} \exp\left(-\frac{(z^*)^2}{2D_z^*}\right)$$

$$w(z^* | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z^*}} \exp\left(-\frac{(z^* - E_s)^2}{2D_z^*}\right)$$

$$\alpha = \int_{C^*}^{\infty} w(z^* / H_0) dz^* = 1 - \Phi\left(\frac{C^*}{\sqrt{D_z^*}}\right)$$

$$\beta = \int_{\infty}^{C^*} w(z^* / H_1) dz^* = \Phi\left(\frac{C^* - E_s}{\sqrt{D_z^*}}\right)$$

КАЧЕСТВО КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ

Критерий Байеса:

$$C^* = \frac{N_0}{2} \ln C_B + \frac{E_s}{2} = \frac{N_0}{2} \ln \frac{(\Pi_{10} - \Pi_{00})p_0}{(\Pi_{01} - \Pi_{11})p_1} + \frac{E_s}{2}$$

$$R = (\alpha \Pi_{10} + (1 - \alpha) \Pi_{00}) p_0 + (\beta \Pi_{01} + (1 - \beta) \Pi_{11}) p_1$$

Критерий МАВ

$$C^* = \frac{N_0}{2} \ln C_{MAB} + \frac{E_s}{2} = \frac{N_0}{2} \ln \frac{p_0}{p_1} + \frac{E_s}{2}$$

$$P_{oui} = \alpha p_0 + \beta p_1$$

КАЧЕСТВО КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ

МП критерий

$$C^* = \frac{N_0}{2} \ln C_{МП} + \frac{E_s}{2} = \frac{N_0}{2} \ln 1 + \frac{E_s}{2} = \frac{E_s}{2}$$

$$\alpha = \int_{C^*}^{\infty} w(z^* / H_0) dz^* = 1 - \Phi \left(\frac{E_s / 2}{\sqrt{D_{z^*}}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{q}{2} \right)$$

$$\beta = \int_{\infty}^{C^*} w(z^* / H_1) dz^* = \Phi \left(\frac{E_s / 2 - E_s}{\sqrt{D_{z^*}}} \right) = \Phi \left(-\frac{q}{2} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{q}{2} \right)$$

КАЧЕСТВО КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ

Критерий Неймана-Пирсона

$$\alpha_0 = 1 - \Phi \left(\frac{C_{НП}^*}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_s}} \right)$$

$$\beta = \Phi \left(\frac{C_{НП}^* - E_s}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_s}} \right)$$

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt$$

$$\alpha_0 = 1 - \Phi \left(\frac{C_{НП}^*}{\sqrt{D_{\eta} E_s}} \right)$$

$$\beta = \Phi \left(\frac{C_{НП}^* - E_s}{\sqrt{D_{\eta} E_s}} \right)$$

$$E_s = \sum_{i=1}^n s_i^2$$

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ



ПРИМЕРЫ ДВУМЕРНЫХ БИНАРНЫХ СИГНАЛОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ



ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

$$H_0 : \vec{y} = \{y_i = b\eta_i, i = \overline{1, n}\} \quad a > b$$

$$H_1 : \vec{y} = \{y_i = a\eta_i, i = \overline{1, n}\}$$

$\vec{\eta} = \{\eta_i, i = \overline{1, n}\}$ - мультипликативный гауссовский

шум с независимыми отсчетами, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

Найти алгоритм обнаружения

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

$$M[\eta_i] = 0; \quad D[\eta_i] = 1$$

$$M[y_i | H_0] = M[y_i | H_1] = 0;$$

$$D[y_i | H_0] = b^2; \quad D[y_i | H_1] = a^2$$

$$w(\vec{y} | H_0) = \frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2b^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

$$w(\vec{y} | H_1) = \frac{1}{(2\pi a^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

Отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} l(\vec{y}) &= \frac{w(\vec{y} | H_1)}{w(\vec{y} | H_0)} = \frac{(b^2)^{n/2}}{(a^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{1}{2b^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) = \\ &= \frac{(b^2)^{n/2}}{(a^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \sum_{i=1}^n y_i^2\right) \end{aligned}$$

Логарифм отношения правдоподобия

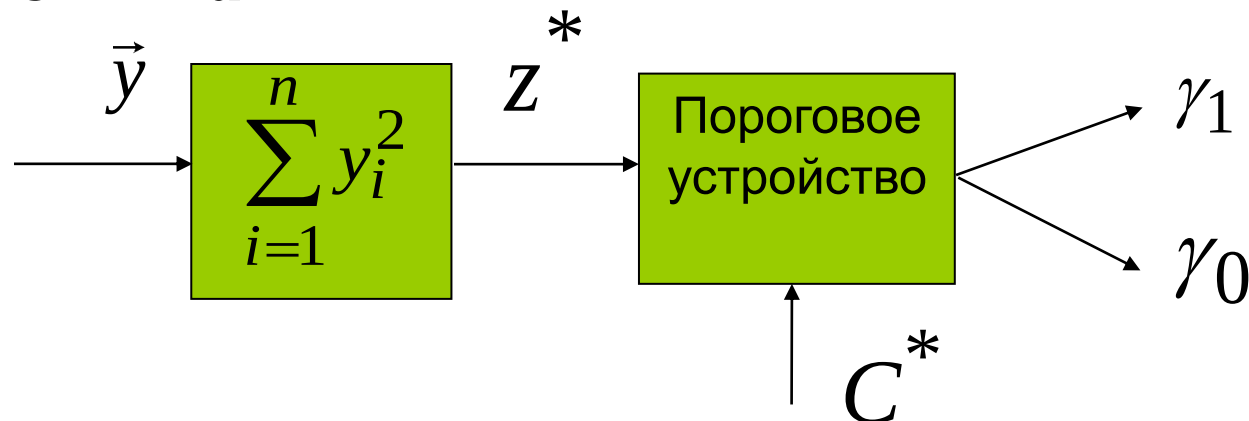
$$z = \ln l(\vec{y}) = \frac{n}{2} (\ln b^2 - \ln a^2) - \frac{1}{2} (a^{-2} - b^{-2}) \sum_{i=1}^n y_i^2$$

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

Оптимальный алгоритм обнаружения сигналов

$$\frac{n}{2}(\ln b^2 - \ln a^2) - \frac{1}{2}(a^{-2} - b^{-2}) \sum_{i=1}^n y_i^2 \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \ln C \quad z^* = \sum_{i=1}^n y_i^2 \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} C^*$$

$$C^* = 2 \frac{\ln C + n(\ln a - \ln b)}{b^{-2} - a^{-2}} \quad - \text{приведенный порог}$$



РАСЧЕТ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗАХ



ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Один или несколько параметров неизвестны:

$$w(\vec{y}_n | H_0, \vec{\mu}); \quad w(\vec{y}_n | H_1, \vec{\mu}, \vec{\gamma})$$

Общий метод вычисления отношения правдоподобия состоит в усреднении этих функций по априорному распределению вероятностей неизвестных параметров

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Если неизвестен вектор параметров помехи $\vec{\mu}$

$$\tilde{l}(\vec{y}) = \frac{\int W(\vec{y} | H_1, \vec{\mu}) W(\vec{\mu}) d\vec{\mu}}{\int_{\vec{\mu}} W(\vec{y} | H_0, \vec{\mu}) W(\vec{\mu}) d\vec{\mu}}$$

Если неизвестен вектор параметров сигнала

$$\tilde{l}(\vec{y}) = \frac{\int W(\vec{y} | H_1, \vec{\gamma}) W(\vec{\gamma}) d(\vec{\gamma})}{W(\vec{y} | H_0)}$$

ПРИМЕР. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДОЙ

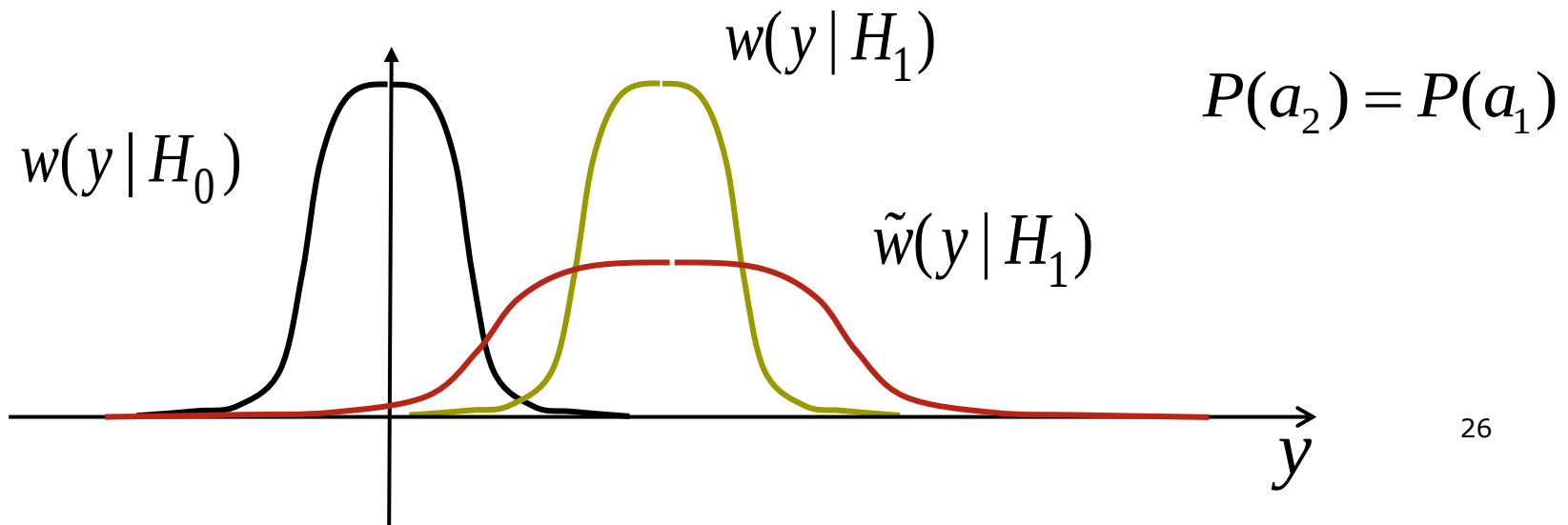
Для простой гипотезы: $w(y | H_1)$, $a = a_0$

Для сложной гипотезы:

$$P(a_1); \quad P(a_2) = 1 - P(a_1) \quad (a_1 + a_2) / 2 = a_0$$

Результат усреднения:

$$\tilde{w}(y | H_1) = w(y | H_1, a_1)P(a_1) + w(y | H_1, a_2)P(a_2)$$



ПРИМЕР. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДОЙ

Отношение правдоподобия при известной амплитуде

$$l(\vec{y} | a) = \frac{w(\vec{y} | H_1, a)}{w(\vec{y} | H_0)} = \exp\left(\frac{a}{D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{a^2}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n s_i^2\right)$$

Отношение правдоподобия при случайной амплитуде

$$\begin{aligned} \tilde{l}(\vec{y} | \vec{a}) &= \frac{\sum_{j=1}^2 P(a_j) w(\vec{y} | H_1, a_j)}{w(\vec{y} | H_0)} \\ &= \sum_{j=1}^2 P(a_j) \exp\left(\frac{a_j}{D_\eta} \sum_{i=1}^n y_i s_i - \frac{a_j^2}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n s_i^2\right) \end{aligned}$$