

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СП



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СП

Точечной оценкой $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется приближенное значение этого параметра, полученное по выборке $\vec{y}$

$$\tilde{\theta}_n = f_n(y_1, \dots, y_n) = f_n(\vec{y})$$

$$\vec{y} = \{y_i = y(t_i), i = \overline{1, n}\}; \quad n - \text{объем выборки}$$

Свойства, которым должна удовлетворять оценка:

состоятельность;
несмещенность;
эффективность.

НЕСМЕЩЕННОСТЬ

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется несмещенной оценкой параметра θ , если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра:

$$M[\tilde{\theta}_n] = \theta$$

$\varepsilon = \tilde{\theta}_n - \theta$ - смещение.

Математическое ожидание смещения несмещенной оценки равно 0:

$$M[\varepsilon] = M[\tilde{\theta}_n - \theta] = 0$$

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра θ , если она сходится по вероятности к θ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{\theta}_n - \theta| < \delta) = 1, \text{ где } \delta > 0.$$

Мера точности несмещенной оценки - дисперсия оценки:

$$M[\varepsilon^2] = M[(\tilde{\theta}_n - \theta)^2] = M[(\tilde{\theta}_n - M[\tilde{\theta}_n])^2] = D[\tilde{\theta}_n]$$

Теорема. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} M[\tilde{\theta}_n] = \theta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} D[\tilde{\theta}_n] = 0$, то

$\tilde{\theta}_n$ состоятельная оценка параметра θ

ЭФФЕКТИВНОСТЬ

$$M[\varepsilon^2] = M[(\tilde{\theta}_n - \theta)^2] = M[(\tilde{\theta}_n - M[\tilde{\theta}_n])^2] = D[\tilde{\theta}_n]$$

Пусть $\tilde{\theta}_n^{(1)}$ и $\tilde{\theta}_n^{(2)}$ - две разные состоятельные, несмещенные оценки параметра θ .

Если $D[\tilde{\theta}_n^{(1)}] < D[\tilde{\theta}_n^{(2)}]$, то первую оценку называют более эффективной, чем вторую.

Если $\tilde{\theta}_n$ - несмещенная оценка θ с конечной дисперсией и при этом не существует другой несмещенной оценки с меньшей дисперсией, то $\tilde{\theta}_n$ - эффективная оценка

НЕРАВЕНСТВО КРАМЕРА-РАО

$$D[\tilde{\theta}_n] \geq (I_n(\theta))^{-1},$$

где $I_n(\theta)$ - информация по Фишеру, содержащаяся в выборке объема n относительно неизвестного параметра.

Для независимых выборочных значений

$$w_n(\vec{y} | \theta) = w_n(y_1, \dots, y_n | \theta) = \prod_i^n w_1(y_i | \theta)$$

$$I_n(\theta) = nD\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(w_1(y | \theta))\right].$$

Оценка, удовлетворяющая неравенству Крамера-Рао, называется эффективной.

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СП

$$\tilde{m}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad - \text{выборочное среднее}$$

СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО

1. Выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания СП:

$$M[\tilde{m}_y] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[y_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_y = m_y$$

Дисперсия выборочного среднего:

$$D[\tilde{m}_y] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[y_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_y = \frac{D_y}{n}$$

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СП

2. Выборочное среднее является состоятельной оценкой математического ожидания СП

$$M[\tilde{m}_y] = m_y; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\tilde{m}_y] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_y}{n} = 0$$

Относительная ошибка оценки математического ожидания СП:

$$\Delta_m = \frac{D[\tilde{m}_y]}{m_y^2} = \frac{D_y}{m_y^2 n} \rightarrow n = \frac{D_y}{m_y^2 \Delta_m}$$

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СП

3.ЭФФЕКТИВНОСТЬ Пусть СП Y является гауссовским:

$$w_1(y_i | m_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left(-\frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y}\right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_y} \ln w_1(y_i | m_y) &= \frac{\partial}{\partial m_y} \left(-\ln \sqrt{2\pi D_y} - \frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial m_y} \left(-\frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y} \right) = \frac{(y_i - m_y)}{D_y}; \end{aligned}$$

$$D\left[\frac{\partial}{\partial m_y} \ln w_1(y_i | m_y)\right] = D\left[\frac{(y_i - m_y)}{D_y}\right] = \frac{1}{D_y^2} D[y_i - m_y] = \frac{D_y}{D_y^2} = \frac{1}{D_y};$$

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СП

Информация по Фишеру:

$$I_n(m_y) = nD\left[\frac{\partial}{\partial m_y} \ln(w(y | m_y))\right] = \frac{n}{D_y}$$

$$D[\tilde{m}_y] = \frac{D_y}{n}$$

$$D[\tilde{m}_y] = (I_n(m_y))^{-1}$$

Выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания гауссовского СП.

$$\hat{m}_y = \tilde{m}_y$$

ОЦЕНКА МО НЕПРЕРЫВНОГО СП



ОЦЕНКА МО НЕПРЕРЫВНОГО СП

Для эргодического СП: $m_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

Выборочное среднее: $\tilde{m}_y = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

Свойства выборочного среднего.

1. Выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания СП:

$$M[\tilde{m}_y] = \frac{1}{T} \int_0^T M[y(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T m_y dt = m_y$$

ОЦЕНКА МО НЕПРЕРЫВНОГО СП

Дисперсия выборочного среднего:

$$D[\tilde{m}_y] = M[\tilde{m}_y^2] - M[\tilde{m}_y]^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (M[y(t_1)y(t_2)] - m_y^2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{D_y}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_y(\tau) d\tau \quad T \gg \tau_0 \text{ и } R_y(\tau) > 0$$

$$D[\tilde{m}_y] \approx \frac{D_y}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) d\tau = D_y \frac{2\tau_0}{T} = D_y \frac{2}{n}$$

Число некоррелированных отсчетов: $n \approx \frac{T}{\tau_0}$

Относительная ошибка:

$$\Delta_{m_y} = \frac{D[\tilde{m}_y]}{m_y^2} = \frac{D_y}{m_y^2} \frac{2\tau_0}{T} = \frac{D_y}{m_y^2} \frac{2}{n}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

МО СП ИЗВЕСТНО

$$\begin{aligned}\tilde{D}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i m_y + m_y^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2m_y \hat{m}_y + m_y^2 = \hat{m}_{2,y} - 2m_y \hat{m}_y + m_y^2\end{aligned}$$

МО СП НЕИЗВЕСТНО

$$\begin{aligned}\tilde{D}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_y)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i \hat{m}_y + \hat{m}_y^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{m}_y^2 \\ &= \hat{m}_{2,y} - \hat{m}_y^2\end{aligned}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

Выборочная дисперсия является несмещенной оценкой дисперсии СП при известном его математическом ожидании

$$\begin{aligned} M[\tilde{D}_y] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right] - 2m_y M[\hat{m}_y] + M[m_y^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[y_i^2] - m_y^2 = m_{2y} - m_y^2 = D_y \end{aligned}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии СП при неизвестном его математическом ожидании

$$\begin{aligned} M[\tilde{D}_y] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right] - M[\hat{m}_y^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[y_i^2] - (D[\hat{m}_y] + (M[\hat{m}_y])^2) = \\ &= m_{2y} - \frac{D_y}{n} - (m_y)^2 = D_y - \frac{D_y}{n} = D_y \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\hat{D}_y = \frac{\tilde{D}_y}{(1 - 1/n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_y)^2$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

2. Состоятельность

При известном МО выборочная дисперсия является состоятельной оценкой дисперсии СП

$$\tilde{D}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\overset{\circ}{y}_i)^2; \quad D[\tilde{D}_y] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\overset{\circ}{y}_i)^2\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[(\overset{\circ}{y}_i)^2]$$

Для гауссовского СП: $D[(\overset{\circ}{y}_i)^2] = 2D_y^2$

$$D[\tilde{D}_y] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 2D_y^2 = \frac{2D_y^2}{n}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

$$D[\tilde{D}_y] = \frac{2D_y^2}{n}$$

Относительная ошибка оценки дисперсии СП для гауссовского СП

$$\Delta_D = \frac{D[\tilde{D}_y]}{D_y^2} = \frac{2D_y^2}{D_y^2 n} = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2}{\Delta_D}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ

$$D[\tilde{\theta}_n] \geq (nD[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(w_1(y | \theta))])^{-1}$$

$$w(y_i | D_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left(-\frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial D_y} \ln w(y_i | D_y) = \frac{\partial}{\partial D_y} \left(-\ln \sqrt{2\pi D_y} - \frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y}\right) = -\frac{1}{2D_y} + \frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y^2}$$

$$\begin{aligned} D\left[\frac{\partial}{\partial D_y} \ln w(y_i | D_y)\right] &= D\left[-\frac{1}{2D_y} + \frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y^2}\right] = \frac{1}{4D_y^4} D[(y_i)^2] = \\ &= \frac{2D_y^2}{4D_y^4} = \frac{1}{2D_y^2} \end{aligned}$$

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СП

ИНФОРМАЦИЯ ПО ФИШЕРУ

$$I_n(D_y) = nD\left[\frac{\partial}{\partial D_y} \ln(w(y | D_y))\right] = \frac{n}{2D_y^2}; \quad D[\tilde{D}_y] = \frac{2D_y^2}{n}$$

$$D[\tilde{D}_y] = (I_n(D_y))^{-1}$$

Выборочная дисперсия при известном МО является эффективной оценкой дисперсии гауссовского СП.

$$\hat{D}_y = \tilde{D}_y$$

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2D СИГНАЛОВ

$$\tilde{m}_1 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} y(i_1, i_2)$$

-средняя яркость
(выборочное среднее)

$$\tilde{m}_1 = 40$$

$$\tilde{m}_1 = 120$$

$$\tilde{m}_1 = 200$$



СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2D СИГНАЛОВ

Выборочная дисперсия

$$\tilde{D} = \tilde{m}_2 - (\tilde{m}_1)^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} y^2(i_1, i_2) - (\tilde{m}_1)^2$$

$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{D} = 370$$

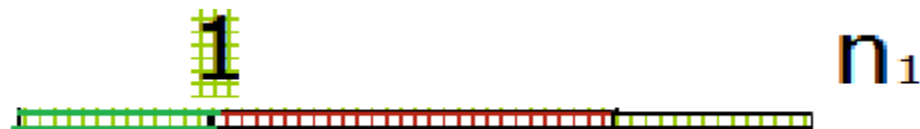
$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{D} = 1480$$

$$\tilde{m}_1 = 120 \quad \tilde{D} = 3350$$

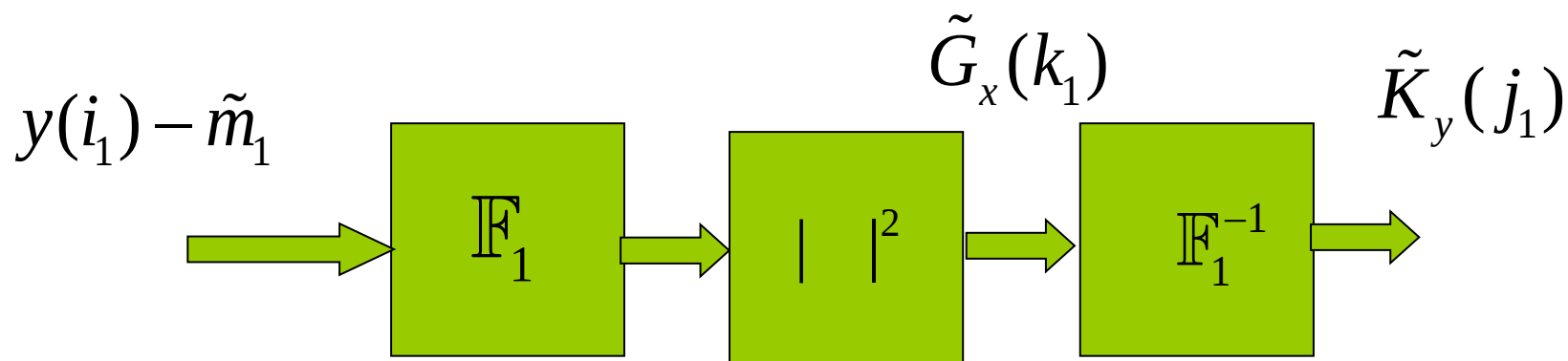


СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Выборочная АКФ



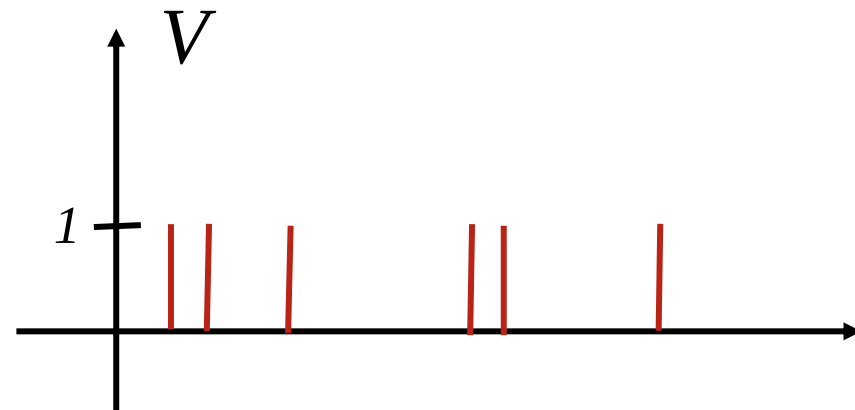
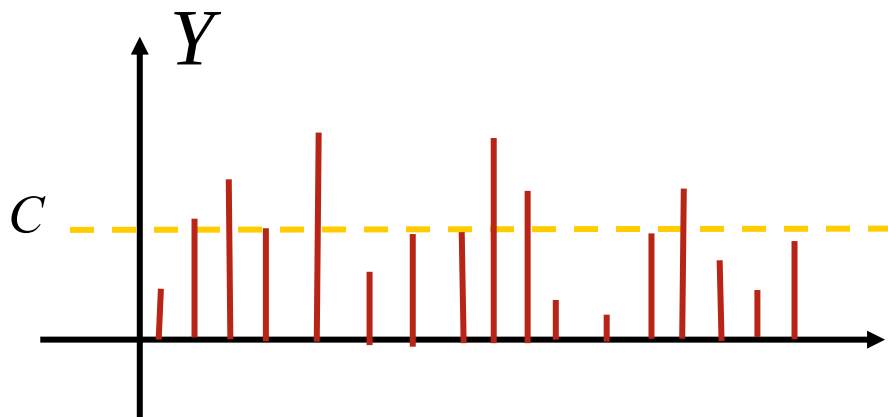
$$\tilde{K}_y(j_1) = \frac{1}{n_1 - j_1} \sum_{i_1=1}^{n_1-j_1} y(i_1)y(i_1 + j_1) - \tilde{m}_1^2$$



ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ СП ПОРОГА



ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ СП ПОРОГА



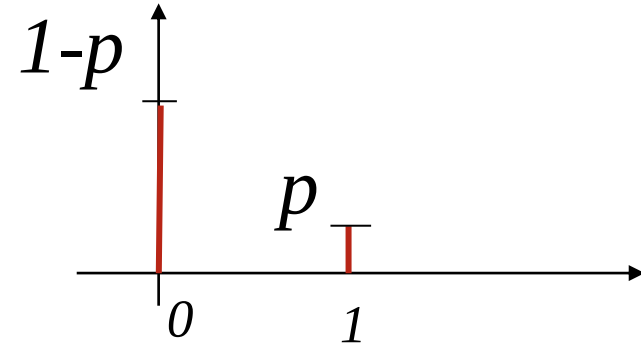
$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если порог } C \text{ превышен} \\ 0, & \text{если порог } C \text{ не превышен} \end{cases}$$

$$\tilde{p} = \tilde{P}(y_i > C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad \text{-частота}$$

БИНАРНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

$$P(v_i = 1) = p$$

$$P(v_i = 0) = 1 - p$$



$$m_v = M[v_i] = 1p + 0(1 - p) = p$$

$$m_{2v} = M[v_i^2] = 1^2 p + 0^2(1 - p) = p$$

$$D_v = m_{2v} - (m_{1v})^2 = p - p^2$$

СВОЙСТВА ЧАСТОТЫ

1. Частота является несмещенной оценкой вероятности превышения порога СП:

$$M[\tilde{p}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nu_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\nu_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p$$

Дисперсия частоты:

$$\begin{aligned} D[\tilde{p}] &= D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nu_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[\nu_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (p - p^2) \\ &= \frac{p(1 - p)}{n} \end{aligned}$$

СВОЙСТВА ЧАСТОТЫ

2. Частота является состоятельной оценкой вероятности превышения порога СП, т.к.

$$M[\tilde{p}] = p \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\tilde{p}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0$$

Относительная ошибка оценки вероятности превышения порога СП :

$$\Delta_p = \frac{D[\tilde{p}]}{p^2} = \frac{(1-p)}{pn} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{(1-p)}{p\Delta_p}$$

$$\Delta_p = 5\% \quad \Rightarrow \quad n = \frac{(1-p)}{p\Delta_p} = \frac{1-10^{-6}}{10^{-6} \cdot 0.05} = 20 \cdot 10^6$$

09.06.2024
 $p \approx 10^{-6}$

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Гистограмма цифрового сигнала – дискретная функция $h(r_k)=n_k$,

где r_k – k -й уровень сигнала,

n_k – число отсчетов выборки, имеющих уровень r_k .

Нормированная гистограмма – $\tilde{p}(r_k) = n(r_k) / n$

где n – объем выборки.

Эмпирическая функция цифрового сигнала – дискретная функция

$$\hat{F}(r_j) = \sum_{k=1}^j \tilde{p}(r_k)$$

- доля отсчетов выборки уровень которых меньше или равен r_j .

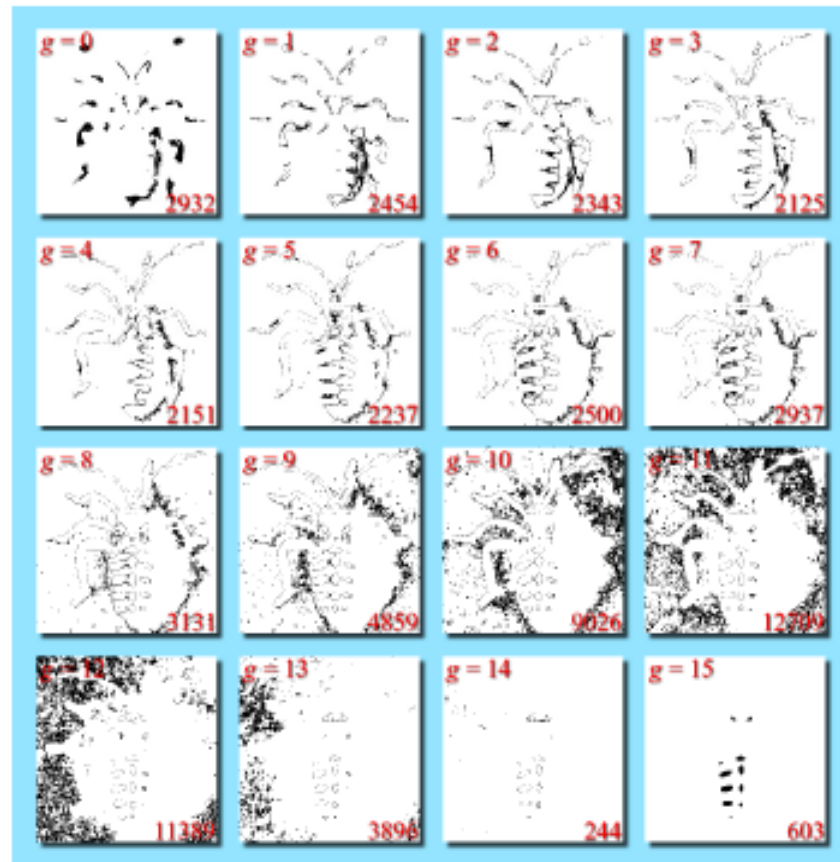
ГИСТОГРАММА ПОЛУТОНОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

The Histogram of a Grayscale Image



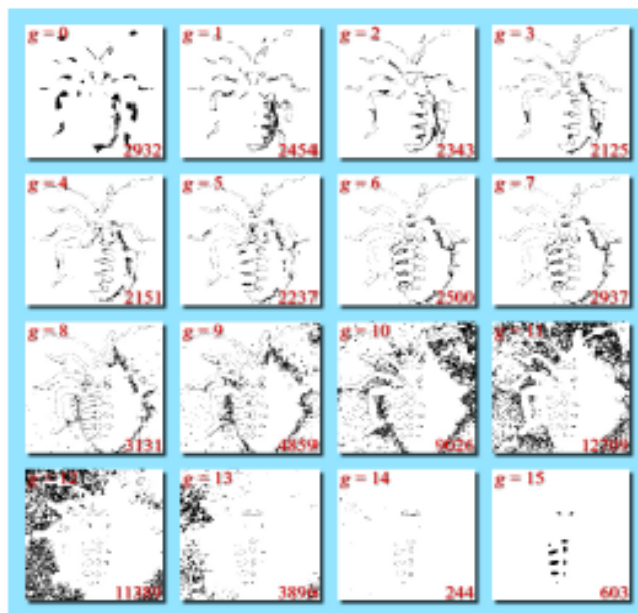
16-level (4-bit) image

lower RHC: number of pixels with intensity g



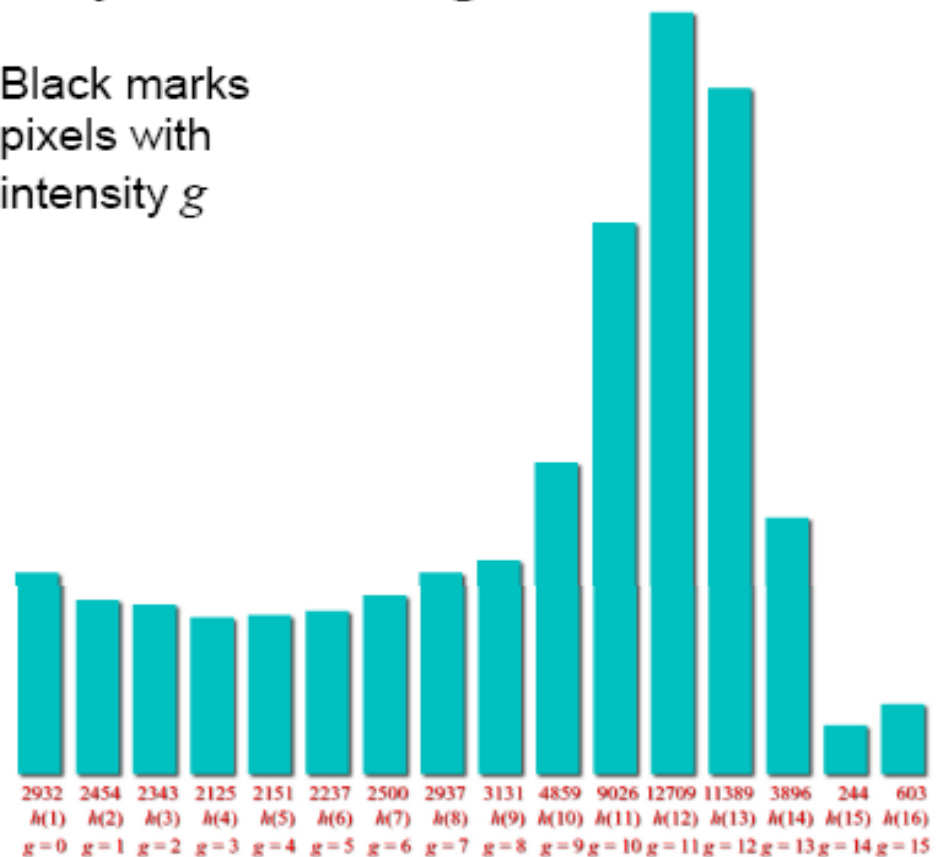
ГИСТОГРАММА ПОЛУТОНОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

The Histogram of a Grayscale Image



Black marks
pixels with
intensity g

Plot of histogram:
number of pixels with intensity g



ГИСТОГРАММА ПОЛУТОНОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Нормированная гистограмма

Эмпирическая функция

