

БАЙЕСОВСКИЕ И МП ОЦЕНКИ



БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

1. Оцениваемый параметр является случайной величиной с априорным распределением $w(\theta)$
2. Всем парам $[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})]$ приписываются некоторые стоимости во всей области изменения оцениваемого параметра – функция потерь
3. Качество оценки характеризуют математическим ожиданием функции потерь (средний риск) $C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})]$

$$M[R] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] w(\theta, \vec{y}) d\theta d\vec{y}$$

Оптимальной байесовской оценкой является оценка, минимизирующая средний риск

$$M[R] = \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] w(\theta | \vec{y}) d\theta \right) d\vec{y}$$

Апостериорный риск

$$M[R(\vec{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] w(\theta | \vec{y}) d\theta = \min_{\hat{\theta}(\vec{y})}$$

ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ

1. Квадратичная ФП $C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = (\theta - \hat{\theta}(\vec{y}))^2$

2. Прямоугольная (равномерная) ФП
$$C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = \begin{cases} 0, & |\theta - \hat{\theta}(\vec{y})| \geq \Delta / 2 \\ 1, & |\theta - \hat{\theta}(\vec{y})| < \Delta / 2 \end{cases}$$

3. Простая ФП $C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = 1 - \delta(\theta - \hat{\theta}(\vec{y}))$

4. Модульная ФП $C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = |\theta - \hat{\theta}(\vec{y})|$

КВАДРАТИЧНАЯ ФП

$$M[R(\vec{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}(\vec{y}))^2 w(\theta | \vec{y}) d\theta = \min_{\hat{\theta}(\vec{y})}$$

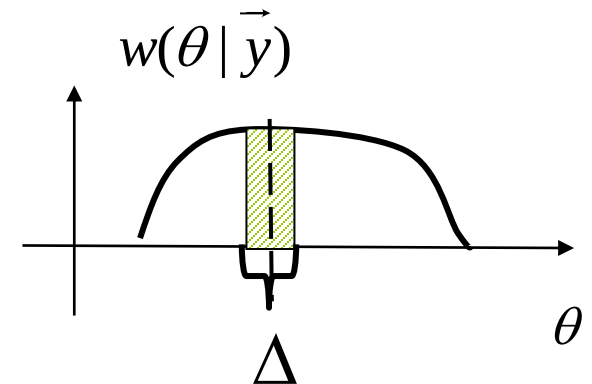
$$\frac{d}{d\hat{\theta}} M[R(\vec{y})] = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta | \vec{y}) d\theta = 0$$

$$\hat{\theta}_{ms}(\vec{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta w(\theta | \vec{y}) d\theta$$

Байесовская оценка при квадратичной функции потерь обеспечивает минимальное значение СКО

РАВНОМЕРНАЯ ФП

$$\begin{aligned} M[R(\vec{y})] &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta | \vec{y}) d\theta - \int_{\hat{\theta}(\vec{y}) - \Delta/2}^{\hat{\theta}(\vec{y}) + \Delta/2} w(\theta | \vec{y}) d\theta = \\ &= 1 - \int_{\hat{\theta}(\vec{y}) - \Delta/2}^{\hat{\theta}(\vec{y}) + \Delta/2} w(\theta | \vec{y}) d\theta = \min_{\hat{\theta}(\vec{y})} \end{aligned}$$



ПРОСТАЯ ФП. МАКСИМУМ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

В качестве оценки параметра по наблюдаемой выборке принимается такое значение, при котором апостериорная ПРВ достигает максимума:

$$\hat{\theta}_{map} = \arg \max_{\theta} w(\theta | \vec{y})$$

$w(\theta | \vec{y})$ - апостериорная ПРВ оцениваемого случайного параметра θ при фиксированных значениях $\vec{y}$

$$w(\theta | \vec{y}) = \frac{w(\theta, \vec{y})}{w(\vec{y})} = \frac{w(\vec{y} | \theta)w(\theta)}{w(\vec{y})}$$

$$\ln w(\theta | \vec{y}) = \ln w(\vec{y} | \theta) + \ln w(\theta) - \ln w(\vec{y})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\theta | \vec{y}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\vec{y} | \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\theta) = 0 \quad \text{-уравнение МЛВ}$$

МОДУЛЬНАЯ ФП

$$M[R(\vec{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}(\vec{y})| w(\theta | \vec{y}) d\theta = \min_{\hat{\theta}(\vec{y})}$$

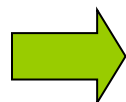
$$M[R(\vec{y})] = - \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta | \vec{y}) d\theta + \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta | \vec{y}) d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} w(\theta | \vec{y}) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} w(\theta | \vec{y}) d\theta \quad \boxed{\hat{\theta}_{abs}(\vec{y}) = med(w(\theta | \vec{y}))}$$

БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

1. Квадратичная ФП

$$C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = (\theta - \hat{\theta}(\vec{y}))^2$$



$$\hat{\theta}_{ms}(\vec{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta w(\theta | \vec{y}) d\theta$$

2. Простая ФП

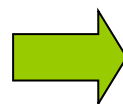
$$C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = 1 - \delta(\theta - \hat{\theta}(\vec{y}))$$



$$\hat{\theta}_{map} = \arg \max_{\theta} w(\theta | \vec{y})$$

3. Модульная ФП

$$C[\theta, \hat{\theta}(\vec{y})] = |\theta - \hat{\theta}(\vec{y})|$$



$$\hat{\theta}_{abs}(\vec{y}) = med(w(\theta | \vec{y}))$$

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

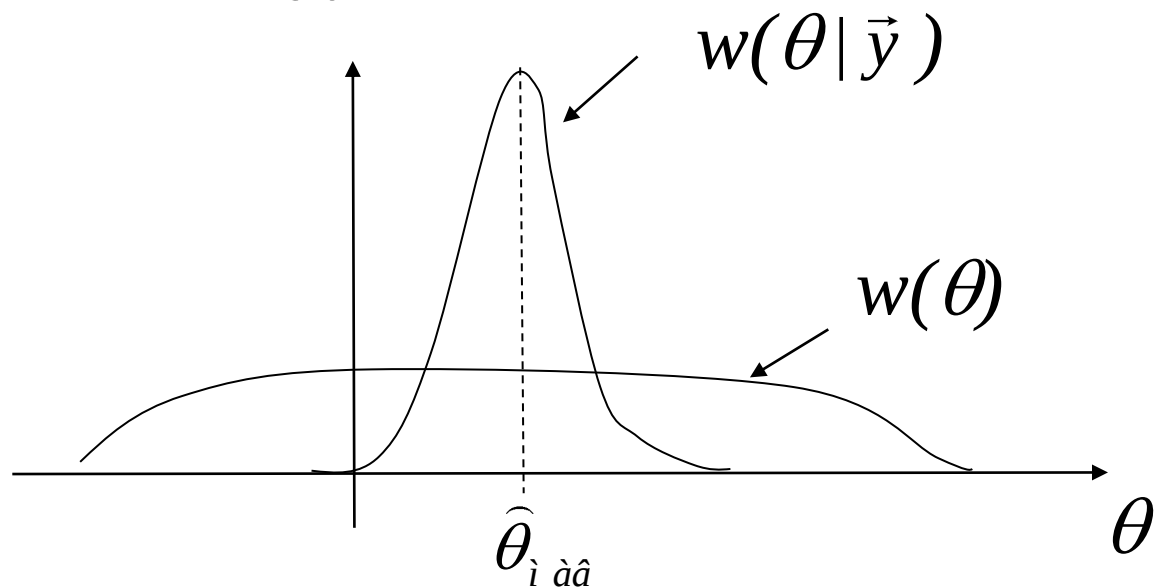
МП оценка - для оценки неслучайных параметров, т.е. когда отсутствует или не задано априорное распределение $w(\theta)$ оцениваемого параметра θ :

$$\hat{\theta}_{mn} = \arg \max_{\theta} L_y(\theta) = \arg \max_{\theta} w(\vec{y} | \theta)$$

$$\frac{\partial L_y(\theta)}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial \ln L_y(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

МЛВ И МП ОЦЕНКИ

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\theta | \vec{y}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\vec{y} | \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\theta) = 0$$



$$w(\theta) \approx \text{const}, \text{ при } \theta \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{ML} \approx \hat{\theta}_{MP}; \hat{\theta}_{ML} \in [a, b]$$

Для МП оценки это может не выполняться₉

МП ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ГАУССОВСКОГО СП

$$1) \quad w_1(y_i | m_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left(-\frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y}\right);$$

$$2) \quad \ln w_1(y_i | m_y) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} - \frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y};$$

$$3) \quad \frac{\partial \ln w_1(y_i | m_y)}{\partial m_y} = \frac{(y_i - m_y)}{D_y} \quad \Rightarrow \quad 4) \quad \frac{\partial \ln L_y(m_y)}{\partial m_y} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - m_y)}{D_y} = 0$$

$$\hat{m}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{-выборочное среднее является}$$

МП оценкой МО гауссовского СП

ММВ ОЦЕНКА ММ ГАУССОВСКОГО СП

Априорное распределение

$$w(m_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left(-\frac{(m_y - m_0)^2}{2D_0}\right)$$

Оценка по априорным данным

$$\hat{m}_{y,ap} = m_0, \quad D[\hat{m}_{y,ap}] = D_0$$

ММ оценка

$$\hat{m}_{y,mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad D[\hat{m}_{y,mn}] = \frac{D_y}{n}$$

ММВ ОЦЕНКА ММ ГАУССОВСКОГО СП

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(y_i | \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln w(\theta) = 0$$

$$w(y_i | m_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left(-\frac{(y_i - m_y)^2}{2D_y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial m_y} \ln w(m_y) = -\frac{(m_y - m_0)}{D_0};$$

$$w(m_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left(-\frac{(m_y - m_0)^2}{2D_0}\right); \quad \frac{\partial}{\partial m_y} \ln w(y_i | m_y) = \frac{(y_i - m_y)}{D_y}$$

ММВ ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial m_y} \ln w(y_i | m_y) + \frac{\partial}{\partial m_y} \ln w(m_y) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - m_y)}{D_y} - \frac{(m_y - m_0)}{D_0} = 0$$

$$\hat{m}_{y, map} = \frac{D_0}{D_y / n + D_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \frac{D_y / n}{D_y / n + D_0} m_0 =$$
$$= \frac{D_0}{D_y / n + D_0} \hat{m}_{y, mn} + \frac{D_y / n}{D_y / n + D_0} \hat{m}_{y, anp}$$

$$D[\hat{m}_{map}] = \left(\frac{D_0}{D_y / n + D_0} \right) \frac{D_y}{n} \leq \frac{D_y}{n}$$

ВЫВОДЫ

1. МАВ оценка представляет собой взвешенную сумму МП оценки и оценки по априорным данным.
2. Точность МАВ оценки всегда не хуже МП оценки.

3. $\frac{D_y}{n} \ll D_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{m}_{мав} \approx \hat{m}_{мп}$

$$\frac{D_y}{n} \gg D_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{m}_{мав} \approx \hat{m}_0$$

МП ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

1. Пусть некоторая величина измеряется неравноточными приборами, которые осуществляют измерения без систематических ошибок, но с разными дисперсиями.
2. Ошибка измерения подчиняется гауссовской ПРВ.
3. Ошибки статистически независимые от измерения к измерению.
4. Каждым прибором проводится n измерений.
5. Найти результирующую оценку параметра и дисперсию оценки.

МП ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Первый прибор: $\vec{y}_1 = \{y_{1,i} = a + \eta_{1,i}, i = \overline{1, n}\}$

Второй прибор: $\vec{y}_2 = \{y_{2,i} = a + \eta_{2,i}, i = \overline{1, n}\}$

Для измерения одним прибором

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad D[\hat{a}] = \frac{D_y}{n} = \frac{D_\eta}{n}$$

МП оценка: 1) $w_2(y_{1,i}, y_{2,i} | a) = w_1(y_{1,i} | a)w_1(y_{2,i} | a) =$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{D_{1,y}D_{2,y}}} \exp\left(-\frac{(y_{1,i} - a)^2}{2D_{1,y}} - \frac{(y_{2,i} - a)^2}{2D_{2,y}}\right)$$

$$2) \quad \ln w(y_{1,i}, y_{2,i} | a) = \ln \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{1,y}D_{2,y}}} - \frac{(y_{1,i} - a)^2}{2D_{1,y}} - \frac{(y_{2,i} - a)^2}{2D_{2,y}} \quad 16$$

МП ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

$$3) \quad \frac{\partial \ln w_2(y_{1,i}, y_{2,i} | a)}{\partial a} = \frac{(y_{1,i} - a)}{D_{1,y}} + \frac{(y_{2,i} - a)}{D_{2,y}}$$



$$4) \quad \frac{\partial \ln L_y(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_{1,i} - a)}{D_{1,y}} + \frac{(y_{2,i} - a)}{D_{2,y}} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_{1,i}}{D_{1,y}} + \sum_{i=1}^n \frac{y_{2,i}}{D_{2,y}} - \frac{na}{D_{1,y}} - \frac{na}{D_{2,y}} = 0$$

$$\hat{a} = \frac{D_{2,y}}{D_{1,y} + D_{2,y}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{1,i} + \frac{D_{1,y}}{D_{1,y} + D_{2,y}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{2,i}$$

МП ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Анализ оценки

$$\begin{aligned} D[\hat{a}] &= D\left[\frac{D_{2y}}{D_{1y} + D_{2y}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{1,i} + \frac{D_{1y}}{D_{1y} + D_{2y}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{2,i}\right] = \\ &= \left(\frac{D_{2y}}{D_{1y} + D_{2y}}\right)^2 D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{1,i}\right] + \left(\frac{D_{1y}}{D_{1y} + D_{2y}}\right)^2 D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{2,i}\right] = \\ &= \left(\frac{D_{2y}}{D_{1y} + D_{2y}}\right)^2 \frac{D_{1,y}}{n} + \left(\frac{D_{1y}}{D_{1y} + D_{2y}}\right)^2 \frac{D_{2,y}}{n} = \\ D[\hat{a}] &= \frac{1}{n} \frac{D_{2,y}^2 D_{1,y} + D_{1,y}^2 D_{2,y}}{(D_{1,y} + D_{2,y})^2} = \frac{1}{n} \frac{D_{2,y} D_{1,y}}{(D_{1,y} + D_{2,y})} \end{aligned}$$

МП ОЦЕНКА МО ГАУССОВСКОГО СП ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

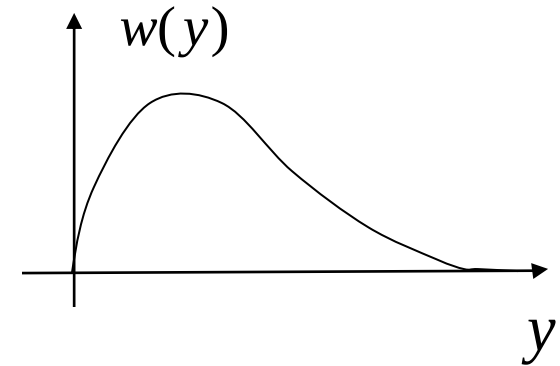
$$D[\hat{a}] = \frac{1}{n} \frac{D_{2,y}^2 D_{1,y} + D_{1,y}^2 D_{2,y}}{(D_{1,y} + D_{2,y})^2} = \frac{1}{n} \frac{D_{2,y} D_{1,y}}{(D_{1,y} + D_{2,y})}$$

Если $D_{1,y} = D_{2,y} = D_y$  $D[\hat{a}] = \frac{D_y}{2n}$

Если $D_{2,y} = D_y, D_{1,y} = \alpha D_y$  $D[\hat{a}] = \frac{\alpha}{(\alpha + 1)} \frac{1}{n} D_y < \frac{1}{n} D_y$

МП ОЦЕНКА МО РЕЛЕЕВСКОГО СП

$$w(y_i) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), y \geq 0$$



$$m_y = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \sigma = m_y \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$w(y_i | m_y) = \frac{y_i}{m_y^2 \frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2m_y^2 \frac{2}{\pi}}\right) = \frac{y_i \pi}{2m_y^2} \exp\left(-\frac{y_i^2 \pi}{4m_y^2}\right)$$

$$w(\vec{y} | m_y) = \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{m_y^{2n}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \exp\left(-\frac{\pi}{4m_y^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

МП ОЦЕНКА МО РЕЛЕЕВСКОГО СП

$$w(\vec{y} | m_y) = \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{m_y^{2n}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n \exp\left(-\frac{\pi}{4m_y^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

$$\ln w(\vec{y} | m_y) = \ln\left(\prod_{i=1}^n y_i \left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right) - 2n \ln m_y - \frac{\pi}{4m_y^2} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\frac{d}{dm_y} \ln w(\vec{y} | m_y) = -\frac{2n}{m_y} + \frac{2\pi}{4m_y^3} \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

$$\hat{m}_y = \sqrt{\frac{\pi}{4n} \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

МП ОЦЕНКА ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$\vec{y} = \{y_i = A \cos(\omega t_i + \theta) + \eta_{1,i}, i = \overline{1, n}\} \quad n\Delta t = kT_{II}, k \gg 1$$

$$1) \quad w_1(y_i | \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}} \exp\left(-\frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2}{2D_\eta}\right);$$

$$2) \quad \ln w_1(y_i | \theta) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}} - \frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2}{2D_\eta};$$

$$3) \quad \frac{\partial \ln w_1(y_i | \theta)}{\partial \theta} = -\frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))}{D_\eta} \sin(\omega t_i + \theta)$$

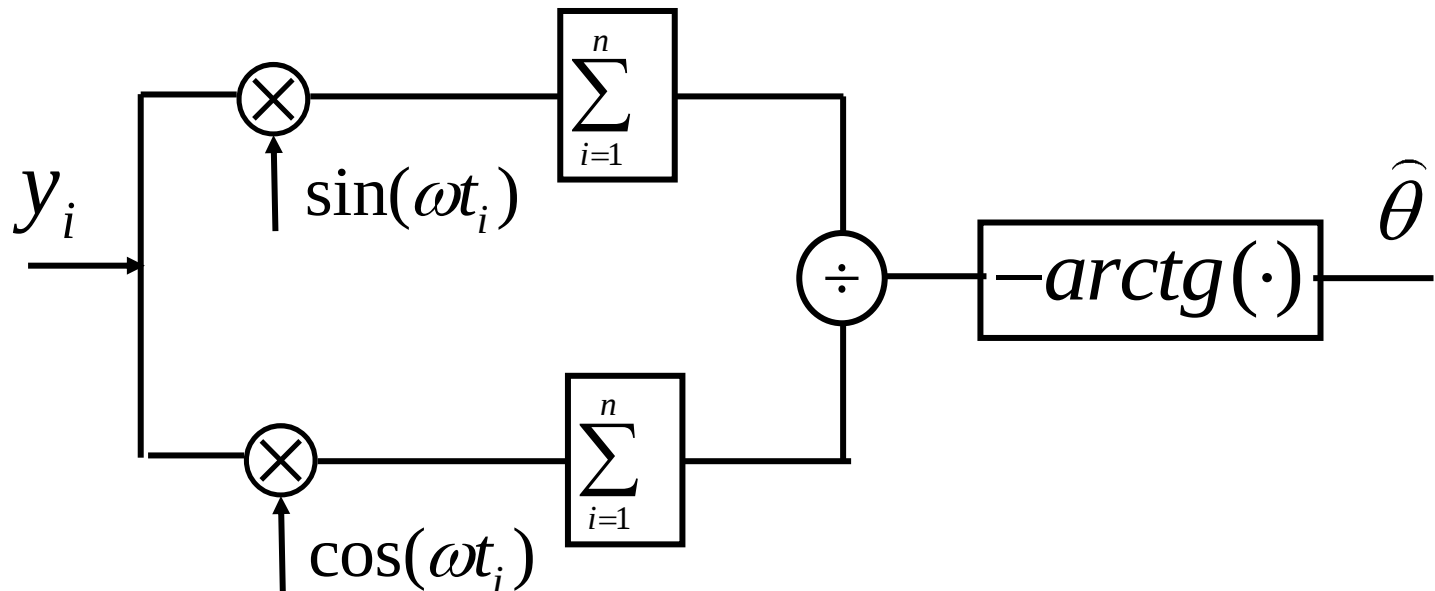
$$4) \quad \frac{\partial \ln L_y(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))}{D_\eta} \sin(\omega t_i + \theta) = 0 \quad 22$$

МП ОЦЕНКА ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$\sum_{i=1}^n (y_i - A \cos(\omega t_i + \theta)) \sin(\omega t_i + \theta) \approx \sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega t_i + \theta) = 0$$



$$\cos \theta \sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega t_i) + \sin \theta \sum_{i=1}^n y_i \cos(\omega t_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = -\arctg \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega t_i)}{\sum_{i=1}^n y_i \cos(\omega t_i)}$$



МП ОЦЕНКА НЕСКОЛЬКИХ ПАРАМЕТРОВ

$$\vec{\hat{\theta}}_{mn} = \arg \max_{\vec{\theta}} L_y(\vec{\theta}) = \arg \max_{\theta} w(\vec{y} | \vec{\theta})$$

$\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ - вектор неизвестных параметров

Система МП уравнений

$$\frac{\partial L_y(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} = 0; k = \overline{1, m} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \ln L_y(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} = 0; k = \overline{1, m}$$

МП ОЦЕНКА АМЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$\vec{y} = \{y_i = A \cos(\omega t_i + \theta) + \eta_{1,i}, i = \overline{1, n}\}$$

$$w_1(y_i | \theta, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}} \exp\left(-\frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2}{2D_\eta}\right);$$

$$\begin{aligned} w_n(\vec{y} | \theta, A) &= \prod_{i=1}^n w_1(y_i | \theta, A) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2}{2D_\eta}\right); \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2\right); \end{aligned}$$

МП ОЦЕНКА АМЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$w_n(\vec{y} | \theta, A) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2\right) = \max_{A, \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln w_n(\vec{y} | \theta, A) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \ln w_n(\vec{y} | \theta, A) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2 = \min_{A, \theta}$$

МП ОЦЕНКА АМЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$\sum_{i=1}^n (y_i - A \cos(\omega t_i + \theta))^2 = \min_{A, \theta}$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - A \cos \theta \cos(\omega t_i) + A \sin \theta \sin(\omega t_i))^2$$

$$\lambda_1 = A \sin \theta \quad \lambda_2 = A \cos \theta$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i + \lambda_1 \sin(\omega t_i) - \lambda_2 \cos(\omega t_i))^2 = \min_{\lambda_1, \lambda_2}$$

МП ОЦЕНКА АМЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i + \lambda_1 \sin(\omega t_i) - \lambda_2 \cos(\omega t_i))^2 = \min_{\lambda_1, \lambda_2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n -2(y_i + \lambda_1 \sin(\omega t_i) - \lambda_2 \cos(\omega t_i)) \sin(\omega t_i) \approx$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i \sin(\omega t_i) + \lambda_1 \sin(\omega t_i)^2) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{\sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega t_i)}{\sum_{i=1}^n \sin(\omega t_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i \cos(\omega t_i) - \lambda_2 \cos(\omega t_i)^2) = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cos(\omega t_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(\omega t_i)^2}$$

МП ОЦЕНКА АМЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

$$\lambda_1 = -\frac{\sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega t_i)}{\sum_{i=1}^n \sin(\omega t_i)^2} = A \sin \theta$$

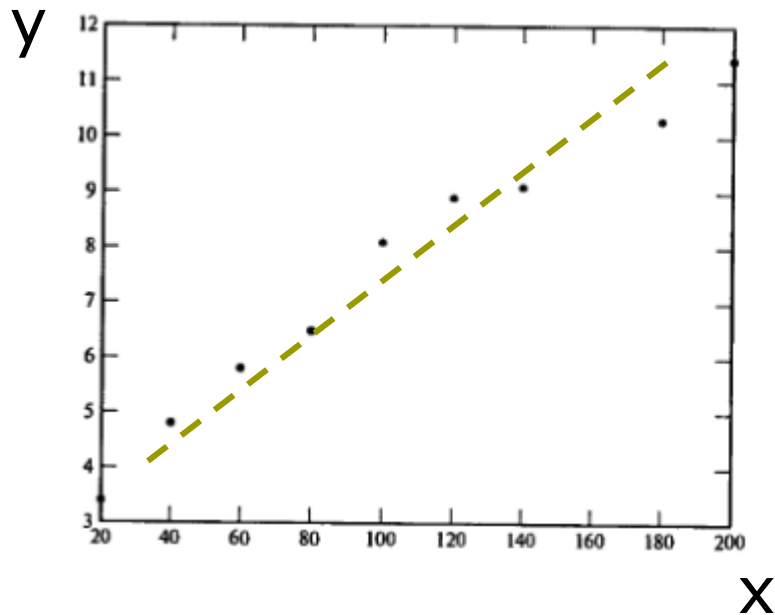
$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cos(\omega t_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(\omega t_i)^2} = A \cos \theta$$

$$\hat{A} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \hat{\theta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\hat{\theta} = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ



$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

1. $y = ax + b$ - уравнение прямой;

МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ. 1 ВАРИАНТ

$$w_1(y_i | a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left(-\frac{(y_i - ax_i - b)^2}{2D_y}\right);$$

$$w_n(\vec{y} | a, b) = \prod_{i=1}^n w_1(y_i | a, b) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi D_y}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2D_y} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2\right);$$

$$\ln w_n(\vec{y} | a, b) = \ln \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi D_y}\right)^n} - \frac{1}{2D_y} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2;$$

МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a} \ln w_n(\vec{y} | a, b) = \frac{2}{2D_y} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0; \\ \frac{\partial}{\partial b} \ln w_n(\vec{y} | a, b) = \frac{2}{2D_y} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i; \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ. 2 ВАРИАНТ

$$ax + by - c = 0$$

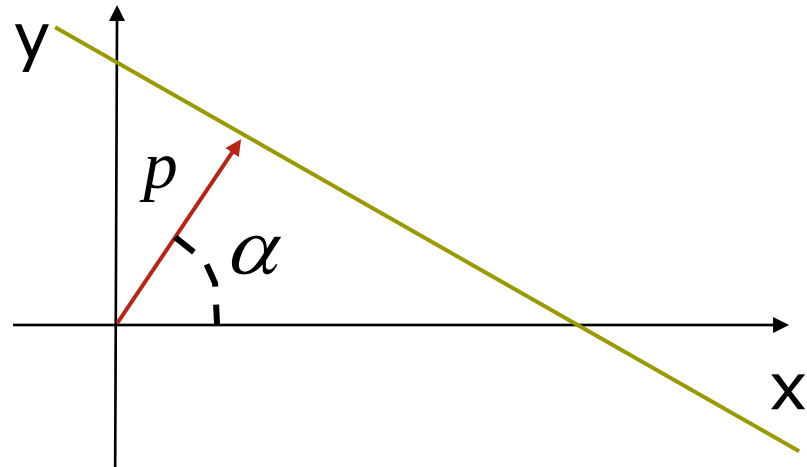


$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y - \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \end{array} \right.$$



$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$



МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ . 2 ВАРИАНТ

$$x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p = \eta_i$$

$$w_1(\eta_i | \alpha, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta}} \exp\left(-\frac{(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)^2}{2D_\eta}\right);$$

$$w_n(\vec{\eta} | \alpha, p) = \prod_{i=1}^n w_1(\eta_i | \alpha, p) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi D_\eta}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)^2\right);$$

$$\ln w_n(\vec{\eta} | \alpha, p) = \ln \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi D_\eta}\right)^n} - \frac{1}{2D_\eta} \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)^2;$$

МП ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ

