Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. ВАСЮКОВ, Д.Н. ЗИМА, А.А. МУРАСЕВ

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2021

УДК 621.37.083.92(075.8)
В 201

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент *Д.О. Соколова*
канд. техн. наук, доцент *А.В. Кривецкий*

Васюков В.Н.

В 201 Цифровая обработка сигналов и её применение: учебное пособие / В.Н. Васюков, Д.Н. Зима, А.А. Мурасев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2021. – 122 с.

ISBN 978-5-7782-4435-1

Учебное пособие содержит задачи и упражнения по теории цифровой обработки сигналов и её применению, а также краткие теоретические сведения и ссылки на литературные источники.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям 11.03.01 – Радиотехника, 11.03.02 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи. Оно может быть использовано при изучении цифровой обработки сигналов студентами и магистрантами близких специальностей.

Работа подготовлена на кафедре
теоретических основ радиотехники

УДК 621.37.083.92(075.8)

ISBN 978-5-7782-4435-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Цифровая обработка сигналов», «Применение цифровой обработки сигналов», «Специальные вопросы цифровой обработки сигналов». Пособие содержит задачи и упражнения, а также краткие пояснения и теоретические сведения. В большинстве разделов приведены примеры решения задач.

Задачи и упражнения сгруппированы в разделы, последовательность которых в основном соответствует порядку изложения лекционного материала и содержанию учебника [1]. Отдельные задачи заимствованы из источников, список которых приведён в конце пособия [3–8].

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\delta[n]$	– дельта-последовательность
$u[n]$	– единичная ступенчатая последовательность
$*$	– символ дискретной свёртки как двухместной операции
$\mathbb{R}$	– поле вещественных (действительных) чисел
$\mathbb{C}$	– поле комплексных чисел
$\mathbb{Z}$	– множество (кольцо) целых чисел
(x, y)	– скалярное произведение векторов (последовательностей) x и y
$\{\cdot,\cdot,\cdot,..,\cdot\}$	– множество элементов, перечисленных или описанных выражением в скобках
l_2	– пространство квадратично суммируемых последовательностей
l_1	– пространство абсолютно суммируемых последовательностей

$\|x\|_2$ – норма (в l_2) вектора x

$\|x\|_1$ – норма (в l_1) вектора x

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

АЦП – аналого-цифровой преобразователь
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика
БИХ – бесконечная импульсная характеристика
ДВПФ – дискретно-временно́е преобразование Фурье
ДПФ – дискретное преобразование Фурье
ИХ – импульсная характеристика
КИХ – конечная импульсная характеристика
КЧХ – комплексная частотная характеристика
ЛИС – линейная инвариантная к сдвигу (цепь)
НПД – нуль-полюсная диаграмма
ПРВ – плотность распределения вероятности
ПФ – передаточная функция
РУ – разностное уравнение
СПМ – спектральная плотность мощности
ФВЧ – фильтр верхних частот
ФНЧ – фильтр нижних частот
ФЧХ – фазочастотная характеристика
ЦАП – цифроаналоговый преобразователь
ЦОС – цифровая обработка сигналов
ЦФ – цифровой фильтр

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В основе цифровой обработки сигналов лежит представление о дискретном сигнале как последовательности вещественных или комплексных чисел, пронумерованных (индексированных) целой переменной, например, $n \in \mathbb{Z}$, называемой дискретным временем. Аргумент в обозначении последовательности принято заключать в квадратные скобки, например, $x[n]$, $y[n]$ и т. п. При графическом изображении дискретных сигналов ось времени представляется непрерывной линией, однако нужно иметь в виду, что сигнал существует только в изолированных точках оси с целыми значениями n. Значения вещественного дискретного сигнала (отсчёты) изображаются вертикальными отрезками соответствующей длины.

Подробнее: [1, с. 11; 3, с. 29].

* * *

1.1. Последовательность $\delta[n]$ имеет один ненулевой отсчёт при $n=0$; остальные отсчёты равны 0. Изобразите графики последовательностей $\delta[n]$, $\delta[n-2]$, $\delta[2-n]$, $\delta[n+2]$.

1.2. Последовательность $u[n]$ определяется выражением $u[n] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$.

а) Изобразите графики последовательностей $u[n]$, $u[-n]$, $u[n-5]$, $u[5-n]$.

б) Выразите δ-последовательность $\delta[n]$ через $u[n]$.

в) Изобразите график последовательности $v[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$.

г) Постройте графики последовательностей $u[n]-u[n-5]$, $u[n+3]-u[n-3]$, $u[n+3]\,u[-n+3]$.

1.3. Последовательность $x[n]$, $n=\overline{-\infty,\infty}$, задана своими значениями 3, 4, 5, 6, 7, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4; остальные отсчёты равны 0. Постройте график. Представьте $x[n]$ линейной комбинацией (взвешенной суммой) сдвинутых последовательностей $\delta[n-k]$, $k=\overline{-\infty,\infty}$.

* * *

Важную роль в теории ЦОС играют периодические последовательности. Периодической является последовательность, которая совпадает с собой при сдвигах по оси дискретного времени, кратных целому числу. Наименьшее положительное целое число N, при котором $x[n]=x[n+N]$, называется периодом последовательности $x[n]$. Следует отметить, что при дискретизации периодического аналогового сигнала может получиться непериодический дискретный сигнал.

Подробнее: [1, с. 12; 3, с. 34].

* * *

Пример решения

Задание

Определите период последовательности

$$x[n]=\exp(j\pi n/7).$$

Решение

Из условия периодичности $x[n]=x[n+N]$ после подстановки получаем $x[n]=\exp(j\pi n/7)=\exp\left[j\pi(n+N)/7\right]=x[n+N]$. Функция $\exp(j\cdot)$ имеет период 2π, следовательно, $\pi N/7=2\pi$, откуда $N=14$.➤

* * *

1.4. Постройте графики последовательностей вида $c[n]=\cos(\omega n)$ при $\omega=\pi$; при $\omega=2\pi$, при $\omega=\pi/2$; при $\omega=\pi/5$; при $\omega=3/5$; при $\omega=3/2$. Какие из них являются периодическими?

1.5. Определите периоды последовательностей:

а) $x_1[n] = \cos(\pi n / 3)$,

б) $x_2[n] = \sin(\pi n / 5)$,

в) $x_3[n] = \cos(\pi n / 3) + \sin(\pi n / 5)$.

1.6. Последовательность $c[n] = \cos(\omega n)$ может быть периодической или непериодической. Перечислите значения частоты, при которых последовательность периодична с периодом 5; с периодом 7; с периодом N.

1.7. Последовательность $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, задана своими значениями 5, 4, 3, 2, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4. Остальные отсчёты последовательности равны 0.

а) Постройте графики последовательностей $x[n]$, $x[-n]$, $x[n-4]$, $x[4-n]$.

б) Постройте график последовательности $\tilde{x}[n]$, полученной из $x[n]$ периодическим повторением по времени с периодом 5; с периодом 7.

в) Продолжите последовательность $x[n]$ так, чтобы получилась чётная последовательность[1]. Можно ли продолжить $x[n]$ нечётным образом?

1.8. Последовательность $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, определена для неотрицательных n выражением a^n, где a – вещественное положительное число меньше единицы; остальные отсчёты равны 0.

а) Запишите выражение для $x[n]$ с использованием последовательности $u[n]$.

б) Постройте графики последовательностей $x[n]$, $x[-n]$, $x[|n|]$.

в) Постройте график последовательности $y[n] = (-1)^n x[n]$.

1.9. Постройте график последовательности $x[n] = b^n u[n]$, выбрав значение b из условия $-1 < b < 0$.

1.10. Постройте график последовательности $x[n] = b^n u[-n]$, выбрав значение b из интервала $(0,1)$.

---

[1] Функция называется чётной, если выполняется условие $f(x) = f(-x)$; для нечётной функции выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

1.11. Последовательность $r[n]$ задана своими значениями 1, 1, 1, 1, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4, остальные отсчёты равны 0.

а) Запишите последовательность $r[n]$ как взвешенную сумму сдвинутых вариантов последовательности $u[n]$.

б) Выразите последовательность $r[n]$ линейной комбинацией сдвинутых вариантов последовательности $\delta[n]$.

1.12. Постройте графики вещественной и мнимой части последовательности $e^{j(\pi n/4)}u[n]$.

1.13. Постройте графики вещественной и мнимой части последовательности $e^{-[\alpha+j(\pi/4)]n}u[n]$ при $\alpha=0.5$; при $\alpha=0.1$.

1.14. Какой вид имеет последовательность $\tilde{\delta}_N[n]=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$?

Изобразите график для $N=5$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦОС

Изложение современной теории сигналов (в том числе дискретных) базируется на понятиях высшей (абстрактной) алгебры. Основными алгебраическими структурами, используемыми в теории сигналов, являются полугруппа, группа, кольцо и поле.

Полугруппой называется множество *M*, на котором определена двухместная (бинарная) операция, относительно которой множество замкнуто в том смысле, что для любой пары элементов множества результат операции принадлежит данному множеству. Обозначив операцию символом $\odot$, можно записать условие замкнутости в виде $\forall x\in M\ \forall y\in M: x\odot y=z\in M$. На операцию накладывается условие ассоциативности $\forall x,\ y,\ w\in M:(x\odot y)\odot w=x\odot(y\odot w)$. Примером полугруппы может служить множество $\mathbb{N}_+$ целых положительных чисел с операцией сложения. Полугруппа может содержать элемент e, нейтральный относительно операции $\odot$, т. е. такой, что $\forall x\in M: x\odot e=e\odot x=x$. В этом случае множество M называется **мо-**

ноидом. Пример моноида – множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операцией умножения; нейтральным элементом является число 1.

Группой является множество M с определённой на нём бинарной операцией $\odot$, причём выполняются условия замкнутости, ассоциативности и имеется нейтральный элемент. Кроме того, для каждого элемента множества существует обратный элемент: $\forall x \in M : \exists x' \in M : x \odot x' = e$. Например, множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения образует группу, так как в нём выполняется условие замкнутости (сумма целых чисел – целое число), имеется нейтральный элемент – число 0, и для каждого целого числа m найдётся обратное ему число $-m$.

Если для групповой операции справедливо условие коммутативности, т. е. $\forall x \in M\ \forall y \in M : x \odot y = y \odot x$, то группа называется коммутативной или а́белевой.

Кольцом называется множество *M*, на котором определены две бинарные операции, называемые сложением + и умножением × (не обязательно совпадающие с обычными сложением и умножением!), причём относительно сложения – это а́белева группа, а относительно умножения – полугруппа (с единицей или без); кроме того, требуется выполнение условий дистрибутивности:

$$\forall x,\ y,\ w \in M : x \times (y + w) = x \times y + x \times w,$$

$$\forall x,\ y,\ w \in M : (x + y) \times w = x \times w + y \times w.$$

Примером кольца с единицей может служить множество $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения.

Полем называется множество M с двумя бинарными операциями (сложением + и умножением ×), причём относительно сложения оно представляет собой абелеву группу, а относительно умножения абелевой группой является подмножество $M \setminus e$, получаемое удалением элемента, нейтрального по сложению (проще говоря, запрещено деление на 0). Примеры полей – множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с обычными сложением и умножением, множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел со сложением и умножением комплексных чисел.

Подробнее: [2, с. 555].

* * *

2.1. Проверьте, образует ли множество $\mathbb{R}$ действительных чисел группу относительно операции сложения; относительно операции умножения; относительно операции деления.

2.2. Пусть $\Re_{[0;1]}$ – множество действительных чисел, принадлежащих интервалу[2] $[0,1]$. Образует ли множество $\Re_{[0;1]}$ группу относительно операции сложения? относительно операции умножения?

2.3. Обозначим $\Re_{(0;1]}$ множество действительных чисел, находящихся в интервале $(0,1]$. Образует ли множество $\Re_{(0;1]}$ группу относительно операции сложения? относительно операции умножения? Является ли оно полугруппой относительно этих операций?

2.4. Пусть $\Re_{[0;1)}$ – множество действительных чисел, принадлежащих интервалу $[0,1)$. Проверьте, образует ли множество $\Re_{[0;1)}$ группу относительно операции сложения по модулю 1. (Операция сложения по модулю m определяется выражением

$$(x+y)\bmod m = \begin{cases} x+y, & \text{если } x+y<m, \\ x+y-km, & \text{если } x+y\ge m, \end{cases}$$

где k – максимальное целое, такое, что $x+y-km \ge 0$).

2.5. Образует ли множество $\mathbb{Z}$ целых чисел группу относительно операции сложения? относительно операции умножения? относительно операции деления?

2.6. Пусть $\mathbb{Z}_{(2)}$ – множество всех чётных целых чисел, включая 0. Образует ли множество $\mathbb{Z}_{(2)}$ группу относительно операции сложения? относительно операции умножения?

2.7. Пусть $\mathbb{Z}_{(m)}$ – множество всех целых чисел, делящихся без остатка на целое число m. Является ли множество $\mathbb{Z}_{(m)}$ группой относительно операции сложения? относительно операции умножения?

[2] Здесь и далее тип интервала (открытый, замкнутый и полузамкнутый) определяется его обозначением.

2.8. Проверьте, выполняются ли аксиомы группы по сложению: а) для множества всех матриц; б) множества всех матриц размера $M \times N$; в) множества всех квадратных матриц; г) множества всех матриц размера $N \times N$ (здесь и далее M и N – различные целые положительные числа).

2.9. Дано множество всех матриц размера $N \times N$. Проверьте, является ли это множество группой относительно операции матричного умножения. Если нет, то как нужно сузить это множество, чтобы выполнялись аксиомы группы? Что в этом случае представляет собой нейтральный элемент?

2.10. Дано множество $\{0,1\}$, состоящее из целых чисел 0 и 1, с операцией сложения по модулю 2 . Проверьте, является ли это множество группой. Если да, то определите нейтральный элемент и для каждого элемента определите обратный.

2.11. Дано множество целых чисел $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ с операцией сложения по модулю 5. Проверьте, является ли это множество группой. Что представляет собой нейтральный элемент? Запишите для каждого элемента обратный ему.

2.12. Дано множество целых чисел $\{0, 1\}$. Проверьте, составляет ли оно группу относительно обычной операции умножения.

2.13. Дано множество целых чисел $\{0, 1\}$ с операциями сложения по модулю 2 и обычного умножения. Является ли это множество полем?

2.14. Дано множество целых чисел $\{0, 1, 2\}$. Дайте определение операций (сложения и умножения), для которых это множество образует поле. Составьте таблицы сложения и умножения.

2.15. На множестве последовательностей произвольной конечной длины, составленных из символов 0 и 1 (включая пустую последовательность нулевой длины), определена двухместная операция конкатенации, когда к одной последовательности справа дописывается другая. Какая алгебраическая структура при этом получается?

3. ПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Основная алгебраическая структура, используемая в теории ЦОС, – это линейное (векторное) **пространство**, т. е. множество объектов, называемых векторами, которые можно складывать (а также вычитать) и умножать на скалярные коэффициенты. Прежде всего, относительно сложения векторов пространство представляет собой коммутативную (а́белеву) группу. С пространством M связано поле F скаляров[3], при этом должны выполняться условия (аксиомы) ассоциативности умножения на скаляр $\forall x \in M \; \forall \, \alpha, \, \beta \in F : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, унитарности $\forall x \in M : 1x = x$, где 1 – элемент поля F, нейтральный по умножению, а также две аксиомы дистрибутивности (правила раскрытия скобок):

$$\forall x, \, y \in M \; \forall \, \alpha \in F : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \, ;$$

$$\forall x \in M \; \forall \, \alpha, \, \beta \in F : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y \, .$$

Подробнее: [1, с. 13; 2, с. 56].

* * *

3.1. Дано множество M_N последовательностей длины N, каждая из которых определяется выражением

$$x[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \delta[n - i] \, ,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, N-1}$; $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел. Определены операции поэлементного сложения последовательностей и умножения последовательности на действительное число:

$$x[n] + y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + y_i) \delta[n - i] ,$$

$$\alpha x[n] = \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha x_i) \delta[n - i] \, , \; \alpha \in \mathbb{R} \, .$$

Проверьте выполнение аксиом линейного пространства для множества M_N. Существует ли в M_N нулевой элемент? Запишите его. Найдите элемент, обратный последовательности $x[n] = \delta[n] + a\delta[n-2]$.

---

[3] Говорят, что задано пространство *M над полем F*.

3.2. Дано множество последовательностей бесконечной длины, каждая из которых определяется выражением

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \delta[n-i],$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{-\infty, +\infty}$. Определены операции поэлементного сложения последовательностей и умножения последовательности на вещественное число. Проверьте выполнение аксиом линейного пространства для множества *M*.

3.3. Пусть M_N – множество всех вещественных последовательностей конечной длины *N*, определенных при $n = \overline{0, N-1}$. Какова размерность пространства M_N? Задайте базис для M_N.

3.4. Один из возможных базисов для пространства последовательностей *M* состоит из сдвинутых δ-последовательностей $\left\{\delta[n-k],\ k = \overline{-\infty, \infty}\right\}$. Докажите, что набор из любого количества таких последовательностей линейно независим.

3.5. Даны последовательности $s_1[n] = 1$, $s_2[n] = n$, $s_3[n] = 0.2n^2 - n$, $s_4[n] = 0.01n^3 - 2n$, $n = \overline{-\infty, \infty}$. Можно ли рассматривать их совокупность как базис некоторого пространства? Постройте график линейной комбинации $x[n] = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k s_k[n]$ при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.3$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0.01$ для $n = \overline{-10, 10}$.

3.6. Постройте графики вещественной и мнимой частей функций $e^{j\frac{2\pi}{8}kn}$, $n = \overline{0, 7}$ при $k = -1, 0, 1$. Проверьте линейную независимость совокупности функций $e^{j\frac{2\pi}{8}kn}$, $n = \overline{0, 7}$.

3.7. Дано множество всех последовательностей длины 16, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$. Определите операции сложения и умножения на скаляр, чтобы получилось векторное пространство. Задайте для него базис. Сколько векторов содержит базис? Сколько векторов содержит пространство?

3.8. Как следует задать операции сложения и умножения на скаляр, чтобы множество всех полубесконечных последовательностей вида $x[n]$, $n=\overline{0,\infty}$, где отсчёты $x[n]$ принадлежат множеству $\{0,1\}$, стало линейным пространством? Задайте для этого пространства базис. Счётно ли множество векторов базиса? Счётно ли множество векторов этого пространства?

4. НОРМА, МЕТРИКА, СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Структурные свойства пространства дискретных сигналов определяются через числовые характеристики последовательностей: норму, характеризующую «силу» сигнала, метрику, позволяющую определять расстояние между сигналами, и скалярное произведение, благодаря которому можно говорить о разнице в направлениях векторов (сигналов).

Нормой называется функционал (правило, ставящее каждому вектору в соответствие число), обозначаемый $\|\cdot\|$ и удовлетворяющий аксиомам:

1) $\|x\| \geq 0$; если $\|x\| = 0$, то $x = \mathbf{0}$ (нулевой вектор[4]);

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

3) $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$ – неравенство треугольника.

Понятие нормы служит обобщением понятия длины вектора. Пространство с нормой называется нормированным пространством.

Подробнее: [2, с. 65].

* * *

4.1. Дано множество M_N вещественных последовательностей конечной длины N. Проверьте, можно ли задать норму следующими функционалами:

а) $\|x\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{N-1} |x[n]|$; б) $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2\right)^{1/2}$;

[4] Нулевой вектор $\mathbf{0}$, т. е. последовательность, все отсчёты которой равны 0, не следует путать с числом 0.

в) $\|x\|_3 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^3 \right)^{1/3}$; г) $\|x\|_4 = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n])$;

д) $\|x\|_4 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^3 \right)^{1/3}$; е) $\|x\|_5 = \begin{cases} 0, & x = \mathbf{0}, \\ 1, & x \neq \mathbf{0}. \end{cases}$

4.2. Пространство последовательностей конечной нормы $\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$ обозначается l_1. Определите, принадлежат ли этому пространству бесконечные последовательности $\cos(\omega_0 n)$, $\sin(\omega_0 n)$, a^n при $n \geq 0$, $\exp\{j\omega_0 n\}$, $\sin(\omega_0 n)/(\omega_0 n)$, где ω_0 – вещественное число, $|a| < 1$.

4.3. Пространство последовательностей конечной нормы $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \right)^{1/2}$ обозначается l_2. Определите, принадлежат ли ему бесконечные последовательности $a^n \cos(\omega_0 n)$ при $n \geq 0$, $b^n \sin(\omega_0 n)$ при $n < 0$, $x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$, $\sin(\omega_0 n)/(\omega_0 n)$, где ω_0 – вещественное число; a и b – комплексные числа, $|a| < 1$, $|b| > 1$.

* * *

Метрика – функционал (правило, ставящее каждой паре векторов в соответствие число), удовлетворяющий аксиомам расстояния:

1) $d(x, y) \geq 0$; если $d(x, y) = 0$, то $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ – неравенство треугольника.

Пространство с метрикой называется метрическим. В нормированном пространстве можно задать метрику через норму: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Подробнее: [2, с. 63].

* * *

4.4. Дано множество M_N последовательностей конечной длины N. Проверьте, можно ли задать метрику следующими функционалами:

а) $d_1(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - y[n])$;

б) $d_2(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$;

в) $d_3(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - y[n]|^3 \right)^{1/3}$;

г) $d_4(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - y[n])^3 \right)^{1/3}$;

д) $d_5(x, y) = \begin{cases} 0, x = y, \\ 1, x \neq y. \end{cases}$

4.5. Манхэттенская метрика (метрика городских кварталов) определяется выражением $d(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - y[n]|$. Какую форму имеет окружность с центром в точке (0; 0), если расстояние на плоскости определяется данной метрикой?

4.6. Метрика Чебышёва представляет собой функционал $d(x, y) = \max_n \{|x[n] - y[n]|\}$. Определите форму окружности с центром в точке (0; 0), если расстояние на плоскости определяется согласно данной метрике.

4.7. Дано множество двоичных последовательностей $\{x_i[n], n = \overline{0, N-1}\}$, $x_i \in \{0;1\}$. Метрика Хэмминга $d(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \oplus y[n]$, где символом $\oplus$ обозначено сложение по модулю 2. Сколько последовательностей содержит шар радиуса 3 с центром $\mathbf{0}$ при $N = 4$? при $N = 8$? при $N = 16$?

* * *

Скалярное произведение двух векторов x и y, принадлежащих пространству над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, определяется функционалом, обозначаемым $(x,\ y)$ и удовлетворяющим аксиомам:

1) $(x,\ y)=(y,\ x)^*$, звёздочка обозначает комплексное сопряжение;

2) $(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha(x,\ z)+\beta(y,\ z)$;

3) $(x,\ x)\geq 0$ и $(x,\ x)=0\rightarrow x=\mathbf{0}$.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму выражением $\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}$.

В пространстве со скалярным произведением выполняется неравенство *Коши–Буняковского–Шварца*

$$|(x,\ y)|^2\leq(x,\ x)(y,\ y),\ \text{или}\ \ |(x,\ y)|\leq\|x\|\|y\|.$$

Для вещественного пространства со скалярным произведением может быть введено понятие *угла* θ *между векторами*, такого что

$$\cos\theta=\frac{(x,\ y)}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Подробнее: [2, с. 66].

* * *

4.8. Даны две последовательности, $n=\overline{0,N-1}$:

$x[n]=-3\delta[n]+4\delta[n-1]$,

$y[n]=3\delta[n]-4\delta[n-1]$.

Найдите: скалярное произведение $(x,\ y)$; нормы $\|x\|_2$, $\|y\|_2$; угол между x и y; расстояние $d_2(x,\ y)$.

4.9. Даны последовательности конечной длины:

$c[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right),\ n=\overline{0,N-1}$;

$s[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right),\ n=\overline{0,N-1}$.

Найдите: а) скалярное произведение $(c,\ s)$; б) скалярное произведение укороченных последовательностей при $n=\overline{0, N/2-1}$.

4.10. Пусть x и y – векторы единичной нормы в действительном векторном пространстве со скалярным произведением. Покажите, что векторы $x+y$ и $x-y$ взаимно ортогональны.

4.11. Найдите нормы $\|\cdot\|_2$ последовательностей:

а) $x[n]=\begin{cases} a^n, & n\ge 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}, \ |a|<1$; б) $x[n]=\begin{cases} b^n, & n\le 0 \\ 0, & n>0 \end{cases}, \ |b|>1$;

в) $x[n]=a^{n-n_0}u[n-n_0], \quad n_0>0, \ |a|<1$;

г) $x[n]=-a^n u[-n-1], \quad |a|>1$;

д) $x[n]=a^n\,(u[n]-u[n-n_0]), \quad n_0>0$;

е) $x[n]=a^n u[n]+b^n u[-n-1], \quad |a|<1, \ |b|>1$.

4.12. Даны последовательности

а) $v_1[n]=\delta[n-1]+2\delta[n-2]$;

а) $v_2[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]$;

а) $v_3[n]=2\delta[n]+2\delta[n-2]$,

принадлежащие пространству M_3, натянутому на множество последовательностей $\{\delta[n],\ \delta[n-1],\ \delta[n-2]\}$. Проверьте линейную независимость последовательностей $v_1,\ v_2,\ v_3$. Постройте ортонормальный базис в M_3 на основе этой совокупности.

4.13. Докажите справедливость выражения $x[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$.

4.14. Докажите ортонормальность базиса

$$\left\{ \psi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \ \ k = \overline{0, N-1} \right\}$$

при условии $n = \overline{0, N-1}$.

4.15. Полагая $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, составьте матрицу

$$\mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & W_N^3 \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & W_N^6 \\ W_N^0 & W_N^3 & W_N^6 & W_N^9 \end{pmatrix}$$

при $N = 4$. Убедитесь в ортогональности строк (столбцов) матрицы. Определите нормы $\|\cdot\|_2$ строк и столбцов. Найдите евклидовы расстояния между парами строк.

4.16. Рассматривая строки матрицы

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

как последовательности, проверьте их ортогональность, найдите нормы $\|\cdot\|_2$ и попарные расстояния между ними в евклидовой метрике.

5. ЛИНЕЙНОСТЬ, ИНВАРИАНТНОСТЬ К СДВИГУ, КАУЗАЛЬНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Цепь **линейна**, если она удовлетворяет принципу суперпозиции:

$$L\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 L\{x_1[n]\} + \alpha_2 L\{x_2[n]\},$$

где $L\{\cdot\}$ – оператор, описывающий отображение множества входных сигналов на множество выходных сигналов; $x_1[n]$, $x_2[n]$ – входные сигналы (воздействия); α_1, α_2 – весовые коэффициенты.

Иначе говоря, отклик линейной цепи на линейную комбинацию воздействий – такая же линейная комбинация (т. е. сумма с такими же весовыми коэффициентами) откликов на каждое воздействие в отдельности. Если это не так, цепь нелинейна.

Подробнее: [1, с. 23; 3, с. 38; 2, с. 29].

Пример решения

Задание

Проверьте, линейна ли цепь, описываемая уравнением $y[n] = x[n]\sin(an)$, a – постоянная.

Решение

Подставим в уравнение линейную комбинацию двух сигналов $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$; получим

$$y[n] = x[n]\sin(an) = \{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\}\sin(an) =$$

$$= \alpha_1 x_1[n]\sin(an) + \alpha_2 x_2[n]\sin(an) = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n],$$

где $y_1[n] = x_1[n]\sin(an)$, $y_2[n] = x_2[n]\sin(an)$. Таким образом, цепь линейна.➤

* * *

5.1. Проверьте, линейны ли цепи, описываемые уравнениями (здесь и далее величины a, b, c, k, m – постоянные, $n = \overline{-\infty, \infty}$):

а) $y[n] = a^2\, x[n-k]$;

б) $y[n]=\begin{cases} ax[n-k], \; x[n]<c; \\ bx[n-k], \; x[n]>c; \end{cases}$

в) $y[n]=(n+a)\,x[n-m]$;

г) $y[n]=a\cdot x[m^2\cdot n]$;

д) $y[n]=a\cdot n\sin(x[n])$.

* * *

Цепь **инвариантна к сдвигу** (стационарна), если сдвиг входного сигнала по времени на произвольную (целую) величину приводит к сдвигу отклика на такую же величину без изменения формы.

Подробнее: [1, с. 24; 3, с. 39].

Пример решения

Задание

Проверьте, инвариантна ли к сдвигу цепь, описываемая уравнением $y[n]=a\cdot n\sin(x[n])$.

Решение

Подставим в уравнение $y[n]=a\cdot n\sin(x[n])$ вместо сигнала $x[n]$ его сдвинутую копию $x_1[n]=x[n-k]$.

Тогда отклик $y_1[n]=a\cdot n\sin(x[n-k])\neq a(n-k)\sin(x[n-k])=y[n-k]$. Следовательно, цепь не инвариантна к сдвигу.➤

* * *

5.2. Проверьте, инвариантны ли к сдвигу цепи, описываемые уравнениями:

а) $y[n]=a\cdot n\cdot x^2[n]$;

б) $y[n]=bx[n-1]$;

в) $y[n]=ax[n-k]-x[n]$;

г) $y[n]=a\cdot x[m\cdot n]$;

д) $y[n]=bx[n]-bx[n-k]$.

* * *

Цепь **каузальна** (физически реализуема), если при вычислении отсчётов выходного сигнала не используются «будущие» отсчёты входного сигнала. Для линейных инвариантных к сдвигу (ЛИС) цепей это означает, что импульсная характеристика должна быть равна 0 при отрицательных значениях аргумента (времени).

Подробнее: [1, с. 25; 2, с. 103].

Пример решения

Задание

Проверьте, каузальна ли цепь, описываемая уравнением $y[n] = x[n+k]\cos(nk)$.

Решение

При вычислении отсчёта выходного сигнала $y[n]$ используется значение входного сигнала $x[n+k]$. Цепь каузальна при условии $k \le 0$. ➤

* * *

5.3. Проверьте каузальность цепей, описываемых уравнениями $(k > 0)$:

а) $y[n] = x[n+k]\exp(-nk)$;

б) $y[n] = x[n+k]\exp(nk)$;

в) $y[n] = x[n-k]\exp(-nk)$;

г) $y[n] = x[n-k]\exp(nk)$.

* * *

Цепь будет устойчивой, если при ограниченном входном сигнале выходной сигнал также ограничен в любой момент. Если это условие не выполняется хотя бы для одного ограниченного воздействия, цепь неустойчива. Обычно неустойчивой считается также цепь, отклик которой ограничен по модулю, но не затухает со временем (имеет бесконечную энергию)[5].

Подробнее: [1, с. 28; 3, с. 41].

---

[5] Иногда говорят, что такая цепь находится на границе устойчивости.

Пример решения

Задание

Проверьте, устойчива ли цепь, описываемая уравнением $y[n] = n^2 x[n]\cos(nk)$.

Решение

Примем, что входная последовательность ограниченна, т. е. $|x[n]| < A$, где A – положительное число. Сомножитель $\cos(nk)$ также ограничен, $|\cos(nk)| \le 1$. Однако $n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$ или $n \to -\infty$. Таким образом, цепь неустойчива.➤

* * *

5.4. Проверьте устойчивость цепей, описываемых уравнениями $(k > 0)$:

а) $y[n] = x[n-k]\exp(-nk)$;

б) $y[n] = x[n-k]\exp(nk)$;

в) $y[n] = an\, x^2[n]$;

г) $y[n] = bx[n+1]$;

д) $y[n] = ax[n+k] - x[n]$;

е) $y[n] = bx[n] - bx[n-k]$.

5.5. Проверьте выполнение свойств линейности, инвариантности к сдвигу, каузальности и устойчивости для дискретных цепей, описываемых разностными уравнениями:

а) $y[n] = x^2[n]$;

б) $y[n] = \ln\{|x[n]|\}$;

в) $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

г) $y[n] = x[n]\cos(\pi n)$;

д) $y[n] = \lfloor x[n] \rfloor$ (скобки $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначают взятие целой части от числа, заключённого в них).

5.6. Дискретные цепи работают в соответствии с алгоритмами (разностными уравнениями):

а) $y[n] = \dfrac{n}{n+2} y[n-1] + x[n], \quad y[-1] = 0$;

б) $y[n] = 0.7 y[n-1] + x[n], \quad y[-1] = 0$.

Определите отклики этих цепей на входные последовательности $x[n] = \delta[n]$ и $x[n] = \delta[n-4]$. Как можно охарактеризовать эти цепи?

5.7. Дискретная цепь, называемая фильтром скользящего среднего, вычисляет среднее арифметическое N соседних значений входной последовательности. Запишите разностное уравнение фильтра скользящего среднего, удовлетворяющего условию каузальности. Является ли этот фильтр линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

5.8. Дискретная цепь, вычисляющая разность двух соседних значений, представляет собой дискретный аналог дифференцирующего фильтра. Запишите разностное уравнение с учётом условия каузальности. Является ли этот фильтр линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

5.9. Запишите уравнение каузального фильтра, вычисляющего аналог второй производной. Является ли этот фильтр линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

5.10. Устройство, называемое накапливающим сумматором, представляет собой аналог интегратора; значение сигнала на его выходе равно сумме текущего входного значения и всех предыдущих входных значений. Запишите уравнение, описывающее сумматор. Является ли это устройство линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

5.11. Устройство работает в соответствии со следующим правилом: при $n < 0$ на его выходе 0; далее, если на вход поступает значение больше чем выходное, то выходной сигнал устанавливается равным этому входному значению, в противном случае выходное значение не меняется. Запишите уравнение, описывающее устройство. Является ли это устройство линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

5.12. Компаратор имеет два входа; если на первом входе напряжение выше, чем на втором, то на выходе значение 1, в противном случае 0. Предположим, что напряжение на втором входе постоянно, а на первый вход поступает вещественная последовательность. Является ли это устройство линейным? инвариантным к сдвигу? устойчивым?

6. ДИСКРЕТНАЯ СВЁРТКА И ЕЁ СВОЙСТВА

Дискретная свёртка описывает алгоритм вычисления последовательности $y[n]$ на выходе ЛИС-цепи по заданному воздействию $x[n]$ и известной импульсной характеристике цепи $h[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k].$$

Иногда свёртку символически обозначают символом $*$, так что $y = x * h = h * x$.

Подробнее: [1, с. 26; 3, с. 43].

Пример решения

Задание

Даны последовательности:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2];$$

$$h[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1].$$

Найдите свёртку $y = x * h$.

Решение

Поскольку $h[n] = 0$ при $n < 0$ и при $n > 1$, и, кроме того, $x[n] = 0$ при $n < 0$ и при $n > 2$, пределы суммирования в общем выражении свёртки можно заменить следующим образом:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k]h[n-k], \text{ аналогично } y[n] = \sum_{k=0}^{1} x[n-k]h[k].$$

При $n < 0$ очевидно, что $y[n] = 0$. При $n = 0$

$$y[0] = \sum_{k=0}^{2} x[k]h[-k] = x[0]h[0] = 1 \cdot 3 = 3.$$

При $n=1$ получаем

$$y[1]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[1-k]=x[0]h[1]+x[1]h[0]=-1+6=5\,.$$

При $n=2$ имеем

$$y[2]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[2-k]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]=0-2+9=7\,.$$

При $n=3$ получается

$$y[3]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[3-k]=x[0]h[3]+x[1]h[2]+x[2]h[1]=$$

$$=0+0-3=-3.$$

При $n>3$ все слагаемые равны нулю. Таким образом,

$$y[n]=3\delta[n]+5\delta[n-1]+7\delta[n-2]-3\delta[n-3]\,.$$ ➤

* * *

6.1. Постройте графики последовательностей:

$$x[n]=3\delta[n]+\delta[n-1]+2\delta[n-2]\,,$$

$$y[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]\,.$$

Найдите их свёртку.

6.2. Даны последовательности:

$$x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]\,;$$

$$y[n]=2\delta[n]-\delta[n-2]+5\delta[n-3]\,.$$

Постройте графики и найдите свёртку $x*y$.

6.3. Изобразите графики последовательностей:

$$x[n]=\delta[n-1]+2\delta[n-2]\,;$$

$$y[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]\,.$$

Найдите свёртку $x*y$.

6.4. Последовательности

$x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-2] + 5\delta[n-3]$;

$y[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$

изобразите графически. Найдите свёртку $x * y$.

6.5. Определите свёртку последовательностей $u[n]$ и $u[n]$.

6.6. Определите свёртку последовательностей $x[n] = a^n u[n]$ и $y[n] = b^n u[n]$, где a и b – положительные числа меньше единицы.

6.7. Последовательность $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$ задана своими значениями 5, 4, 3, 2, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4; остальные отсчёты равны 0. Последовательность $r[n]$ задана своими значениями 1, 1, 1, 1, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4, остальные отсчёты равны 0. Найдите свёртку этих последовательностей. Постройте график.

6.8. Найдите свёртку двух одинаковых последовательностей, заданных своими значениями 1, 1, 1, 1, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4, остальные отсчёты равны 0.

6.9. Найдите свёртку двух одинаковых последовательностей, заданных своими значениями 5, 4, 3, 2, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4, остальные отсчёты равны 0.

6.10. Определите свёртку последовательностей $x[n] = u[n]$ и $r[n] = u[n] - u[n-4]$.

6.11. Определите свёртку последовательностей $x[n] = a^n u[n]$ и $u[n]$.

* * *

Нередко на практике применяется двухместная операция, родственная свёртке и называемая корреляцией. Она описывается выражением

$$r_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-n] y^*[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k+n].$$

Последовательность $r_{xy}[n]$ называется взаимно корреляционной последовательностью $x[n]$ и $y[n]$. Если $y[n] = x[n]$, то в результате операции корреляции получается автокорреляционная последовательность $r_{xx}[n]$.

* * *

6.12. Докажите, что $r_{xy}[n] = r^*{}_{yx}[-n]$.

6.13. Выведите выражение для определения автокорреляционной последовательности $r_{xx}[n]$.

6.14. Установите связь $r_{xx}[n]$ и $r_{xx}[-n]$, если $x[n]$ – комплексная последовательность.

6.15. Выразите $r_{xy}[n]$ через свёртку $x * y$.

6.16. Выразите свёртку $x * y$ через корреляцию $x[n]$ и $y[n]$.

7. *z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

z-Преобразование последовательности $x[n]$ определяется рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

если ряд сходится. Множество точек комплексной *z*-плоскости, в которых ряд сходится, называется областью сходимости *z*-преобразования данной последовательности. Форма области сходимости зависит от вида последовательности $x[n]$. Функция $X(z)$, называемая *z*-образом, аналитична в области сходимости и не определена вне её.

Во многих практически важных случаях *z*-образ находится с использованием формулы суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{при} \quad |a| < 1.$$

Условие $|a| < 1$ определяет область сходимости z-преобразования.

Иногда можно найти *z*-образ последовательности, воспользовавшись таблицей, например, [8].

Подробнее: приложение 2; [1, с. 32; 3, с. 111].

Пример решения

Задание

Дана последовательность $x[n]=u[n]\cdot c^n$, $0<c<1$.

Найдите z-образ.

Решение

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]c^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}c^n z^{-n}=\frac{1}{1-cz^{-1}}=\frac{z}{z-c},$$

область сходимости определяется неравенством $\left|cz^{-1}\right|<1$ или $|z|>|c|$. ➤

* * *

7.1. Найдите z-образы последовательностей, указав области сходимости:

а) $u[n]=\begin{cases}0, & n<0,\\ 1, & n\geq 0;\end{cases}$ б) $u[n-1]$; в) $u[n-k]$, $k>1$;

г) $x[n]=0.8^n\left(u[n]-u[n-5]\right)$; д) $x[n]=0.5^{|n|}$; е) $x[n]=2^{|n|}$;

ж) $x[n]=0.9^n\cos(\pi n/4)u[n]$.

7.2. Найдите z-образы последовательностей, указав области сходимости:

а) $v[n]=u[n]\cdot e^{-\alpha n}$, $\alpha>0$;

б) $y[n]=u[n]\sin(\omega_0 n)$, $0<\omega_0<\pi$; в) $x[n]=-a^n u[-n-1]$, $a>0$;

г) $w[n]=a^{n+1}u[n+1]$, $a<0$; д) $b[n]=-a^{n-2}u[-n+1]$, $a>0$;

е) $x[n]=\begin{cases}a^n, & n\geq 0,\\ -b^n, & n\leq -1,\end{cases}$ $|a|<|b|$;

ж) $x[n]=\cos(\omega_0 n)u[n]$, $0<\omega_0<\pi$.

7.3. Определите z-образы последовательностей, указав области сходимости:

а) $u[n](2+3e^{-2n})$; б) $u[n]-\delta[n]$; в) $u[n]\sin(\omega_0 n+\psi)$, $0<\omega_0<\pi$;

г) $u[n]n^2$; д) $u[n]n^3$; е) $u[n]ne^{-4n}$.

7.4. Найдите z-образы последовательностей:

а) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le N,\\ 0, & n<0 \text{ или } n>N;\end{cases}$

б) $x[n]=\begin{cases}n, & 0\le n\le N,\\ 0, & n<0 \text{ или } n>N;\end{cases}$

в) $x[n]=\begin{cases}0, & n<0,\\ 1, & 0\le n\le 5,\\ 2, & 5<n\le 10,\\ 3, & n>10.\end{cases}$

7.5. Найдите z-образы последовательностей:

а) $a^n u[n]+\delta[n]-b^n u[-n]$;

б) $(a^n+b^n)u[n]$;

в) $2\delta[n]-(a^n+b^n)u[-n]$.

7.6. Найдите z-образ последовательности

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0,N,2N,\ldots\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Постройте нуль-полюсную диаграмму для $N=6$.

7.7. Докажите, что z-преобразование последовательности $x[n]=$ $=\dfrac{\sin^2(\omega_0 n)}{(\omega_0 n)^2}$, $n=\overline{-\infty,\infty}$, расходится при любом z, не лежащем на единичной окружности. Принадлежит ли эта последовательность пространствам l_1 и l_2?

7.8. На единичной окружности z-образ последовательности из задачи 7.7 имеет вид, показанный на рис. 1. Определите параметры функции (максимальное значение функции и значение аргумента, при котором функция становится равной нулю). Воспользуйтесь формулой разложения в ряд Фурье.

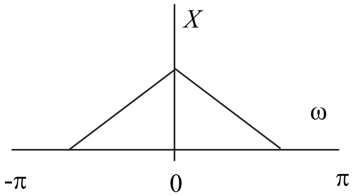


Рис. 1

8. ОБРАТНОЕ *z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Обратное z-преобразование определяется выражением

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \overleftarrow{\oint_C} X(z) z^{n-1} dz,$$

где интеграл берётся по контуру, лежащему в области сходимости и охватывающему все полюсы, при обходе против часовой стрелки.

Для нахождения обратного z-преобразования на практике используются следующие приёмы.

Разложение выражения на простые дроби

Если функция $X(z)$ может быть представлена в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}},$$

то результатом обратного z-преобразования будет последовательность

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} A_k d_k{}^n u[n].$$

Подробнее: [1, с. 70; 3, с. 128].

Пример решения

Задание

Дана функция $X(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1} + 0.16z^{-2}}$, $|z| > 0.2$; $|z| > 0.8$.

Выполните обратное z-преобразование.

Решение

Для начала найдем корни знаменателя, т. е. решим уравнение

$$1 - z^{-1} + 0.16z^{-2} = 0 .$$

Корни этого уравнения $z = 0.2$ и $z = 0.8$ являются полюсами функции $X(z)$, поэтому согласно основной теореме алгебры знаменатель можно разложить на множители

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

и представить функцию $X(z)$ в виде суммы простых дробей

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - 0.2z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 0.8z^{-1})} .$$

Приведя эту сумму к общему знаменателю и приравняв числители, получим уравнение относительно неопределённых коэффициентов A_1 и A_2:

$$A_1(1 - 0.8z^{-1}) + A_2(1 - 0.2z^{-1}) = 1 .$$

Уравнение распадается на систему из двух уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ -0.8z^{-1}A_1 - 0.2z^{-1}A_2 = 0, \end{cases}$$

решив которую, получим

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{3}, \\ A_2 = 1\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Функция $X(z)$ принимает вид

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{(1-0.2z^{-1})} + \frac{1\frac{1}{3}}{(1-0.8z^{-1})},$$

а результатом обратного z-преобразования является последовательность $x[n] = -\frac{1}{3}(0.2)^n u[n] + 1\frac{1}{3}(0.8)^n u[n]$. ➤

Деление числителя на знаменатель

При делении числителя дробно-рациональной функции на знаменатель в общем случае получается бесконечное выражение (ряд); коэффициенты ряда представляют собой отсчёты последовательности, для которой данная функция является z-образом. Этот способ применим в случаях, когда по началу ряда можно определить функциональный вид последовательности или по условию задачи нужно найти лишь некоторое количество первых отсчётов.

Подробнее: [1, с. 65; 3, с. 133].

Пример решения

Задание

Дана функция $X(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0.4z^{-2}}$.

Выполните обратное z-преобразование.

Решение

Выполним обычное деление «в столбик» числителя на знаменатель функции $X(z)$:

$$
\begin{array}{l|l}
1+2z^{-1}+z^{-2} & \underline{1-z^{-1}+0.4z^{-2}} \\
\underline{1-z^{-1}+0.4z^{-2}} & 1+3z^{-1}+3.6z^{-2}+2.4z^{-3}+\ldots \\
3z^{-1}+0.6z^{-2} & \\
\underline{3z^{-1}-3z^{-2}+1.2z^{-3}} & \\
\qquad 3.6z^{-2}-1.2z^{-3} & \\
\qquad \underline{3.6z^{-2}-3.6z^{-3}+1.44z^{-4}} & \\
\qquad\qquad 2.4z^{-3}-1.44z^{-4} \quad \text{и т.д.} &
\end{array}
$$

Таким образом, z-образ раскладывается в степенной ряд

$$X(z)=1+3z^{-1}+3.6z^{-2}+2.4z^{-3}+\ldots$$

Используя свойства z-преобразования (см. приложение 3) можно непосредственно записать последовательность, соответствующую z-образу: $x[n]=\delta[n]+3\delta[n-1]+3.6\delta[n-2]+2.4\delta[n-3]+\ldots$. ➤

Метод вычетов

Контурный интеграл в выражении обратного z-преобразования дробно-рациональной функции можно найти как сумму вычетов

$$x[n]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left\{X(z)z^{n-1}\right\}$$

во всех полюсах, лежащих внутри контура интегрирования (для каузальных последовательностей – внутри единичной окружности).

Если $X(z)z^{n-1}$ – рациональная функция, имеющая в точке z_0 полюс кратности s, то можно записать $X(z)z^{n-1} = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^s}$. Вычет функции $X(z)z^{n-1}$ в точке $z = z_0$ определяется как

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\left\{X(z)z^{n-1}\right\} = \frac{1}{(s-1)!}\cdot\left.\frac{d^{s-1}\psi(z)}{dz^{s-1}}\right|_{z=z_0}.$$

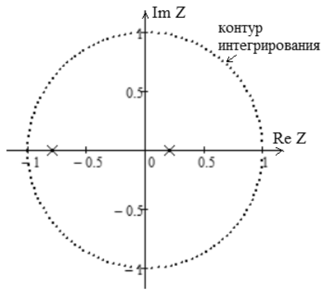


Рис. 2

В частности, если полюс простой, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\left\{X(z)z^{n-1}\right\} = \psi(z_0).$$

Подробнее: [1, с. 263].

Пример решения

Задание

Дана функция $X(z) = \dfrac{1}{(1+0.8z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$.

Выполните обратное z-преобразование.

Решение

Функцию $X(z)z^{n-1}$ можно представить в виде

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{(1+0.8z^{-1})(1-0.2z^{-1})} = \frac{z\cdot z^n}{(z+0.8)(z-0.2)}.$$

Она имеет полюсы в точках $z = 0.2$ и $z = -0.8$, оба полюса лежат внутри контура интегрирования, т. е. внутри единичной окружности (рис. 2).

Тогда результат обратного z-преобразования

$$x[n] = \operatorname*{res}_{z=-0.8}\left\{X(z)z^{n-1}\right\} + \operatorname*{res}_{z=0.2}\left\{X(z)z^{n-1}\right\}.$$

Поскольку функция имеет простые полюсы $(s=1)$, вычет функции в точке $z=-0.8$ равен

$$\operatorname*{res}_{z=-0.8}\left\{X(z)z^{n-1}\right\} = \left.\frac{z \cdot z^n}{(z-0.2)}\right|_{z=-0.8} = 0.8(-0.8)^n,$$

а вычет функции в точке $z=0.2$ определяется как

$$\operatorname*{res}_{z=0.2}\left\{X(z)z^{n-1}\right\} = \left.\frac{z \cdot z^n}{(z+0.8)}\right|_{z=0.2} = 0.2(0.2)^n.$$

Результат обратного z-преобразования

$$x[n] = 0.8\left(-0.8\right)^n u[n] + 0.2\left(0.2\right)^n u[n]. \blacktriangleright$$

8.1. z-Образом последовательности $x[n]$ является функция $X(z)$. Определите последовательность, которой соответствует z-образ $\{X(z)+X(-z)\}/2$.

8.2. Найдите последовательность, z-образ которой равен

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad \text{при } |z|>|a|>|b|.$$

8.3. Определите последовательность, z -образ которой равен

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{при } |a|<|z|, \text{ путем деления.}$$

8.4. Найдите последовательность, соответствующую z-образу

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{при } |a|>|z| \text{ путем деления.}$$

8.5. По нуль-полюсным диаграммам (рис. 3, *а*, *б*) восстановите (с точностью до констант) z-образы каузальных последовательностей.

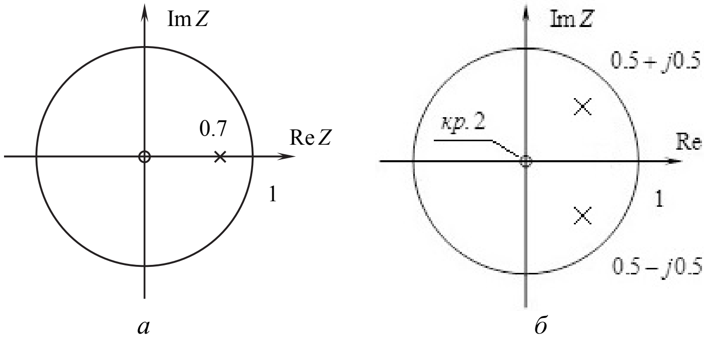


Рис. 3

8.6. По нуль-полюсной диаграмме рис. 4 восстановите последовательности для всех возможных областей сходимости

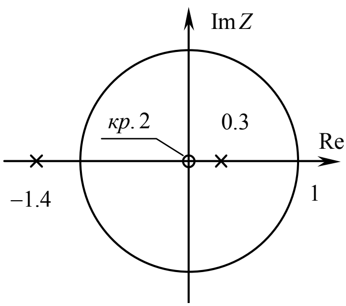


Рис. 4

8.7. Определите каузальную последовательность по её z-образу:

$$X(z)=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}.$$

8.8. Определите каузальную последовательность по её z-образу:

$$X(z)=\frac{z}{\left(z^{2}+z+\frac{1}{2}\right)}.$$

8.9. Определите каузальную последовательность по ее z-образу, пользуясь теоремой о свёртке:

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

8.10. Найдите делением z-прообраз функции

$$\frac{z(z^2-2z+1)}{(z-1)^4}$$

в виде каузальной последовательности.

8.11. Проверьте устойчивость каузального фильтра с передаточной функцией

$$H(z)=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^4}.$$

8.12. Найдите свёртку $x[n]$ и $h[n]$ с использованием z-преобразования, если

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}1, & 2\le n\le 4,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

8.13. Найдите $x[n]*y[n]$, если

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0,\\ -a, & n=1,\\ 0, & n\ne 0, n\ne 1,\end{cases}\qquad y[n]=a^n,\quad n\ge 0.$$

9. ДИСКРЕТНО-ВРЕМЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ) можно рассматривать как сужение z-преобразования на единичную окружность, выполняемое путём замены z на $e^{j\omega}$ (если область сходимости z-преобразования включает единичную окружность):

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}.$$

Отсюда следует, что комплексная функция $X(e^{j\omega})$, имеющая смысл спектральной плотности последовательности $x[n]$, периодична с периодом 2π. Допуская не равномерную, а лишь среднеквадратическую сходимость ряда в выражении ДВПФ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n},$$

можно применять ДВПФ и в тех случаях, когда z-преобразование на единичной окружности не существует, т. е. последовательность не абсолютно, а лишь квадратично суммируема.

Обратное ДВПФ описывается выражением, совпадающим с формулой определения коэффициентов ряда Фурье, представляющего 2π-периодическую функцию непрерывного аргумента $X(e^{j\omega})$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega, \quad n = \overline{-\infty, \infty}.$$

Подробнее: [1, с. 40; 3, с. 67].

Пример решения

Задание

Дана вещественная последовательность $x[n] = a^n$, $n \ge 0$, $|a| < 1$.

Определите спектральную плотность. Постройте графики её модуля и аргумента (амплитудного и фазового спектра) при $a = 0.5$.

Решение

Спектральная плотность находится через ДВПФ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n .$$

Последнее выражение представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $ae^{-j\omega}$, поэтому

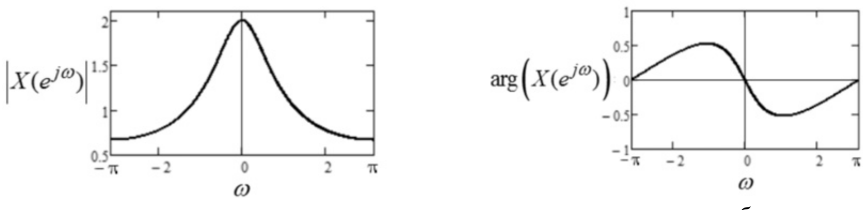
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a\cos(\omega) + ja\sin(\omega)} .$$

Амплитудный спектр последовательности находим как модуль спектральной плотности (рис. 5, *а*)

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos(\omega))^2 + (a\sin(\omega))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}} .$$

Фазовый спектр последовательности находим как аргумент спектральной плотности (рис. 5, *б*)

$$\arg\left(X(e^{j\omega})\right) = -\mathrm{arctg}\left[\frac{a\sin(\omega)}{1 - a\cos(\omega)}\right].$$



а *б*

Рис. 5

9.1. Для последовательности $u[n]$ определите модуль и аргумент спектральной плотности, постройте графики.

9.2. Найдите амплитудный и фазовый спектры последовательности $x[n]=\cos(\omega_0 n)u[n],\ \omega_0=\pi/3$. Постройте графики.

9.3. Определите модуль и аргумент спектральной плотности для каждой из последовательностей:

а) $x_1[n]=(1/2)^{|n|}\cos[\pi(n-1)/8]$;

б) $x_2[n]=n\left(u[n+3]-u[n-4]\right)$;

в) $x_3[n]=(2-n/2)\left(u[n+4]-u[n-5]\right)$.

Постройте графики.

9.4. Найдите амплитудные и фазовые спектры последовательностей[6]:

а) $x_1[n]=(1/2)^n u[n-1]$;

б) $x_2[n]=(1/3)^{|n|}\cos[\pi n/8]u[n-2]$;

в) $x_3[n]=\mathrm{sinc}(2\pi n/8)*\mathrm{sinc}\{2\pi(n-4)/8\}$;

г) $x_4[n]=\sin(0.1\pi n)(u[n]-u[n-10])$;

д) $x_5[n]=\mathrm{sinc}^2(2\pi n/8)$.

9.5. Найдите последовательности по заданным спектральным плотностям:

а) $X_1(e^{j\omega})=\cos^2(\omega)+\sin^2(3\omega)$;

б) $X_2(e^{j\omega})=\begin{cases}0, & 0\le|\omega|\le\omega_c,\\ 1, & \omega_c<|\omega|\le\pi;\end{cases}$

в) $X_3(e^{j\omega})=\begin{cases}1-2|\omega|/\pi, & 0\le|\omega|\le\pi/2,\\ 0, & \pi/2<|\omega|\le\pi.\end{cases}$

9.6. Найдите последовательности, имеющие спектральные плотности:

а) $X_1(e^{j\omega})=\delta(\omega)-\delta(\omega-\pi/2)-\delta(\omega+\pi/2)$;

б) $X_2(e^{j\omega})=\begin{cases}2|\omega|/\pi, & 0\le|\omega|\le\pi/2,\\ 0, & \pi/2<|\omega|\le\pi.\end{cases}$

[6] Функция $\mathrm{sinc}(x)=\sin(x)/x$ известна как кардинальный синус.

9.7. Последовательность $x[n]$ имеет спектральную плотность $X(e^{j\omega})$. Определите спектральные плотности последовательностей (* – символ комплексного сопряжения):

а) $x_1[n] = x[n+1] + x[-n-1]$;

б) $x_2[n] = (x[n] + x^*[n]) / 2$;

в) $x_3[n] = (1-n)^2 x[n]$.

9.8. Последовательность $x[n]$ имеет спектральную плотность $X(e^{j\omega})$. Определите спектральные плотности последовательностей:

а) $x_1[n] = 2x[n+2] + 3x[3-n]$;

б) $x_2[n] = (1 + x[n])\cos(0.25\pi n + \pi / 6)$;

в) $x_3[n] = (x[n] - x^*[-n]) / 2$;

г) $x_4[n] = j^n x[n+1] + j^{-n} x[n-1]$.

9.9. Для последовательности

$$x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

спектральная плотность имеет вид $X(e^{j\omega})$. Не находя явного вида этой функции, определите $X(e^{j0})$, $\arg X(e^{j\omega})$, $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$, $X(e^{j\pi})$, $\int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$.

9.10. Импульсные характеристики h_1 и h_2 каузальных цепей имеют следующие отсчёты: $h_1[0] = h_1[1] = 1/2$; $h_2[0] = 1/2$; $h_2[1] = -1/2$. Найдите выражения КЧХ для обеих цепей, постройте графики АЧХ и ФЧХ.

9.11. Импульсные характеристики h_1 и h_2 некаузальных цепей имеют следующие отсчёты: $h_1[-1] = h_1[1] = 1/4$; $h_1[0] = 1/2$, $h_2[-1] = h_2[1] = -1/4$; $h_2[0] = 1/2$. Найдите выражения КЧХ, постройте графики АЧХ и ФЧХ.

9.12. Две ЛИС-цепи имеют импульсные характеристики h_1 и h_2 с отсчётами $h_1[0]=h_1[3]=1/8$; $h_1[1]=h_1[2]=3/8$ и $h_2[0]=-1/8$; $h_2[1]=3/8$; $h_2[2]=-3/8$; $h_2[3]=1/8$.

Определите комплексные частотные характеристики цепей как ДВПФ; постройте графики АЧХ.

9.13. Определите импульсные характеристики идеальных «П-образных» фильтров нижних и верхних частот с частотой среза, равной $\pi/2$.

10. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) можно рассматривать как результат дискретизации ДВПФ путём замены непрерывного аргумента ω набором числовых значений круговой частоты $\omega_k = 2\pi k/N,\ k=\overline{0,N-1}$. Результатом ДПФ является последовательность комплексных отсчётов спектральной плотности, взятых в N точках, равномерно расположенных на единичной окружности:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=\overline{0,N-1}.$$

Обратное ДПФ (ОДПФ) определяется выражением

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=\overline{0,N-1}.$$

Иногда пара ДПФ–ОДПФ определяется выражениями

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=\overline{0,N-1};$$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=\overline{0,N-1}$$

или

$$X[k]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\,,\quad k=\overline{0,N-1}\,;$$

$$x[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\,,\quad n=\overline{0,N-1}\,.$$

Последний вариант соответствует унитарному преобразованию, сохраняющему нормы и скалярные произведения.

Подробнее: [1, с. 46; 3, с. 548].

Пример решения

Задание

Дана последовательность конечной длины

$$x[n]=\begin{cases}1, & 1\le n\le 2,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}\qquad n=\overline{0,3}\,.$$

Определите её ДПФ-спектр.

Решение

Представим последовательность суммой сдвинутых δ-последовательностей $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n-2]$. Подставим последовательность в выражение ДПФ при $N=4$:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{3}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{3}\left(\delta[n-1]+\delta[n-2]\right)\,e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{3}\delta[n-1]e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}+\sum_{n=0}^{3}\delta[n-2]e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}=e^{-j\frac{1\cdot 2\pi}{4}k}+e^{-j\frac{2\cdot 2\pi}{4}k}=$$

$$=e^{j\frac{3\pi}{2}k}+e^{j\pi k}.$$

Найдем значения $X[k]$ для $k=\overline{0,3}$:

$$X[0]=e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot 0}+e^{j\pi\cdot 0}=1+1=2\,, \quad X[1]=e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot 1}+e^{j\pi\cdot 1}=-1-j\,,$$

$$X[2]=e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot 2}+e^{j\pi\cdot 2}=-1+1=0\,, \quad X[3]=e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot 3}+e^{j\pi\cdot 3}=-1+j\,.$$ ➤

* * *

10.1. Найдите ДПФ последовательности $x[n]=\delta[n]$, $n=\overline{0,N-1}$.

10.2. Определите ДПФ последовательности $x[n]=\delta[n-2]$, $n=\overline{0,N-1}$.

10.3. Найдите последовательность, ДПФ которой описывается выражением $X[k]=\delta[k]$, $k=\overline{0,N-1}$.

10.4. Найдите последовательность, ДПФ которой описывается выражением $X[k]=\delta[k-7]$, $k=\overline{0,7}$.

10.5. Определите ДПФ последовательности $x[n]=7-2n,\ n=\overline{0,7}$.

10.6. Найдите при $n=\overline{0,7}$ ДПФ последовательности $x[n]=2+0.5\cos(0.25\pi n)$.

10.7. Найдите ДПФ последовательности $x[n]=0.125+0.25\sin(0.5\pi n)$ при $n=\overline{0,7}$.

10.8. Найдите при $n=\overline{0,7}$ ДПФ последовательности $x[n]=0.125+0.25\sin^2(0.5\pi n)$.

10.9. Найдите при $n=\overline{0,7}$ ДПФ последовательности $w[n]=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$, известной как «окно Блэкмана».

10.10. Найдите ДПФ последовательности

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$$

для $N=4$. Как изменится ДПФ, если принять $N=8$?

10.11. Восстановите недостающие отсчёты ДПФ-спектра вещественной последовательности по имеющимся отсчётам ($k = \overline{0,7}$):

$$X[0] = 4,\ \ X[1] = 1 - j1,\ \ X[4] = -2,\ \ X[5] = 1 - j2,\ \ X[6] = 2.$$

10.12. Восстановите недостающие отсчёты ДПФ-спектра вещественной чётной последовательности по имеющимся отсчётам ($k = \overline{0,7}$):

$$X[0] = 4,\ \ X[4] = -2,\ \ X[5] = 2,\ \ X[6] = 3,\ X[7] = 1.$$

10.13. Восстановите вещественную нечётную последовательность по отсчётам её ДПФ-спектра ($k = \overline{0,7}$):

$$X[1] = j4,\ \ X[2] = -j2,\ \ X[3] = j2.$$

11. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ЛИС-ЦЕПЕЙ

Способы описания ЛИС-цепей можно разделить на два принципиально различных класса. Передаточная функция, КЧХ, импульсная характеристика относятся к функциональным формам описания, поскольку они описывают то, как цепь воздействует на входной сигнал в процессе преобразования его в выходной. Структурная схема и разностное уравнение определяют взаимодействие частей (элементов) цепи и являются структурными способами её описания.

Структурная схема и разностное уравнение

Разностное уравнение представляет собой естественную исчерпывающую форму описания дискретной ЛИС-цепи, содержащей конечное число элементов задержки, масштабных звеньев и сумматоров. Разностное уравнение является прямым аналогом дифференциального уравнения, описывающего цепь непрерывного времени. Однако следует отметить, что в отличие от дифференциального уравнения разностное уравнение, выражающее отсчёт выходного сигнала в виде линейной комбинации некоторого количества входных и ранее найденных выходных отсчётов, представляет собой алгоритм работы устройства. Этот факт имеет огромное значение, так как прямо ведёт к реализации дискретной цепи программным способом. Структурная схема, в свою очередь, описывает способ аппаратной реализации той же цепи, поэтому между РУ и структурной схемой существует связь.

Подробнее: [1, с. 58; 3, с. 53, 346].

Пример решения

Задание

Для заданной структурной схемы (рис. 6)

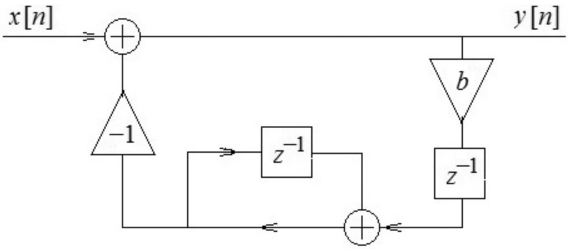


Рис. 6

запишите разностное уравнение

Решение

Введём промежуточные переменные во внутренних узлах схемы и перейдём к их z-образам (рис. 7). Тем самым задача сводится к составлению не разностного, а алгебраического уравнения, что значительно проще.

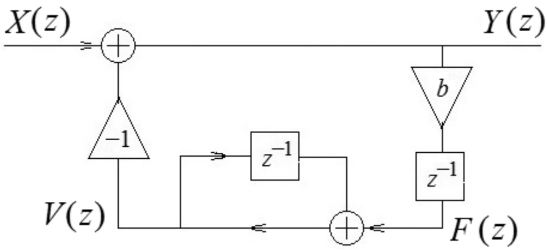


Рис. 7

Легко видеть, что $F(z) = bz^{-1}Y(z)$, $V(z) = \dfrac{F(z)}{1+z^{-1}}$, $Y(z) = X(z) - V(z)$. Объединяя эти выражения, получаем $Y(z) = X(z) -$

$-bz^{-1}Y(z)\big/(1+z^{-1})$, или $Y(z)\left[1+\dfrac{bz^{-1}}{1-z^{-1}}\right]=X(z)$, откуда следует разностное уравнение $y[n]=x[n]-x[n-1]+(1-b)y[n-1]$. ➤

Разностное уравнение и передаточная функция

К каждому слагаемому разностного уравнения ЛИС-цепи

$$y[n]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+...+b_Mx[n-M]+a_1y[n-1]+...+a_Ny[n-N]$$

можно применить z-преобразование, в результате чего получится алгебраическое уравнение

$$Y(z)=b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+...+b_Mz^{-M}X(z)+a_1z^{-1}Y(z)+...+a_Nz^{-N}Y(z).$$

Отношение z-образов выходного и входного сигналов – передаточная функция

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+...+b_Mz^{-M}}{1-a_1z^{-1}+...+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M}b_mz^{-m}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}$$

связана с разностным уравнением: коэффициенты РУ являются коэффициентами передаточной функции. Зная разностное уравнение, можно записать передаточную функцию и наоборот.

Подробнее: [1, с. 58; 4, с. 83].

Пример решения

Задание

По заданному разностному уравнению

$$y[n]=x[n]+9x[n-1]+3x[n-3]+y[n-1]+7y[n-2]$$

запишите передаточную функцию цепи.

Решение

От разностного уравнения с помощью z-преобразования перейдем к уравнению

$$Y(z) = X(z) + 9z^{-1}X(z) + 3z^{-3}X(z) + z^{-1}Y(z) + 7z^{-2}Y(z).$$

После очевидных преобразований

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) - 7z^{-2}Y(z) = X(z) + 9z^{-1}X(z) + 3z^{-3}X(z),$$

$$Y(z)(1 - z^{-1} - 7z^{-2}) = X(z)(1 + 9z^{-1} + 3z^{-3})$$

найдем передаточную функцию как отношение z-образов выходного и входного сигналов

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 9z^{-1} + 3z^{-3}}{1 - z^{-1} - 7z^{-2}}. \blacktriangleright$$

Нуль-полюсная диаграмма и передаточная функция

Нуль-полюсная диаграмма, или карта нулей и полюсов, представляет собой изображение комплексной z-плоскости с обозначенными на ней точками, в которых передаточная функция обращается в нуль или бесконечность. Поскольку передаточная функция реализуемой ЛИС-цепи конечного порядка всегда имеет вид частного двух полиномов, нули – это корни полинома-числителя, а полюсы – корни полинома-знаменателя. В частности, степень числителя или знаменателя может быть равна нулю, тогда НПД будет содержать только полюсы или только нули соответственно (без учёта нулей или полюсов в точках $z = 0$ и $z = \infty$).

Согласно основной теореме алгебры полином степени M можно представить в виде произведения:

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M} = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} = b_0 \prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right),$$

где c_k, $k = 1, \ldots, M$ – корни полинома, т. е. значения комплексного переменного z, при которых полином обращается в нуль. Тогда передаточная функция ЛИС-цепи может быть представлена в виде

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum\limits_{r=1}^{N} a_r z^{-r}}=\frac{b_0\prod\limits_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod\limits_{p=1}^{N}\left(1-d_p z^{-1}\right)},$$

где c_k, $k=1, ..., M$ – нули, а d_p, $p=1, ..., N$ – полюсы передаточной функции. Таким образом, зная нули, полюсы и коэффициент b_0, можно восстановить ПФ.

Подробнее: [1, с. 76; 4, с. 80].

Пример решения

Задание

По заданной НПД-цепи (рис. 8) определите передаточную функцию.

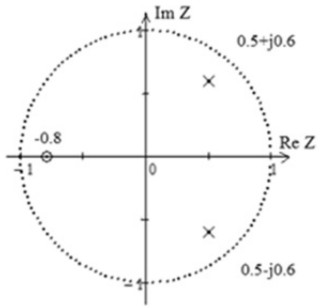


Рис. 8

Решение

На нуль-полюсной диаграмме изображены один нуль передаточной функции $c=-0.8$ и два полюса $d_1=0.5+0.6j$ и $d_2=0.5-0.6j$. Поэтому передаточная функция имеет вид

$$H(z)=\frac{b_0(1+0.8z^{-1})}{(1-(0.5+0.6j)z^{-1})(1-(0.5-0.6j)z^{-1})}$$

(b_0 – произвольная константа).➤

Передаточная функция и импульсная характеристика

Передаточная функция $H(z)$ по определению представляет собой z-образ импульсной характеристики $h[n]$, и в силу взаимной однозначности z-преобразования любая из этих характеристик исчерпывающим образом описывает ЛИС-цепь. Прямое z-преобразование во многих практически важных случаях находится с использованием формулы суммирования геометрической прогрессии, для обратного z-преобразования можно использовать способы, рассмотренные ранее (раздел 8).

Очень важную роль при определении ИХ по заданной ПФ играет область сходимости (ОС) z-преобразования. Для того чтобы цепь была устойчивой, ОС должна включать единичную окружность. Поэтому прежде всего необходимо найти полюсы передаточной функции. Если все полюсы лежат внутри единичной окружности, устойчивой является каузальная цепь и импульсная характеристика удовлетворяет равенству $h[n] = h[n]u[n]$; если все полюсы находятся вне единичной окружности, устойчива антикаузальная цепь, для которой справедливо выражение $h[n] = h[n]u[-n]$. Если имеются полюсы и внутри, и вне единичной окружности, то устойчива некаузальная цепь, состоящая из каузальной и антикаузальной частей, с соответствующим распределением полюсов между ними.

Подробнее: [1, с. 69; 4, с. 88].

Пример решения

Задание

Для заданной передаточной функции

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.25z^{-1} - 0.375z^{-2}}$$

определите импульсную характеристику.

Решение

Для начала найдем корни знаменателя, т. е. решим уравнение

$$1 + 0.25z^{-1} - 0.375z^{-2} = 0 .$$

Корни этого уравнения $z = -0.75$ и $z = 0.5$ являются полюсами функции $H(z)$, которая при разложении знаменателя на множители примет вид

$$H(z) = \frac{1}{(1 + 0.75^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}.$$

Обратное z-преобразование передаточной функции $H(z)$ находим методом ее разложения на простые дроби, т. е.

$$H(z) = \frac{A_1}{(1 + 0.75z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 0.5z^{-1})},$$

где A_1 и A_2 – коэффициенты, которые находятся путём приведения к общему знаменателю передаточной функции $H(z)$.

$$A_1(1 - 0.5z^{-1}) + A_2(1 + 0.75z^{-1}) = 1.$$

Равенство должно выполняться при любых значениях z, поэтому уравнение распадается на систему из двух уравнений, и, решив ее, получаем

$$\begin{cases} A_1 = 0.6, \\ A_2 = 0.4. \end{cases}$$

Передаточная функция $H(z)$ принимает вид

$$H(z) = \frac{0.6}{(1 + 0.75z^{-1})} + \frac{0.4}{(1 - 0.5z^{-1})}.$$

Передаточная функция $H(z)$ по определению представляет собой z-образ импульсной характеристики $h[n]$, и с учетом того, что полюсы лежат внутри единичной окружности, т. е. устойчивой является каузальная цепь, импульсная характеристика

$$h[n] = 0.4(0.5)^n u[n] + 0.6(-0.75)^n u[n] . \blacktriangleright$$

* * *

11.1. Цепь описывается системой уравнений

$$y[n] = y_1[n] + \frac{7}{4} y[n-1] - \frac{49}{32} y[n-2] ;$$

$$y_1[n] = x[n] + \frac{1}{2} y_1[n-1] .$$

Изобразите структурную схему. Найдите передаточную функцию цепи.

11.2. Запишите разностное уравнение каузальной цепи, имеющей передаточную функцию

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.36}{z^2 + 1.1z + 0.18} .$$

Изобразите структурную схему.

11.3. Запишите в каузальной форме разностное уравнение цепи, имеющей передаточную функцию

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.1z + 0.3}{z^3} .$$

Изобразите структурную схему.

11.4. Составьте разностные уравнения цепей, показанных на рис. 9, *а*, *б*.

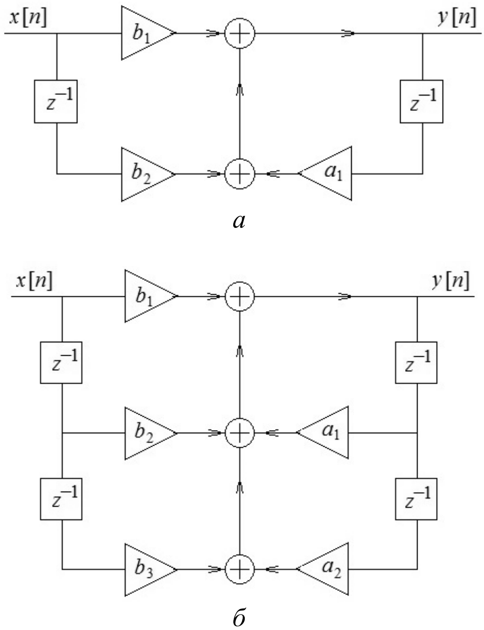


Рис. 9

11.5. Определите (с точностью до константы) передаточную функцию, КЧХ и импульсную характеристику каждой из цепей, нуль-полюсные диаграммы которых показаны на рис. 10, *а*, *б* (нули имеют кратность 2). Запишите разностные уравнения. Изобразите структурные схемы.

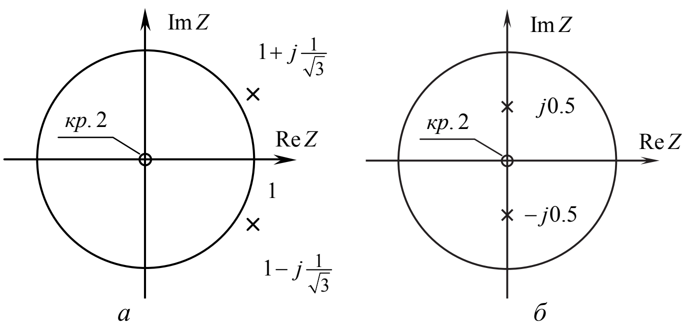


Рис. 10

11.6. Определите передаточные функции, КЧХ и импульсные характеристики цепей, нуль-полюсные диаграммы которых показаны на рис. 11, *а–г*. Запишите разностные уравнения. Изобразите структурные схемы.

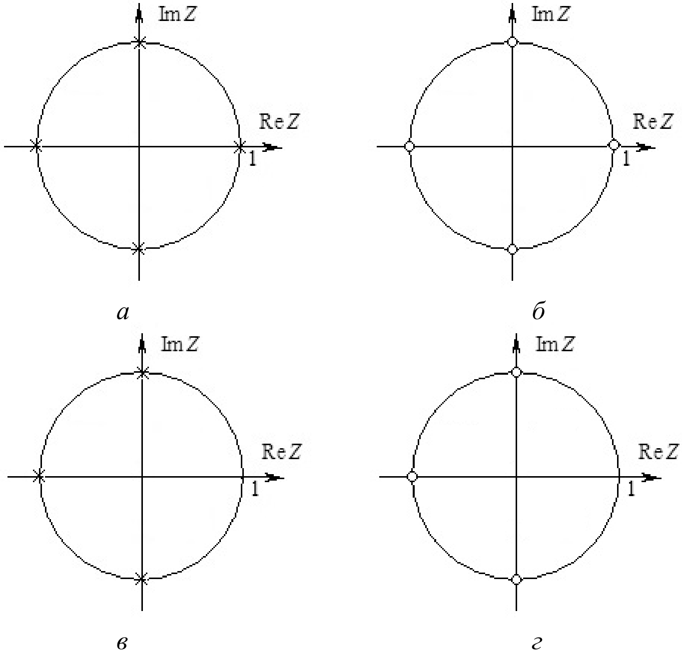


Рис. 11

11.7. Найдите импульсную характеристику цепи $h[n]$, если её передаточная функция $H(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-N}}$, $|z| < 1$, N – положительное целое. Постройте нуль-полюсную диаграмму для $N = 8$. Запишите разностное уравнение.

11.8. Фильтр скользящего среднего характеризуется тем, что отсчёт $y[n]$ выходного сигнала равен среднему арифметическому текущего $x[n]$ и $N-1$ предыдущих отсчётов входного сигнала.

а) Запишите разностное уравнение.

б) Изобразите структурную схему.

в) Определите импульсную характеристику.

г) Найдите КЧХ.

11.9. Передаточная функция цепи $H(z) = \dfrac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$. Найдите импульсную характеристику. Постройте нуль-полюсную диаграмму. Изобразите два варианта структурной схемы.

11.10. Постройте структурную схему каузального фильтра, выполняющего «цифровое дифференцирование» по правилу: если $x[n] = u[n]$, то $y[n] = \delta[n]$. Найдите передаточную функцию, КЧХ, импульсную характеристику.

11.11. Постройте фильтр, выполняющий обратную операцию – «цифровое интегрирование». Найдите передаточную функцию, КЧХ, импульсную характеристику.

11.12. Исследуйте поведение передаточной функции

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 - \sum\limits_{r=1}^{M-1} a_r z^{-r}} = B(z)\frac{1}{A(z)}$$

при $z = 0$ и при $z = \infty$. Выведите формулу для определения кратности нулей и полюсов в этих точках.

11.13. Найдите импульсную характеристику цепи, нуль-полюсная диаграмма которой показана на рис. 12. Определите АЧХ и ФЧХ.

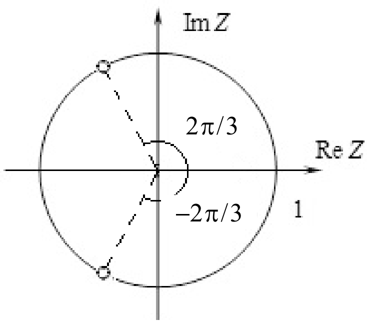


Рис. 12

11.14. Найдите передаточную функцию цепи с импульсной характеристикой

$$h[n]=\begin{cases}1, & |n|\le 2,\\ 0, & |n|>2.\end{cases}$$

Постройте нуль-полюсную диаграмму. Изобразите структурную схему.

11.15. Нуль-полюсная диаграмма ЛИС-цепи содержит два комплексных нуля. Импульсная характеристика вещественная. Выведите формулы для АЧХ и ФЧХ при условии, что нули находятся внутри единичной окружности.

11.16. Постройте цепь (найдите КЧХ, изобразите структурную схему, нуль-полюсную диаграмму), имеющую импульсную характеристику вида

$$h[n]=\begin{cases}1/2^n, & 0\le n<5,\\ 0, & \text{при других } n.\end{cases}$$

11.17. Найдите импульсную характеристику фильтра с передаточной функцией $H(z)=1-z^{-L}$. Определите нули передаточной функции. Составьте структурную схему.

11.18. Определите импульсную характеристику фильтра с передаточной функцией $H(z)=1+z^{-L}$. Найдите нули передаточной функции. Изобразите структурную схему.

11.19. Цепь описывается разностным уравнением

$$y[n]=ay[n-1]+bx[n] \text{ при } 0<a<1.$$

Определите b так, чтобы выполнялось условие $H(e^{j\omega})|_{\omega=0}=1$.

11.20. Передаточная функция цепи равна

$$H(z)=\frac{1+bz^{-1}}{1-az^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}.$$

Выразите $h[0], h[1], h[2], h[3]$ через a и b.

11.21. Известно, что цепь имеет ПФ

$$H(z)=\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$$

Можно ли определить коэффициенты $a_1, \ldots, a_N$, если известны отсчёты импульсной характеристики $h[0], h[1], \ldots, h[N-1]$? Если можно, то как?

12. ОПИСАНИЕ ЦЕПЕЙ СИГНАЛЬНЫМИ ГРАФАМИ И МАТРИЧНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Описание цепи структурной схемой обладает наглядностью и служит основой её реализации. Во многих случаях оказывается более удобным переход от структурной схемы к сигнальному графу – топологической модели, сохраняющей все свойства структурной схемы и в то же время позволяющей применять строгие методы анализа и преобразований. Сигнальный граф задаётся как пара (V, E), где V – множество вершин (узлов), а E – множество рёбер (ветвей, дуг). Каждая дуга соединяет две вершины[7] и имеет направление. Кроме того, каждой дуге приписан коэффициент передачи, который может быть числом или символом задержки z^{-1}. Если в какой-либо вершине сходятся две (или более) дуги, то сигналы в этой вершине суммируются; если из вершины исходит несколько дуг, то по ним передаются копии сигнала. Сигнал в каждой вершине выражается посредством разностного уравнения через сигналы в соседних вершинах. Разностные уравнения преобразуются в алгебраические при помощи z-преобразования. Решая полученную систему алгебраических уравнений, можно выразить z-образ выходного сигнала через z-образ входного и, следовательно, найти передаточную функцию.

---

[7] Эти вершины являются *инцидентными* данной дуге, а по отношению друг к другу называются соседними.

Для составления матричного уравнения необходимо представить в виде вектора совокупность внутренних переменных, соответствующих вершинам графа, а также ввести векторы входных и выходных переменных.

Подробнее: приложение 2; [1, с. 89; 3, с. 354].

Пример решения

Задание

Составьте сигнальный граф для цепи, показанной на рис. 13.

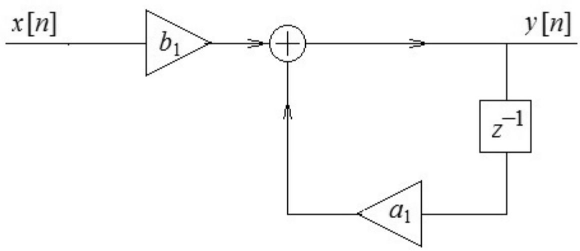


Рис. 13

Решение

Для заданной схемы существуют две концевые вершины, соответствующие входу и выходу, а также внутренние вершины, где происходит суммирование и разветвление. Поэтому сигнальный граф можно представить в виде, показанном ниже (рис. 14).

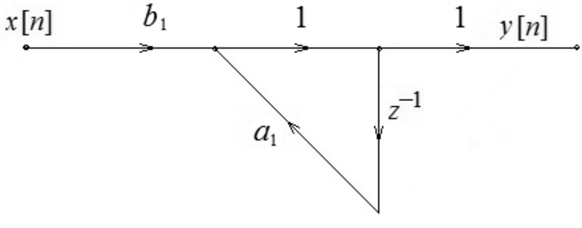


Рис. 14

Нетрудно видеть, что вершину, инцидентную ровно одной входящей и одной исходящей дуге, можно исключить, заменив эти две дуги одной дугой с соответствующим коэффициентом передачи (рис. 15).

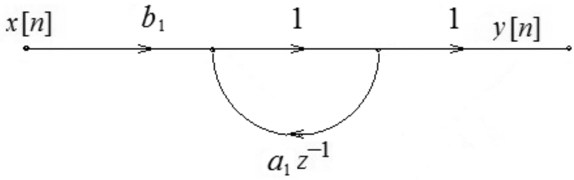


Рис. 15

Отсюда видно, что одной структурной схеме могут соответствовать несколько графов. ➤

* * *

12.1. По сигнальному графу (рис. 16) составьте матричное разностное уравнение.

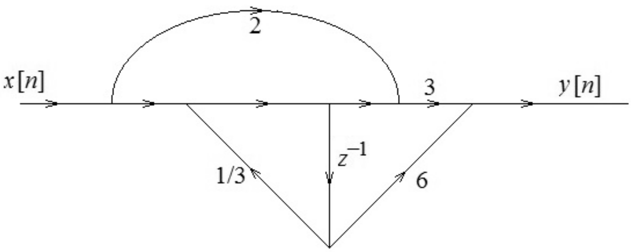


Рис. 16

12.2. Составьте матричное разностное уравнение по сигнальному графу (рис. 17).

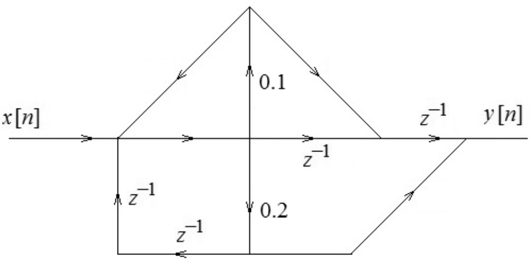


Рис. 17

12.3. Определите передаточную функцию цепи по сигнальному графу (рис. 18). Постройте структурную схему в прямой форме.

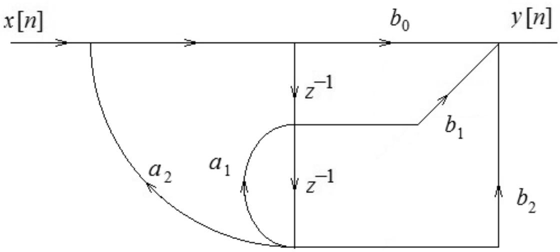


Рис. 18

12.4. Определите передаточную функцию цепи, описываемой сигнальным графом (рис. 19).

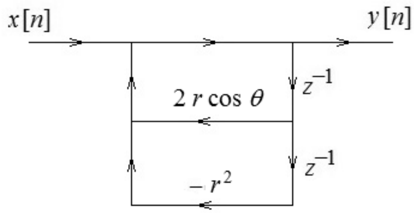


Рис. 19

Постройте нуль-полюсную диаграмму.

12.5. Определите передаточную функцию цепи по сигнальному графу (рис. 20).

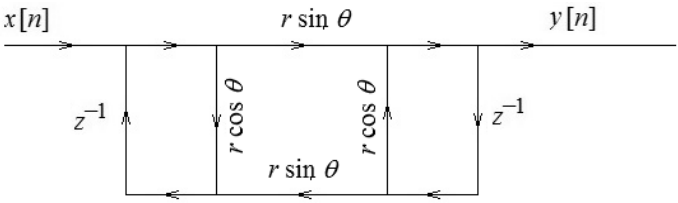
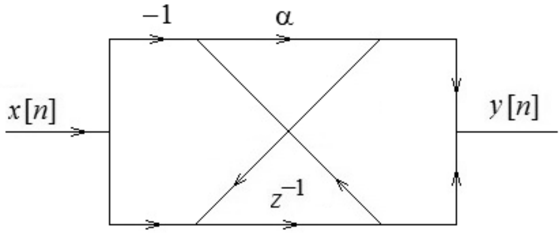


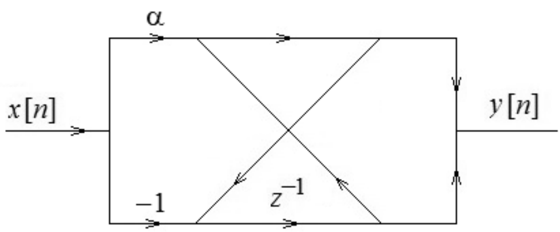
Рис. 20

Постройте нуль-полюсную диаграмму.

12.6. Определите передаточные функции цепей, представленных графами рис. 21, *а*, *б*. Начертите структурные схемы цепей в прямой форме.



а



б

Рис. 21

13. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ ЛИС-ЦЕПЕЙ

Передаточная функция ЛИС-цепи может быть записана в различных формах, откуда следует, что одну и ту же ЛИС-цепь можно реализовать различными структурными схемами. ЛИС-цепь общего вида имеет передаточную функцию

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\left(\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}\right)\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}},$$

что соответствует прямой форме реализации, когда сигнал проходит сначала через трансверсальную цепь, а затем через рекурсивную. В силу коммутативности умножения та же передаточная функция может быть записана в виде

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\left(\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}\right);$$

таким образом получается каноническая форма – каскадное (последовательное) соединение рекурсивной и трансверсальной частей схемы. В соответствии с основной теоремой алгебры числитель и знаменатель передаточной функции могут быть записаны как произведения двучленов

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum\limits_{r=1}^{N} a_r z^{-r}}=\frac{b_0\prod\limits_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod\limits_{p=1}^{N}\left(1-d_p z^{-1}\right)},$$

поэтому ту же цепь можно представить каскадным соединением звеньев первого порядка – M трансверсальных и N рекурсивных, а также масштабного звена с коэффициентом b_0. Наконец, разложению передаточной функции на простые дроби (при $M<N$)

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum\limits_{r=1}^{N} a_r z^{-r}}=\frac{b_0\prod\limits_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod\limits_{p=1}^{N}\left(1-d_p z^{-1}\right)}=\sum_{p=1}^{N}\frac{A_p}{1-d_p z^{-1}}$$

отвечает параллельное соединение простейших рекурсивных цепей первого порядка. Если $M \ge N$, то параллельно подключается трансверсальная цепь с передаточной функцией, равной целой части результата деления полинома-числителя на знаменатель.

Следует отметить, что в общем случае нули и полюсы передаточной функции могут быть комплексными. Если при этом импульсная характеристика вещественная (что в большинстве случаев выполняется), то комплексные нули и полюсы образуют сопряжённые пары, и их следует объединить, чтобы избежать трудностей выполнения операций над комплексными числами. Тогда каждой паре комплексно-сопряжённых нулей соответствует трансверсальное звено 2 порядка

$$\left(1-c_k z^{-1}\right)\left(1-c^*_k\, z^{-1}\right)=1-(c_k+c^*_k)z^{-1}+c_k c^*_k\, z^{-2}$$

с вещественными коэффициентами; аналогично группирование полюсов даёт рекурсивные звенья второго порядка. Такое объединение выполняется при реализации цепи в каскадной или параллельной форме.

Подробнее: [1, с. 95; 3, с. 358; 4, с. 144].

* * *

Пример решения

Задание

Постройте структурную схему цепи, описываемую разностным уравнением $y[n]=x[n]-2x[n-1]+y[n-1]-2y[n-2]$, в прямой и канонической форме реализации.

Решение

От разностного уравнения перейдем к z-образу

$$Y(z)=X(z)-2z^{-1}X(z)+z^{-1}Y(z)-2z^{-2}Y(z).$$

Перенесём слагаемые, содержащие $Y(z)$, в левую часть равенства:

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)=X(z)-2z^{-1}X(z),$$

$$Y(z)(1-z^{-1}+2z^{-2})=X(z)(1-2z^{-1}).$$

Найдем передаточную функцию как отношение z-образов выходного и входного сигналов

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

Для прямой формы реализации ЛИС-цепи передаточную функцию запишем в виде

$$H(z) = (1 - 2z^{-1})\frac{1}{1 - z^{-1} + 2z^{-2}},$$

и структурная схема будет иметь вид (рис. 22).

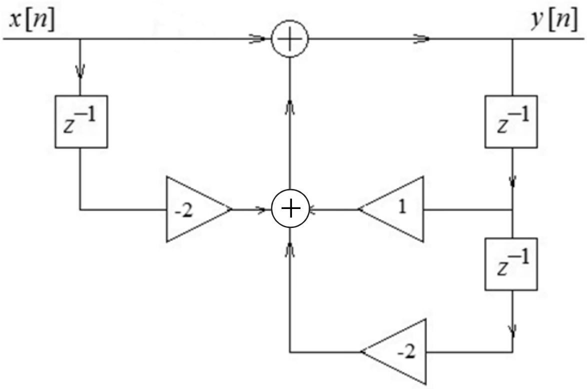


Рис. 22

Для канонической формы реализации ЛИС-цепи передаточную функцию перепишем в виде

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}(1 - 2z^{-1}),$$

а структурная схема примет вид (рис. 23).

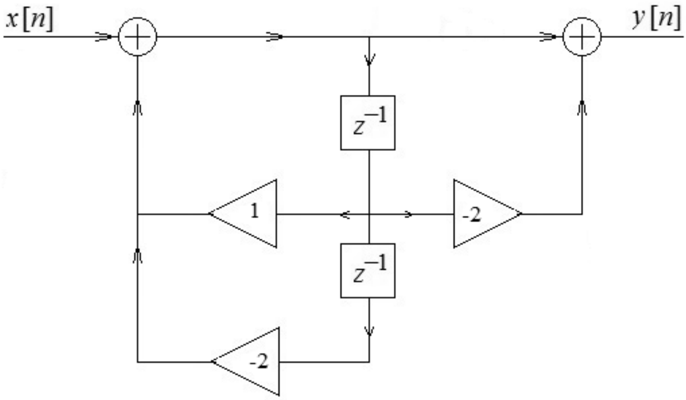


Рис. 23

* * *

13.1. Покажите, что при группировании двух каскадно соединенных простейших рекурсивных звеньев с комплексно-сопряжёнными коэффициентами получается звено второго порядка с вещественными коэффициентами (то же – для параллельного соединения).

13.2. Цифровой фильтр описывается разностным уравнением $y[n] = x[n] - x[n-5] + y[n-1]$:

а) постройте структурную схему;

б) постройте эквивалентный нерекурсивный фильтр;

в) найдите отклик этого фильтра на последовательность

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5, \\ 0, & n < 0 \text{ или } n > 5. \end{cases}$$

13.3. Преобразуйте структурную схему цепи (рис. 24) к каноническому виду.

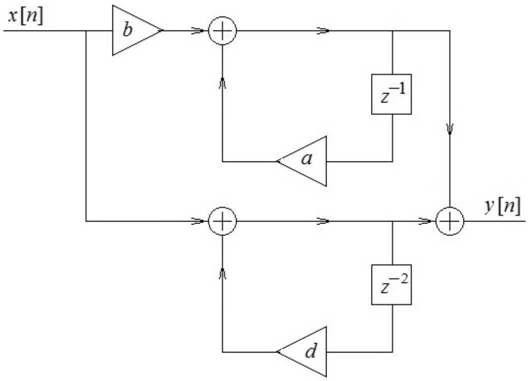


Рис. 24

13.4. Преобразуйте структурную схему цепи (рис. 25) к параллельному виду.

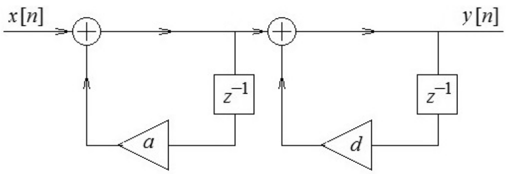


Рис. 25

13.5. Преобразуйте структурную схему (рис. 26):
а) к последовательному (каскадному) виду;
б) к каноническому виду.

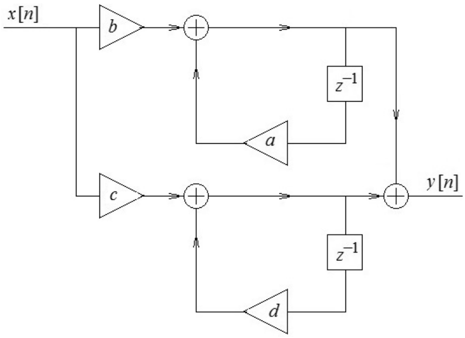


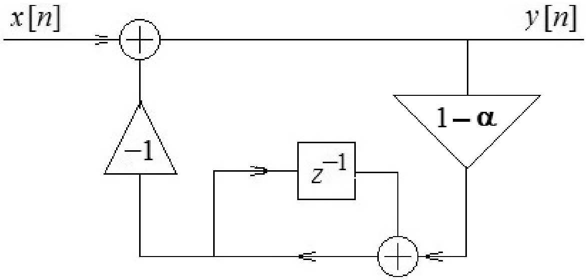
Рис. 26

13.6. Начертите структурную схему цепи, имеющей передаточную функцию

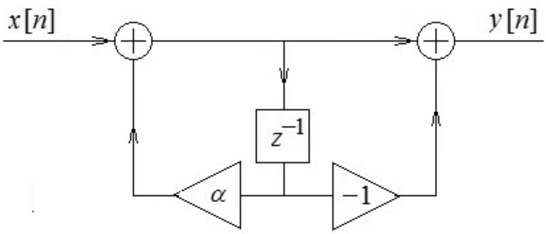
$$H(z)=\frac{8z^{-3}+4z^{-2}+z^{-1}-16}{4z^{-2}+z^{-1}+8},$$

в виде параллельного соединения трансверсальной цепи и простейших рекурсивных цепей и запишите её импульсную характеристику.

13.7. Определите передаточные функции цепей, показанных на рис. 27, *а*, *б*.



а



б

Рис. 27

Постройте графики АЧХ этих цепей при α, принимающем значения 0.7, 0.9 и 0.95.

14. ВСЕПРОПУСКАЮЩИЕ И МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ ЦЕПИ

Всепропускающей называется ЛИС-цепь, имеющая АЧХ, строго постоянную при $-\pi < \omega < \pi$. Это обеспечивается попарным расположением нулей и полюсов передаточной функции так, что каждому нулю c соответствует полюс $1/c^*$, при этом других нулей и полюсов цепь не имеет. Таким образом, передаточная функция всепропускающей цепи имеет в общем случае вид

$$H(z) = b\prod_{k=1}^{N} \frac{1 - c_k z^{-1}}{1 - \left(c_k^*\right)^{-1} z^{-1}}.$$

Подробнее: [1, с. 79; 3, с. 285; 4, с. 132].

* * *

Пример решения

Задание

По заданной передаточной функции $H(z) = \dfrac{1 + 4z^{-1}}{1 + 0.25z^{-1}}$ постройте структурную схему и НПД. Найдите АЧХ, постройте график.

Решение

По передаточной функции построим НПД (рис. 28); нулю $c = -4$ соответствует полюс $d = -\dfrac{1}{4}$.

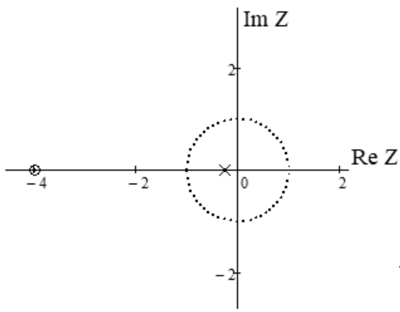


Рис. 28

Для того чтобы построить структурную схему, от передаточной функции перейдем к разностному уравнению:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 4z^{-1}}{1 + 0.25z^{-1}},$$

$$Y(z) = X(z) + 4z^{-1}X(z) - 0.25z^{-1}Y(z),$$

откуда

$$y[n] = x[n] + 4x[n-1] - 0.25y[n-1].$$

Структурная схема в прямой форме показана на рис. 29.

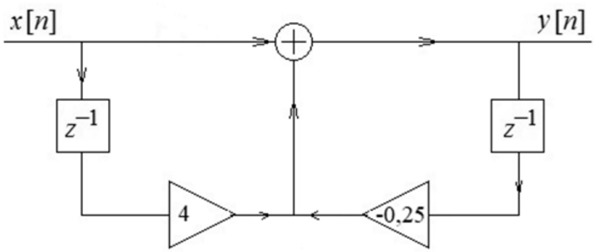


Рис. 29

От передаточной функции перейдем к КЧХ:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 4e^{-j\omega}}{1 + 0.25e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega} + 4}{e^{j\omega} + 0.25} = \frac{\cos\omega + 4 + j\sin\omega}{\cos\omega + 0.25 + j\sin\omega},$$

и найдем АЧХ (рис. 30):

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\frac{(\cos\omega + 4)^2 + \sin^2\omega}{(\cos\omega + 0.25)^2 + \sin^2\omega}} = 4.$$

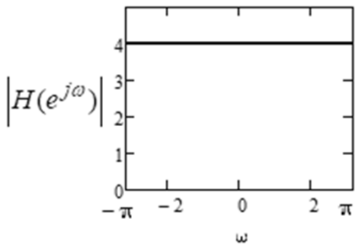


Рис. 30

Цепь является всепропускающей. ➤

* * *

14.1. Определите АЧХ и ФЧХ цепи с нуль-полюсной диаграммой, показанной на рис. 31 $(c = 1/d^*)$. Изобразите структурную схему.

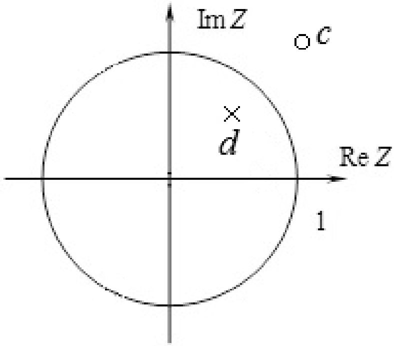


Рис. 31

14.2. Изобразите структурную схему всепропускающей цепи второго порядка с вещественными коэффициентами (полюсы и нули комплексные).

14.3. Передаточная функция цепи $H(z) = (1 - 2z^{-1})/(1 - 0.5z^{-1})$. Постройте НПД. Найдите АЧХ. Запишите выражение ФЧХ. Определите отклики цепи на последовательности $1[n] = 1\ \forall n,\ \delta[n],\ \cos[\pi n/2]$.

14.4. Передаточная функция цепи $H(z) = (1 + 3z^{-1})\Big/\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)$. Постройте НПД. Найдите АЧХ. Запишите выражение ФЧХ. Определите отклик цепи на последовательности $1[n],\ \delta[n],\ \sin[\pi n/2]$.

14.5. Передаточная функция цепи $H(z) = (1 - 0.8z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1})$. Постройте НПД. Найдите АЧХ. Определите передаточную функцию цепи с такой же АЧХ. Запишите выражение ФЧХ для обеих цепей.

14.6. Определите АЧХ и ФЧХ цепи, передаточная функция которой равна $H(z) = \dfrac{z^{-N} - a}{1 - az^{-N}}$ при $N = 4$. На что влияет величина a (положительное вещественное число)?

* * *

Цепь называется минимально-фазовой, если она обеспечивает минимальную задержку сигнала среди всех цепей с одинаковой формой АЧХ. Этим свойством обладают каузальные цепи, все нули которых лежат внутри единичной окружности. Если последовательно с такой цепью включить каузальную всепропускающую цепь (ВПЦ) с одним нулём и одним полюсом, причём полюс совпадает с одним из нулей c минимально-фазовой цепи, то результат будет равносилен перемещению нуля из точки c в точку $1/c^*$, лежащую вне единичной окружности; задержка при этом увеличится (вследствие каузальности ВПЦ), а АЧХ сохранит форму. Таким способом можно переместить поочерёдно все нули изнутри единичной окружности наружу, получив совокупность цепей с одинаковой (с точностью до масштабных коэффициентов) АЧХ и различными ФЧХ.

С другой стороны, любую каузальную неминимально-фазовую цепь можно представить каскадным соединением минимально-фазовой и всепропускающей цепей.

Подробнее: [1, с. 79; 3, с. 290; 4, с. 126].

* * *

14.7. Передаточная функция цепи $H(z) = (1-4z^{-1})/(1-0.5z^{-1})$. Постройте НПД. Представьте данную цепь каскадным соединением минимально-фазовой и всепропускающей цепей, изобразите структурную схему.

14.8. Передаточная функция цепи

$$H(z) = (1-4z^{-1})(1+1.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})(1-0.8jz^{-1})(1+0.8jz^{-1}).$$

Постройте НПД. Определите представление цепи каскадным соединением минимально-фазовой и всепропускающей цепей. Определите и постройте импульсную характеристику минимально-фазовой цепи.

14.9. Передаточная функция цепи

$$H(z) = (1-2z^{-1})(1+1.2z^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+0.5jz^{-1}).$$

Постройте НПД. Определите представление цепи каскадным соединением минимально-фазовой и всепропускающей цепей. Определите импульсную характеристику всепропускающей цепи.

15. ЛИС-ЦЕПИ С ЛИНЕЙНОЙ ФЧХ

Необходимым и достаточным условием линейности ФЧХ КИХ-цепи является чётная симметрия импульсной характеристики относительно своей середины, т. е.

$$h[n]=h[N-1-n],\ n=\overline{0,N-1}.$$

При этом цепь вносит задержку, равную $(N-1)/2$, целую при нечётном N и полуцелую при чётном. ФЧХ равна $\varphi(\omega)=-(N-1)\omega/2$. Нули передаточной функции цепи с линейной ФЧХ образуют пары $\left(c_k \leftrightarrow 1/\mathrm{c}_k^*\right)$. Исключение составляют точки 1 и –1, которые являются обратными и комплексно-сопряжёнными сами себе.

ЛИС-цепь, у которой импульсная характеристика обладает нечётной симметрией относительно своей середины (антисимметрией), имеет ФЧХ, зависящую от частоты линейно, но имеющую дополнительный сдвиг $-\pi/2$ на положительных частотах и $\pi/2$ – на отрицательных.

Подробнее: [1, с. 81; 3, с. 300; 4, с. 345].

* * *

Пример решения

Задание

Импульсная характеристика цепи имеет два ненулевых отсчета $h[0]=1$, $h[2]=-1$. Определите АЧХ и ФЧХ, постройте графики. Определите групповое время задержки.

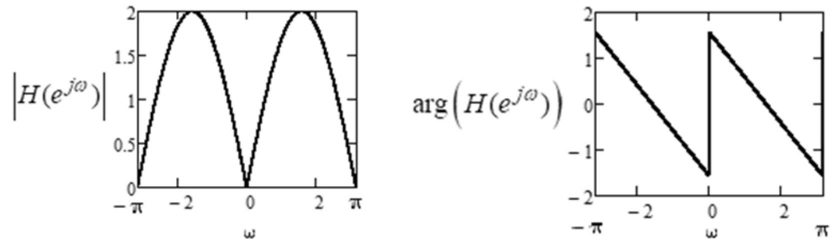
Решение

По заданным условиям мы можем записать выражение импульсной характеристики в виде $h[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$.

С помощью свойств z-преобразования найдём передаточную функцию $H(z)=1-z^{-2}$. КЧХ такой цепи

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j2\omega}=e^{-j\omega}(j2\sin\omega)=e^{-j\omega}e^{j\frac{\pi}{2}}(2\sin\omega).$$

Из полученного выражения видно, что КЧХ представляет собой произведение вещественной функции частоты и фазового множителя, аргумент которого линейно зависит от частоты, таким образом, АЧХ $\left|H(e^{j\omega})\right| = |2\sin\omega|$ (рис. 32, *а*), а ФЧХ $\arg\left(H(e^{j\omega})\right) = -\omega + \frac{\pi}{2}$ (рис. 32, *б*).



а *б*

Рис. 32

Групповое время задержки определяется как производная ФЧХ, взятая с обратным знаком, $\tau(\omega) = 1$. ➤

* * *

15.1. Докажите, что каузальные БИХ-цепи с линейными фазочастотными характеристиками не существуют.

15.2. Цепь имеет импульсную характеристику с двумя ненулевыми отсчётами: $h[0] = 1/2$, $h[1] = 1/2$. Определите АЧХ и ФЧХ цепи. Постройте графики.

15.3. Цепь имеет импульсную характеристику с двумя ненулевыми отсчётами: $h[0] = 1/2$, $h[1] = -1/2$. Определите АЧХ и ФЧХ цепи. Постройте графики.

15.4. Импульсная характеристика цепи представлена отсчётами $h[0] = 1$, $h[1] = 2$, $h[2] = 0$, $h[3] = -2$, $h[4] = -1$, остальные отсчёты равны нулю. Найдите КЧХ, постройте графики АЧХ и ФЧХ, изобразите структурную схему. Определите групповое время задержки.

15.5. Импульсная характеристика цепи имеет следующие отсчёты: $h[0] = 1$, $h[1] = 2$, $h[2] = 3$, $h[3] = 2$, $h[4] = 1$, остальные отсчёты равны нулю. Найдите КЧХ, постройте графики АЧХ и ФЧХ, изобразите структурную схему. Определите групповое время задержки.

15.6. Импульсная характеристика цепи представлена отсчётами $h[0]=1$, $h[1]=2$, $h[2]=2$, $h[3]=-2$, $h[4]=-2$, $h[5]=-1$, остальные отсчёты равны нулю. Найдите КЧХ, постройте графики АЧХ и ФЧХ, изобразите структурную схему. Определите групповое время задержки.

15.7. Импульсная характеристика цепи имеет следующие отсчёты: $h[0]=1$, $h[1]=2$, $h[2]=3$, $h[3]=3$, $h[4]=2$, $h[5]=1$; остальные отсчёты равны нулю. Найдите КЧХ, постройте графики АЧХ и ФЧХ, изобразите структурную схему. Определите групповое время задержки.

15.8. Постройте структурную схему для ЛИС-цепи, имеющей нуль-полюсную диаграмму, показанную на рис. 33.

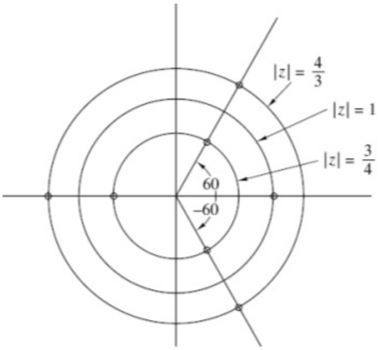


Рис. 33

Все коэффициенты должны быть вещественными. Количество операций должно быть минимально возможным. Определите импульсную характеристику и групповую задержку.

15.9. Дискретный фильтр Гильберта имеет ФЧХ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega)$; АЧХ равна единице всюду, кроме точки $\omega = 0$, в которой имеет нулевое значение. Определите импульсную характеристику.

15.10. Физически реализуемая аппроксимация фильтра Гильберта получается усечением идеальной импульсной характеристики и её сдвигом вправо. Найдите АЧХ и ФЧХ такого усечённого фильтра, если его ИХ содержит 6 ненулевых отсчётов.

16. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Случайный процесс дискретного времени (случайная последовательность) – это последовательность случайных величин (СВ). Случайная величина x (отдельный отсчёт случайной последовательности) описывается плотностью распределения вероятностей $w(x)$ или функцией распределения вероятностей $F(x)$, причём $w(x) = dF(x)/dx$ и $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} w(x)dx$. Для упрощённого описания некоторых свойств СВ используются числовые характеристики – моменты.

Начальные и центральные моменты случайной величины x определяются выражениями

$$m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)dx = \overline{x^k} \quad \text{и} \quad M_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k w(x)dx = \overline{(x-m)^k},$$

где $m = \overline{x}$ – первый начальный момент, или математическое ожидание (среднее значение) случайной величины; горизонтальная черта служит символическим обозначением оператора усреднения по ансамблю (интегрирования с весом, равным ПРВ). Наиболее часто используются математическое ожидание и второй центральный момент, или дисперсия $M_2 = D = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 w(x)dx = \overline{(x-m)^2}$.

Пара случайных величин x и y характеризуется совместным распределением с плотностью $w(x, y)$ и функцией распределения $F(x, y)$, которые связаны выражениями

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} w(x, y)dxdy.$$

Числовыми характеристиками служат моменты каждой СВ в отдельности, а также смешанные моменты, среди которых чаще всего используют моменты второго порядка – начальный (корреляционный)

$$r_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y)dxdy = \overline{xy},$$

или центральный (ковариационный)

$$k_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) w(x,\, y) dx dy = \overline{(x - m_x)(y - m_y)}\,.$$

Подробнее: [1, с. 103; 3, с. 814; 4, с. 271].

* * *

Пример решения

Задание

Случайная величина x имеет математическое ожидание m_x и дисперсию D_x. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины y, если $y = \cos(\pi k)x$, где k – константа.

Решение

При решении задачи необходимо использовать следующие свойства математического ожидания:

1) $\overline{c} = c$ – математическое ожидание константы есть сама константа;

2) $\overline{c_1 x_1 + c_2 x_2} = c_1 \overline{x_1} + c_2 \overline{x_2}$ – оператор усреднения линеен.

Найдем математическое ожидание случайной величины y, учитывая, что неслучайная величина при усреднении выносится за знак интеграла (оператора усреднения):

$$m_y = \overline{y} = \overline{\cos(\pi k)\, x} = \cos(\pi k)\, \overline{x} = \cos(\pi k)\, m_x\,.$$

Найдем дисперсию случайной величины y:

$$D_y = \overline{(y - m_y)^2} = \overline{y^2 - 2 m_y y + m_y{}^2} = \overline{y^2} - 2 m_y \overline{y} + m_y{}^2\,.$$

В силу линейности оператора усреднения справедливо

$$D_y = \overline{(y - m_y)^2} = \overline{y^2} - m_y^2\,,$$

$$\overline{y^2} = D_y + m_y^2\,.$$

Тогда дисперсия случайной величины y:

$$D_y = \overline{[\cos(\pi k)x]^2} - 2[\cos(\pi k)m_x]\overline{\cos(\pi k)x} + [\cos(\pi k)m_x]^2 =$$

$$= \cos^2(\pi k)D_x + [\cos(\pi k)m_x]^2 - [\cos(\pi k)m_x]^2 = \cos^2(\pi k)D_x \,. \blacktriangleright$$

* * *

16.1. Случайная величина y образована как линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ двух независимых СВ x_1 и x_2 с математическими ожиданиями m_1, m_2 и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 соответственно. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию СВ y. Что изменится, если условие независимости случайных величин исключить?

16.2. Совокупность случайных величин $x_1, \ldots, x_n$ можно записать в виде вектор-столбца. Произведение этого вектора $\mathbf{x}$ на транспонированный вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ после усреднения даёт квадратную матрицу. Охарактеризуйте эту матрицу (её структуру, смысл её элементов).

* * *

Случайная последовательность полностью описывается совместной ПРВ или совместной функцией распределения вероятностей произвольной совокупности отсчётов. Смешанный начальный (центральный) момент второго порядка двух отсчётов $x[n_1]$ и $x[n_2]$ случайной последовательности $x[n]$, рассматриваемый как функция двух целых переменных n_1 и n_2, называется автокорреляционной (автоковариационной) последовательностью (АКП). Случайная последовательность $x[n]$ называется **стационарной в широком смысле**, если её математическое ожидание постоянно, а АКП $r_x[n_1, n_2]$ зависит только от разности n_1 и n_2, т. е. от интервала между отсчётами, $r_x[n_1, n_2] = r_x[n_2 - n_1] = r_x[m]$.

АКП характеризует динамические (скоростные) свойства случайной последовательности. Частотные (спектральные) свойства стационарной в широком смысле случайной последовательности описываются спектральной плотностью мощности $R_x(e^{j\omega})$, которая связана с

АКП дискретно-временным преобразованием Фурье (теорема Винера–Хинчина):

$$R_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x[m]\, e^{-j\omega m},$$

$$r_x[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega, \quad m = \overline{-\infty,\infty}.$$

Подробнее: [1, с. 106; 3, с. 817; 4, с. 272].

* * *

Пример решения

Задание

Дискретный белый шум имеет нулевое математическое ожидание и АКП вида $r_x[m] = D\delta[m]$. Найдите СПМ.

Решение

Найдем СПМ, применив дискретно-временное преобразование Фурье к АКП:

$$R_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x[m]\, e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D\delta[m]\, e^{-j\omega m} = D.$$

Таким образом, СПМ дискретного белого шума постоянна на всей частотной оси, $-\pi < \omega < \pi$. ➤

* * *

16.3. Стационарная в широком смысле случайная последовательность $x[n]$ имеет нулевое среднее и АКП вида $r_x[m] = a^{|m|}$, $|a| < 1$. Определите СПМ $R_x(e^{j\omega})$.

16.4. Случайная последовательность $x[n]$ образуется как сумма $y[n] = x[n] + v[n]$ взаимно независимых последовательностей $x[n]$ и

$v[n]$ типа белого шума с плотностями распределения $w(x) = e^{-x}, x \ge 0$; $w(v) = e^{-v}$, $v \ge 0$.

а) Определите одномерную ПРВ[8] $y[n]$.

б) Найдите математическое ожидание последовательности $y[n]$.

в) Найдите АКП последовательности $y[n]$.

16.5. Последовательность описывается выражением

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} A_k \cos(\omega_k n + \varphi_k),$$

где $p, A_1, ..., A_p, \omega_1, ..., \omega_p$ – положительные постоянные; $\varphi_1, ..., \varphi_p$ – независимые случайные величины, равномерно распределённые в интервале $(0, 2\pi)$.

а) Найдите среднее последовательности $x[n]$.

б) Определите автокорреляционную последовательность $r_x[m]$.

16.6. Автоковариационная последовательность случайной последовательности стремится к нулю при $n \to \infty$. К какому пределу при этом стремится автокорреляционная последовательность?

16.7. В результате случайного эксперимента из интервала (0,1) выбирается в соответствии с равномерным распределением вещественное число, которое записывается в виде бесконечной двоичной дроби $0.a_1 a_2 a_3 ...$ Разряды числа при считывании слева направо можно рассматривать как временну́ю случайную последовательность, отсчёты которой принимают значения 0 или 1. Докажите независимость отсчётов.

17. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛИС-ЦЕПИ

Анализ ЛИС-цепей при случайных воздействиях часто проводят в рамках корреляционно-спектральной теории, полагая, что на вход воздействует случайная последовательность $x[n]$, стационарная в широ-

[8] Сумма двух независимых случайных величин имеет ПРВ, равную свёртке плотностей вероятностей слагаемых.

ком смысле, описываемая спектральной плотностью мощности $R_x(e^{j\omega})$ или АКП $r_x[m]$. При этом задача заключается в определении СПМ $R_y(e^{j\omega})$ и АКП $r_y[m]$ выходной последовательности $y[n]$, а также взаимно корреляционной последовательности $r_{xy}[m]$ входного и выходного процессов.

СПМ выходной последовательности

$$R_y(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 R_x(e^{j\omega}),$$

где $H(e^{j\omega})$ – комплексная частотная характеристика цепи.

АКП выходной последовательности находится свёрткой

$$r_y[m] = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} r_h[\mu] r_x[m-\mu],$$

где $r_h[\mu] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h^*[k+\mu]$ – автокорреляционная последовательность импульсной характеристики $h[n]$ цепи.

Взаимно корреляционная последовательность

$$r_{xy}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_x[m-k].$$

Подробнее: [1, с. 107; 3, с. 83; 4, с. 279].

* * *

Пример решения

Задание

Случайная последовательность $y[n]$ формируется разностным уравнением $y[n] = x[n] + x[n-1]$, где $x[n]$ – белый шум с дисперсией D_x. Найдите АКП последовательности $y[n]$.

Решение

Дискретный белый шум $x[n]$ по определению имеет нулевое математическое ожидание и АКП $r_x[m]=D_x\delta[m]$. Импульсная характеристика формирующей цепи $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$, её АКП

$$r_h[\mu]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,h^*[k+\mu]=\delta[\mu+1]+2\delta[\mu]+\delta[\mu-1].$$

АКП последовательности $y[n]$ находится свёрткой

$$r_y[m]=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}r_h[\mu]\,r_x[m-\mu]=D_x\left(\delta[m+1]+2\delta[m]+\delta[m-1]\right).$$

Можно также найти $r_y[m]$ как второй смешанный момент:

$$r_y[m]=\overline{y[n]y[n+m]}=\overline{(x[n]+x[n-1])(x[n+m]+x[n+m-1])}=$$
$$=\overline{x[n]x[n+m]}+\overline{x[n-1]x[n+m]}+\overline{x[n]x[n+m-1]}+\overline{x[n-1]x[n+m-1]}=$$
$$=r_x[m]+r_x[m+1]+r_x[m-1]+r_x[m]=$$
$$=D_x\left(\delta[m+1]+2\delta[m]+\delta[m-1]\right).$$ ➤

* * *

17.1. Случайная последовательность $x[n]$ формируется из дискретного белого шума $\varepsilon[n]$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_ε^2 в соответствии с разностным уравнением $x[n]=0.5x[n-1]+\varepsilon[n]$.

а) Определите спектральную плотность мощности последовательности $x[n]$.

б) Найдите дисперсию σ_x^2 последовательности $x[n]$.

17.2. Спектральная плотность мощности случайной последовательности определяется выражением

$$R_x(e^{j\omega})=\frac{4}{\left|1-e^{-j\omega}+0.5e^{-j2\omega}\right|^2}.$$

Запишите разностное уравнение, описывающее формирование этой последовательности из дискретного белого шума $\varepsilon[n]$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

17.3. Из дискретного белого шума $v[n]$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_v формируется случайная последовательность $y[n]$ в соответствии с разностным уравнением $y[n] = 0.9y[n-1] + v[n]$. Определите передаточную функцию выбеливающего[9] фильтра.

17.4. Запишите разностное уравнение, описывающее процесс выбеливания последовательности $x[n]$, сформированной из белого шума цепью с передаточной функцией $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$. Изобразите структурные схемы формирующего и выбеливающего фильтра.

17.5. На вход цепи с импульсной характеристикой $h[n] = a^n u[n]$ поступает случайная последовательность $x[n]$ с АКП $r_x[m] = D_x \gamma^{|m|}$. Определите АКП выходной последовательности $y[n]$.

17.6. На вход цепи с передаточной функцией $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ поступает случайная последовательность $x[n]$ с АКП $r_x[m] = D_x \delta[m]$. Определите АКП выходной последовательности $y[n]$.

18. МНОГОМЕРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛИС-ЦЕПИ

Многомерная последовательность $x[n_1, n_2, ..., n_m] = x[\mathbf{n}]$ представляет собой функцию нескольких дискретных (целых) переменных, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)^{\mathrm{T}}$, $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – символ транспонирования. Многомерная последовательность периодична, если

$$x[\mathbf{n}] = x[\mathbf{n} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}],$$

[9] Выбеливающим называется фильтр, формирующий белый шум из небелого (окрашенного).

где $\mathbf{N}$ – матрица периодичности с целыми элементами; $\mathbf{r}$ – произвольный целочисленный вектор размерности m. Периодическая многомерная последовательность образуется бесконечным повторением (со сдвигами, определяемыми матрицей $\mathbf{N}$ при всевозможных $\mathbf{r}$) конечного фрагмента, называемого фундаментальным периодом. Количество точек с целочисленными координатами, составляющих фундаментальный период, равно определителю матрицы $\mathbf{N}$. Матрица $\mathbf{N}$ может быть задана многими способами для одной и той же последовательности.

Многомерная последовательность называется разделимой, если её можно представить произведением последовательностей меньшей размерности.

Подробнее: [1, с. 113; 5, с. 285].

* * *

Пример решения

Задание

Найдите преобразование Фурье последовательности, изображенной на рис. 34, где чёрным точкам соответствует значение 1; остальные значения равны 0.

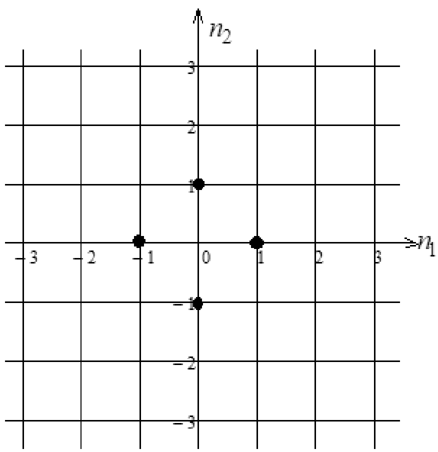


Рис. 34

Решение

Двумерную последовательность, показанную на рисунке, можно представить в виде

$$x[n_1,\ n_2] = \delta[n_1+1,\ n_2] + \delta[n_1-1,\ n_2] + \delta[n_1,\ n_2+1] + \delta[n_1,\ n_2-1].$$

Найдем спектральную плотность заданной последовательности как двумерное преобразование Фурье:

$$X(\omega_1,\ \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x[n_1,\ n_2] e^{-j\omega n_1} e^{-j\omega n_2} =$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \big(\delta[n_1+1,\ n_2] + \delta[n_1-1,\ n_2] + \delta[n_1,\ n_2+1] +$$

$$+ \delta[n_1,\ n_2-1]\big) e^{-j\omega n_1} e^{-j\omega n_2} =$$

$$= e^{j\omega_1} + e^{-j\omega_1} +^{j\omega_2} + e^{-j\omega_2} = 2(\cos\omega_1 + \cos\omega_2).$$

Спектральная плотность двумерной последовательности является функцией (в общем случае комплексной) частот ω_1 и ω_2. ➤

* * *

18.1. Запишите три варианта матрицы периодичности двумерной последовательности, показанной на рис. 35. Определите фундаментальный период (здесь и далее черные и белые кружки соответствуют значениям 1 и 0).

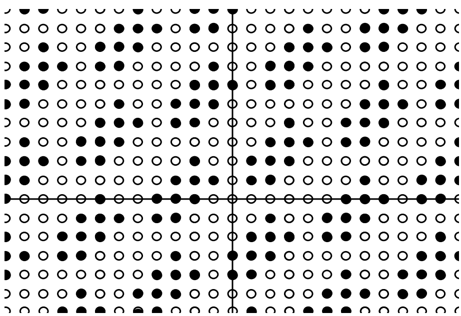


Рис. 35

18.2. Определите комплексную частотную характеристику двумерной ЛИС-цепи, импульсная характеристика которой показана на рис. 36.

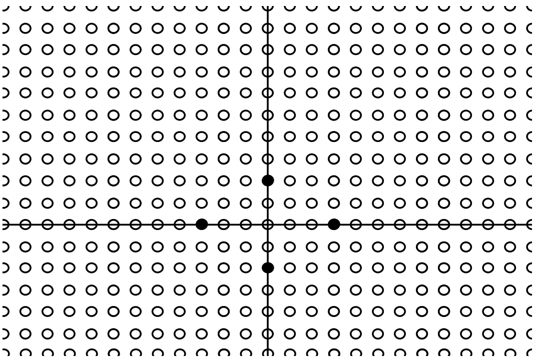


Рис. 36

18.3. Определите свёртку последовательности

$$u[n_1,\ n_2] = \begin{cases} 1,\ n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0; \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

с такой же последовательностью.

18.4. Найдите результат двумерной свёртки последовательностей, показанных на рис. 37 ($h[n_1,\ n_2] = u[n_1]u[n_2]$, значения $x[n_1,\ n_2]$ указаны в круглых скобках).

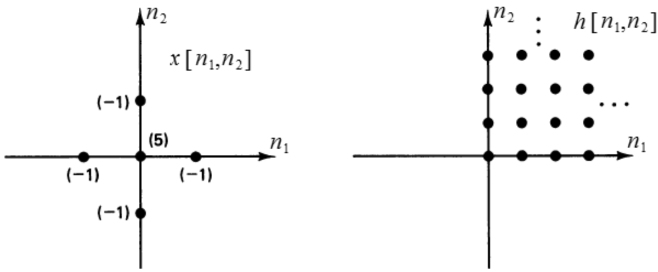


Рис. 37

18.5. Считая, что $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ – преобразование Фурье последовательности $x[n_1, n_2]$, найдите преобразование Фурье последовательности $x[an_1 + bn_2, cn_1 + dn_2]$ при $ad - bc = 1$ (a, b, c, d – целые константы).

18.6. Найдите преобразование Фурье последовательности

$$x[n_1, n_2] = \sum_{p=0}^{N-1} \delta[n_1 - pm_1, n_2 - pm_2].$$

18.7. Покажите, что реакция разделимой цепи на разделимую последовательность разделима.

18.8. Найдите преобразование Фурье последовательностей

$$x[n_1, n_2] = a^{2n_1 - n_2} u[n_1, n_2], \; |a| < 1;$$

$$x[n_1, n_2] = a^{n_1} b^{n_2} \delta[4n_1 - n_2] u[n_1], \; |a| < 1, \; |b| < 1.$$

19. ВЗАИМОСВЯЗИ АНАЛОГОВЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Переход от аналогового сигнала к дискретному осуществляется путём выполнения операции дискретизации. Дискретизация представляет собой измерение мгновенных значений аналогового процесса $x_c(t)$ в моменты, кратные шагу дискретизации T_d, и описывается выражением $x[n] = x_c(nT_d), \; n = 0, 1, 2,...$ Если требуется сохранение энергетических характеристик сигнала, вводится множитель T_d, так что $x[n] = T_d x_c(nT_d), \; n = 0, 1, 2,...$

При дискретизации происходит отображение частотной оси в виде числовой прямой на единичную окружность z-плоскости, поэтому при нарушении условий теоремы отсчётов может происходить искажение формы спектра (подмена частот, маскировка частот).

Подробнее: [1, с. 129; 3, с. 154; 4, с. 9].

* * *

Пример решения

Задание

Сигнал $x_c(t) = \cos(1000\pi t)$ продискретизирован с шагом T_d с результатом $x[n] = \cos(\pi n / 2)$. Определите T_d.

Решение

Представим сигнал $x_c(t)$ в дискретном виде

$$x_c(nT_d) = \cos(1000\pi n T_d).$$

Найдем T_d, приравняв аргументы функций $x[n]$ и $x_c(nT_d)$:

$$1000\pi n T_d = \frac{\pi n}{2},$$

$$T_d = \frac{1}{2000}.$$

Примечание. *Ответ на вопрос о единственности решения предлагается найти самостоятельно.* ➤

* * *

19.1. Сигнал $x_c(t) = \sin(2\pi \cdot 100t)$ дискретизирован с шагом $T_d = 1/400$ с. Определите результирующую последовательность.

19.2. Сигнал $x_c(t) = \cos(4000\pi t)$ продискретизирован с шагом T_d с результатом $x[n] = \cos(\pi n / 3)$.

а) Определите T_d.

б) Единствен ли ответ? Если да, мотивируйте. Если нет, приведите другой ответ.

19.3. Сигнал $x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$ дискретизирован с шагом T_d, причём получилась последовательность $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$.

а) Определите T_d.

б) Является ли ответ единственным? Если да, почему? Если нет, укажите другой ответ.

19.4. Каждый из следующих сигналов дискретизируется с соответствующим шагом. Для каждого случая определите дискретный сигнал:

а) $x_c(t) = \cos(2\pi 1000t)$, $T_d = 1/3000$;

б) $x_c(t) = \sin(2\pi 1000t)$, $T_d = 1/1500$;

в) $x_c(t) = \sin(2\pi 1000t)/\pi t$, $T_d = 1/5000$.

19.5. При дискретизации аналогового сигнала получен дискретный сигнал. Найдите шаг дискретизации, указав, однозначно ли он определяется. Если нет, укажите ещё одно значение шага:

а) $x_c(t) = \sin(10\pi t)$, $x[n] = \sin(\pi n/4)$;

б) $x_c(t) = \sin(10\pi t)/(10\pi t)$, $x[n] = \sin(\pi n/2)/(\pi n/2)$.

19.6. Последовательность $x[n] = \cos(\pi n/4)$, $-\infty < n < \infty$, получена из сигнала $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$, $-\infty < t < \infty$, дискретизацией с частотой 1000 отсч/с. Определите два положительных значения Ω_0, которым соответствует такой результат дискретизации.

19.7. Система цифровой обработки аналоговых сигналов показана на рис. 38 (УЦОС – устройство цифровой обработки сигналов – ФНЧ с частотой среза $\pi/8$). Эффектами квантования в данной задаче пренебрегаем.

Рис. 38

а) Если $x(t)$ имеет спектр, ограниченный частотой 5 кГц, то при каком максимальном шаге дискретизации T_d отсутствует подмена частот?

б) Если $1/T_d$ =10 кГц, какова частота среза соответствующего аналогового фильтра?

19.8. Пусть $h_c(t)$ – импульсная характеристика аналоговой ЛИС-цепи, а $h_d[n]$ – ИХ дискретной ЛИС-цепи.

а) Для аналоговой цепи с ИХ $h_c(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ где a – вещественное положительное число, определите КЧХ и изобразите АЧХ. Найдите максимальное и минимальное значения АЧХ.

б) Для дискретной цепи с ИХ $h_d[n] = h_c(nT_d)$ найдите КЧХ и изобразите АЧХ при $T_d = 1$. Определите максимальное и минимальное значения АЧХ.

20. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Для синтеза КИХ-фильтров применяются различные методы. Метод оконного взвешивания основан на разложении желаемой КЧХ в ряд Фурье и умножении полученной последовательности (импульсной характеристики) после сдвига по временной оси на окно, снижающее уровень боковых лепестков КЧХ. Метод частотной выборки предполагает непосредственное задание значений КЧХ в отдельных равноотстоящих точках частотной оси, после чего путём обратного ДПФ находится импульсная характеристика КИХ-фильтра. КИХ-фильтрация методом быстрой свёртки сводится к получению спектра последовательности конечной длины с помощью быстрого преобразования Фурье и умножению полученной совокупности спектральных отсчётов на КЧХ фильтра с последующим обратным БПФ. Машинный синтез КИХ-фильтра может быть проведён путём непосредственного подбора коэффициентов для обеспечения оптимальности согласно выбранному критерию (часто критерием служит минимум максимального уровня бокового лепестка АЧХ).

Подробнее: [1, с. 138; 3, с. 467; 4, с. 376].

Пример решения

Задание

Определите импульсную характеристику идеального ФНЧ с частотой среза $\pi / 4$. Выполните её усечение и взвешивание окном Хэмминга при длине $N = 15$.

Решение

Разложением прямоугольной КЧХ в ряд Фурье получаем

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(\omega n)d\omega=\frac{\sin(\omega n)}{2\pi n}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{1}{4}\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n/4},\quad n=\overline{-\infty,\infty}.$$

Окно Хэмминга описывается выражением

$$w_{\text{Хм}}[n]=0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1},\quad n=\overline{0,N-1}.$$

Импульсная характеристика КИХ-фильтра имеет вид

$$h_w[n]=\frac{1}{4}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-7)\right]}{\frac{\pi}{4}(n-7)}\left(0.54-0.46\cos\frac{\pi n}{7}\right),\quad n=\overline{0,14}.$$ ➤

* * *

20.1. При фильтрации методом быстрой свёртки применяется КЧХ вида $H_k=\begin{cases}1 & \text{при } k=0,1,\ N-1;\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$ при $N=8$. Найдите соответствующую импульсную характеристику.

20.2. Цифровой дифференцирующий фильтр имеет КЧХ $H(e^{j\omega})=\frac{j\omega}{T},\ -\pi\le\omega\le\pi$. Реализуем ли такой фильтр? Определите импульсную характеристику КИХ-фильтра с линейной ФЧХ, аппроксимирующего дифференциатор.

20.3. Для дискретных сигналов аналогом дифференцирования является вычисление конечной разности, описываемой уравнением $y[n]=\frac{1}{T_d}(x[n]-x[n-1])$. Определите импульсную характеристику и КЧХ такой цепи. Постройте графики АЧХ и ФЧХ. Для каких сигналов такой фильтр удовлетворительно аппроксимирует дифференциатор?

20.4. Найдите импульсную характеристику идеального дискретного фильтра нижних частот с граничной частотой $\pi/2$. Как изменится его

КЧХ, если импульсную характеристику умножить на последовательность $\cos(\pi n/2)$?

20.5. Определите импульсную характеристику идеального дискретного ФВЧ с граничной частотой $\pi/2$. Как изменится КЧХ этого фильтра, если импульсную характеристику умножить на последовательность $\cos(\pi n/2)$?

20.6. Изобразите качественно АЧХ фильтра, описываемого разностным уравнением $y[n]=x[n]+x[n-6]$. Постройте график ФЧХ. Повторите то же для фильтра, описываемого уравнением $y[n]=x[n]-x[n-6]$.

20.7. Дискретный сигнал содержит гармонические составляющие с частотами ω_0, $2\omega_0$, $4\omega_0$ и $6\omega_0$. Постройте простейший нерекурсивный фильтр для подавления составляющих с частотами $2\omega_0$, $4\omega_0$ и $6\omega_0$.

20.8. Для фильтра с передаточной функцией $H(z)=1+az^{-1}$ определите граничную частоту, на которой АЧХ составляет 0.707 от максимального значения, как функцию параметра a. Найдите граничную частоту при $a=1$.

20.9. Определите результат круговой свёртки последовательностей

$$x[n]=n, \quad n=\overline{0,7} \quad \text{и} \quad y[n]=1, \quad n=\overline{0,7}.$$

Сравните с результатом апериодической свёртки тех же последовательностей, рассматриваемых при $n=\overline{-\infty,\infty}$. Что нужно изменить, чтобы результаты совпали?

20.10. КИХ-фильтрация реализуется методом быстрой свёртки. Скорость поступления отсчётов составляет 10^5 1/с. Импульсная характеристика реализуемого фильтра имеет длину 39 отсчётов. Определите требования к объёму памяти и быстродействию[10] процессора при 64-точечном и 128-точечном БПФ.

20.11. Последовательность поступает на вход процессора, реализующего КИХ-фильтр методом быстрой свёртки. Скорость поступления отсчётов составляет 10^6 1/с. Определите требуемую производительность процессора, если импульсная характеристика реализуемого

---

[10] Быстродействие определяется количеством комплексных умножений в секунду.

фильтра имеет длину 47 отсчётов, а число точек БПФ равно 128. Проверьте, как изменяются требования к процессору при 64-точечном и 256-точечном БПФ.

21. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ

Синтез БИХ-фильтров, как правило, производится методом аналого-цифровой трансформации – преобразованием аналогового фильтра-прототипа в дискретный фильтр путём непосредственной дискретизации импульсной характеристики аналогового фильтра (метод инвариантности ИХ) или билинейным преобразованием передаточной функции прототипа в ПФ дискретного фильтра (метод билинейного преобразования). Область применения первого метода ограничена фильтрами, АЧХ которых пренебрежимо малы на частотах, превышающих половину частоты дискретизации. Особенность второго метода заключается в нелинейной деформации частотной оси при преобразовании аналогового фильтра в дискретный.

Подробнее: [1, с. 150; 3, с. 445; 4, с. 473].

Пример решения

Задание

Преобразуйте аналоговый фильтр с передаточной функцией

$$H_a(p) = \frac{1}{p+1}$$

в дискретный фильтр методом инвариантности импульсной характеристики при частоте дискретизации $\Omega_d = 100\pi$ рад/с.

Решение

Импульсная характеристика аналогового фильтра $h_a(t) = e^{-t}\sigma(t)$.

Шаг дискретизации $T_d = 0.02$ с. Тогда ИХ дискретного фильтра, представляющая собой результат дискретизации ИХ фильтра-прототипа:

$$h[n] = T_d h_a(nT_d) = T_d e^{-nT_d} u[n] = 0.02e^{-0.02n} u[n].$$

Передаточная функция дискретного фильтра имеет единственный полюс $e^{-T_d} = e^{-0.02} \approx 0.98$ и описывается выражением

$$H(z) = \frac{T_d}{1 - e^{-T_d} z^{-1}} = \frac{0.02}{1 - e^{-0.02} z^{-1}}. ➤$$

Пример решения

Задание

Преобразуйте аналоговый фильтр с передаточной функцией

$$H_a(p) = \frac{1}{p+1}$$

в дискретный фильтр методом билинейного преобразования, $\Omega_d = 100\pi$ рад/с.

Решение

В передаточную функцию аналогового фильтра подставим выражение $p = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$, получим

$$H(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 1} = \frac{T_d (1 + z^{-1}) / 2}{1 - z^{-1} + T_d / 2 + z^{-1} T_d / 2}.$$

Подставив $T_d = 0.02$ с, упростим выражение

$$H(z) = \frac{0.01(1 + z^{-1})}{1.01 - 0.99 z^{-1}} = \frac{0.0099(1 + z^{-1})}{1 - 0.98 z^{-1}}.$$

Передаточная функция дискретного фильтра имеет один полюс 0.98 и один нуль в точке –1. Импульсная характеристика дискретного фильтра

$$h[n] = 0.0099 \cdot 0.98^n u[n] + 0.0099 \cdot 0.98^{n-1} u[n-1]. ➤$$

* * *

21.1. Для фильтра с передаточной функцией $H(z) = 1/(1 - az^{-1})$ определите граничную частоту, на которой АЧХ составляет 0.707 от максимального значения, как функцию параметра a. Найдите граничную частоту при $a = 0.9$.

21.2. Преобразуйте аналоговый фильтр с передаточной функцией $H_a(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$ в дискретный фильтр методом инвариантности импульсной характеристики при частоте дискретизации $\Omega_d = 10$ рад/с.

21.3. Аналоговый фильтр-прототип Бесселя имеет передаточную функцию $H_a(p) = \sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{A_i}{(p-p_i)} + \dfrac{A_i^*}{\left(p-p_i^*\right)}\right)$ с параметрами, указанными в таблице. Найдите передаточную функцию цифрового фильтра методом инвариантности импульсной характеристики при частоте дискретизации $\Omega_d = 10$ рад/с, постройте графики АЧХ и ФЧХ.

i	p_i	A_i
1	–4,248 359 + j 0,867 509 7	10,959 230 – j 39,425 170
2	–3,735 708 + j 2,626 272	–1,412 677 + j 12,701 170
3	–2,515 932 + j 4,492 673	3,167 539 – j 0,202 459 6

21.4. Передаточная функция $H_a(p) = \dfrac{(p^2 - 3p + 3)}{(p^2 + 3p + 3)}$ соответствует аналоговому фильтру. Постройте графики АЧХ и ФЧХ. Найдите (если можно) методом инвариантности импульсной характеристики при частоте дискретизации $\Omega_d = 10$ рад/с передаточную функцию соответствующего цифрового фильтра. Если этого сделать нельзя, объясните причину.

21.5. Постройте аналоговый фильтр Баттерворта третьего порядка с частотой среза $\Omega_c = 1$. Преобразуйте его в цифровой фильтр нижних частот с частотой среза $\pi/3$ методом инвариантности импульсной характеристики.

21.6. Необходимо построить цифровой полосовой фильтр для выделения из принимаемого аналогового колебания полезного сигнала, занимающего полосу частот от 14 000 рад/с до 26 000 рад/с. Определите граничные частоты цифрового фильтра, если частота дискретизации составляет 70 000 рад/с. Определите граничные частоты аналогового фильтра-прототипа, если синтез цифрового фильтра предполагается провести методом билинейного преобразования.

21.7. Передаточная функция аналогового фильтра

$$H_a(p) = \frac{p+0.1}{(p+0.1)^2+9}.$$

Преобразуйте его в дискретный фильтр методом инвариантности ИХ и методом билинейного преобразования при $T_d = 0.1$. Сравните расположение полюсов дискретных фильтров.

21.8. Идеальный аналоговый интегрирующий фильтр имеет передаточную функцию $H_a(p) = 1/p$. Методом билинейного преобразования постройте соответствующий дискретный фильтр, запишите его разностное уравнение. Найдите АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра, сравните с АЧХ и ФЧХ идеального интегратора.

21.9. Пользуясь частотным преобразованием Константинидиса вида $z^{-1} = \dfrac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha Z^{-1}}$, преобразуйте фильтр с передаточной функцией $H(z) = 1/(1-az^{-1})$ при $a = 0.9$ в ФНЧ с граничной частотой по уровню 0.707, равной 0.5.

21.10. Пользуясь частотным преобразованием вида $z^{-1} = -\dfrac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$, преобразуйте фильтр с передаточной функцией $H(z) = 1/(1-az^{-1})$ при $a = 0.9$ в фильтр верхних частот с граничной частотой по уровню 0.707, равной 0.5.

21.11. Пользуясь частотным преобразованием вида $z^{-1} = -\dfrac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$, преобразуйте фильтр с передаточной функцией $H(z) = 1 + az^{-1}$ при $a = 0.9$ в фильтр верхних частот с граничной частотой по уровню 0.707, равной 0.5.

22. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВАХ

Числа в цифровых устройствах хранятся и обрабатываются в виде конечных последовательностей символов, имеющих смысл значащих цифр в одной из систем счисления. Обычно используется двоичная система, как наиболее просто реализуемая. В зависимости от того, как интерпретируется тот или иной символ, различают несколько форм представления.

Способ представления, который предполагает присвоение каждой позиции (разряду), занимаемой символом, *фиксированного* числового значения (веса), называется форматом с фиксированной точкой. Вес n-го разряда равен 2^n, при этом $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ для целой части числа и $n = -1,\ -2,\ \ldots$ – для дробной. Старший разряд используется для указания на знак числа: для отрицательных чисел он равен единице. Для представления в *прямом коде* остальные разряды определяют абсолютное значение (модуль) числа. Иначе говоря, чтобы заменить число, представленное в прямом коде, на обратное, нужно изменить (инвертировать) только знаковый разряд. Если число представлено в *обратном коде*, замена числа на обратное означает инверсию всех разрядов – как знакового, так и значащих. Для *дополнительного кода* такая замена требует инверсии всех разрядов и прибавления единицы к младшему разряду.

В формате с *плавающей* точкой число представляется в виде $M \cdot 2^p$, где M – мантисса, а p – порядок. Фактический вес разряда мантиссы M определяется не только номером разряда, но и значением порядка p. Мантисса и порядок могут быть представлены как числа со знаком в одном из кодов, описанных выше.

Подробнее: [4, с. 289].

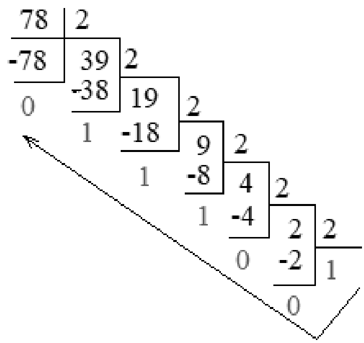
Пример решения

Задание

Найдите представление десятичного числа –78 в 8-разрядных двоичных прямом, обратном и дополнительном кодах.

Решение

Сначала представим модуль числа, равный 78_{10}, в двоичной системе счисления путем деления на основание 2:



Число 78_{10} соответствует числу 1001110_2 в двоичной системе счисления.

Значение знакового разряда для отрицательных чисел равно единице, поэтому число -78_{10} представляется в 8-разрядном прямом коде в виде 11001110.

В обратном коде для отрицательного числа все символы заменяются на противоположные, а в знаковый разряд заносится единица. Число -78_{10} в 8-разрядном обратном коде имеет вид 10110001.

Дополнительный код отрицательного числа образуется путём получения обратного кода и прибавления единицы к младшему разряду:

$$\begin{array}{r} 100110001 \\ +\ \underline{\ 00000001} \\ 10110010 \end{array}.$$

Представление числа -78_{10} в 8-разрядном дополнительном коде имеет вид 10110010. ➤

* * *

22.1. Найдите представление в 16-разрядном дополнительном двоичном коде десятичных чисел 1; –1; 0; 32767; –32767.

22.2. Определите десятичные числа, которым соответствуют целые числа, представленные в 8-разрядном дополнительном двоичном коде:

а) 10000001; б) 10001111;

в) 00001111; г) 10010001.

22.3. Определите десятичные числа, которым соответствуют двоичные числа, представленные в 8-разрядном прямом коде:

а) 10000001; б) 10001111;

в) 00001111; г) 11010001.

22.4. Определите десятичные числа, которым соответствуют целые числа, представленные в 8-разрядном обратном двоичном коде:

а) 10000001; б) 10001111;

в) 00001111; г) 10010001

22.5. Мантисса и порядок числа занимают вместе две ячейки памяти по 8 разрядов (в обратном коде). При этом целый порядок занимает 7 разрядов, а остальные занимает нормализованная мантисса. Определите наибольшее и наименьшее десятичные числа, которые могут быть представлены в таком формате.

22.6. Мантисса и порядок числа занимают вместе две ячейки памяти по 8 разрядов (в дополнительном коде). При этом порядок занимает 7 разрядов, а остальные занимает нормализованная мантисса. Определите мантиссы и порядки чисел 11.25_{10} и -14.875_{10}.

22.7. В формате, описанном в предыдущей задаче, определите мантиссы и порядки чисел -11.25_{10} и -14.875_{10}. Найдите мантиссу и порядок суммы этих чисел.

22.8. Десятичное число –0.613 представляется путём усечения в 8-разрядном устройстве. Определите знак ошибки представления, если используется: а) прямой код; б) обратный код; в) дополнительный код.

22.9. Считая сигнал белым шумом, найдите плотность распределения вероятностей шума квантования, производимого усечением дробных двоичных чисел до 16 разрядов. Рассмотрите отдельно случаи положительных и отрицательных чисел в прямом, обратном и дополнительном коде.

23. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Под квантованием понимается замена точного значения числа, принадлежащего полю вещественных чисел и изображаемого бесконечной дробью (десятичной или двоичной), его приближённым значением, принадлежащим конечному дискретному множеству чисел, которые можно хранить и обрабатывать в устройствах конечной разрядности. Квантование представляет собой нелинейную операцию, описываемую ступенчатой функцией – характеристикой квантователя, и сопровождается ошибкой $\delta[n] = x[n] - x_q[n]$, где x_q – квантованное значение величины x. При условии, что $x[n]$ – случайный процесс, близкий к белому шуму, и его среднеквадратическое отклонение намного больше шага квантования Δ, последовательность $\delta[n]$ можно считать белым шумом с распределением, равномерным на интервале $(-\Delta/2,\ \Delta/2)$.

Подробнее: [1, с. 179; 3, с. 203; 4, с. 289].

* * *

Пример решения

Задание

Отсчёты случайного процесса, имеющего равномерную в интервале $[0, a]$ плотность распределения, подвергаются равномерному квантованию. Найдите зависимость максимального отношения сигнал/шум квантования, измеряемого в децибелах, от разрядности квантователя *N*.

Решение

Считая, что минимальное и максимальное квантованные значения равны соответственно 0 и a, найдем шаг квантования

$$\Delta = \frac{a}{2^N - 1}.$$

Плотность распределения вероятности шума квантования

$$w_\eta(\eta) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{при} \quad \eta \in \left[-\frac{\Delta}{2},\ \frac{\Delta}{2}\right].$$

Математическое ожидание шума квантования $m_\eta = 0$.

Дисперсия шума квантования

$$D_\eta = \sigma_\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_\eta)^2 w_\eta(\eta) d\eta = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \eta^2 \frac{1}{\Delta} d\eta = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{a^2}{12(2^N - 1)^2}.$$

Максимальное отношение сигнал/шум квантования по напряжению определяется как

$$q = \frac{a}{\sigma_\eta} = \sqrt{12}\,(2^N - 1)\,.$$

Зависимость отношения сигнал/шум квантования в децибелах от разрядности квантователя N

$$q_{\text{дБ}}(N) = 20\lg(q) = 10\lg(12) + 20\lg(2^N - 1)\,.$$ ➤

* * *

23.1. Отсчёты случайного процесса с равномерной в интервале $[-a,\ a]$ плотностью распределения вероятностей подвергаются равномерному квантованию с K уровнями. Постройте характеристику квантователя для $K = 8$ при условии, что квантованные значения процесса равновероятны. Найдите функцию распределения квантованного процесса, его математическое ожидание.

23.2. Последовательность независимых равномерно распределённых в интервале $[-0.25,\ 0.25]$ случайных величин поступает на вход равномерного квантователя, имеющего K уровней квантования на интервале $[-1,\ 1]$. Максимальное и минимальное квантованные значения равны соответственно 1 и –1. Найдите среднюю мощность выходной последовательности при $K = 5$ $(K = 6)$.

23.3. Последовательность независимых случайных величин $x[n]$, описываемых распределением Лапласа с плотностью

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x} e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_x}}\,,$$

поступает на квантователь с диапазоном входных значений $[-4\sigma_x,\ 4\sigma_x]$. Найдите вероятность выхода значений последовательности за пределы этого диапазона.

23.4. Сумма двух независимых случайных величин имеет ПРВ, равную свёртке плотностей вероятностей слагаемых. Полагая, что шум квантования имеет равномерное распределение в интервале $(-\Delta/2,\ \Delta/2)$, найдите ПРВ ошибки, получаемой при суммировании двух квантованных отсчётов.

23.5. Определите непосредственными вычислениями форму колебаний предельного цикла в цепи, описываемой разностным уравнением

$$y^{\mathrm{o}}[n] = \left\langle 0.95 \cdot y^{\mathrm{o}}[n-1] \right\rangle_{0,01} + x[n].$$

Скобки $\langle \cdot \rangle_{0,01}$ обозначают округление до сотых долей.

23.6. Выведите формулы коэффициентов влияния для параллельной формы реализации рекурсивного фильтра третьего порядка.

23.7. Выведите формулы коэффициентов влияния для параллельной формы реализации трансверсального фильтра второго порядка.

238. Выведите формулы коэффициентов влияния для каскадной формы реализации трансверсального фильтра второго порядка.

24. БАНКИ ФИЛЬТРОВ

Банками фильтров называются наборы фильтров, разделяющие входной сигнал на компоненты, занимающие различные полосы частот, с последующим прореживанием отсчётов (децимацией); такой банк называется анализирующим. При этом подразумевается возможность восстановления исходного сигнала другим банком, который называется синтезирующим; допускается задержка восстановленного сигнала. Простейший банк состоит из двух фильтров: ФНЧ с ИХ $h[n]$ и ФВЧ с ИХ $g[n]$.

Подробнее: приложение 3; [1, с. 226; 3, с. 209; 4, с. 589].

Пример решения

Задание

На рис. 39 показана схема, выполняющая разделение последовательности $x[n]$ на две составляющие и последующий синтез сигнала $\hat{x}[n]$. Найдите КЧХ фильтров, составляющих анализирующий банк и синтезирующий банк. Найдите сигнал $\hat{x}[n]$.

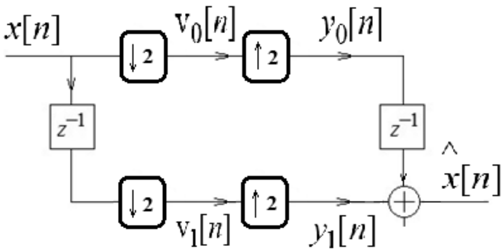


Рис. 39

Решение

Хотя фильтры на схеме явно не показаны, можно считать, что входной сигнал поступает на верхний дециматор (компрессор) через фильтр с передаточной функцией $H_0(z)=1$, а на нижний дециматор – через фильтр с ПФ $H_1(z)=z^{-1}$. В результате децимации получаются две субполосные последовательности $v_0[m]$ и $v_1[m]$ со скоростью следования, вдвое меньшей по отношению к исходной (вторая и третья строки в приведённой ниже таблице).

$x[n]$:	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	...
$v_0[n]$:	$x[0]$	_	$x[2]$	_	$x[4]$	_	$x[6]$	...
$v_1[n]$:	$x[-1]$	_	$x[1]$	_	$x[3]$	_	$x[5]$	...

Спектральные плотности последовательностей на входах компрессоров равны $X(e^{j\omega})$ и $e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$, тогда субполосные последовательности имеют спектральные плотности

$$V_0(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega/2}W_2^0\right)+X\left(e^{j\omega/2}W_2^1\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{X(e^{j\omega/2})+X(-e^{j\omega/2})\right\},$$

$$V_1(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left\{e^{-j\omega/2}X\left(e^{j\omega/2}W_2^0\right)-e^{-j\omega/2}X\left(e^{j\omega/2}W_2^1\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e^{-j\omega/2}X(e^{j\omega/2})-e^{-j\omega/2}X(-e^{j\omega/2})\right\}.$$

Последовательности $y_0[m]$ и $y_1[m]$ имеют спектральные плотности

$$Y_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{X(e^{j\omega}) + X(-e^{j\omega})\right\},$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(-e^{j\omega})\right\}.$$

Передаточные функции фильтров синтезирующего банка:

$$F_0(z) = z^{-1},$$

$$F_1(z) = 1.$$

Восстановленный сигнал имеет спектральную плотность

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}Y_0(e^{j\omega}) + Y_1(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(-e^{j\omega})\right\} + \frac{1}{2}\left\{e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(-e^{j\omega})\right\} =$$

$$= e^{-j\omega}X(e^{j\omega}),$$

следовательно, на выходе синтезирующего банка восстановлен входной сигнал с точностью до задержки на один отсчёт:

$$\hat{x}[n] = x[n-1],$$

что можно проиллюстрировать таблицей значений последовательностей

$x[n]$:	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	...
$v_0[n]$:	$x[0]$	_	$x[2]$	_	$x[4]$	_	$x[6]$	...
$v_1[n]$:	$x[-1]$	_	$x[1]$	_	$x[3]$	_	$x[5]$	...
$y_0[n]$:	$x[0]$	0	$x[2]$	0	$x[4]$	0	$x[6]$	...
$y_1[n]$:	$x[-1]$	0	$x[1]$	0	$x[3]$	0	$x[5]$	...
$\hat{x}[n]$:	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$.

* * *

24.1. Фильтр нижних частот имеет импульсную характеристику $h[n]$ и КЧХ $H(e^{j\omega})$. Найдите КЧХ фильтра, ИХ которого получается из $h[n]$ исключением каждого нечётного отсчёта.

24.2. Фильтр имеет ИХ вида

$$h[n] = \begin{cases} 0.5 \text{ при } n = 0,1; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определите КЧХ, АЧХ, ФЧХ.

24.3. Фильтр имеет ИХ вида

$$g[n] = \begin{cases} 0.5\,(-1)^n \text{ при } n = 0,1; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определите КЧХ, АЧХ, ФЧХ.

24.4. Комплексная частотная характеристика фильтра имеет вид $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}\cos(\omega/2)$. Определите передаточную функцию и импульсную характеристику.

24.5. Найдите КЧХ и ИХ фильтра, имеющего передаточную функцию $H(z) = \dfrac{1}{2}(1 - z^{-1})$.

24.6. Определите ИХ $h[n]$ идеального фильтра нижних частот с частотой среза $\pi/2$. Какому фильтру соответствует ИХ $g[n] = \delta[n] - h[n]$? Как связаны КЧХ этих фильтров?

24.7. Дан фильтр нижних частот с импульсной характеристикой $h[n]$ и КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_{\text{ср}}; \\ 0, & \omega_{\text{ср}} < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Определите КЧХ цепи с ИХ

$$g[n] = \begin{cases} h[n/2] & \text{для чётных } n, \\ 0 & \text{для нечётных } n. \end{cases}$$

25. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

25.1. Последовательность $x[n]$ со спектральной плотностью $X(e^{j\omega})$ умножается на последовательность $g[n]=(-1)^n$, $n=\overline{-\infty,\infty}$. Найдите спектральную плотность результата.

25.2. ЛИС-цепь имеет КЧХ, удовлетворяющую условиям

$$X(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\pi)}),\ x[n]=x[-n].$$

а) Докажите, что функция $X(e^{j\omega})$ периодична с периодом π.

б) Докажите, что все нечётные отсчёты $x[n]$ равны нулю.

25.3. Пусть передаточная функция неустойчивой каузальной цепи равна $H(z)=\dfrac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$, а импульсная характеристика $h[n]u[n]$. Как следует изменить коэффициенты ПФ, чтобы цепь стала устойчивой, а импульсная характеристика приняла вид $\lambda^n h[n]u[n]$? Какому условию должна удовлетворять константа λ? Запишите разностное уравнение изменённой цепи.

25.4. Последовательность $x[n]$, периодическая с периодом *N*, так что $x[n]=x[n+N]$, подвергается децимации с коэффициентом *M*. Покажите, что результирующая последовательность $y[n]$ периодична с некоторым периодом *P*. Определите минимальное значение P.

25.5. Комплексная последовательность $y[n]$, $n=\overline{0,N-1}$, образована из двух вещественных последовательностей: $x_1[n]$, $n=\overline{0,N-1}$, и $x_2[n]$, $n=\overline{0,N-1}$, по правилу $y[n]=x_1[n]+jx_2[n]$. Последовательность $y[n]$ подвергается дискретному преобразованию Фурье, в результате чего получается последовательность $Y[k]$, $k=\overline{0,N-1}$. Можно ли из последовательности $Y[k]$ получить ДПФ-образы $X_1[k]$ и $X_2[k]$ последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$? Если да, то как это сделать?

25.6. Пусть $h[n]$ – вещественная импульсная характеристика фильтра с ненулевой ФЧХ.

а) Докажите, что при

$g[n] = h[n] * x[n]$,

$f[n] = h[n] * g[-n]$,

$y[n] = f[-n]$

последовательность $y[n]$ представляет собой отклик на $x[n]$ фильтра с нулевой ФЧХ.

б) Докажите, что при

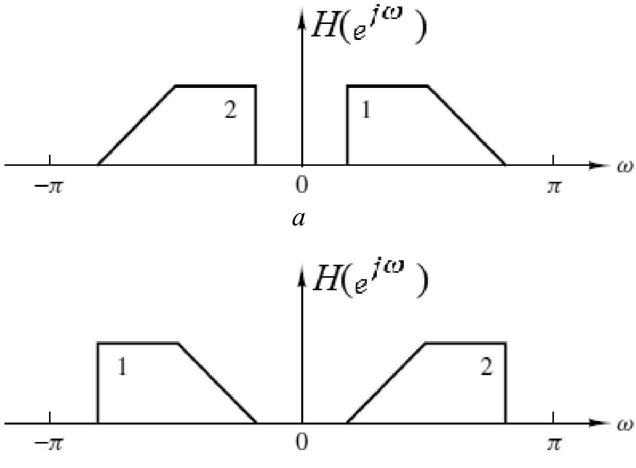
$g[n] = h[n] * x[n]$,

$f[n] = h[n] * x[-n]$,

$y[n] = gf[-n]$

последовательность $y[n]$ также является откликом на $x[n]$ фильтра с нулевой ФЧХ.

25.7. Для повышения скрытности при передаче речевых сигналов (для затруднения понимания речи при перехвате сообщения) может быть использована инверсия спектра (рис. 40).



б

Рис. 40

Как реализовать такое преобразование сигнала в реальном времени?

25.8. Для подавления фона частотой 50 Гц («сетевой наводки») можно применить «фильтр-пробку» с передаточной функцией

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \quad \text{или} \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

Найдите коэффициенты этих фильтров при условии $H(e^{j0}) = 1$. Частота дискретизации равна 400 Гц.

25.9. Необходимо преобразовать фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a < 1$$

в гребенчатый режекторный фильтр для подавления составляющей частоты $\pi / 4$ и её гармоник. Запишите ПФ и РУ гребенчатого фильтра.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 1

I. **По разностному уравнению** (коэффициенты в табл. 1)

$$a_2 y[n-2] + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] = b_2 x[n-2] + b_1 x[n-1] + b_0 x[n]:$$

а) запишите передаточную функцию цепи в виде частного двух полиномов;

б) найдите корни числителя и знаменателя;

в) постройте нуль-полюсную диаграмму, обозначьте область сходимости z-преобразования импульсной характеристики;

г) определите, какая цепь (каузальная, антикаузальная, некаузальная) является устойчивой;

д) составьте структурную схему устойчивой цепи в прямой форме;

е) рассчитайте АЧХ и ФЧХ цепи, постройте графики;

ж) постройте сигнальный граф цепи в прямой и канонической форме;

з) постройте графы для каскадной и параллельной формы реализации цепи;

и) запишите передаточные функции, соответствующие каскадной и параллельной форме реализации;

к) определите аналитически импульсную характеристику цепи;

л) постройте график импульсной характеристики (10…20 значений).

Таблица П1

Вариант	a_2	a_1	a_0	Подвариант	b_2	b_1	b_0
1	3	1	7	1	1	9	7
2	5.3	5	3	2	4	8	7
3	7.7	1	4	3	3	7	6
4	8.4	2	2	4	7	6	8
5	5.6	6	5	5	5	5	3
6	3	4	2.5	6	2	4	9
7	6	9	6.4	7	4	3	1
8	9	8	2.2	8	6	2	3
9	7	5	7.4	9	8	1	5
0	4	7	9.3	0	9	2	7

II. **По заданному набору нулей** (табл. П2):

а) запишите передаточную функцию цепи;

б) рассчитайте АЧХ и ФЧХ, постройте графики;

в) запишите разностное уравнение цепи;

г) определите импульсную характеристику, постройте график;

д) изобразите структурную схему в прямой форме;

е) постройте сигнальный граф цепи в прямой и каскадной форме;

ж) представьте цепь каскадным соединением минимально-фазовой и всепропускающей цепей;

з) определите АЧХ и ФЧХ этих цепей, постройте их графики;

и) запишите разностные уравнения МФЦ и ВПЦ, определите их импульсные характеристики, постройте графики.

Таблица П2

Вариант	c_1	c_2	c_3	Подвариант	c_4	c_5	c_6
1	0.5	0.1+j0.7	0.1–j0.7	1	–1.2	–0.5+j1.5	–0.5–j1.5
2	–0.2	–0.1+j0.7	–0.1–j0.7	2	1.2	0.5+j1.5	0.5–j1.5
3	–0.8	0.7+j0.5	0.7–j0.5	3	1.8	–0.5+j1.2	–0.5–j1.2
4	–0.3	0.6+j0.4	0.6–j0.4	4	2.0	–0.9+j1.8	–0.9–j1.8
5	0.65	0.6+j0.2	0.6–j0.2	5	–1.8	–0.2+j1.3	–0.2–j1.3
6	0.25	0.3+j0.2	0.3–j0.2	6	1.4	1.2+j0.5	1.2–j0.5
7	–0.65	–0.3+j0.2	–0.3–j0.2	7	–1.4	–1.2+j0.5	–1.2–j0.5
8	0.2	–0.7+j0.5	–0.7–j0.5	8	–1.7	–1.2+j1.3	–1.2–j1.3
9	0.75	–0.6+j0.4	–0.6–j0.4	9	1.75	2.2+j0.3	2.2–j0.3
0	0.8	0.5+j0.5	0.5–j0.5	0	1.6	–0.2+j1.7	–0.2–j1.7

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 2

1. Рассчитайте полосовой цифровой фильтр третьего порядка (для чётных подвариантов – фильтр Чебышёва, для нечётных – фильтр Баттерворта), предназначенный для фильтрации аналогового процесса после его преобразования в цифровую форму.

Исходные данные:

- частота Ω_d дискретизации аналогового сигнала; нижняя $\Omega_\text{н}$ и верхняя $\Omega_\text{в}$ границы полосы частот, занимаемой аналоговым сигналом – табл. П3;
- преобразование ФНЧ в полосовой фильтр требуется провести для аналогового фильтра-прототипа;
- аналого-цифровую трансформацию необходимо выполнить методом билинейного преобразования;
- параметр ε для фильтра Чебышёва следует принять равным 0.4.

2. Постройте структурную схему ЦФ в произвольной форме, при этом коэффициенты фильтра не должны быть комплексными. Запишите разностное уравнение ЦФ.

3. Рассчитайте и постройте графики АЧХ, ФЧХ и импульсной характеристики цифрового фильтра.

Таблица П3

Вариант	Частота $\Omega_\text{н}$	Частота $\Omega_\text{в}$	Подвариант	Частота дискретизации Ω_d
1	3000	6000	1	$3.2\,\Omega_\text{в}$
2	3500	7000	2	$2.9\,\Omega_\text{в}$
3	5000	9000	3	$3.5\,\Omega_\text{в}$
4	14 000	26 000	4	$2.8\,\Omega_\text{в}$
5	6000	10 000	5	$3.9\,\Omega_\text{в}$
6	3000	6000	6	$3.8\,\Omega_\text{в}$
7	3000	6000	7	$3.7\,\Omega_\text{в}$
8	3000	6000	8	$3.3\,\Omega_\text{в}$
9	13 000	26 000	9	$3.6\,\Omega_\text{в}$
0	20000	48000	0	$4.2\,\Omega_\text{в}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МАТРИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

На сигнальном графе выделяют *истоковые* узлы, из которых дуги только исходят, и *стоковые* узлы, в которые ветви только входят. Все остальные узлы графа являются *внутренними*.

Сигналы во внутренних узлах обозначим $w_i[n],\ i = \overline{1,N},$ в истоковых узлах $x_j[n],\ j = \overline{1,M},$ выходные сигналы в соответствии с номерами стоковых узлов обозначим $y_k[n],\ k = \overline{1,P}.$

Для z-образов сигналов можно записать систему алгебраических уравнений

$$W_i(z) = \sum_{j=1}^{M} b_{ji} X_j(z) + \sum_{l=1}^{N} f_{li} W_l(z)\ , \quad i = \overline{1,N};$$

$$Y_k(z) = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} W_i(z)\ , \quad k = \overline{1,P},$$

где b_{ji}, f_{il}, c_{ik} – коэффициенты передачи соответствующих дуг, т. е. числа (в частности, нуль, если дуга в графе отсутствует) или множители задержки z^{-1}. В матричной форме уравнения имеют вид

$$\vec{\mathbf{w}}(z) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}(z)\vec{\mathbf{w}}(z) + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{x}}(z);$$

$$\vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{w}}(z).$$

Матрицу $\mathbf{F}$ можно разложить в сумму $\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}_1 + z^{-1}\mathbf{F}_2$, где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ содержат только числа, так что

$$\vec{\mathbf{w}}(z) = \mathbf{F}_1^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{w}}(z) + z^{-1}\mathbf{F}_2^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{w}}(z) + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{x}}(z);$$

$$\vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{w}}(z).$$

Применяя обратное z-преобразование, получаем

$$\vec{\mathbf{w}}[n] = \mathbf{F}_1^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{w}}[n] + \mathbf{F}_2^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{w}}[n-1] + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{x}}[n];$$

$$\vec{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{w}}[n].$$

Для вычислимости всех компонент вектора $\vec{\mathbf{w}}$ необходимо, чтобы ненулевые элементы матрицы $\mathbf{F}_1^{\mathrm{T}}$ находились ниже главной диагонали. Если это условие не выполняется, следует изменить нумерацию внутренних вершин графа. Если никакой перенумерацией нельзя добиться выполнения указанного условия, цепь невычислима и, следовательно, нереализуема.

В окончательном виде матричные разностные уравнения

$$\vec{\mathbf{w}}[n] = \mathbf{A}\vec{\mathbf{w}}[n-1] + \mathbf{D}\vec{\mathbf{x}}[n];$$

$$\vec{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{w}}[n],$$

где $\mathbf{A} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{F}_1^{T}\right]^{-1} \mathbf{F}_2^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{F}_1^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ДЕЦИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Децимация, или прореживание последовательности $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, означает в простейшем случае периодическое отбрасывание части отсчётов и описывается выражением

$$y[m] = x[Dm], \ m = \overline{-\infty, \infty},$$

где D – коэффициент децимации (целое положительное число). Если сигнал $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, был получен путем дискретизации некоторого аналогового сигнала с шагом T_d, то последовательность $y[m]$, $m = \overline{-\infty, \infty}$, соответствует результату дискретизации того же сигнала с шагом DT_d. Поэтому децимация не приводит к потере информации (вследствие подмены частот) только при условии, что последовательность $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, была получена дискретизацией аналогового сигнала с частотой не менее чем $2DF_\text{в}$ ($F_\text{в}$ – верхняя частота в его спектре) или была перед децимацией подвергнута противоподменной фильтрации с помощью ФНЧ с частотой среза не более π / D. Спектральная плотность прореженной последовательности

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(W_D^k e^{j\omega/D}\right),$$

где $W_D \triangleq e^{-j2\pi/D}$.

Обратная операция называется интерполяцией и заключается в добавлении между каждыми двумя соседними отсчётами последовательности $x[n], n = \overline{-\infty, \infty}$, некоторого количества $(U-1)$ отсчётов, равных 0, с последующей фильтрацией нижних частот с частотой среза π / U. Этот ФНЧ называется интерполирующим. Коэффициенты децимации D и интерполяции U показывают соответственно уменьшение и увеличение скорости (частоты) следования отсчётов. Изменение спектральной плотности при интерполяции описывается выражением

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{jU\omega}), & |\omega| < \pi / U; \\ 0, & |\omega| \ge \pi / U. \end{cases}$$

Применяя последовательно интерполяцию и децимацию с коэффициентами U и D, можно изменять частоту в рациональное число раз U / D. Устройства, выполняющие децимацию (компрессор) и добавление нулевых отсчётов (экспандер), обозначаются на схемах символами $D\downarrow$ и $U\uparrow$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *z*-Преобразование и его свойства

Прямое z-преобразование последовательности $x[n]$ определяется выражением

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \ ;$$

область сходимости определяется неравенством $R_{x+} < |z| < R_{x-}$, где R_{x-}, R_{x+} – неотрицательные вещественные числа, включая 0 и $+\infty$. При этом R_{x-} представляет собой радиус границы ОС для антикаузальной части $x[n]u[-n]$ последовательности $x[n]$, а R_{x+} – для каузальной части $x[n]u[n]$. Обратное z-преобразование

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C X(z) z^{n-1} dz \ ,$$

где C – контур, принадлежащий области сходимости и охватывающий начало координат; направление обхода контура – против часовой стрелки.

Теорема о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z) dz = \sum_k res\big(f(z_k)\big),$$

где z_k – изолированные полюсы, находящиеся внутри контура интегрирования. Если z_k – полюс порядка m, то вычет

$$\mathrm{res}\big(f(z_k)\big) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z-z_k)^m f(z)\Big).$$

Свойства *z*-преобразования:

а) *линейность*

$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \Leftrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z);$$

$$\max(R_{x1+},\ R_{x2+}) < |z| < \min(R_{x1-},\ R_{x2-});$$

б) *сдвиг последовательности*

$$x[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} X(z); \quad R_{x+} < |z| < R_{x-};$$

в) *отражение последовательности*

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}); \quad 1/R_{x-} < |z| < 1/R_{x+};$$

г) *умножение на экспоненту*

$$a^n x[n] \Leftrightarrow X(a^{-1}z), \quad |a| R_{x+} < |z| < |a| R_{x-};$$

д) *умножение на линейную последовательность*

$$n x[n] \Leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{x+} < |z| < R_{x-};$$

е) *переход к комплексно-сопряженной последовательности*

$$x^*[n] \Leftrightarrow X^*(z^*), \quad R_{x+} < |z| < R_{x-};$$

ж) *свёртка последовательностей*

$$x[n] * y[n] \Leftrightarrow X(z)Y(z), \quad \max(R_{x+},\ R_{y+}) < |z| < \min(R_{x-},\ R_{y-});$$

з) *корреляция последовательностей*

$$x[n] \bigcirc y[n] \Leftrightarrow X(z)Y(z^{-1}), \quad \max(R_{x+},\ R_{y+}) < |z| < \min(R_{x-},\ R_{y-});$$

и) *произведение последовательностей*

$$x[n]\, y[n] \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(v) Y(z/v) v^{-1} dv, \quad R_{x+} R_{y+} < |z| < R_{x-} R_{y-}.$$

2. Дискретно-временное преобразование Фурье

Прямое ДВПФ определяется рядом

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} .$$

Для абсолютно суммируемой последовательности $x[n]$ ряд в правой части выражения сходится равномерно к непрерывной периодической функции аргумента ω.

Обратное ДВПФ определяется интегральным выражением

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega , \quad n = \overline{-\infty,\infty} .$$

3. Формулы Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi , \quad \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} , \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} .$$

4. Геометрическая прогрессия

Сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} r^j = a_0 \frac{1}{1-r} , \text{ при } |r| < 1 ,$$

где $a_j = a_0 r^j$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,$ a_0 – первый член, $r \neq 1$ – знаменатель прогрессии.

Частичная сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} .$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васюков В. Н.* Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры в системах подвижной радиосвязи / В. Н. Васюков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005. – 392 с.

2. *Васюков В. Н.* Общая теория связи / В. Н. Васюков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. – 580 с.

3. *Оппенгейм А. В.* Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер. – Москва : Техносфера, 2012. – 1048 с.

4. Основы цифровой обработки сигналов / А. И. Солонина и др. – БХВ, 2005.

5. *Даджион Д.* Цифровая обработка многомерных сигналов : пер. с англ. / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – Москва : Мир, 1988. – 488 с.

6. *Lathi B. P.* Essentials of Digital Signal Processing / B. P. Lathi, R. A. Green. – New York : Cambridge University Press, 2014. – 748 pp.

7. *Manolakis D.* Applied Digital Signal Processing. Theory and Practice / D. Manolakis, V. Ingle. – Cambridge University Press, 2011. – 991 p.

8. *Proakis J.G.* Digital Signal Processing / J.G. Proakis, D.K. Manolakis. – Pearson Education Limited, 2014. – 1019 p.

Васюков Василий Николаевич
Зима Дарья Николаевна
Мурасев Алексей Александрович

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 09.06.2021. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 50 экз.
Уч.-изд. л. 7,2. Печ. л. 7,75. Изд. № 260/20. Заказ № 616. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20