

ЧЕХОНАДСКИХ АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА  
АЛГОРИТМОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА**

**05.13.01** — системный анализ, управление и обработка информации  
(промышленность)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Новосибирск, 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный консультант – доктор технических наук, профессор  
Воевода Александр Александрович

Официальные оппоненты:

Калашников Сергей Николаевич,  
доктор технических наук, профессор; Сибирский  
государственный индустриальный университет, профессор  
кафедры информационных технологий в металлургии;

Смагин Валерий Иванович,  
доктор технических наук, профессор;  
Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, профессор кафедры прикладной математики;

Хлебников Михаил Владимирович,  
доктор физико-математических наук, доцент; Институт  
проблем управления РАН, заведующий лабораторией №7.

Ведущая организация – Институт автоматики и электрометрии СО РАН

Защита состоится 19 ноября 2013 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.05 при Новосибирском государственном техническом университете по адресу: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор тех. наук, профессор

Юркевич Валерий Дмитриевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена алгебраическому методу синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка для линейных систем. В ней разрабатываются различные алгебраические аспекты оптимизации расположения полюсов систем с регуляторами пониженного порядка, для которых не применимы ни хорошо развитая теория синтеза регуляторов полного порядка, ни многообразные приемы конструирования и настройки регуляторов малых порядков (в частности, ПИ и ПИД).

В теории линейных систем автоматического управления (САУ) значительный перечень трудных проблем<sup>1</sup> сочетается с неуклонно расширяющимся полем приложений. Поток научных и промышленных исследований в этой области поддерживается как новыми техническими запросами, так и прогрессом вычислительной техники и возможностей численного моделирования. В той или иной мере на его базе развивается исследование нелинейных, гибридных и импульсных систем, а также систем с распределенными параметрами.

В отличие от нелинейных систем, для линейных используются два языка описания: в пространстве состояний, когда переходные процессы моделируются системами дифференциальных уравнений, и в частотной области, или в операторной форме, где они после применения преобразования Лапласа принимают вид алгебраических уравнений над кольцом многочленов  $\mathbf{R}(s)$ . При этом из непосредственного рассмотрения исключаются прямые и практически значимые характеристики переходных процессов, будь то внутренние показатели системы  $x(t)$  или вектор выходных переменных  $y(t)$ . Но уравнения системы в изображениях принимают алгебраическую форму  $y(s) = W(s)u(s)$ , где  $u(s)$  – векторное изображение управляющего воздействия, а  $W(s) = N(s)/\chi(s)$  – матричная передаточная функция системы. Коэффициенты характеристического многочлена  $\chi(s)$  вещественны и зависят от параметров конструируемого регулятора; а его корни, или *полюса* системы  $z_1, \dots, z_n$  могут быть как действительными, так и комплексными.

Теоремы разложения позволяют указать по полюсам САУ принципиальные характеристики выхода  $y(t)$ . Отрицательные действительные части  $\operatorname{Re}(z_k)$  задают скорости затухания слагаемых решения, а их максимум – запас устойчивости системы; в свою очередь, мнимые части  $\operatorname{Im}(z_k)$  задают колебательные частоты слагаемых и создаваемые ими фронты. Свойство робастной апериодичности САУ, на

---

<sup>1</sup> См., напр., Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7-46; а также Blondel V., Sontag E., Vidyasagar M., Willems J. Open problems in mathematical systems and control theory / L.: Springer Verlag. – 1999. – 288 P.

практике означающее бесколебательное погашение возмущения<sup>i</sup>, требует доминирования устойчивого вещественного корня, и т.д.

На это опирается *модальный подход* к синтезу САУ: исходя из требований к замкнутой системе, задать структуру регулятора и подобрать такие параметры последнего, которые обеспечивали бы нужное расположение ее полюсов на комплексной плоскости. Этот подход был осуществлен уже в работах И.А. Вышнеградского (1877-78). В те же годы алгебраические аспекты подхода развивались в трудах Э. Рауса (1875) и А. Гурвица (1895); позже, обогатив его геометрическими и аналитическими инструментами, Н. Nyquist, А.В. Михайлов, Ю.И. Наймарк, В.В. Солодовников и др. решили важные технические задачи. Современное состояние алгебраических средств синтеза многоканальных систем отражают в своих трудах Ю.И. Параев, С.Т. Chen, D. Henrion, V. Blondel, А.Р. Гайдук, А.А. Воевода. Плодотворное сочетание алгебраических идей с геометрическими и оптимизационными, в частности, теория и приложения робастных систем связано с именами Я.З. Цыпкина, Б.Т. Поляка, А.А. Аграчева, W. M. Wonham'a, Р. Arkarian'a, В.И. Смагина, М.В. Хлебникова и др.

Модальные методы синтеза существенно зависят от того, ищется регулятор полного или пониженного порядка. Допуская управляющее устройство той же сложности, что и управляемый объект, можно при широких предположениях достигать любого наперед заданного расположения полюсов. Реализация этого в многоканальных САУ с регуляторами полного порядка хорошо изучена<sup>ii</sup>. Вместе с тем, инженерное дело отдает устойчивое предпочтение регуляторам пониженного порядка, что объясняется их достаточной эффективностью, конструктивной простотой, устойчивостью к шумам и помехам<sup>iii</sup>. Высокая прикладная ценность такого управления проявляется в большом количестве исследований и публикаций.

Число свободных параметров регулятора пониженного порядка и характер их вхождения в коэффициенты характеристического многочлена не позволяют обеспечить произвольно заданное расположение корней. Поэтому приходится искать такие значения параметров, при которых корни попадают в область устойчивости, иногда с дополнительными требованиями запаса (или степени) устойчивости, ограниченной колебательности и т.д. Обычно желаемая область расположения полюсов фиксирована, и задача синтеза решается как нахождение в пространстве свободных параметров регулятора такой зоны, для которой полюса системы располагаются именно в указанных границах.

---

<sup>i</sup> Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика.— 1990.— № 9.— С. 45-54.

<sup>ii</sup> Chen C.T. Linear system theory and design.— NY: Holt, Rinehart and Winstone.— 1984.— 682 P.

<sup>iii</sup> Åström K.J., Hägglund T. PID-controllers: Theory, design and tuning // Research Triangle Park.— N.C: Instrument Society of America.— 1995.— 343 P.

Множество подходов и приемов в этой области труднообозримо, некоторые из них упомянуты в 1-й главе. Большинство задач ставится в той или иной конкретной ситуации и решается с учетом этой конкретики. Обобщения удаются нечасто и все еще оставляют нерешенными многие принципиальные проблемы.

В диссертации предложен новый подход и разработано математическое обеспечение алгебраического метода синтеза систем АУ с регуляторами пониженного порядка, привлекающего арсенал классической алгебры, теории графов, методов оптимизации. Желаемое расположение полюсов достигается с помощью минимизация числовой оценки, что сопряжено с рядом трудных оптимизационных проблем: невыпуклостью, многоэкстремальностью, недифференцируемостью (часто с неограниченным субдифференциалом), овражным рельефом целевой функции.

Прояснение и преодоление этих трудностей алгебраическими средствами составляет основное содержание диссертационной работы. Развитые в ней приемы могут применяться при определении оптимальных параметров регулятора любого пониженного порядка, в том числе и в двухтемповых системах, которые можно рассматривать как модальный аналог метода разделения движений, разработанного в Новосибирске под руководством А.С. Вострикова. Исключительная актуальность систем с ПИД-регуляторами побудила использовать их наряду с более сложными примерами, на которых демонстрируется реализация общих свойств и конструкций, полученных в диссертации.

**Цель и задачи диссертации.** Целью диссертации является разработка различных алгебраических аспектов синтеза систем АУ с регуляторами пониженного порядка. Подход к синтезу основывается на оптимизации расположения полюсов с помощью минимизации выбранной целевой функции. Важнейшей составляющей работы оказывается нахождение в пространстве параметров критических многообразий, соответствующих субоптимальным и оптимальным расположениям полюсов. Осуществление этого поиска в конечном виде с помощью алгебраических средств позволяет не только обойти типичные трудности численной оптимизации, но и сократить до минимума привлечение пошаговых и итерационных процедур. Достижение этой цели требует решения ряда задач.

Во-первых, это изучение способов построения числовых оценок расположения полюсов САУ, т.е. таких целевых функций, уменьшение которых означало бы «улучшение» расположения корневого набора и практически значимых параметров системы, и выбор в качестве основного средства *R-градуировки* (глава 2). Во-вторых, описание конфигураций корней многочленов степени  $n$  с действительными коэффициентами, точнее, представление всевозможных расположений корней (как комплексных, так и действительных) действительными координатами с помощью *корневого симплекса* и *симплектических графов* (глава 3).

В-третьих, изучение минимизации R-градуировки методом конечного градиента на примере двойного математического маятника с ПИД-регулятором, а также связей критических многообразий градуировки с симплектическими и графовыми конструкциями (глава 4).

В-четвертых, градиентная оптимимизация параметров автоматического регулятора возбуждения синхронного генератора, представленного линеаризованной моделью в относительных единицах, с П, ПД и ПДД<sub>2</sub> законами управления (глава 4).

В пятых, создание комплекса алгебраических приемов, позволяющих находить оптимальные и субоптимальные расположения полюсов и продемонстрировать их при стабилизации тройного математического и двойного перевернутого маятников регуляторами пониженного порядка – задач, представляющих самостоятельный интерес в связи с приложениями этих моделей в технике (глава 5).

Наконец, полное решение проблемы синтеза регулятора многоканальной многоблочной системы, представленной обобщенным Диофантовым уравнением, и выделения в общем решении подмножества грубых решений в виде достаточных и необходимых и условий грубости (глава 6).

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования является модальный синтез САУ, точнее, параметрический синтез регуляторов пониженного порядка. Предмет исследования – разностороннее математическое обеспечение оптимизационного подхода к синтезу управления пониженного порядка; в том числе геометрическое представление расположений корней многочленов с вещественными коэффициентами, разработка соответствующих им теоретико-графовых конструкций и их применение в оптимизационном процессе.

**Методы исследования.** В работе использованы как традиционно математические средства классической алгебры и математического анализа, так и численное моделирование конкретных САУ. Теоретические утверждения имеют форму теорем или предложений и доказываются дедуктивным методом. Корневые симплексы описываются с помощью теории графов, которая, в свою очередь, требует применения теории чисел и матричных кодов. Ряд свойств и особенностей устанавливается при изучении примеров с помощью Matlab и Maple. В качестве основного средства численной минимизации целевых функций использован метод конечного градиента, а затем – графовые и полиномиальные приемы.

**Научная новизна.** В диссертации разработаны различные алгебраические аспекты синтеза САУ с регуляторами пониженного порядка, в качестве частных случаев включающие синтез ПИД и ПДД<sub>2</sub>-управления, но не ограниченные каким-либо числом свободных параметров регулятора.

Введена концепция R-градуировки, обобщающая ряд общепринятых видов

целевого расположения полюсов САУ. Построена новая конструкция корневого симплекса, которая представляет взаимное расположение и вещественную координатизацию корней многочленов с переменными вещественными коэффициентами, что с точностью до многолистности позволяет преодолеть их неупорядоченность. Для описания корневого симплекса введены два новых класса графов: неориентированные и ориентированные симплектические графы.

Изучены важнейшие свойства R-градуировок, корневых симплексов и симплектических графов, доказан ряд относящихся к ним теорем, в том числе о скорости роста их мощности. Орграфы описаны с помощью матричных кодов.

На основе анализа численных экспериментов с конкретными моделями САУ установлен ряд характерных свойств и проблем процесса минимизации R-градуировок. Введено понятие корневых зон в пространстве параметров, обобщающее диаграмму Вышнеградского. Предложен графовый принцип распознавания минимумов среди «ложных экстремумов» градиентной минимизации.

Найдены оптимальные параметры П, ПД и ПДД<sub>2</sub>-регуляторов возбуждения синхронного генератора, представленного линеаризованной моделью в относительных единицах; установлена субоптимальность П-управления в классе ПД-регулируемых систем возбуждения.

Указана рекуррентная процедура перечисления корневых диаграмм (корневых портретов), характеризующих критические расположения полюсов САУ и их точное число в зависимости от числа свободных параметров регулятора.

На различных примерах продемонстрирован алгебраический способ нахождения многообразий в пространстве параметров, соответствующих критическим расположениям полюсов (или установления их нереализуемости), а также использование корневых координат для выяснения экстремальности этих расположений. Примеры включали объекты 6-го порядка; степень характеристического многочлена доходила до 9-11.

Указан алгоритм нахождения общего решения Диофантова уравнения, а также достаточные и необходимые условия грубости его решений.

Теоретические аспекты имеют форму новых понятий и теорем.

**Практическая значимость.** Диссертационное исследование ориентировано на практическое использование в синтезе САУ с регулятором пониженного порядка при наличии адекватного описания объекта (в частности, в гл. 4 рассмотрен синтез оптимальных регуляторов возбуждения синхронного генератора).

Предложенный метод принят к использованию в конструкторской деятельности новосибирских предприятий, в том числе для настройки испытательного стенда прочностной выносливости авиационных конструкций, о чем получены соответствующие акты. Его предполагается использовать для оптимизации технологических процессов в сталеплавильных печах, а также для стабилизации ша-

гающего робота, разработанного индийскими инженерами В.К. Гупта и К.П. Падхи. Представленные в диссертации понятия и приемы использованы в кандидатских диссертациях Е.В. Шобы и В.В. Вороного, а также в дипломных и выпускных работах студентов НГТУ, что подтверждается приложенными справками.

**Апробация результатов.** Диссертационные исследования представлялись и докладывались на международных и региональных конференциях, среди которых 2-я Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» АПЭП-94 (Новосибирск, 1994); XII International Conference on Systems Science (Wrocław, Poland, 1995); III Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике ИНПРИМ-98 (Новосибирск, 1998); IV, V, VI, VII, VIII, IX Международные конференции «Пограничные вопросы алгебры и теории моделей» (Эрлагол, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011 гг.); 8-я Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2009); 12-я и 13-я Международные научные конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2010); Third IASTED International Multi-Conference on Automation, Control, and Information Technology ACIT 2010 (Новосибирск, 2010); Indo-Russian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics, 20-22 September 2010, Surat, India; The Second Indo-Russian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics, September 10-13, 2011, Novosibirsk, Russia.

Метод в целом излагался автором на семинарах «Теория автоматического управления» им. Я.З. Цыпкина ИПУ РАН (Москва, 2011, 2012), «Информационные технологии и системы» Института автоматики и электрометрии СО РАН (Новосибирск, 2013), семинаре Центра энергоэффективных технологий при НИЧ НГУ (Новосибирск, 2013) и семинаре кафедры автоматики НГТУ (Новосибирск, 2010-13); математические аспекты излагались на семинарах лаборатории теории графов ИМ СО РАН (Новосибирск, 2008); «Избранные вопросы математического анализа» ИМ СО РАН (Новосибирск, 2010); научно-исследовательском семинаре МГУ по алгебре и семинаре «Кольца и модули» кафедры высшей алгебры МГУ (Москва, 2010).

Исследования поддерживались финансированием по АВЦП (темплану) «Развитие научного потенциала высшей школы» 2008-09 г. и грантом по темплану, заявка № 7.559.2011. Участие в Международных летних школах «Пограничные вопросы алгебры и теории моделей» (Эрлагол, 2005-11 гг.) частично поддерживались РФФИ (гранты № 09-01-06069, № 07-01-06046 № 05-01-10028).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 43 научных работах, среди которых 17 вышли в изданиях, входящих в перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основ-



ные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук; 3 работы вышли в рецензируемых журналах, не входивших на момент публикации в перечень изданий, рекомендованных ВАК, 5 – в изданиях, реферируемых в «Mathematical Reviews».

**Личный вклад автора в совместных исследованиях и печатных работах.** В работах, написанных соискателем в соавторстве, лично ему принадлежат составляющие названного метода. За исключением единичных оговоренных случаев, им введены новые понятия, сформулированы и доказаны включенные в диссертацию теоремы и предложения, а также поставлены задачи и интерпретированы результаты численных экспериментов с различными моделями.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- понятия R-градуировки, координатизации и корневого симплекса; исследование свойств корневого симплекса: связь с сильной и слабой несепарабельностью, многолистность и др.;
- строение симплектических неорграфов, их рекуррентная взаимосвязь и зависимость мощности от степени многочлена; матричная кодировка симплектических орграфов и зависимость их мощности от степени;
- реализация симплектических конструкций в численном исследовании САУ с двухмассовым объектом и ПИД-регулятором; исследование линеаризованной модели автоматического регулирования возбуждения синхронного генератора с П, ПД и ПДД<sub>2</sub> законами управления;
- рекуррентный способ нахождения критических расположений полюсов САУ с регулятором пониженного порядка и зависимость их количества от числа свободных параметров;
- алгебраический метод нахождения критических расположений полюсов в системах АУ, включающих в качестве объектов тройной математический маятник и двойной перевернутый маятник на подвижной базе;
- решение обобщенного Диофантова уравнения; достаточные, а также необходимые условия грубости его частных решений;
- сопутствующие результаты: теорема 1 о дифференциальном ранге отображения *корни* ↔ *коэффициенты*, достаточные условия выпуклости диффеоморфизма (теорема 2), дифференцируемость целевой функции на многообразиях кратных корней (следствие теоремы 9).

**Структура работы.** Диссертация состоит из шести глав, заключения и пяти приложений. Текст насчитывает 341 страницу, 46 рисунков и 4 таблицы (объем основной части 316 страниц, в том числе 42 рисунка). Библиографический список насчитывает 171 наименование.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**1-я глава** посвящена краткому обзору тех направлений ТАУ, в которых используются принципы синтеза, схожие с используемыми в данной работе; указываются их возможности и ограничения, а также очерчиваются развитые в диссертации новые подходы.

Прежде всего, это направления, где используются методы оптимизации и такие конструкции, как функционалы качества, целевые области и целевые функции. Например, распространенным методом поиска оптимальных параметров, входящих в систему уравнений  $\dot{x} = f(x, u, t)$  относительно вектора состояний  $x(t)$  с вектором управляющих воздействий  $u(t)$  и вектором контролируемых переменных  $y = Cx(t)$  является минимизация квадратичного функционала типа интеграла энергии

$$J(x(t)) = \int_0^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) dt.$$
 Если несобственный интеграл по

тем или иным причинам неприемлем (скажем, если априорная устойчивость решения не гарантирована), можно использовать функционал того же типа для конечного промежутка  $t_0 \leq t < t_k$ . Поскольку минимизация функционалов такого типа иногда выводит на границу устойчивости, в диссертации принимается существенно иная концепция оптимальности, исключающая такую возможность.

То же относится и к теоретико-графовым методам, используемым в синтезе некоторых типов САУ, в том числе мультиагентных и структурированных, и содержательно никак не соотносимым с графовыми конструкциями этой работы.

Ближе к настоящей работе направления параметрического синтеза, связанные с нахождением областей устойчивости в пространствах тех или иных параметров: изучение робастной устойчивости и интервальных систем, а также метод  $D$ -разбиения, который оказывается весьма эффективным инструментом синтеза систем с одним-двумя свободными параметрами.

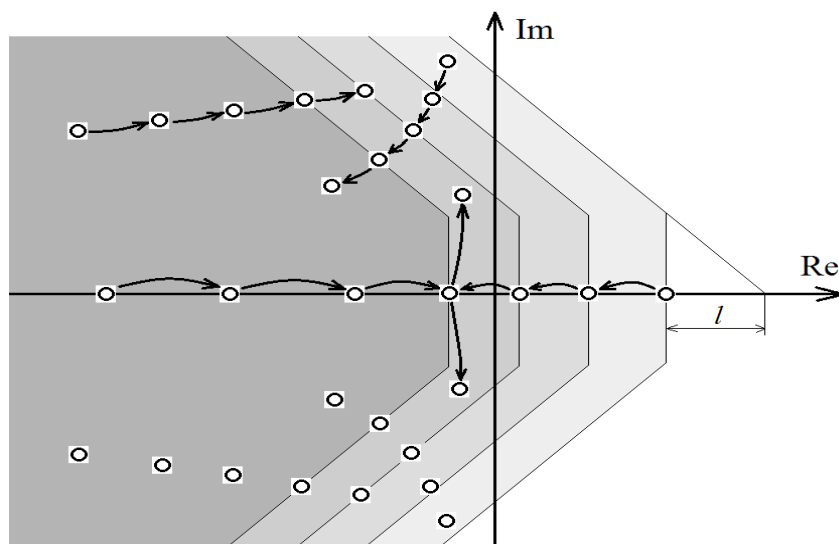
Метод  $D$ -разбиения, предложенный Ю. И. Неймарком в 1949 г., в последние годы позволил получить ряд важных результатов, среди которых теорема Е.Н. Грязиной (2004 г.): пусть  $a(s)$  и  $b(s)$  – заданные полиномы с вещественными коэффициентами степеней  $m \leq n$ ; тогда семейство  $P(s, \lambda) = \{a(s) + \lambda b(s), \lambda \in \mathbf{R}\}$  имеет не более  $n$  отрезков  $D$ -разбиения и не более  $[(n + 1)/2]$  интервалов устойчивости по параметру  $\lambda$ .

Концепции сверхустойчивости и сверхстабилизации позволяют «выкроить» выпуклую подобласть в невыпуклой области устойчивости и обеспечить монотонное гашение возмущений. Однако задачи, допускающие устойчивое решение, нередко не имеют сверхустойчивого решения.

Обзорную часть завершает краткое перечисление исследований расположений полюсов САУ, обеспечивающих максимальную степень (запас) гурвицевой устойчивости систем специального вида, проводившихся с конца 80-х годов

А. М. Шубладзе и его соавторами. Полученные с существенными ограничениями общности, эти экстремальные расположения возникают в 4-й и 5-й главах диссертации как частные случаи.

В заключение главы 1 излагается основная концепция диссертационной работы. На комплексной плоскости вводится семейство линейно упорядоченных по включению областей: таких, чтобы «лучшие» корневые наборы входили в более узкую область, чем «худшие» (рис. 1), а все семейство можно было индексировать действительной переменной: абсциссой крайней правой точки  $\alpha = \sup_{s \in B} \operatorname{Re} s$  каждой области  $B$  семейства. Величина  $\alpha$  называется *R-градуировкой*. При любых параметрах регулятора полюса системы накрываются некоторыми областями семейства, а минимальная из таких областей задает значение R-градуировки этого набора полюсов и может использоваться в качестве целевой функции вектора параметров. При этом R-градуировка зависит только от «самых правых», наименее устойчивых корней – тех, которые оказываются на границе области семейства, накрывающей все корни. А минимизация R-градуировки осуществляется в пространстве параметров, т.е. в естественной для задачи синтеза форме.



**Рис.1.** Градуировочное семейство усеченных конусов  $Tr_\alpha$ . Граница области, накрывающей все полюса, задается наименее устойчивыми полюсами, смещающимися по комплексной плоскости в соответствии с изменением некоторого параметра.

В конце главы приводится важный пример R-градуировки<sup>i</sup>, отрицательные значения которой гарантируют стабилизацию системы, определенную как устойчи-

<sup>i</sup> Самый простой вид градуировочного семейства – левые полуплоскости  $P_\alpha = \{s \mid \operatorname{Re} s \leq \alpha\}$ . Соответствующая им R-градуировка корней  $z_k$  многочлена, зависящего от вектора параметров  $p$  – это гурвицева «функция устойчивости» (степень или запас устойчивости): максимум действительных частей корней:  $F(p) = \max\{\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n\}$ .

вость с ограничением колебательности. Она связана с семейством усеченных конусов  $Tr_\alpha = \{z \mid \operatorname{Re} z + |\operatorname{Im} z| \leq \alpha; \operatorname{Re} z \leq \alpha - l\}$  (трапециевидных областей неограниченно уходящих влево) на комплексной плоскости; вершина конуса отсекается на расстоянии  $l$  (рис. 1). Значение градуировки выражается через полюса  $z_k$  как  $H_l(p) = \max_{k=1, \dots, n} \{\operatorname{Re} z_k, \operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k| - l\}$ .

Минимизация функции  $H_l(p)$  позволяет выяснить, насколько далеко влево можно сдвинуть полюса системы; это либо приводит к наилучшим значениям вектора параметров  $p$ , гарантирующим устойчивость системы с ограничением колебательности, либо (если отрицательный минимум недостижим) означает невозможность стабилизации системы регулятором такой структуры.

Во **2-й главе** рассматриваются различные возможности оптимизационной постановки задачи модального синтеза САУ, рассматриваются различные пути построения оптимизационных процедур и изучаются их свойства и возможности.

Все они опираются на свойства зависимости корней и коэффициентов. Поэтому неупорядоченность корней, изломы их годографов при переходах действительных пар в комплексные, нарушения дифференцируемости при возникновении кратных корней создают многообразные трудности.

В пошаговых алгоритмах важнейшее значение имеет первый дифференциал. Поэтому в первую очередь требуется изучение дифференциальных свойств отображения *коэффициенты*  $\leftrightarrow$  *корни*. Его якобиан представляет собой кососимметрическую функцию корней (**предложение 1**):

$$\left| \frac{\partial(a_0; \dots; a_{n-1})}{\partial(z_n; \dots; z_1)} \right| = (-1)^{[(n+1)/2]} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j).$$

Следующее утверждение позволяет установить размерности критических многообразий.

**Теорема 1.** Ранг первого дифференциала коэффициентов многочлена  $f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$  как вектор-функции его корней  $z_1, \dots, z_n$  равен числу различных корней многочлена:  $\operatorname{rang} da(z_n, \dots, z_1) = \operatorname{rang}(\partial a_k / \partial z_l) = \operatorname{card}\{z_1; \dots; z_n\}$ .

Кратность корней приводит к разрыву II-го рода производного отображения (**предложение 2**).

Далее устанавливаются условия сохранения выпуклости под действием диффеоморфизма пространства  $\mathbf{R}^n$ .

**Определение 1.** Назовем *поток* диффеоморфизма  $\varphi$  в точке  $X$  гладкой поверхности  $\Gamma$  величину нормальной составляющей вектора  $\Phi_X(n)$  по отношению к поверхности  $\Gamma^* = \varphi(\Gamma)$  в пространстве образов:  $\Pi_\varphi(X) = |\Phi_X(n)_\perp|$ .

Дополняя некоторый базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  касательного многообразия к поверхности  $\Gamma$  вектором нормали  $\mathbf{n}$  до базиса всего пространства, можно получить значение потока в терминах внешних произведений:

$$\text{Предложение 3. } \Pi_\varphi(X) = \frac{|\mathbf{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{f}_{n-1} \wedge \mathbf{f}_n|}{|\mathbf{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{f}_{n-1}|}, \text{ где } \mathbf{f}_n = \Phi_X(\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{f}_1 = \Phi_X(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{f}_{n-1} = \Phi_X(\mathbf{e}_{n-1}).$$

Изучение линейной кривизны нормальных сечений поверхности  $\Gamma$  приводит к следующей связи потока и собственных чисел вторых дифференциалов.

**Теорема 2.** Пусть  $D(\Gamma)$  – выпуклая область, ограниченная поверхностью  $\Gamma$  второго порядка гладкости с линейной кривизной нормальных сечений не менее  $\kappa$ ,  $\varphi$  – диффеоморфизм, определенный в некоторой окрестности  $OD(\Gamma)$  и имеющий непрерывные частные производные второго порядка. Тогда образ  $\varphi(D(\Gamma))$  является выпуклым множеством, если на поверхности  $\Gamma$  справедливо неравенство  $\kappa \Pi_\varphi \geq 2\Lambda$ , где  $\Pi_\varphi$  – минимальный поток диффеоморфизма  $\varphi$  на поверхности  $\Gamma$ , а  $\Lambda$  – величина столбца наибольших собственных чисел  $\lambda_k$  матриц  $D_k^2$  вторых дифференциалов компонент отображения  $\varphi$ .

Требование сепарабельности многочлена и, тем самым, дифференцируемости отображения *коэффициенты  $\leftrightarrow$  корни*, оказывается неестественным для построения целевых областей и функций, поскольку минимизация целевых функций, как правило, приводит к кратным корням. Поэтому *невыпуклость задач корневой оптимизации приходится признать их принципиальным свойством*. Создаваемые ею трудности демонстрирует попытка применения метода Ньютона.

**Предложение 4.** Направление шага метода Ньютона задается как  $\mathbf{e}_{\text{кас}} = A\mathbf{X}$ , где  $A = J^{-1}P_{n \times m} = \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial(z_n; \dots; z_1)}{\partial(a_0; \dots; a_{n-1})} \cdot \frac{\partial(a_0, \dots, a_{n-1})}{\partial(p_1, \dots, p_m)}$  – произведение двух мат-

риц Якоби, а вектор  $\mathbf{X}$  находится из неоднородной системы  $A^T A \mathbf{X} = A^T \mathbf{e}$ .

Однако в примере упругого двухмассового объекта с ПИД-регулятором (рис. 4 ниже) численный расчет с некоторого момента ведет к росту расстояния между корневым вектором  $\mathbf{z}$  и целевой точкой  $(x_0, \dots, x_0)$  в пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

Следующая возможность связана с метризацией множества неупорядоченных корней. Величина корневого расстояния между многочленами с корневыми наборами  $\{z_1, \dots, z_n\}$  и  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$  строится с учетом всех корней – как «левых», так

$$\text{и «правых»: } \rho(\{z_1; \dots; z_n\}, \{\zeta_1; \dots; \zeta_n\}) = \min_{\sigma \in S_n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i - \zeta_{\sigma(i)}|^2}.$$

В качестве целевой функции метрика сравнительно удобна для численных

процедур, поскольку почти не имеет разрывов 2-го рода у производного отображения; но она не выпукла, а минимальное целевое значение может достигаться на множестве, включающем как устойчивые, так и неустойчивые корни.

В главе рассмотрена модификация расстояния между многочленами  $f(s) = c_0(1 - c_1s) \dots (1 - c_ns)$  и  $g(s) = b_0(1 - b_1s) \dots (1 - b_ms)$  в виде обращенной корневой метрики:  $\rho(f, g) = \sqrt{\sum_{k=1}^M |c_k - b_k|^2}$ , где  $M = \max(m, n)$ . Это расстояние может применяться внутри области устойчивости для приближения к «целевому» устойчивому многочлену.

Наконец, здесь рассматривается процедура стягивания характеристических корней в круг минимального радиуса с центром в заданной точке. Корни данного многочлена  $f_n(s)$  лежат внутри круга  $K(x_0, R)$  радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда в левой полуплоскости находятся корни тестового многочлена  $g_n(\zeta) = f_n\left[\frac{(x_0 - R)\zeta - x_0 - R}{\zeta - 1}\right](\zeta - 1)^n$ . А гурвицевость многочлена  $g_n(\zeta)$  можно установить или опровергнуть по любому критерию устойчивости.

В диссертации получены явные формулы пересчета коэффициентов многочлена  $f_n(s)$  в коэффициенты  $g_n(\zeta)$ , опирающиеся на связь производных:

**Лемма 1.** Справедливо следующее выражение для производных:

$$(g_n(\zeta))^{[k]} = \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{(n-k+l)!}{(n-k)!} (2R)^{k-l} f^{[k-l]}(s)(\zeta - 1)^{n-2k+l}.$$

Поскольку все требующиеся действия чисто алгебраические (включая исследование устойчивости многочлена  $g_n(\zeta)$  с помощью критерия Гурвица), итерации нахождения круга минимального радиуса выполняются достаточно быстро.

Этот метод также не всегда показателен: минимальный круг, не попадая в левую полуплоскость, может включать и устойчивые, и неустойчивые корни.

Этот недостаток преодолевает функция типа R-градуировки, обеспечивающая как широкие возможности для вида целевых областей, включая основные типы, принятые в модальном синтезе, так и четкое распознавание устойчивых и неустойчивых корневых наборов.

**Определение 2.** Назовем комплексную плоскость R-градуированной, если на ней задано семейство замкнутых областей  $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  такое, что

- (1)  $B_\alpha \subset B_\beta$  при  $\alpha < \beta$ ; (2)  $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} B_\alpha = \mathbb{C}$ ; (3)  $\operatorname{Re} s \leq \alpha$  для всякого  $s \in B_\alpha$ .

Корректность понятия R-градуировки обеспечивает

**Предложение 5.** Каждому ограниченному множеству  $M \subset \mathbb{C}$  соответствует единственное значение  $\alpha_M$  такое, что  $M \subset B_{\alpha_M}$  и  $M \not\subset B_\beta$  при  $\beta < \alpha_M$ .

Это позволяет задать саму R-градуировку, поскольку на ограниченных и, в частности, конечных подмножествах комплексной плоскости определена величина  $A: \{M \mid M \subset \mathbf{C}\} \rightarrow \mathbf{R}$ , такая, что  $A(M) = \alpha_M$ .

Понятие уточняется за счет добавления к определению 2 еще нескольких требований, соответствующих специфике прикладных задач:

- (4) инвариантность относительно комплексного сопряжения:  $B_\alpha = \overline{B_\alpha}$ ;
- (5) согласование с действительной осью:  $\alpha \in B_\alpha$ ;
- (6) непрерывность: для всякого ограниченного множества  $M$  и всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon)$  такое, что  $\alpha_N < \alpha_M + \varepsilon$  для всех  $N \subseteq O_\delta(M)$ ;
- (7) возможность кусочно-гладкой параметризации  $x_\alpha(t) + iy_\alpha(t)$  границы каждой области  $B_{\alpha_0}$  градуировочного семейства с помощью параметра  $t$ :  $\{s \mid \alpha_s = \alpha_0\} = \{x_{\alpha_0}(t) + iy_{\alpha_0}(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ .

Очевидно, R-градуировка многочлена совпадает с градуировкой одного из его корней как одноэлементного множества (в диссертации такие корни именуется  $\alpha$ -старшими или  $\alpha$ -правыми). Естественнo требовать от градуировки кусочно-гладкой зависимости от координат такого корня.

Задача поиска оптимального расположения полюсов системы сводится к минимизации R-градуировки, причем конструкция R-градуировки несет в себе трудности, включая упомянутые выше:

- (a) ее линии уровня в пространстве параметров невыпуклы;
- (b) дифференцируемость градуировки нарушается, когда на границе области  $B$  оказываются два и более несопряженных корня;
- (c) если  $\alpha$ -правыми оказываются кратные корни, то производные R-градуировки терпят разрыв 2-го рода с неограниченным субдифференциалом;
- (d) в общем случае R-градуировка многоэкстремальна, причем несколько ее минимумов может находиться в зоне устойчивости.

Свойства (b, c) характеризуют критические (возможно, экстремальные) многообразия в пространстве параметров, что ведет к следующим определениям:

**Определение 3.** Многочлен  $f(s)$  называется *сильно несепарабельным*, если совпадают корни или пары корней с наибольшими градуировочными значениями:  $x_{n-1} = x_n$  или  $x_{n-3} + iy_{n-2} = x_{n-1} + iy_n$ . Многочлен  $f(s)$  называется *слабо несепарабельным*, если наибольшие градуировочные значения оказываются у неравных и несопряженных корней и пар: например,  $\alpha_{z_{n-1}} = \alpha_{z_n}$  при  $z_{n-1} \neq z_n$  и  $z_{n-1} \neq \bar{z}_n$ . Такие корни называются  $\alpha$ -кратными.

Свойства (a-d) значительно усложняют поиск глобального минимума при увеличении числа параметров. Последнее заставляет обратиться к изучению рас-

положений корней многочленов с действительными коэффициентами в  $n$ -мерном комплексном пространстве, особо выделяя множества кратных корней и множества «градуировочно равных», в частности,  $\alpha$ -кратных.

**Глава 3** посвящена задачам геометрического представления корневых множеств со всевозможными взаимными расположениями корней. Для многочленов с вещественными коэффициентами строится разбиение неупорядоченного множества корней, как действительных, так и комплексно сопряженных, на подмножества – *сегменты*, в каждом из них используются действительные координаты, согласованные на пересечениях – их общих границах. Ключевую роль играют следующие понятия.

**Определение 4.** Координатизацией множества корней будем называть представление этого множества в виде конечного набора множеств  $K_i^{[l]}j$ , замкнутого относительно пересечений и снабженного семейством координатных функций  $\kappa_{ij}^{[l]} : K_i^{[l]}j \rightarrow \mathbf{R}^l$ . При этом на пересечении  $K_{i_1}^{[l_1]}j_1 \cap K_{i_2}^{[l_2]}j_2 = K_{i_3}^{[l_3]}j_3$  имеется согласование координат  $\kappa_{i_1j_1}^{[l_1]}$  и  $\kappa_{i_2j_2}^{[l_2]}$  между собой и с функцией  $\kappa_{i_3j_3}^{[l_3]}$ .

Области значений координатизационных функций  $\kappa_{ij}^{[l]}(K_i^{[l]}j)$  в совокупности образуют *корневой симплекс*<sup>i</sup>.

Это понятие близко к симплицальному или геометрическому комплексу, классическому понятию комбинаторной топологии. Существенных отличий два: неограниченность координатных сегментов и многолистность<sup>ii</sup> тех из них, в которых располагаются две и более комплексных пар.

**Теорема 3.** Если корневые наборы включают  $k$  комплексных пар, то соответствующий им сегмент  $A_k$  представляет собой  $k!$ -листную область.

В частности, симплекс многочлена степени  $n$  достигает  $[n/2]!$ -листности в слое, представляющем наибольшее число комплексных пар  $[n/2]$ .

Отношение *сегмент*  $\leftrightarrow$  *граница* среди корневых сегментов различных размерностей может описываться двумя видами графов.

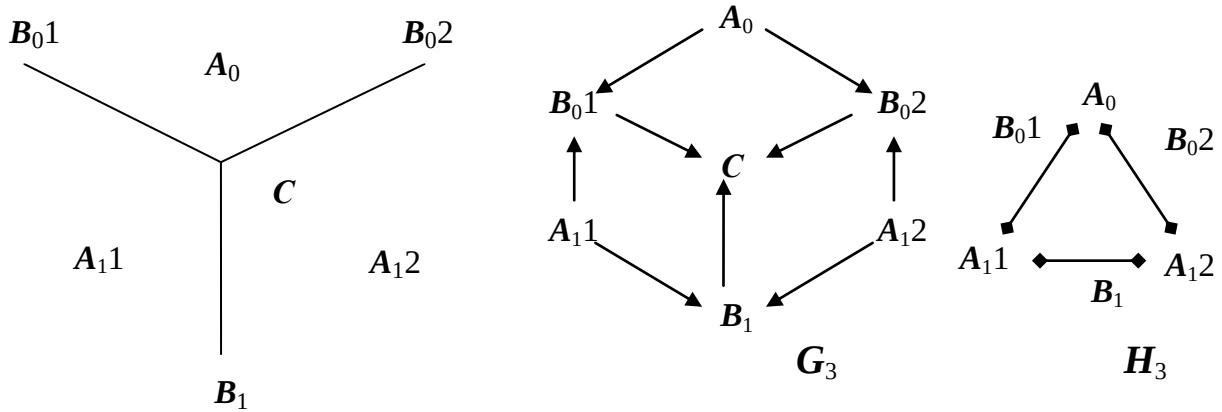
Вершинами неориентированного графа  $H_n$  являются сегменты размерности  $n$ , а ребрами –  $(n - 1)$ -мерные границы между ними. Вершинами ориентированного графа  $G_n$  оказываются сегменты всех размерностей от 1 до  $n$ , а дуги проходят от  $k$ -мерных сегментов к их  $(k - 1)$ -мерным границам. При  $n = 3$  эти понятия представлены на рис. 2. Сегмент  $A_0$  трехмерного пространства  $\mathbf{R}^3$  пред-

<sup>i</sup> Надо подчеркнуть, что речь идет о совокупности, а не объединении этих образов, каждый из которых находится в своей копии пространства  $\mathbf{R}^l$ .

<sup>ii</sup> В смысле, аналогичном многолистности римановых поверхностей.



ставляет тройки действительных корней  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ , область  $A_1$  – «правое» полупространство  $OX_1YX_3$  комплексной пары вместе с действительным корнем:  $z_{1,2} = x_1 \pm iy_2$ ,  $z_3 = x_3$ . При  $y_2 = 0$  комплексная пара переходит в кратную действительную пару  $z_{1,2} = x_{1,2}$  и оказывается на границе сегмента  $A_0$ . Случай  $z_{1,2} \leq z_3$  соответствует полуплоскости  $B_01$ , задаваемой неравенством  $x_1 = x_2 \leq x_3$ ; а случай  $z_{1,2} \geq z_3$  – полуплоскости  $B_02$ :  $x_1 \leq x_2 = x_3$ .



**Рис. 2. Корневой симплекс и симплектические графы.** Слева схема корневого симплекса многочлена 3-й степени  $f_3(s)$ . В центре симплектический орграф  $G_3$ ; справа неорграф  $H_3$ .

Поэтому область  $A_1$  является объединением двух сегментов:  $A_{11}$  и  $A_{12}$ , где выполняются неравенства  $\operatorname{Re} z_{1,2} \leq z_3$  и  $\operatorname{Re} z_{1,2} \geq z_3$  соответственно. Между собой они разграничены полуплоскостью  $B_1$ :  $\operatorname{Re} z_{1,2} = z_3$  &  $\operatorname{Im} z_{1,2} = y_2 \geq 0$ . Полуплоскости  $B_01$  и  $B_02$  граничат по одномерной прямой трехкратных корней  $C$ :  $x_1 = z_3$  &  $y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$ , служащей общим пересечением с  $B_1$ . Совокупность сегментов образует корневой симплекс многочлена  $f_3(s)$ , отношения областей и границ в котором выражаются орграфом  $G_3$ . Оставляя только трехмерные сегменты и их границы в качестве вершины и ребер, получим неорграф  $H_3$ .

Для многочленов размерности не выше 5 оба типа графов можно представить рисунком. Но для использования симплектических графов многочленов больших степеней важно установить, во-первых, мощность структуры корневого симплекса, во-вторых, способ его абстрактного представления.

В неорграфах выделяются *младшие* и *старшие предграфы*, с точностью до петель изоморфные неорграфам меньших степеней:  $H_{n-2} \cong H_n''$ ,  $H_{n-1} \cong H_n'$ . Между ними возникает связь  $(H_n')' \cong H_n''$  и рекуррентное соотношение:

**Теорема 4.** Пусть  $H_k$  – неорграф корневого симплекса многочлена степени  $k$ . Тогда  $H_{n-1} \tilde{+} H_{n-2} \cong H_n$ , где знак  $\tilde{+}$  означает добавление нужных петель к вершинам младшего предграфа  $H_{n-2}''$  и неполное соединение неорграфов, при котором разрез между частями  $H_{n-1}$  и  $H_{n-2}$  состоит из ребер, инцидентных (а) вершинам графа  $H_{n-2}$  и соответственных им вершин старшего предграфа  $H_{n-1}' \cong H_{n-2}$ , (б) вершинам изоморфных предграфов  $(H_n')'' \cong (H_n'')'$ .

**Следствие.** С ростом степени многочлена мощность неорграфа  $H_k$  растет как число Фибоначчи:  $|H_k| = \varphi_{k+1}$  и, в частности, асимптотически экспоненциально с основанием  $\approx 1,618$ .

Для вершин орграфов строятся коды, которыми служат целочисленные матрицы вида  $K_{2 \times m} = \begin{pmatrix} k_{11} \dots k_{1m} \\ k_{21} \dots k_{2m} \end{pmatrix}$ , где  $m \leq n = \sum k_{ij}$ ,  $k_{1j} \geq 1$ ,  $0 \leq k_{2j} \leq k_{1j}$ .

Первая строка  $(k_{11} \dots k_{1m})$  составляется из чисел  $\alpha$ -равных между собой корней или комплексно сопряженных пар, упорядоченных по возрастанию градуировочных значений – иными словами, указывается, на скольких  $\alpha$ -вертикалях располагается корневой набор и сколько действительных корней и комплексно сопряженных пар находится на каждой (комплексная пара считается за единицу). Элементы второй строки указывают, сколькие из этих  $\alpha$ -равных между собой элементов соответствуют комплексным парам; сумма второй строки  $\sum k_{2j} = l$  – это число комплексных пар корневого набора.

**Предложение 6.** Размерность сегмента равна сумме

$$m + \sum_j k_{2j} = \sum_j (\text{sign}(k_{1j}) + k_{2j}).$$

Совмещение двух соседних  $\alpha$ -вертикалей в одну (т.е. увеличение  $\alpha$ -кратности за счет совпадения градуировочных значений расположенных на них корней) выражается в *столбцовом сложении*:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \dots k_{1l} & k_{1l+1} \dots k_{1m} \\ k_{21} \dots k_{2l} & k_{2l+1} \dots k_{2m} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_{11} \dots (k_{1l} + k_{1l+1}) \dots k_{1m-1} \\ k_{21} \dots (k_{2l} + k_{2l+1}) \dots k_{2m-1} \end{pmatrix}.$$

Переход комплексно сопряженной пары в кратный действительный корень на той же  $\alpha$ -вертикали, выражается в *строчном сложении*:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \dots k_{1l} \dots k_{1m} \\ k_{21} \dots k_{2l} \dots k_{2m} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_{11} \dots (k_{1l} + 1) \dots k_{1m-1} \\ k_{21} \dots (k_{2l} - 1) \dots k_{2m-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда возникают понятия *суммы кода* как множества всевозможных кодов, получающихся из данного тем или иным сложением, и обратной операции *разложения кода*: составления множества всевозможных кодов, из которых тем или иным сложением получается данный.

Это понятие позволяет дать критерий смежности:

**Теорема 5.** Вершины симплектического орграфа смежны, если код вершины следующей литеры входит в сумму кода вершины предшествующей литеры.

**Следствие.** Сегменты симплектического орграфа размерности  $k$  граничат по  $k-1$ -мерному сегменту, если пересечение сумм их кодов непусто.

Тем самым, симплектический орграф  $G_n$  эффективно представляется системой матричных кодов, а анализ классов кодовых матриц позволяет оценить асимптотический скорость роста его мощности:

**Теорема 6.** При  $n > 3$  мощности орграфов  $G_n$  связаны равенством

$$g_n = 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - 2g_{n-3}.$$

**Теорема 7.** Функция  $g_n$  мощности графа растет асимптотически экспоненциально с основанием  $\alpha \approx 2,481$ .

На конструкции корневого симплекса основывается дальнейшее рассмотрение оптимальных расположений полюсов в их взаимосвязи с минимумами целевых R-градуировок.

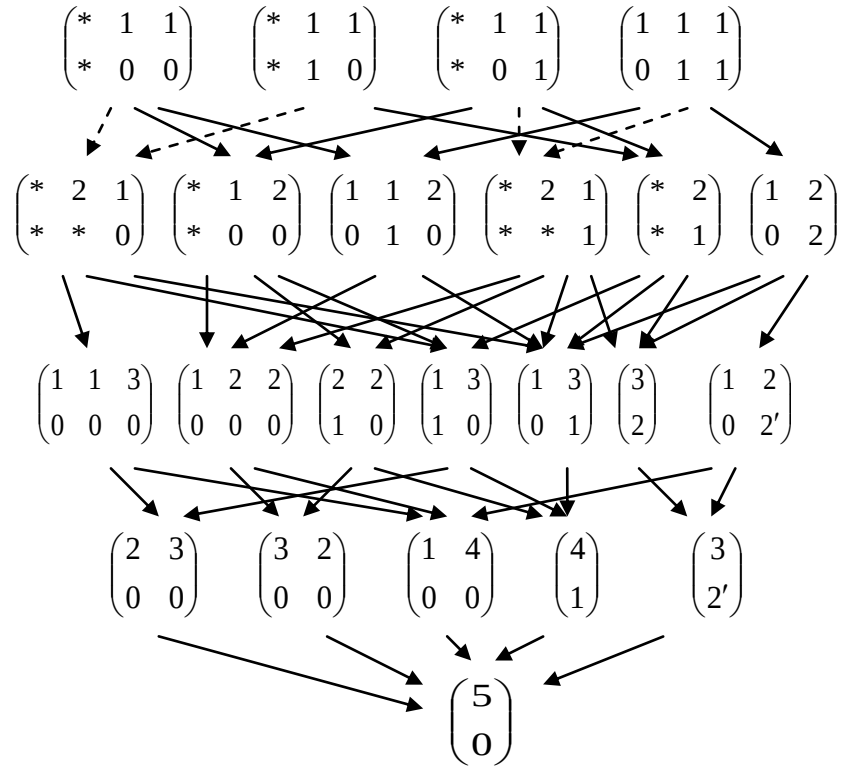
**В 4-й главе** изучается представление симплектических и графовых конструкций в пространстве параметров регулятора, т.е. именно в той ситуации, которая естественно возникает на практике. Это позволяет выявить и охарактеризовать ряд важных особенностей оптимизационного подхода к модальному синтезу. К уже упомянутым на с. 16 свойствам ( $a-d$ ) добавляется многосвязность корневых зон; зато возникает возможность распознавать минимумы и неэкстремальные критические точки по уровню соответствующих им вершин орграфа.

Некоторые выводы делаются на основе численного изучения рельефа целевых функций R-градуировок, в том числе изломов их линий уровня и реализуемости минимумов при стечении нескольких траекторий изломов.

В главе рассматривается вопрос о сокращении (редукции) корневого симплекса, которое достигается за счет трех факторов: (1) число параметров регулятора оказывается строго меньше степени характеристического многочлена; (2) не все возможности взаимного расположения корней реализуются при конкретной зависимости коэффициентов многочлена от параметров; (3) значение целевой функции задается только  $\alpha$ -старшими корнями, благодаря чему корневые зоны с одинаковыми соотношениями между старшими корнями можно объединять.

Для неорграфов  $H_n$  это приводит к следующему результату.

**Теорема 8.** Для многочлена любой степени  $n \geq 4$  целевая функция типа R-градуировки имеет структуру объединенных  $n$ -мерных корневых зон и  $n-1$ -мерных особых многообразий, описывающуюся четырехвершинным графом  $\hat{H}_4$ .



**Рис. 3. Редуцированный оргграф  $\hat{G}_5$** , отражающий структуру корневых зон и критических границ для многочлена степени 5. Звездочками отмечены клетки, элементы которых безразличны для критичности многообразий.

Для оргграфов возникают алгоритмы редукции в соответствии с тремя возможностями сокращения, указанными выше. В результате получается, например, значительно сокращенный по сравнению с 44-вершинным графом  $G_5$  редуцированный оргграф  $\hat{G}_5$  (рис. 3). Помимо сокращений, к нему добавлены две вершины с элементами  $g_{2k}=2'$  (справа внизу), штрих в которых указывает на наличие в корневом наборе кратной комплексной пары. Такие многообразия, не будучи границами в корневом симплексе, никак не выделялись в главе 3; но их большое значение в минимизации целевых функций побуждает включить соответствующие им вершины в оргграф  $\hat{G}_5$ .

Большинство указанных свойств и особенностей продемонстрированы на конкретном примере САУ пониженного порядка. В качестве объекта берется двухмассовая упругая конструкция, идентичная двойному математическому маятнику (рис. 4), которая стабилизируется с помощью ПИД-регулятора. Такой объект представляется естественной и содержательной моделью ряда механических и технических конструкций. Объект состоит из двух тел масс  $m_1$  и  $m_2$ , первое из которых крепится к неподвижному основанию упругой связью жесткости  $k_1$ , соединение со вторым имеет жесткость  $k_2$ ; потери пропорциональны скорости тел с коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ . При двух управляющих воздействиях  $u_1$  и  $u_2$  в операционной форме получается матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 + a_1 s + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + a_2 s + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

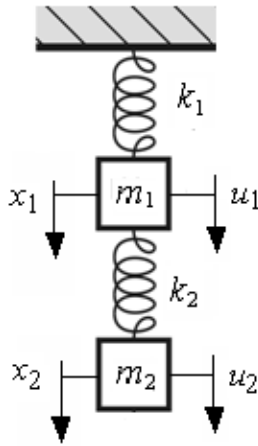
Применение одноканального ПИД-регулятора с передаточной функцией

$(b_0 + b_1 s + b_2 s^2)/s$  в первом звене (т. е. при  $u_2 \equiv 0$ ) приводит к характеристическому многочлену

$$f_5(s) = s^5 + (a_1 + b_2)s^4 + (1 + k_2 + k_2/m_2 + b_1)s^3 + (k_2(a_1 + b_2)/m_2 + b_0)s^2 + k_2(1 + b_1)/m_2 \cdot s + k_2 b_0/m_2.$$

Значения параметров объекта были заданы как  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 0.2$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.3$  и  $k_{1,2} = 1$ . Минимизация проводилась для трех R-градуировок:

- полуплоскостной (гурвицевой)  $F(b) = \max \operatorname{Re} z_k$ ;
- конусовидной  $G(b) = \max(\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|)$ ;
- трапецевидной  $H_l(b) = \max(F(b), G(b) - l)$ .



**Рис. 4. Модель САУ с объектом 4-го порядка**

Фиксированный дифференциальный коэффициент  $b_2$  задает положение центра корней, благодаря чему можно изучать рельеф градуировочных функций в плоскости  $Ob_0b_1$

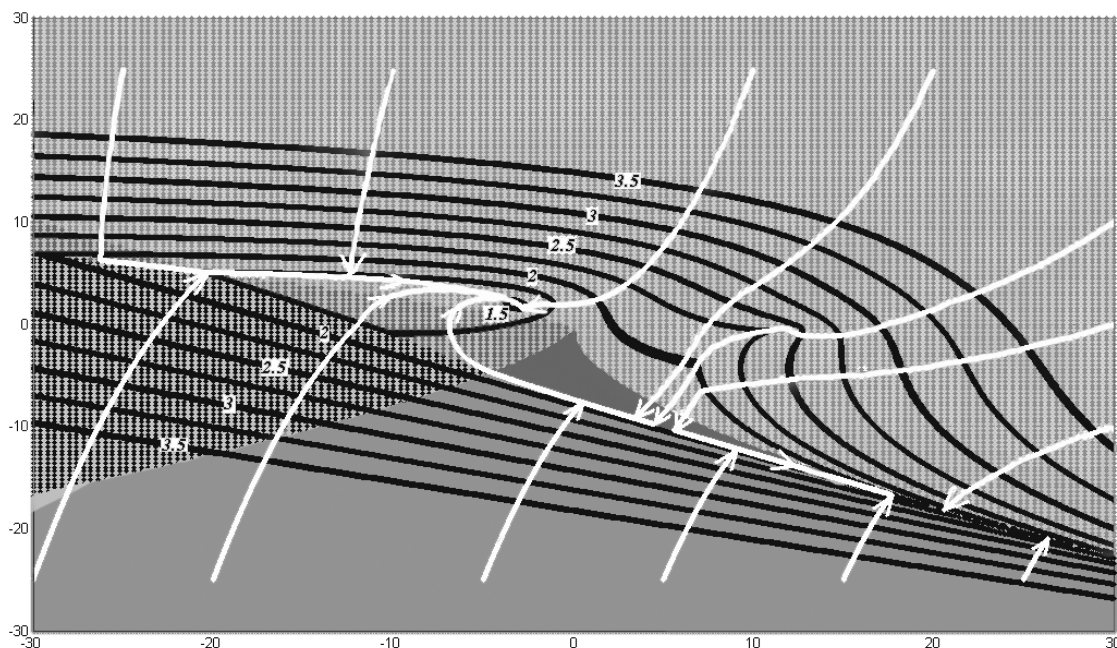
двух других параметров. Для них строятся карты корневых зон и линии уровня целевых функций. Минимизация функции  $G$  методом конечного градиента приводит в один из двух минимумов: локальный или глобальный

Глобальный минимум  $G_0 \approx 1.376$  достигается в точке  $b_0 \approx -2.806$ ,  $b_1 \approx 1.548$  (он окружен замкнутыми полосами уровня в центре рис. 5). Невзирая на положительное значение R-градуировки, действительные части корней отрицательны и система устойчива. Второй, локальный, минимум достигается при  $b_0 \approx 18.486$ ,  $b_1 \approx -17.138$  (справа внизу на рис. 5) и находится в неустойчивой зоне; градиентный спуск из большого сектора плоскости параметров приводит именно в него.

Сложность трехмерной минимизация той же САУ повышается из-за большого количества точек численной стабилизации градиентного спуска — «ложных экстремумов» — на поверхностях, где кратными оказываются самые правые корни, а рельеф целевой функции представляет собой «овраг с тесно сомкнутыми стенками». Распознавание минимумов и точек стабилизации основывается на графовой характеристике точки: экстремумы достигаются на нижних уровнях вершин симплектического орграфа, которые соответствуют одно- или нульмерным множествам в пространстве параметров.

Градуировка  $G(b)$  в пространстве трех параметров имеет три минимума, один из которых, возможно, несобственный, т.е. достигающийся в пределе при

растущем удалении от начала отсчета и на заведомо неустойчивых корнях. Глобальный минимум находится в зоне устойчивости, локальный – нет.



**Рис. 5. Минимизация целевой функции  $G$  для двухмассовой САУ в интегрально-пропорциональной плоскости.** Сплошная тонировка в зонах с одной комплексной парой, крапчатая – с двумя; разный тон отражает их различное взаимное расположение. Полосы уровня для целевой функции  $G$  проведены с шагом 0.25. Траектории градиентного спуска ведут в два экстремума: глобальный (в центре) и локальный (справа внизу).

Методом конечного градиента удастся оптимизировать и линеаризованную модель синхронного генератора (рис. 6) с автоматическим регулированием возбуждения по пропорциональному (П) и пропорционально-дифференциальному (ПД и ПДД<sub>2</sub>) законам. В относительных единицах передаточная функция объекта

оказывается такой:

$$G(s) = \frac{n_{obj}}{d_{obj}} \approx \frac{(2.77s^2 + 169.3)}{(19.32s^3 + 10s^2 + 917.6s + 207.8)(0.3s + 1)}.$$

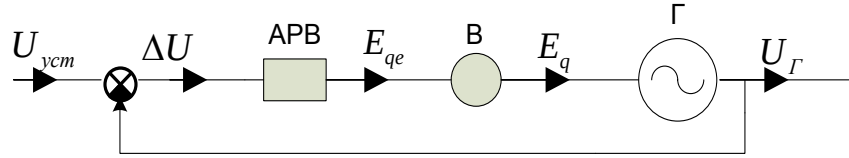
В качестве автоматического регулятора возбуждения берется ПДД<sub>2</sub>-регулятор с передаточной функцией  $n_{contr} = a + bs + cs^2$ , перед которым в цепь включается аperiодическое звено с передаточной функцией  $1/(0.1s + 1)$ . Характеристический многочлен системы имеет вид

$$f(s) = 0.58s^5 + (2.77c + 8.03)s^4 + (2.7b + 50.85)s^3 + (2.77a + 169.3c + 383.3)s^2 + (169.3b + 1000.7)s + 169.3a + 207.8.$$

Чтобы перейти от ПДД<sub>2</sub>-регулятора (АРВ сильного действия) к широко распространенным и имеющим многолетнюю практику применения П- и ПД-регуляторам, достаточно рассмотреть случаи  $b = c = 0$  и  $c = 0$  соответственно.

Глобальный ПД-минимум функции устойчивости достигается в точке,

соответствующей вершине  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2' \end{pmatrix}$  орграфа рис. 3, а в пространстве параметров – нульмерному множеству, задающемуся условием кратности комплексной пары корней:  $F(44.71; 0.451; 0) \approx -0.461$ ; при этом характеристические корни таковы:  $\{-12.00; -0.461 \pm 5.76i\}$ .



**Рис. 6. Функциональная схема САР генератора.** Задание – напряжение уставки  $U_{уст}$  – вычитается из напряжения  $U_{Г}$  на выводах генератора; АРВ преобразует разность  $\Delta U$  в управляющее воздействие – стационарную эдс  $E_{qe}$ , которая преобразуется ею в эдс холостого хода  $E_q$ , воздействующую на ротор и на выходное напряжение  $U_{Г}$ .

Оптимизация П-регулирования, т. е. одномерная минимизация по параметру  $a$  при  $b = c = 0$ , приводит к значению  $F(41.0; 0; 0) \approx -0.451$ , практически совпадающему с результатом ПД-оптимизации. Отсюда делается вывод о *субоптимальности* П-управления в классе ПД-регуляторов.

Глобальный экстремум для ПДД<sub>2</sub>-управления достигается в точке с кратной комплексной парой на одной вертикали с вещественным корнем, рядом с которой находится, например, точка  $F(3.632; -1.726; -1.330) \approx -1.498$  при характеристических корнях  $\{-1.501; -1.499 \pm 5.321i; -1.498 \pm 5.358i\}$ . Очевидно, это соответствует вершине  $(3 \ 2')^T$ , расположенной на один уровень ниже в орграфе рис. 3. Запас устойчивости здесь вдвое больше, чем для ПД-управления.

Наибольшие проблемы для численных алгоритмов создают овраги с тесно сомкнутыми стенками. Принципиальное значение здесь имеют следующие три утверждения.

**Предложение 7.** На многообразиях постоянной кратности  $\alpha$ -старших корней R-градуировка дифференцируема как функция параметров регулятора.

В важном частном случае, когда градуировочное семейство  $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  состоит из выпуклых областей, можно найти значение градуировочной функции на дне ущелья, опираясь на теорему К. Ф. Гаусса о вхождении выпуклой оболочки корней производной данного многочлена в выпуклую оболочку корней самого многочлена (простое доказательство этого утверждения дается в приложении 4).

**Теорема 9.** Если градуировочное семейство состоит из выпуклых областей и  $\alpha$ -старший корень многочлена имеет кратность  $r$ , то градуировки самого многочлена и его производных до  $(r - 1)$ -й совпадают:  $\alpha(f) = \alpha(f') = \dots = \alpha(f^{[r-1]})$ .

**Следствие.** Если  $\alpha$ -старший корень имеет кратность  $r$ , то на задаваемом этим условием многообразии в пространстве параметров регулятора можно пере-

ходить от минимизация недифференцируемой градуировки характеристического многочлена к минимизации гладкой градуировки его  $(r - 1)$ -й производной.

В заключение главы 4 рассматривается другое приложение теоремы Гаусса; снижение размерности задачи с помощью дифференцирования характеристического многочлена позволяет поступенно ограничивать область начальных приближений численной минимизации и тем уменьшить объем вычислений.

Таким образом, численные минимизации градуировок в 4-й главе позволили установить взаимосвязи оптимальных расположений полюсов и соответствующих им многообразий R-градуировок с теми вершинами симплектического орфа, где в правом столбце оказываются наибольшие элементы. Это дает в дальнейшем возможность найти такие расположения.

**Глава 5** посвящена методу нахождения критических многообразий R-градуировок в пространстве параметров, осуществляемому чисто алгебраическими средствами с минимальным привлечением вычислительных процедур.

Метод демонстрируется на примерах с объектами 6-го порядка: трехмассовой упругой конструкции (подобной рис. 4 с дополнительным звеном – т. е. тройному математическому маятнику) и двухзвенном перевернутом маятнике на подвижном основании. Нахождение субоптимальных регуляторов пониженного порядка приемами главы 4 здесь потребовало бы непомерных объемов вычислений.

Прежде всего, строятся строчные коды для критических расположений корней – *критических корневых диаграмм*. Поскольку каждое добавление на границе градуировочной области действительного корня или комплексной пары связывает одну из степеней свободы в пространстве параметров, нахождение нульмерных и одномерных многообразий в нем требует представления всевозможных расположений действительных корней и комплексных пар на границе.

Пусть  $x_1 \pm iy_2 =_\alpha x_3 \pm iy_4 =_\alpha \dots =_\alpha x_{2k-1} \pm iy_{2k}$  –  $\alpha$ -правые характеристические корни, пронумерованные в порядке возрастания мнимых частей  $0 \leq y_2 \leq y_4 \leq \dots \leq y_{2k}$ , среди которых  $r - 1$  различных ненулевых. Сопоставим последней цепочке строку  $(a_1 \ a_2 \dots a_r)$ , где  $a_k$  – натуральные числа, отвечающие количеству равных мнимых частей. Если  $y_2 > 0$  (т. е. среди  $\alpha$ -правых корней нет действительных), то  $a_1 = 0$ ; если же  $y_2 = 0$ , то  $a_1$  – это кратность действительного корня  $x_1$ ;  $a_2$  – это кратность комплексной пары  $x_3 \pm iy_4$  с минимальной ненулевой мнимой частью,  $a_3$  – кратность следующей комплексной пары и т. д.

**Предложение 8.** Критические корневые диаграммы для многочлена, коэффициенты которого зависят от  $l$  свободных параметров, задаются равенствами  $l = a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_r - r$ .

При немногих свободных параметрах типы критических расположений и их полный перечень можно установить непосредственно. Так, для случая трехпа-



раметрического управления (независимо от того, осуществляется ли оно ПИД, ПДД<sub>2</sub> или иным регулятором) возникает восемь диаграмм рис. 7. Полная индукция по числу параметров позволяет установить, сколько их в общем случае.

**Теорема 10.** Число различных корневых диаграмм для критических многообразий R-градуировки многочлена, коэффициенты которого зависят от  $n$  параметров, равняется  $(n + 3)$ -му числу Фибоначчи  $\varphi_{n+3}$ .

**Следствия.** 1) Количество различных критических корневых диаграмм экспоненциально растет как  $\sim 1,618^n / \sqrt{5}$ , где  $n$  – число свободных параметров, входящих в коэффициенты многочлена.

2) Из доказательства теоремы вытекает простой рекуррентный способ построения полного перечня критических корневых диаграмм для любых R-градуировок и любой размерности пространства параметров.

Далее на примерах показывается, как соответствующий каждой критической диаграмме *корневой многочлен* позволяет определить, реализуется ли она в данной системе, а также найти конкретные точки или критические многообразия в пространстве параметров регулятора, в которых достигается именно такое расположение полюсов системы. В одноканальных системах оказывается возможным выразить параметры регулятора через корневые координаты и установить запас гурвицевой устойчивости.

Система АУ с трехмассовым объектом, аналогичным рис. 4 с дополнительным звеном, задается уравнениями в операторной форме

$$\begin{aligned}(m_1 s^2 + \alpha_1 s + k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= u_1; \\ -k_1 x_1 + (m_2 s^2 + \alpha_2 s + k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= u_2; \\ -k_2 x_2 + (m_3 s^2 + \alpha_3 s + k_3)x_3 &= u_3;\end{aligned}$$

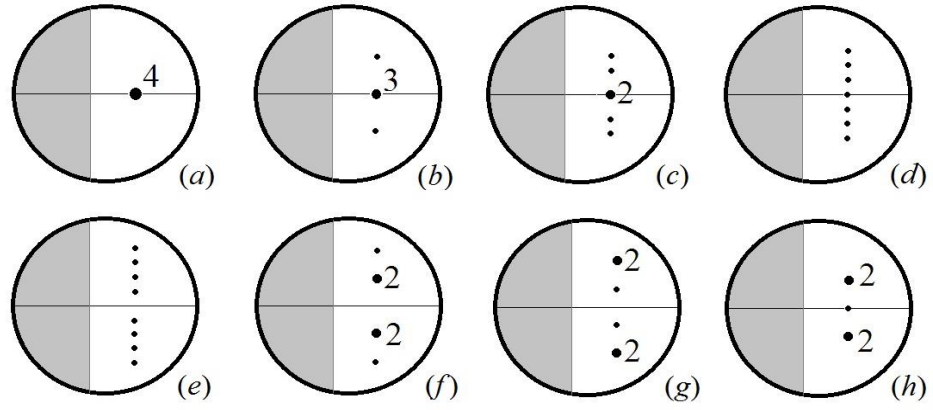
При  $m_i = 1$ ,  $\alpha_i \approx 0$ ,  $k_1 = k_2 = 2$ ,  $k_3 = 4$  и после исключения переменной  $x_3$  правое разложение передаточной матрицы включает ‘числитель’ и ‘знаменатель’

$$N_r(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16}(s^2 + 4) \end{pmatrix}, \quad D_r(s) = \begin{pmatrix} -(s^2 + 4) & (s^2 + 4)/8 \\ 2 & -(s^4 + 10s^2 + 8)/16 \end{pmatrix}.$$

Ограничиваясь структурой ПД-регулятора, уже в случае диагональной матрицы  $X = \text{diag}(d_{11}; c_{22}s + d_{22})$  систему можно стабилизировать.

Гурвицева функция  $F(c_{ij}, d_{ij}) = \max_{1 \leq k \leq 6} \text{Re } z_k$  оказывается двухэкстремальной:

- 1) локальный минимум  $F(5.70, 1.57, 1.53) \approx -0.26$  достигается на корневом наборе  $\{-0.26 \pm 3.08i; -0.26 \pm 1.12i\}$ , где первая пара двухкратна;
- 2) глобальный минимум  $F(-2.68, 5.05, 2.66) \approx -0.55$  достигается на корнях  $\{-2.29; -0.55; -0.55 \pm 1.52i\}$  с также двухкратной комплексной парой.



**Рис. 7. Критические корневые диаграммы для трехпараметрической САУ.** Кратность корня подписывается рядом с изображающей его точкой. Нахождение корней на одной вертикали указывает на их  $\alpha$ -равенство. Расположение прочих корней (кроме  $\alpha$ -правых) условно обозначается серым сегментом слева.

Чтобы увеличить запас устойчивости и упростить матрицу  $C(s)$ , можно задать ‘числитель’ регулятора в более полном виде  $X = \begin{pmatrix} c_{11}s + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & c_{22}s + d_{22} \end{pmatrix}$ .

Положив  $d_{12} = d_{21} = 2$ , получим диагональную матрицу системы

$$C(s) = \begin{pmatrix} s^2 + c_{11}s + d_{11} + 4 & 0 \\ 0 & s^4 + c_{22}s^3 + (d_{22} + 10)s^2 + 4c_{22}s + 4d_{22} + 8 \end{pmatrix},$$

где элемент  $C_{11}(s) = s^2 + c_{11}s + d_{11} + 4$  позволяет достигать любых расположений полюсов по первому каналу управления, а второй элемент

$$C_{22}(s) = s^4 + c_{22}s^3 + (d_{22} + 10)s^2 + 4c_{22}s + 4d_{22} + 8$$

допускает единственный минимум, общий для нескольких видов целевых функций, достигается при  $c_{22} = 4$ ,  $d_{22} = 2$  на кратной паре корней  $-1 \pm \sqrt{3}i$ .

Двухканальный ПИД-регулятор предполагает передаточную функцию

$$X(s) Y^{-1}(s), \text{ где } X(s) = \begin{pmatrix} c_1s^2 + b_1s + a_1 & d_1s \\ d_2s & c_2s^2 + b_2s + a_2 \end{pmatrix}, Y(s) = s \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}.$$

Положим  $Y = sE$ . Значения  $d_{1,2} = 2$  позволяют сделать матрицу системы  $C(s)$  диагональной. Коэффициенты левого верхнего элемента  $C_{11}(s) = 16(s^3 + c_1s^2 + (b_1 + 4)s + a_1)$  могут быть выбраны произвольно, что позволяет добиваться любого расположения полюсов.

Нижний правый элемент требует трехпараметрической минимизации гурвицевой функции  $F(a_2, b_2, c_2) = \max \operatorname{Re} z_{1, \dots, 5}$  многочлена

$$C_{22}(s) = s^5 + c_2s^4 + (b_2 + 10)s^3 + a_2 + 4c_2)s^2 + (4b_2 + 8)s + 4a_2).$$

Поскольку у него не более 5 корней, из восьми возможных корневых

диаграмм рис. 7 остается только три:  $(a, b, h)$ .

Легко установить, что характеристический многочлен  $C_{22}(s)$  не имеет четырехкратных корней, т. е. случай  $(a)$  не реализуется. Система уравнений

$$P(s) = P'(s) = P''(s) = P'''(s) = 0$$

линейна относительно  $a, b$  и  $c$ ; после их исключения возникает уравнение

$$s^8 + 16s^6 + 112s^4 - 128s^2 + 512 = 0.$$

Все его корни комплексны, т. е. исходная система несовместна над полем  $\mathbf{R}$ .

Диаграммы  $(b)$  и  $(h)$  рис. 7 оказываются частными случаями расположения двух комплексных пар и действительного корня на одной вертикали (рис. 8), что выражается двумя равенствами  $x_1 = \operatorname{Re} z_{2,3} = \operatorname{Re} z_{4,5}$ .

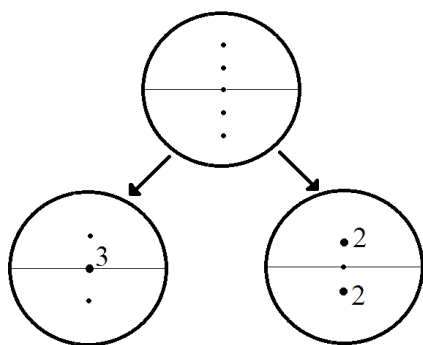
Многообразие типа  $(b)$  задается трехкратным вещественным корнем  $x$  и простой комплексной парой на одной вертикали, пусть  $y > 0$  – ее мнимая часть и  $q = x^2 + y^2$ . Составим *корневой многочлен* с такими корнями:

$$p(s) = (s - x)^3(s^2 - 2xs + q).$$

Приравняв его к многочлену  $C_{22}(s)$ , получим систему из пяти уравнений относительно переменных  $a, b, c, x, q$ :

$$c = -5x; \quad b + 10 = q + 9x^2;$$

$$a + 4c = -7x^3 - 3qx; \quad 4b + 8 = 2x^4 + 3qx^2; \quad 4a = -qx^3.$$



**Рис. 8.** Корневые диаграммы одномерного критического многообразия «пятерки корней» и его нульмерных концов

Отсюда сразу выражаются параметры регулятора  $a, b$  и  $c$ , затем корневой параметр  $q$ . Для переменной  $x$  остается уравнение  $2x^6 + 24x^4 + 112x^2 - 64 = 0$ , вещественные корни которого  $x \approx \pm 0.716$ . Взяв  $x \approx -0.716$ , получим выражение параметров регулятора:

$$q \approx 5.714; \quad a \approx 0.524; \quad b \approx 0.328; \quad c \approx 3.580.$$

Аналогичное рассмотрение для случая  $(h)$  приводит к корневому многочлену  $p(s) = (s - t)(s^2 - 2xs + q)^2$ , алгебраической системе пяти уравнений, из которой  $a, b, c, x$  выражаются через параметр  $q$ .

Для него остается уравнение  $-512 + 240q - 28q^2 + q^3 = 0$  с единственным положительным корнем:  $q \approx 3.178$ . Отсюда получаются значения остальных неизвестных:  $x \approx -0.930, y \approx 1.520, a \approx 2.347, b \approx 3.271, c \approx 4.649$ .

Исследование отрезка, соответствующего верхней диаграмме рис. 8 и задающегося условием  $x_1 = \operatorname{Re} z_{2,3} = \operatorname{Re} z_{4,5}$ , производится с помощью корневого многочлена  $p(s) = (s - x)(s^2 - 2xs + x^2 + y_1^2)(s^2 - 2xs + x^2 + y_2^2)$  и выражения

параметров управления  $a, b, c$  и корневых параметров  $q_k = x^2 + y_k^2$  через вещественную часть  $x$  всей пятерки корней. Это позволяет установить, что минимум  $x \approx -0.930$  на этом многообразии достигается в точке типа  $(h)$ , а точка  $(b)$  не является экстремальной.

Далее рассмотрена задача наиболее эффективного гашения колебаний третьего (нижнего) тела, достигающееся за счет управляющего воздействия, приложенного к верхнему (первому) телу; т. е. в качестве выхода принимается координата  $y = x_3$ , а управляющего воздействия – сила  $u_1$ . Операторное уравнение объекта выглядит так:

$$y = \frac{N_{obj}}{D_{obj}} \cdot u_1 = \frac{8}{s^6 + 14s^4 + 44s^2 + 16} \cdot u_1.$$

Рассматривался регулятор с числителем и знаменателем передаточной функции

$$N_{cont} = b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3; \quad D_{cont} = c_0 + c_1s + c_2s^2 + s^3.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы при этом принял вид

$$\begin{aligned} C(s) = D_{ob}D_{cont} + N_{ob}N_{cont} = & s^9 + c_2s^8 + (14 + c_1)s^7 + (14c_2 + c_0)s^6 + \\ & + (44 + 14c_1)s^5 + (44c_2 + 14c_0)s^4 + (8b_3 + 16 + 44c_1)s^3 + \\ & + (8b_2 + 16c_2 + 44c_0)s^2 + (16c_1 + 8b_1)s + 16c_0 + 8b_0. \end{aligned}$$

Исследование различных корневых диаграмм и приравнивание соответствующих корневых многочленов к характеристическому позволяло выражать параметры регулятора через те или иные корневые параметры. В итоге преимущественно аналитических рассмотрений нескольких возможностей максимальный запас устойчивости  $x_{\min} \approx -0.630$  доставила четырехкратная комплексная пара, расположенная правее девятого действительного корня. Таким образом, У-образный минимум достигается на одномерном дне оврага с Y-образным поперечным сечением, который задается условием четырехкратности комплексных корней. Точка, где девятый корень и четырехкратная пара находятся на одной вертикали, субоптимальна:  $x \approx -0.6285$ . Относительная разница около двухпромилле невелика, однако значительно превышает погрешности вычислений.

Рассмотрение двойного перевернутого маятника на неподвижном основании привело к трем выводам:

1) зоны устойчивости численно труднонаходимы из-за узости их формы, обусловленной сильно выраженным овражным рельефом функции гурвицевой устойчивости и других целевых функций;

2) овражный рельеф проявляет себя и в эффекте «ложных минимумов»: множества точек стабилизации градиентного спуска на дне «узких ущелий», которые могут оказываться далеко от локальных и глобального минимумов;

3) локальные минимумы обнаруживаются вне зоны устойчивости, что при трудности нахождения устойчивых решений может повести к неверному выводу

о недостижимости стабилизации регулятором выбранной структуры.

Модель двухзвенного перевернутого маятника на подвижном основании (рис. 9), линеаризованная вблизи положения равновесия, приводит к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 + \kappa_1 s - g \frac{m_1}{l_1} & g \frac{m_1}{l_1} & 0 \\ g \frac{m_1}{l_1} & m_2 s^2 + \kappa_2 s - g \left( \frac{m_1}{l_1} + \frac{m_1 + m_2}{l_2} \right) & g \frac{m_1 + m_2}{l_2} \\ 0 & g \frac{m_1 + m_2}{l_2} & m_3 s^2 + \kappa_3 s - g \frac{m_1 + m_2}{l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Как удалось показать А. Н. Корюкину (П5), когда коэффициенты потерь пренебрежимо малы:  $\kappa_{1,2,3} \cong 0$ , стабилизировать систему правильным регулятором пониженного порядка не удастся.

Если данные маятника таковы: массы  $m_{1,3} = 1, m_2 = 2$ , длины  $l_{1,2} = 10$ , коэффициенты потерь  $\kappa_{1,2} = 0.1, \kappa_3 = 0.2$ , а постоянная тяготения  $g \approx 10$ , то числитель объекта скаляр:  $N = p_1 p_2 = 3$ , а его знаменатель будет равен  $D(s) = 2s^6 + 0.7s^5 - 11.93s^4 + 2.598s^3 + 11.87s^2 + 1.2s$ .

Будем искать стабилизирующее управление с помощью регулятора с передаточной функцией  $C(s) = \frac{c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{p_1 p_2 (s + x_0)^5}$ .

Положив  $x_0 = 10$ , получим приведенный характеристический многочлен

$$\begin{aligned} f(s) = & s^{11} + 50.35 s^{10} + 1.012 \cdot 10^3 s^9 + 1.005 \cdot 10^4 s^8 + \\ & + 4.748 \cdot 10^4 s^7 + 5.685 \cdot 10^4 s^6 + 0.5[(3c_5 - 5.406 \cdot 10^5)s^5 + (3c_4 - 1.203 \cdot 10^6)s^4 + \\ & + (3c_3 + 3.457 \cdot 10^5)s^3 + (3c_2 + 1.247 \cdot 10^6)s^2 + (3c_1 + 1.2 \cdot 10^5)s + 3c_0]. \end{aligned}$$

Попытка найти корень максимальной кратности – а именно, седьмой, поскольку параметров шесть – приводит к запасу устойчивости  $\chi \approx -0.20427$  и параметрам числителя регулятора, разница между которыми в 6 порядков:

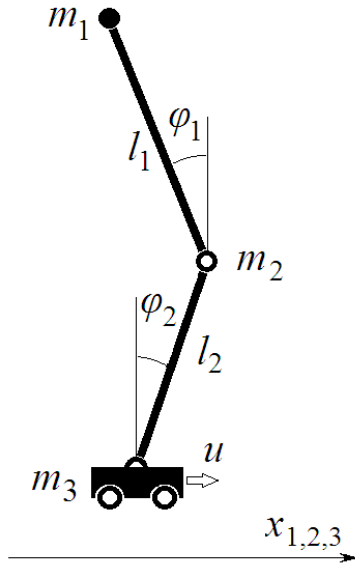
$$\begin{aligned} c_0 & \approx 0.339; c_1 \approx -4.0 \cdot 10^4; c_2 \approx -4.1549 \cdot 10^5; \\ c_3 & \approx -1.138 \cdot 10^5; c_4 \approx 4.082 \cdot 10^5; c_5 \approx 2.020 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Другие корневые диаграммы не приводят к большему запасу устойчивости.

Еще более трудная задача возникает при поиске правильного регулятора с передаточной функцией  $n_4(s)/d_4(s)$ , где  $n_4(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$  и  $d_4(s) = 0.5s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$ ; это задает характеристический многочлен

$$\begin{aligned}
f(s) \approx & s^{10} + (0.35 + 2b_3)s^9 - (5.965 - 2b_2 - 0.7b_3)s^8 - \\
& - (1.299 - 2b_1 - 0.7b_2 + 11.93b_3)s^7 + (5.935 + 2b_0 + 0.7b_1 - 11.93b_2 - 2.598b_3)s^6 + \\
& + (0.6 + 0.7b_0 - 11.93b_1 - 2.598b_2 + 11.87b_3)s^5 + \\
& + (a_4 - 11.93b_0 - 2.598b_1 + 11.87b_2 + 1.2b_3)s^4 + \\
& + (a_3 - 2.598b_0 + 11.87b_1 + 1.2b_2)s^3 + (a_2 + 11.87b_0 + 1.2b_1)s^2 + (a_1 + 1.2b_0)s + a_0.
\end{aligned}$$

Девять свободных параметров позволяют найти десятикратные характери-



**Рис. 9. Двойной перевернутый маятник на тележке**

стические корни. В этом случае  $f(s) = (s - x)^{10}$ , и из приравнивания коэффициентов получается линейная алгебраическая система из 10 уравнений относительно девяти параметров регулятора  $a_{0-4}, b_{0-3}$ . Выражая их, получим  $a_0 = x^{10}$ ,  $a_1 = -18.566 - 17.516x - 164.363x^2 - 25.20x^3$ , и т. д. вплоть до  $b_2 = 3.044 + 1.75x + 22.50x^2$  и  $b_3 = -0.175 - 5x$ .

Кроме того, остается уравнение для самого десятикратного корня  $x$ :

$$\begin{aligned}
& 603.507 + 990.212x + 4203.90x^2 + \\
& + 23376x^3 + 2352x^4 + 8064x^5 = 0.
\end{aligned}$$

Его единственный вещественный корень отрицателен:  $x \approx -0.062$ . При этом параметры регулятора различаются на 14 порядков:

$$\begin{aligned}
& a_0 \approx 8.42 \cdot 10^{-13}; a_1 \approx -18.108; a_2 \approx -179.614; a_3 \approx 30.687; \\
& a_4 \approx 145.063; b_0 \approx 15.090; b_1 \approx 0.412; b_2 \approx 3.022; b_3 \approx 0.135.
\end{aligned}$$

Как и выше, это чисто теоретическая устойчивость, неудовлетворительная с точки зрения робастности, и практически недостижимая численными методами. Допущение комплексных корней и колебательных решений не позволяет увеличить запас устойчивости.

Наконец, в главе указываются способы построения корневых многочленов для других R-градуировок. Например, вместо трапецевидной границы градуировочной области предлагается близкая к ней ветвь гиперболы; тогда координаты корней  $s_k = x_k \pm iy_k$ , расположенных на «правой вертикали» (левой ветви гиперболы), связаны соотношением  $y_k^2 = (x_k - x_C)^2 - \sigma^2$ , а для действительного корня, расположенного в вершине гиперболы, выполняется равенство  $x_0 = x_C - \sigma$ .

Корневой многочлен здесь включает в себя корневые координаты  $x_0, x_1, \dots, x_l$ :

$$p(s) = (s - x_0)(s^2 - 2x_1s + x_1^2 + y_1^2) \cdot \dots \cdot (s^2 - 2x_ls + x_l^2 + y_l^2) = (s - x_0) \cdot \\ \cdot (s^2 - 2x_1s + x_1^2 + (x_1 - x_0 - \sigma)^2 - \sigma^2) \cdot \dots \cdot (s^2 - 2x_ls + x_l^2 + (x_l - x_0 - \sigma)^2 - \sigma^2).$$

Таким образом, благодаря перечню критических корневых диаграмм и применению корневых многочленов удастся найти значения параметров регуляторов с максимальным или субоптимальным запасом устойчивости.

В **6-й главе** рассматривается проблема физической корректности решения с учетом неточного задания параметров объекта и их медленных изменений в процессе эксплуатации. Задача модального синтеза многоканальной САУ ставится без требования неполноты порядка регулятора и решается в максимально общей форме.

Знаменатель системы задается матричным Диофантовым уравнением с полиномиальными элементами:  $D_{com}(s)D_{obj}(s) + N_{com}(s)N_{obj}(s) = D_{sys}(s)$ .

Поскольку при описании многоблочной системы (например, трехблочной с обратной связью типа *вход-выход*) в левой части появляется третье слагаемое, то чтобы не ограничиваться определенным числом слагаемых, рассматривается обобщенное Диофантово уравнение  $A_1X_1 + \dots + A_mX_m = D$ , что после обозначений  $(A_1 \dots A_m) = \tilde{A}$  и  $(X_1^T \dots X_m^T)^T = \tilde{X}$  приходит к виду  $\tilde{A}\tilde{X} = D$ , где порядки матрицы-строки  $\tilde{A}$  и матрицы-столбца  $\tilde{X}$  получаются из соответственных порядков исходных матриц. Это неопределенная система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты и правые части в которой являются многочленами. Теория представлений коммутативных алгебр позволяет указать алгоритм приведения матрицы системы к диагональному виду  $C\tilde{X} = \tilde{D}$ :

$$\begin{cases} c_i x_{ij} = \tilde{d}_{ij}, & i = 1, \dots, p; \\ 0 = \tilde{d}_{ij}, & i = p + 1, \dots, n; \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

здесь  $c_i$  – инвариантные множители матрицы  $\tilde{A}$ , которые определяются однозначно с точностью до числового сомножителя, причем их численность  $p$  совпадает с рангом матрицы.

В процессе приведения комбинируются алгоритмы Гаусса и Эвклида; при его исполнении используются матрицы элементарных преобразований, что позволяет обходиться произведениями матриц без вычисления обратных. Из диагонального вида возникают условия разрешимости системы в самом общем случае:

**Предложение 9.** Чтобы исходное уравнение  $\tilde{A}\tilde{X} = D$  имело непустое решение  $\tilde{X}$  с целыми полиномиальными элементами, необходимо и достаточно выполнение следующих условий для матриц диагональной формы  $C\tilde{X} = \tilde{D}$ :

- (i) строки матрицы  $\tilde{D}$  с  $p+1$ -й по  $n$ -ю сплошь нулевые;
- (ii) для любого строчного номера  $i \leq p$  строка матрицы  $\tilde{D}$  делится нацело на инвариантный множитель  $c_i$  матрицы  $\tilde{A}$ .

Далее строится общее решение Диофантова уравнения как системы линейных алгебраических уравнений.

Затем вводится наиболее важное с практической точки зрения (вслед за устойчивостью) понятие *грубости* решения как непрерывной зависимости частного решения от малых изменений параметров объекта.

Анализ одноканального случая позволяет установить, что непрерывность может нарушаться за счет взаимного уничтожения старших степеней в левой части скалярного Диофантова уравнения  $a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s)$ . Однако при обычных требованиях физической реализуемости, предъявляемых к решению, это невозможно:

**Предложение 10.** Для одноканальной системы АУ правильность решения и выполнение условия шумоподавления обеспечивают грубость системы.

В многоканальном случае устанавливаются достаточные условия грубости для частного решения уравнения  $\tilde{A}\tilde{X} = D$ .

**Предложение 11.** Достаточное условие грубости решения обобщенного Диофантова уравнения  $\tilde{A}\tilde{X} = D$  задается неравенством

$$\sum_{j=1}^n \partial_{c_j} X \leq \deg \det D - n \partial \tilde{A},$$

где  $\partial_{c_j} X$  – столбцовые степени матрицы-решения  $X$ ,  $\partial \tilde{A}$  – степень матрицы.

Далее вводится понятие *арифметического дополнения*  $A_{ij}$  элемента  $d_{ij}$  матрицы  $D_{n \times n}$  с полиномиальными элементами: это число, равное максимальной из степеней тех правильных произведений, сумма которых образует дополнительный минор  $M_{ij}$ .

Арифметические дополнения дают возможность сформулировать необходимые условия грубости решения и придать им форму, позволяющую выделить из алгебраического многообразия общего решения грубое подмножество:

**Предложение 12.** Для грубости решения обобщенного диофантова уравнения  $\tilde{A}\tilde{X} = D$  необходимо выполнения неравенств

$$\deg x_{kj} \leq \deg \det D - \max_i (A_{ij} + \deg a_{ik}).$$

Тем самым, оказывается возможным указать условия корректности задания правой части (матричного знаменателя системы) и выделения в общем решении



подмножества, элементы которого непрерывно зависели бы от параметров объекта и обеспечивали бы работоспособность системы при малых изменениях последних.

В *приложения* включены акты о внедрении, а также перенесена часть результатов, носящих сопутствующий характер, либо известных, но не позволяющих ограничиться удобными ссылками. В частности, это формулы и соотношения, необходимые для обоснования результатов глав 2-4, не являющиеся оригинальными (П1); явная конструкция координатизации корней действительных многочленов 3-й степени (П2); стабилизация с помощью ПИД-регулятора САУ с объектом 3-го порядка, имеющим неустойчивые нули и полюса, с типичными особенностями оптимизационного синтеза: многоэкстремальностью, овражным рельефом и неограниченным субдифференциалом (П3); простое доказательство устойчивости производной устойчивого многочлена, точнее, теоремы К.Ф. Гаусса о том, что корни производной многочлена находятся в выпуклой оболочке корней самого многочлена (П4), доказательство невозможности стабилизации двойного перевернутого маятника на тележке с помощью правильного регулятора пониженного порядка при отсутствии трения, принадлежащее А. Н. Корюкину (П5).

Приложения заключаются актами о внедрении предложенного в диссертации метода в практику научно-исследовательских и промышленных предприятий Новосибирска и справками об использовании настоящей работы в кандидатских диссертациях, дипломных и выпускных работах и учебном процессе.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1) Проведен сравнительный анализ различных подходов (метрического, градуировочного, фокусировочного) к численной оценке расположения полюсов. Концепция R-градуировки включает как частные случаи многие апробированные типы целевых областей; приведены соображения, позволяющие считать градуировочный подход к оптимизации расположений полюсов наиболее эффективным.

2) В качестве теоретического основания для применения R-градуировок — развита конструкция корневого симплекса, представляющая всевозможные конфигурации расположения полюсов в виде сложного скроенного многообразия, включающего сегменты (области и границы) различных размерностей; — предложено два способа описания соответствия областей и границ корневого симплекса с помощью симплектических графов: полное с помощью оргграфа и для сегментов высших размерностей — с помощью неоргграфа; — изучены свойства симплектических графов, установлены скорости их роста; предложена матричная кодировка вершин, позволяющая воссоздать графовую структуру при любой степени многочлена.

3) Рассмотрено разбиение пространства параметров регулятора на корневые зоны и выяснены возможности и алгоритмы сокращения симплектической и графовой структур в соответствии с особенностями задачи; изучена связь графовой структуры и критических областей  $R$ -градуировок, служащая важным ориентиром при поиске их минимумов (в частности, градиентными методами). Общие конструкции продемонстрированы на примере упругой двухмассовой системы (двойного маятника) с ПИД-управлением, оптимальные параметры которого ищутся методом конечного градиента.

4) Найдены оптимальные значения параметров П, ПД и ПДД<sub>2</sub>-регуляторов возбуждения синхронного генератора, представленного линеаризованной моделью в относительных единицах.

5) На примерах систем АУ с объектами 6-го порядка (тройного маятника и двойного перевернутого маятника на тележке) продемонстрирован алгебраический метод нахождения критических многообразий в пространстве параметров, на которых реализуются критические корневые диаграммы и достигаются оптимальные или субоптимальные расположения полюсов. Метод основывается на алгебраических вычислениях и сводит к минимуму потребность в применении численных процедур пошагового или итеративного типа.

Изучена зависимость критических корневых диаграмм (типов взаимных расположений полюсов, при которых может достигаться максимальный запас устойчивости) от числа настраиваемых параметров регулятора; указан рекуррентный способ построения списка критических диаграмм.

6) Для многоканальной многоблочной системы, представленной обобщенным диофантовым уравнением, найдено решение задачи синтеза и определены условия грубости решения по отношению к малой вариации параметров объекта.

7) Наряду с названными получены результаты, представляющие самостоятельную ценность:

- определены достаточные условия выпуклости диффеоморфных образов выпуклых областей;
- предложены способы минимизации недифференцируемой  $R$ -градуировки, задающей овражный рельеф и имеющей неограниченный субдифференциал;
- показано, что при стабилизации двойного перевернутого маятника за счет движения тележки с управлением неполного порядка устойчивость достигается лишь «теоретически», т. е. с неудовлетворительной робастностью.

Таким образом, диссертационная работа содержит обоснование нового алгебраического метода синтеза линейных систем АУ с регуляторами пониженного порядка, привлекающего геометрические и теоретико-графовые средства. Содержательность и состоятельность метода проиллюстрированы на нескольких примерах систем АУ модельного типа и электрическом генераторе.

В целях практического синтеза алгоритмов автоматического регулирования предложенный в диссертации метод принят к внедрению в инженерно-конструкторских и производственных предприятиях г. Новосибирска.

Теоретическое развитие идей диссертации, разработка программных средств и дальнейшие внедрения в конструкторскую и промышленную практику представляют широкое поле для новых исследований.

### **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**в изданиях, входящих в перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук**

1. **Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.** О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия.– 2012.– Т.48.– № 6.– С. 69-83.
2. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Об оптимизации системы характеристических корней при бедном множестве параметров // Науч. вестн. НГТУ.– 2001.– № 1 (10).– С. 171-176.
3. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Координатизация системы корней вещественных многочленов малых степеней // Науч. вестн. НГТУ.– 2005.– №3(21).– С. 177-180.
4. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Координатизация системы корней вещественных многочленов степени 5 // Науч. вестн. НГТУ.– 2006.– №1(22).– С. 176-179.
5. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Орграфы граничных сегментов корневых симплексов вещественных многочленов // Науч. вестн. НГТУ.– 2007.– №1(26).– С. 191-196.
6. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Дифференцируемость целевой функции множества характеристических корней // Науч. вестн. НГТУ. – 2007. – №3(28).– С. 203-205.
7. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Множественность экстремумов при оптимизации системы характеристических корней системы АУ// Науч. вестн. НГТУ. – 2008.– № 2(31).– С. 197-200.
8. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка // Автометрия.– 2009.– Т.45.– № 5.– С. 113-123.
9. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Преодоление недифференцируемости при оптимизационном синтезе систем автоматического управления // Автометрия.– 2010.– Т.46.– № 5.– С. 11-17.
10. **Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В.** Модальный метод синтеза с ис-

пользованием полиномиального разложения: разделение движений для стабилизации трехмассовой системы // Науч. вестн. НГТУ.– 2011.– № 2(43).– С. 39-46.

11. **Чехонадских А.В.** Свойства корневых симплексов многочленов с действительными коэффициентами // Науч. вестн. НГТУ.– 2007.– №1(26).– С. 101-108.

12. **Чехонадских А.В.** О ранге и аннуляторе дифференциала вектора коэффициентов многочлена // Науч. вестн. НГТУ. – 2007. – №3(28).– С. 207-212.

13. **Чехонадских А.В.** О ступенчато-дифференциальной оптимизации корней характеристического многочлена САУ// Науч. вестн. НГТУ. – 2008.– № 4(33).– С. 205-208.

14. **Чехонадских А.В.** Корневые симплексы и симплектические графы действительных многочленов // Науч. вестн. НГТУ.– 2009.– №1(34).– С. 143-163.

15. **Чехонадских А.В.** Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы автоматического управления // Науч. вестн. НГТУ.– 2009.– №1(34).– С. 165-182.

16. **Чехонадских А.В.** Общее решение задачи синтеза многоканальной системы автоматического управления с условием грубости // Науч. вестн. НГТУ.– 2009. – №2(35).— С. 139-148.

17. **Чехонадских А.В.** О корректности постановки оптимизационных задач на множестве характеристических корней // Науч. вестн. НГТУ.– 2009. – №2(35).– С. 139-147.

#### **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**в рецензируемых изданиях, на момент появления не входивших  
в перечень российских научных журналов, рекомендованных ВАК**

18. **Воевода А.А., Пономарев К.Н., Чехонадских А.В.** Об устойчивости производной устойчивого многочлена // Науч. вестн. НГТУ.– 1998.– № 1(4).– С. 185-186.

19. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О метрике и оптимизации на множестве характеристических корней системы автоматического регулирования // Доклады АН ВШ РФ.– 2006.– № 2 (7).– С. 42-52.

20. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Корневые симплексы многочленов с действительными коэффициентами // Доклады АН ВШ РФ.– 2007.– № 1 (8).– С. 69-81.

**ПУБЛИКАЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ ИЗДАНИЯХ,  
в том числе реферируемых в “Mathematical Reviews”:**

21. **Армеев Д.В., Михеев А.В., Чехонадских А.В.** Расчет параметров АРВ синхронного генератора методом модальной оптимизации // Сб. науч. тр. НГТУ.– 2011.– № 2(64).– С. 105-116.

22. **Воевода А.А., Плохотников В.В., Чехонадских А.В.** О совмещенных декартовых координатах в пространстве корней многочленов с действительными коэффициентами // Сб. науч. тр. НГТУ.– 2001.– № 1 (23).– С. 153-156.
23. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О матричных диофантовых уравнениях с полиномиальными элементами // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП–94 : Тр. второй междунауч.-техн. конф. / Новосибирск, 1994.– Т.2.– С. 40-45.
24. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** Общее решение в полиномах матричного Диофантова уравнения // Сб. науч. тр. НГТУ.– 1995.– №1.– С. 59-63.
25. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О грубости решения Диофантова уравнения с полиномиальными элементами // Сб. науч. тр. НГТУ.– 1996.– № 3(5).– С. 9-16.
26. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О повышении степени устойчивого сепарбельного многочлена // Сб. науч. тр. НГТУ.– 1998.– № 2 (11).– С. 74-78.
27. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О корректности оптимизационных задач на множестве характеристических корней // Алгебра и теория моделей 4 / Новосибирск: Изд-во НГТУ.– 2003 г.– С. 30-34.
28. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О дифференцируемости корневого расстояния // Сб. науч. тр. НГТУ – 2005.– №4(42).– С. 174-176.
29. **Воевода А.А., Чехонадских А.В.** О числе минимумов функции устойчивости однопараметрической системы АУ // Сб. науч. тр. НГТУ. – 2008.– №4(54).– С. 25-28.
30. **Долганова Н.С., Ижицкая Е.А., Чехонадских А.В.** Стягивание корней характеристического многочлена системы АУ к заданному центру // Сб. науч. тр. НГТУ.–2007. – №3(49). – С. 17-22.
31. **Долганова Н.С., Ижицкая Е.А., Чехонадских А.В.** О многоэкстремальности оптимизации характеристических корней системы АУ с регулятором пониженного порядка // Сб. науч. трудов НГТУ.– 2008.– № 1(51).– С. 151-158.
32. **Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.** Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка, ч.1 // Сб. науч. тр. НГТУ.– 2011.– № 4(66).– С. 3-22.
33. **Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.** Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка, ч.2 // Сб. науч. тр. НГТУ.– 2012.–№1(67).– С. 37-56.
34. **Чехонадских А.В.** О скорости роста орграфов корневого симплекса многочленов с действительными коэффициентами // Сб. науч. тр. НГТУ.–2007. – № 4(50).– С. 163-168.
35. **Чехонадских А.В.** Графы корневых симплексов вещественных многочленов // Материалы 8-й Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем», 6-9 апр.2009 г. / М., 2009.– С.227-231.

36. **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** General solution in polynomial of matrix Diophantine equation [Общее решение в многочленах матричного Диофантова уравнения] // Proceedings of the 12th International Conference on Systems Sciences. (12-15 September 1995, Wrocław, Poland) / Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.– 1995.– vol.II.– P. 75-80.
37. **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** On Metrics And Optimisation In The Characteristic Roots Set Of An Automatic Control System [О метрике и оптимизации на множестве характеристических корней систем автоматического управления] // Algebra and Model Theory 5 / Novosibirsk: NSTU.– 2005. – P. 265-274.
38. **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** On Jacoby Matrix Rang Of Polynomial Coefficients-Roots Correspondens [О ранге матрицы Якоби соответствия коэффициентов и корней многочлена] // Algebra and Model Theory 5/ Novosibirsk: NSTU.– 2005.– P. 275-280.
39. **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** Codes and adjustment in digraphs of root simplexes of real polynomials [Коды и смежность в орграфах корневых симплексов вещественных многочленов] // Algebra and Model Theory 6 / Novosibirsk: NSTU.– 2007.– P. 7-15.
40. **Chekhonadskih A.V.** Critic root zones and simplex digraph reduction of real polynomials [Критические корневые зоны и редукция симплектических графов вещественных многочленов] // Algebra and Model Theory 7 / Novosibirsk: NSTU.– 2009.– P. 26-43.
41. **Chekhonadskih A.V., Voevoda A.A.** Characteristic root simplexes and optimization of pole location of low-order control system [Симплексы характеристических корней и оптимизация расположения полюсов систем управления пониженного порядка] // Proceedings of DST-RFBR Sponsored Indo-Russian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics, 20-22 September 2010, Surat, India.– P. 173-176.
42. **Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A.** Control system stabilization via root simplex graph illustrated by example of double inverted pendulum [Стабилизация системы управления с помощью симплектического графа на примере двойного перевернутого маятника] // Proceedings RFBR and DST sponsored The 2nd Russian-Indian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics. 10-13 September, 2011 / Novosibirsk: NSTU.– 2011.– P. 31-37.
43. **Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V.** Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system [Экстремальные расположения корней действительных многочленов и стабилизация трехмассовой системы] // Algebra and Model Theory 8 / Novosibirsk: NSTU.– 2011.– P. 19-39.

Отпечатано в типографии Новосибирского  
государственного технического университета  
630073 Новосибирск, пр. К. Маркса 20  
тел./факс (383) 346-08-57  
Формат 60 × 84 / 16 Объем 2,3 п.л. Тираж \_\_\_\_ экз.  
Заказ № \_\_\_\_ Подписано в печать « \_\_\_\_ » \_\_\_\_ 2013 г.